

This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

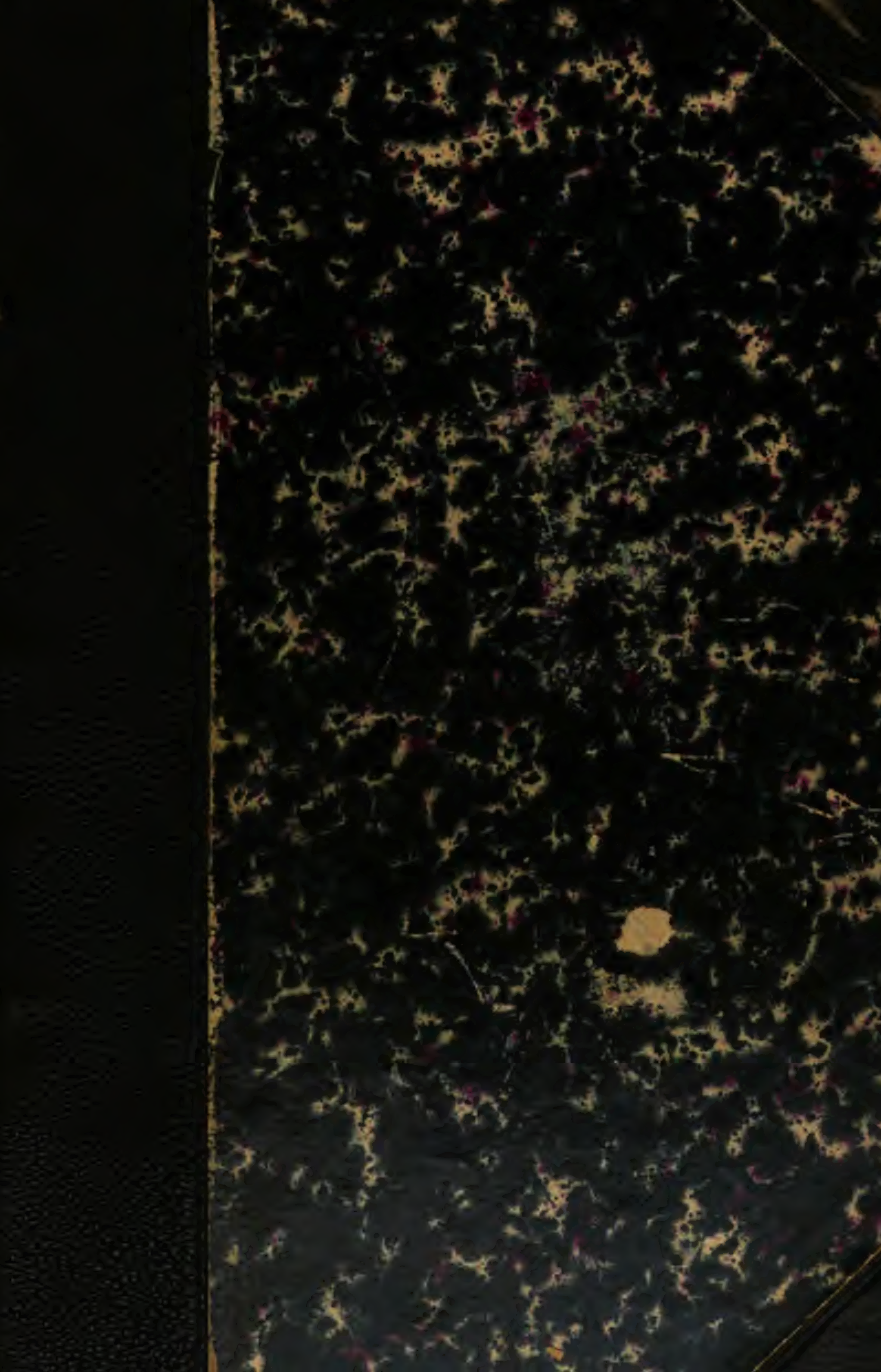
Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter http://books.google.com durchsuchen.



Sci 885.60
*

Bound
NOV 27 1905



Harvard College Library

BOUGHT WITH THE INCOME

FROM THE BEQUEST OF

PROF. JOHN FARRAR, LL.D.

AND HIS WIDOW

ELIZA FARRAR

FOR

"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY"

SCIENCE CENTER LIBRARY

Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

begründet

von

Carl Ohrtmann.

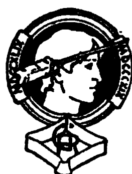
Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung der Herren **Felix Müller** und **Albert Wangerin** sowie der **Berliner Mathematischen Gesellschaft**

herausgegeben

von

Emil Lampe.

Band 33. Jahrgang 1902.



Berlin.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1904.

1168-24

Erklärung der Zitate.

Eine eingeklammerte Zahl vor der (fett gedruckten) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu welcher der Band gehört. Einige periodische Schriften, in denen nur zuweilen eine vereinzelte mathematische Arbeit erschienen ist, sind in dieses Verzeichnis nicht aufgenommen worden; das bezügliche Zitat im Texte ist dann in hinreichender Ausführlichkeit gegeben.

Abh. zur Gesch. der Math.: Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Leipzig: B. G. Teubner. 8°. **12, 13, 14.**

Acc. Peloritana: Atti della R. Accademia Peloritana. Messina. 8°. **16.**

Acta Math.: Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Stockholm. 4°. **25, 26.**

Acta Soc. Fennicae: Acta societatis scientiarum Fennicae. Helsingfors. 4°. **31.**

American Acad. Proc.: Proceedings of the American Academy of arts and sciences. Boston. 8°. **37, 38.**

American J.: American Journal of Mathematics. Edited by Fr. Morley. With the cooperation of S. Newcomb, A. Cohen, Ch. A. Scott etc. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Baltimore. 4°. **24.**

Amer. Math. Monthly: The American Mathematical Monthly. Edited by B. F. Finkel, J. M. Colaw. Kidder Missouri. 8°. **8, 9.**

American M. S. Bull.: Bulletin of the American Mathematical Society. A historical and critical review of mathematical science. Edited by F. N. Cole, A. Ziwet, D. E. Smith, F. Morley. New York. 8°. (2) **8, 9.**

American M. S. Trans.: Transactions of the American Mathematical Society. Edited by E. H. Moore, E. W. Brown, Th. S. Fiske. Lancaster, Pa., and New York: The Macmillan Company. gr. 8°. **2, 3.**

Am. J. of science: The American Journal of Science. Editor: Edward S. Dana. Associate editors: Professors Geo. L. Goodale etc. New Haven, Connecticut. 8°. (4).

Amst. Akad. Verh.: Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. (Eerste Sectie.) 4°. **8.**

Amst. Ak. Versl.: Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Verslag van de gewone Vergaderingen der wis- en natuurkundige Afdeeling 4°. **10, 11.**

Annali di Mat.: Annali di matematica pura ed applicata già diretti da Francesco Brioschi e continuati dai professori L. Bianchi, L. Cremona, U. Dini, G. Jung. Milano. 4°. (3) **7, 8.**

Annals of Math.: Annals of Mathematics. (Founded by Ormond Stone.) Edited by O. Stone, W. E. Byerly, H. S. White, W. F. Osgood, F. S. Woods. Published under the auspices of Harvard University. The Publication Office of Harvard University. 4°. (2) **3, 4.**

Ann. de Chim. et Phys.: Annales de Chimie et de Physique par MM. Berthelot, Mascart, Moissan. Paris: Masson et Cie, éditeurs. 8°. (7) **25, 26, 27.**

Ann. de l'Ec. Norm.: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, publiées etc. par un comité de rédaction composé de MM. les maîtres de conférences de l'École. Paris: Gauthier-Villars. 4°. (3) **19.**

Ann. der Physik: Annalen der Physik. Begründet und fortgeführt durch F. A. C. Gren, L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff, G. und E. Wiedemann. Kuratorium: F. Kohlrausch, M. Planck, G. Quincke, W. C. Röntgen, E. Warburg. Unter Mitwirkung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft und insbesondere von M. Planck herausgegeben von P. Drude. Leipzig: J. A. Barth. gr. 8°. (4) **7, 8, 9.**

Annuaire Longit: Annuaire pour l'an 1902, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris: Gauthier-Villars. 16mo.

Arch. d. Math. u. Phys.: Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten. Gegründet 1841 durch J. A. Grunert. Dritte Reihe. Herausgegeben von E. Lampe, W. Fr. Meyer, E. Jahnke. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. gr. 8°. (3) **2, 3, 4.**

Arch. Néerl.: Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem et rédigées par J. Bosscha, secrétaire. La Haye: Martinus Nijthoff. 8°. (2) **7.**

Arch. sc. phys.: Bibliothèque universelle. Archives des sciences physiques et naturelles. Genève, Bureau des Archives. 8°. (4) **13, 14.**

Assoc. Franç.: Association Française pour l'avancement des sciences. Compte rendu de la 30me session. Congrès d'Ajaccio (1901). Paris au secrétariat de l'association et chez G. Masson et Cie. 8°. (1902.)

Astr. Nachr.: Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher. Unter Mitwirkung des Vorstandes der Astronomischen Gesellschaft herausg. von H. Kreutz. Kiel. 4°. **157, 158, 159.**

Atti Acc. Gioenia: Atti dell' Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania. (4) **15, 16.**

Atti dell' Acc. Pont.: Atti dell' Accademia Pontaniana. Napoli.

Batt. G.: Giornale di matematiche di Battaglini per il progresso degli studi nelle università italiane. Fondato nel 1863. Proseguito dal prof. A. Capelli. Napoli. gr. 8°. **40.**

Belg. Bull. Sciences: Académie Royale de Belgique. Bulletin de la classe des sciences. Bruxelles: Hayez. 8°. 1902.

Belg. Mém.: Mémoires de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles: F. Hayez. In-4°.

Belg. Mém. cour.: Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Collection in-8°. Bruxelles: F. Hayez. **61.**

Berl. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4°.

Berl. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8°. 1902.

Berl. Math. Ges. Ber.: vergl. Sitzungsber. Berl. Math. Ges.

Bibl. Math.: Bibliotheca Mathematica, Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von Gustaf Eneström in Stockholm. Leipzig: B. G. Teubner. gr. 8°. (3) **3**.

Boll. di Mat. Bologna: Il Bollettino di matematiche e di scienze fisiche e naturali, diretto da A. Conti. Bologna.

Bologna Mem.: Memorie della R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 4°. (5) **9**.

Bologna Rend.: Rendiconto delle sessioni dell' Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna. Bologna. 8°. (2) **6** (1901—1902), **7** (1902—1903).

Bordeaux Mém.: Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°.

Bordeaux Procès verbaux: Procès verbaux des séances de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°.

Brit. Ass. Rep.: Report of the meeting of the British Association for the advancement of science. London. gr. 8°. 1901, 1902.

Brux. S. sc.: Annales de la Société scientifique de Bruxelles. Bruxelles: Schepens; Paris: Gauthier-Villars et Fils. (Doppelt paginiert, unterschieden durch A und B; A = 1ère partie, B = 2e partie.) **26**.

Cambr. Proc.: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge. 8°. **11**.

Cambr. Trans.: Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge. 4°. **19**.

Časopis: Časopis; Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigiert mit besonderer Rücksicht auf Studierende der Mittel- und Hochschulen. Herausgegeben vom Verein böhmischer Mathematiker in Prag. Prag. 8°. (Böhmisch.) **31**.

Centralbl. der Bauverw.: Zentralblatt der Bauverwaltung. Herausgegeben im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Berlin: Ernst u. Sohn. 4°.

Charkow Ges.: Sammlung der Mitteilungen und Protokolle der mathematischen Gesellschaft in Charkow. (Russisch.) (2) **7**.

Christiania Arch.: Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Christiania. 8°. **24**.

C. R.: Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris. 4°. **134**, **135**.

Darboux Bull.: Bulletin des sciences mathématiques, rédigé par MM. G. Darboux, E. Picard et J. Tannery avec la collaboration de MM. Bougaïeff etc. Paris: Gauthier-Villars. 8°. (2) **26**.

Deutsche Bauztg.: Deutsche Bauzeitung. Verkündigungsblatt des Vereins deutscher Architekten- und Ingenieurvereine. Redakteure: K. E. O. Fritsch und Alb. Hofmann. Berlin: E. Toeche.

Deutsche Math. Ver.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes von A. Gutzmer. Leipzig: B. G. Teubner. 8°. **11**.

Dublin Proc.: Proceedings of the Royal Irish Academy. Dublin. 8°. (3) **24.**

Dublin Trans.: The Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin. 4°. **32.**

Edinb. M. S. Proc.: Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 8° **20.**

Edinb. R. S. Proc.: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 8°. **24.**

Edinb. Trans.: Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 4°. **40.**

Ed. Times: Mathematical questions and solutions, from the „Educational Times", with many papers and solutions in addition to those published in the „Educational Times". Edited by C. J. Marks. London: Francis Hodgson. 8°. (2) **1, 2.**

Encykl. d. math. Wiss.: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Herausgegeben von H. Burkhardt, Fr. Meyer, F. Klein. Leipzig: B. G. Teubner. gr. 8°.

Ens. math.: L'enseignement mathématique. Revue internationale paraissant tous les deux mois. Directeurs: C.-A. Laisant, H. Fehr. Paris: Gauthier-Villars, Genève: Gery et Cie. 8°. **4.**

Gött. Abh.: Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 4°. 1902.

Gött. Nachr.: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1902. Göttingen. 8°. 1902.

Hamb. Mitt.: Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Leipzig: B. G. Teubner. 8°. **4.**

J. de l'Éc. Pol.: Journal de l'École Polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cet établissement. Paris: Gauthier-Villars. 4°. (2) **7.**

J. für Math.: Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von A. L. Crelle 1826. Herausgegeben von K. Hensel. Berlin: G. Reimer. 4°. **124, 125.**

Johns Hopkins Univ. Circ.: Johns Hopkins University Circulars. Published with the approbation of the Board of Trustees. Baltimore. 4°. **21, 22.**

Journ. de Math.: Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par J. Liouville etc. Publié par C. Jordan avec la collaboration de M. Lévy, A. Mannheim, E. Picard, H. Poincaré. Paris: Gauthier-Villars. 4°. (5) **7, 8.**

Journ. de Phys.: Journal de physique théorique et appliquée. Fondé par J. Ch. d'Almeida et publié par MM. E. Bouty, A. Cornu, G. Lippmann, E. Mascart, A. Potier et B. Brunhes. Paris: Au Bureau du Journal de Physique. 8°. (4) **1.**

Kansas Univ. Quart.: The Kansas University Quarterly. Series A: Science and mathematics. Published by the University. Lawrence, Kansas. 8°. **10.**

Kasan Ges.: Nachrichten der physiko-mathematischen Gesellschaft an der Kaiserlichen Universität zu Kasan. (Russisch.) (2) **12.**

Kjöbenhavn Overs.: Oversigt over det kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger. Kjöbenhavn. 1902.

Königsb. Physik.-ökon. Ges.: Schriften der Physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Königsberg i. Pr. gr. 4°. **41.**

Krakau. Abh.: Denkschriften der Krakauer Akademie der Wissenschaften. Krakau. (Polnisch.) **41, 42.**

Krakau Anz.: Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie. Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. 8°. 1902.

Kriegstechn. Zs.: Kriegstechnische Zeitschrift. Für Offiziere aller Waffen. Zugleich Organ für kriegstechnische Erfindungen und Entdeckungen auf militärischen Gebieten. Verantwortlich geleitet von E. Hartmann. Berlin: Ernst Siegfried Mittler und Sohn. **5.**

Leipz. Abh.: Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Leipzig. 4°. **27.**

Leipz. Ber.: Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Leipzig. 8°. **54.**

Leop. Nova Acta: Nova Acta Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae Germanicae Naturae Curiosorum. Abhandlungen der Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Halle. 4°.

Leopoldina: Leopoldina. Amtliches Organ des Kais. Leopoldino-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Herausgegeben von K. v. Fritsch. Halle a. S. gr. 4°. **36, 37.**

Liége Mém.: Mémoires de la Société Royale des sciences de Liége. Bruxelles: Hayez; Paris: Roret. (3) **4.**

Lisboa Jorn. da Ac.: Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes publicado sob os auspicios da Academia Real das Sciencias de Lisboa. (2) **6.**

Lomb. Ist. Rend.: Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Milano. 8°. (2) **35.**

Lond. M. S. Proc.: Proceedings of the London Mathematical Society. London. 8°. **34.**

Lond. Phil. Trans.: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London. 4°. (A) **198, 199.**

Lond. R. S. Proc.: Proceedings of the Royal Society of London. London. 8°. **69, 70, 71.**

Loria Bo l. bibl.: Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di Gino Loria. Torino: Carlo Clausen. 8°. **5, 6.**

Lunds Medd.: Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium. Lund. **19.**

Marseille Ann.: Annales de la Faculté des Sciences de Marseille. 4°. **11.**

Math. Ann.: Mathematische Annalen. Begründet 1868 durch A. Clebsch und C. Neumann. Unter Mitwirkung der Herren P. Gordan, A. Mayer, C. Neumann, M. Noether, K. Von der Mühll, H. Weber gegenwärtig herausgegeben von F. Klein, W. von Dyck, D. Hilbert. Leipzig: B. G. Teubner. 8°. **55, 56.**

Math. és phys. Lapok: Mathematikai és physikai Lapok. Budapest. 8°. **10, 11.**

Mathesis: Mathesis, Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne publié par P. Mansion et J. Neuberg avec la collaboration de plusieurs professeurs belges et étrangers. Paris: Gauthier-Villars et Fils. Gand: Hoste. 8°. (3) **2.**

Math.-naturw. Mitt.: Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen. Im Auftrag des mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereins in Württemberg herausgegeben von A. Schmidt, A. Haas, E. Wölffing. Stuttgart: J. B. Metzler. 8°. (2) **4.**

Mat. pure ed appl.: Le matematiche pure ed applicate. Periodico mensile di matematiche pure ed applicate, superiori ed elementari, ad uso dell' istruzione media e superiore, diretto dal Prof. G. Alasia. Città di Castello: S. Lapi. 8°. **2**.

Mém. Sav. Étr.: Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. 4°.

Messenger: The Messenger of Mathematics. Edited by J. W. L. Glaisher, London and Cambridge: Macmillan and Co. 8°. (2) **31**, **32**.

Meteorol. Zs.: Meteorologische Zeitschrift. Herausgegeben im Auftrage der österreich. Gesellschaft für Meteorologie und der deutschen Meteorol. Gesellschaft, redigiert von J. Hann und G. Hellmann. Wien: Ed. Hölzel. gr. 8°. **19**.

Mitt. üb. Art. u. Genie: Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens. Herausgegeben vom K. u. K. technischen Militärkomité. Wien: R. v. Waldheim. 8°. **33**.

Modena Mem.: Memorie della Regia Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena. Modena. 4°. (2) **12**.

Monatsh. f. Math.: Monatshefte für Mathematik und Physik. Mit Unterstützung des hohen K. K. Ministeriums für Kultus und Unterricht herausgegeben von G. v. Escherich und L. Gegenbauer in Wien. Wien. 8°. **13**.

Moskau. Math. Samml.: Mathematische Sammlung, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Moskau. (Russisch.) **22**, **23**.

Moskau. Phys. Sect.: Arbeiten der physikalischen Sektion der Kaiserlichen Gesellschaft der Freunde der Naturkunde, Anthropologie und Ethnologie. Moskau. (Russisch.) (Auch unter dem Titel: Nachrichten der Kaiserlichen Gesellschaft etc.) **11**.

Münch. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. Zweite Klasse. München. 4°.

Münch. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. München. 8°. **31**, **32**.

Napoli Atti: Società reale di Napoli. Atti della Reale Accademia delle scienze fisiche e matematiche. Napoli. 4°. (2) **11**.

Napoli Rend.: Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Napoli. 4°. (3) **8**.

Nature: Nature, a weekly illustrated journal of science. London and New York: Macmillan and Co. 4°. **65**, **66**, **67**.

Nieuw Archief: Nieuw Archief voor wiskunde uitgegeven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam onder redactie van J. C. Kluyver, D. J. Korteweg en P. H. Schoute. Amsterdam. 8°. (2) **5**.

Nouv. Ann.: Nouvelles Annales de mathématiques. Journal des candidats aux Écoles spéciales à la licence et à l'agrégation, rédigé par C. A. Laisant et X. Antomari. Paris: Gauthier-Villars. 8°. (4) **2**.

Nova Acta Leop. s. Leop. Nova Acta.

Nuovo Cimento: Il Nuovo Cimento. Giornale fondato da C. Matteucci e R. Piria per la fisica e la chimica. Continuato da R. Felici, A. Battelli, V. Volterra per la fisica esperimentale e matematica. Pisa: Salvioni. gr. 8°. (5) **3**, **4**.

Nyt Tidsskr. for Math.: Nyt Tidsskrift for Mathematik. Redigeret af P. T. Fold erg og C. Juel. (Abteilung A für elementare, B für höhere Mathematik.) Kjöbenhavn. 8°. **13**.

Odessa Ges.: Denkschriften der mathematischen Abteilung der neurussischen Gesellschaft der Naturforscher. **20.** (Russisch.)

Palermo Rend.: Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Palermo. gr. 8⁰. **16.**

Periodico di Mat.: Periodico di matematica per l'insegnamento secondario fondato da D. Besso, continuato da A. Lugli ed attualmente diretto dal Dott. G. Lazzeri. Organo dell' Associazione „Mathesis". Livorno. 8⁰. (2) **4, 5.**

Petersb. Bull.: Bulletin der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. St. Petersburg.

Petersb. Denkschr.: Denkschriften der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. (8).

Phil. Mag.: The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science. Conducted by Lord Kelvin, J. Joly, W. Francis. London. 8⁰. (6) **3, 4.**

Phys.-Math. Wiss.: Die physiko-mathematischen Wissenschaften. Journal der reinen und angewandten Mathematik, Astronomie und Physik, herausgegeben von W. W. Bobynin. Moskau. (Russisch.) (2) **3.**

Pisa Ann.: Annali della Reale Scuola Normale Superiore di Pisa. Scienze fisiche e matematiche. Pisa.

Poske Z.: Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. Unter der besonderen Mitwirkung von E. Mach herausgegeben von F. Poske. Berlin: J. Springer. gr. 8⁰. **15.**

Pr. = Programmabhandlung, *Gymn.* = Gymnasium, *Realgymn.* = Realgymnasium, etc. 1902.

Prace mat.-fiz.: Prace matematyczno-fizyczne. (Mathematische und physikalische Abhandlungen, herausgegeben in Warschau von S. Dickstein, W. Gosiewski, E. u. W. Natanson.) gr. 8⁰. (Polnisch.) **12, 13.**

Prag. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. 8⁰. 1902.

Quart. J.: The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. Edited by J. W. L. Glaisher. London. 8⁰. **33, 34.**

Rev. générale des sc.: Revue générale des sciences pures et appliquées. Dir. Louis Olivier. Paris. **13.**

Revista trim. de Mat.: Revista trimestral de Matemáticas, publicada por D. José Rius y Casas. **1, 2, 3.**

Revue d'Art.: Revue d'Artillerie paraissant le 15 de chaque mois. Paris. 8⁰. **59, 60, 61.**

Revue de Math.: Revue de Mathématiques (Rivista di Matematica), publiée par G. Peano. Turin. 8⁰. **8.**

Revue de Math. spéc.: Revue de Mathématiques spéciales rédigée par MM. R. Humbert et G. Papelier avec la collaboration de MM. etc. Paris: Nony et Cie. Bruxelles: Ramlot. 4⁰. **12, 13.**

Revue des Quest. sc.: Revue des Questions scientifiques, publiée par la Société scientifique de Bruxelles. Louvain: Secrétariat de la Société scientifique. gr. 8⁰. (3) **1, 2.**

Rom. Acc. L. Mem.: Memorie della Reale Accademia dei Lincei. Roma. gr. 4⁰.

Rom. Acc. L. Rend.: Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Roma. 4⁰. (5) **11.** (Je zwei Semester, unterschieden als $\mathbf{11}_1$ und $\mathbf{11}_2$.)

Rom. Acc. P. d. N. L. Atti: Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. Roma. 4°. **55.**

Rom. Acc. P. d. N. L. Mem.: Memorie dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. Roma. 4°. **19.**

Rozpravy: Rozpravy české Akademie císaře Frantiska Josefa pro vědy, slovesnost a umění (II. Cl.). Prag. (Böhmisch.) (Dazu: *Bulletin international.* Résumés des travaux présentés. Classe des sciences mathématiques et naturelles. — Académie des Sciences de l'Empereur François Joseph I.) **11.**

Schweiz. Bauztg.: Revue polytechnique. Schweizerische Bauzeitung. Wochenschrift für Bau-, Verkehr- und Maschinentechnik. Organ des Schweiz. Ingenieur- und Architekten-Vereins und der Gesellschaft ehemaliger Studierender des Eidgen. Polytechnikums in Zürich. Herausgegeben von A. Waldner. Zürich.

S. M. F. Bull.: Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires. Paris. 8°. **30.**

Sitzungsber. Berl. Math. Ges.: Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft. (Im Arch. d. Math. u. Phys.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. 8°. **1, 2.**

Soc. Philom. Bull.: Bulletin de la Société Philomathique de Paris. Paris. (9) **4.**

Spaczinski's Bote: Spaczinski's Bote der Experimentalphysik und elementaren Mathematik, früher herausgegeben von Spaczinski, jetzt von Gernet und Zimmermann in Odessa. 24 Nummern jährlich. Die Nummern laufen vom Anfange des Journals an. (Russisch.) 1902.

Stockh. Akad. Bihang: Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Stockholm. 8°. **28.**

Stockh. Astr. Jaktt.: Astronomiska Jakttagelser och Undersökningar anställda på Stockholms Observatorium. Stockholm. 4°. **7.**

Stockh. Öfv.: Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Stockholm. **58, 59.**

Suppl. al Period.: Supplemento al Periodico di Matematica diretto dal Dott. G. Lazzeri. Livorno: R. Giusti. 8°. **5, 6.**

Teixeira J.: Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira. Coimbra. 8°. **15.**

Tokio Math. Ges.: Tokyo sugaku butsurigaku kwai kiji (Zeitschrift der Physiko-Mathematischen Gesellschaft in Tokio. Englisch und Japanisch.) Tokio. 8°. **9.**

Torino Atti: Atti della Reale Accademia di Torino. Torino. 8°. **37.**

Torino Mem.: Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino. Torino. 4°. (2) **51, 52.**

Toulouse Ann.: Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, publiées par un comité de rédaction composé des professeurs de mathématiques, de physique et de chimie de la Faculté etc. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 4°. (2) **3, 4.**

Toulouse Bull.: Bulletin de l'Académie des sciences, inscriptions et belles lettres de Toulouse. Toulouse: Douladoure-Privat. 8°.

Toulouse Mém.: Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles lettres de Toulouse. Toulouse: Douladoure-Privat. 8°. (10) **2.**

Ungar. Ber.: Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ung. Akademie der Wissensch. und der Königl. Ung. naturwissenschaftlichen Gesellschaft herausgegeben von Baron R. Eötvös etc. Redig. v. I. Fröhlich. Budapest. 8°. **18.**

Unterrichtsbl. f. Math.: Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. Herausgegeben von Fr. Pietzker. Berlin: O. Salle. 4°. **8**.

Upsala Nova Acta: Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis.

Ven. Ist. Atti: Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 8°. **61** [(8) **4**].

Ven. Ist. Mem.: Memorie del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 4°.

Verh. Deutsche Phys. Ges.: Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Jahre 1902. Im Auftrage der Gesellschaft herausgegeben von K. Scheel. Leipzig: J. A. Barth. 8°. **4**.

Verh. Naturf. Ges. Karlsbad: Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte zu Hamburg 1901. Herausgegeben von A. Wangerin. Leipzig: F. C. W. Vogel. (1902.)

Věstník: Věstník České Akademie (Bericht der kaiserlich böhmischen Akademie). (Böhmisch.) 8°. **11**.

Vierteljahrsschr. Astr. Ges.: Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von den Schriftführern der Gesellschaft R. Lehmann-Filhés und G. Müller. Leipzig: W. Engelmann. 8°. **37**.

Warschau Phys. Sect.: Arbeiten der Warschauer Gesellschaft der Naturforscher; Verhandlungen der Sektion für Physik und Chemie. Jährlich ein Band.

Warschau. Univ. Nachr.: Nachrichten der Warschauer Universität. Warschau. (Russisch.) **2**, **3**, **4**.

Washington Bull.: Bulletin of the Philosophical Society of Washington. Washington, D. C. Judd and Dettweiler, Printers.

Wiad. Mat.: Wiadomosci Matematyczne. Redactor i Wydawca S. Dickstein. Warszawa. (Polnisch.) 8°. **6**.

Wien. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Zweite Abteilung. Wien. 8°. **111**.

Wundt Phil. Studien: Philosophische Studien. Herausgegeben von Wilhelm Wundt. Leipzig: Wilhelm Engelmann. 8°. **18**, **19**, **20**.

Zeitschr. deutscher Ing.: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, herausgegeben von Th. Peters. Berlin: J. Springer. 4°.

Zeitschr. f. Bauwesen: Zeitschrift für Bauwesen, herausgegeben im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Redakteure: O. Sarrazin und O. Hoßfeld. Berlin: Ernst u. Sohn. 4°.

Zs. f. Math. u. Phys.: Zeitschrift für Mathematik und Physik. Begründet 1856 durch O. Schlömilch. Organ für angewandte Mathematik. Gegenwärtig unter Mitwirkung von C. von Bach usw. herausgegeben von R. Mehmke und C. Runge. Leipzig: B. G. Teubner. 8°. **47**, **48**.

Zs. f. Vermessw.: Zeitschrift für Vermessungswesen. Organ des deutschen Geometervereins. Herausgegeben von Reinhertz und C. Steppes. Stuttgart: Konrad Wittwer. 8°. **31**.

Zs. f. math. u. naturw. Unterr.: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Begründet 1869 und bis 1901 herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Gegenwärtig herausgegeben unter Mitwirkung der Herren usw. von H. Schotten. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. 8°. **33**.

Zürich. Naturf. Ges.: Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Herausgegeben unter Mitwirkung etc. von F. Rudio. Zürich. 8°. **47**.

Inhaltsverzeichnis.

(Die mit einem † versehenen Arbeiten sind ohne Referate.)

Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

Kapitel 1. Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

B. Geschichte einzelner Disziplinen.

Kapitel 2. Philosophie und Pädagogik.

A. Philosophie.

Seite

B. Pädagogik.

Zweiter Abschnitt. Algebra.

Kapitel 1. Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transzendente Gleichungen.)

Kapitel 2. Theorie der Formen (Invariantentheorie).

Kapitel 3. Substitutionen und Gruppentheorie, Determinanten, Elimination und symmetrische Funktionen.

A. Substitutionen und Gruppentheorie.

B. Determinanten.

C. Elimination und symmetrische Funktionen.

Dritter Abschnitt. Niedere und höhere Arithmetik.

Kapitel 1. Niedere Arithmetik.

Kapitel 2. Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

B. Theorie der Formen.

Kapitel 3 Kettenbrüche.

Vierter Abschnitt. Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Kapitel 1. Allgemeines.

Kapitel 2. Besondere Reihen.

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Kapitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.).

Kapitel 2. Differentialrechnung (Differentiale, Funktionen von Differentialen. Maxima und Minima).

Kapitel 3. Integralrechnung.

Kapitel 4. Bestimmte Integrale.

Kapitel 5. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Kapitel 6. Partielle Differentialgleichungen.

Kapitel 7. Variationsrechnung.

Siebenter Abschnitt. Funktionentheorie.

Kapitel 1. Allgemeines.

Kapitel 2. Besondere Funktionen.

A. Elementare Funktionen (einschließlich der Gammafunktion und der hypergeometrischen Reihe).

B. Elliptische Funktionen.

C. Hyperelliptische, Abelsche und verwandte Funktionen.

D. Kugelfunktionen und verwandte Funktionen.

Achter Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Kapitel 1. Prinzipien der Geometrie.

Kapitel 2. Kontinuitätsbetrachtungen (Analysis situs, Topologie).

Kapitel 3. Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

Kapitel 4. Darstellende Geometrie.

Kapitel 5. Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

B. Besondere ebene Gebilde.

C. Besondere räumliche Gebilde.

D. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

E. Abzählende Geometrie.

Seite

Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

Kapitel 1. Lehrbücher, Koordinaten.

Kapitel 2. Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Kurven.

B. Theorie der algebraischen Kurven.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

D. Andere spezielle Kurven.

Kapitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumkurven.

E. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

Kapitel 4. Liniengeometrie (Komplexe, Strahlensysteme).

Kapitel 5. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen und Abbildungen.

B. Konforme Abbildung und dergleichen.

Zehnter Abschnitt. Mechanik.

Kapitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.).

Kapitel 2. Kinematik.

Kapitel 3. Statik.

A. Statik fester Körper.

B. Hydrostatik.

Seite

Kapitel 4. Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

B. Hydrodynamik.

Kapitel 5. Potentialtheorie.

Elfter Abschnitt. Mathematische Physik.

Kapitel 1. Molekularphysik, Elastizität und Kapillarität.

A. Molekularphysik und Allgemeines.

B. Elastizitätstheorie.

C. Kapillarität.

Kapitel 2. Akustik und Optik.

A. Akustik.

B. Theoretische Optik.

C. Geometrische Optik.

Kapitel 3. Elektrizität und Magnetismus.

Kapitel 4. Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

B. Gastheorie.

Seite

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

Zwölfter Abschnitt. Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Kapitel 1. Geodäsie.

Kapitel 2. Astronomie.

Kapitel 3. Mathematische Geographie und Meteorologie.

Anhang.

Verzeichnis
der Herren, die für den dreiunddreißigsten Band Referate geliefert haben.

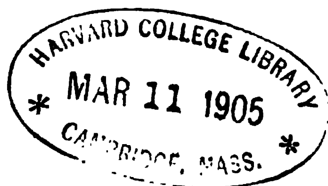
(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt der Referate tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen den Übersetzer der in nicht deutscher Sprache eingesandten Referate.)

Bdn.	Herr	Dr. Brodén, Lund.
Bö.	„	Prof. Börsch, Potsdam.
Br.	„	Reg.-Rat Dr. Brix, Steglitz.
D.	„	Dr. Dehn, Münster i. W.
Dn.	„	Dickstein, Warschau.
Dz.	„	Prof. Dziobek, Charlottenburg.
E.	„	Prof. Eneström, Stockholm.
El.	„	Prof. Engel, Greifswald.
F.	„	Dr. Faerber, Berlin.
Fr.	„	Dr. Fricke, Berlin.
Fr.(Lp.)	„	Prof. Fehr, Genf.
Gbg.	„	Dr. Guldberg, Christiania.
Gbs.	„	Prof. Gibson, Glasgow.
Ghr.	„	Prof. Goldhammer, Kasan.
Gln.	„	Reg.-Rat Dr. Gleichen, Berlin.
Gt.	„	Dr. Güntsche, Berlin.
Gz.	„	Prof. Gutzmer, Jena.
Hae.	„	Prof. Haentzschel, Berlin.
Hau.	„	Prof. Haussner, Karlsruhe.
Hk.	„	Prof. Hauck, Berlin.
Hmg.	„	Dr. Holmgren, Upsala.
Hsb.	„	Prof. Hessenberg, Grunewald.
Jhk.	„	Prof. Jahnke, Berlin.
Jk.	„	Prof. Joukowsky, Moskau.
Js.	„	Prof. Jolles, Halensee.
Kl.	„	Prof. Kluyver, Leiden.
Kr.	„	Prof. Krazer, Karlsruhe.
La.	„	Prof. Loria, Genua.
Lnd.	„	Dr. Landau, Berlin.
Lp.	„	Prof. Lampe, Berlin.
Lsg.	„	Prof. Landsberg, Breslau.
Lwt.	„	Oberl. Lewent, Berlin.

Ly.	Herr	Prof. Loewy, Freiburg i. B.
M.	„	Prof. F. Müller, Friedenau.
Mi.	„	Schulrat Dr. Michaelis, Berlin.
Mn.	„	Prof. Mansion, Gent.
My.	„	Prof. F. Meyer, Königsberg i. Pr.
Nn.	„	Dr. Norén, Lund.
Ot.	„	Dr. Oster, Mannheim.
R. M.	„	Prof. R. Müller, Berlin.
Rns.	„	Oberl. Riens, Berlin.
Rr.	„	Dr. Ing. Reissner, Berlin.
Rtt.	„	Obering. Rotth, Berlin.
S.	„	Dipl. Ing. Sandor, Charlottenburg.
Schg.	„	Prof. Schlegel, Hagen.
Sda.	„	Prof. Sucharda, Brünn.
Sfs.	„	Prof. Schoenflies, Königsberg i. Pr.
Sh.	„	Dr. Schafheitlin, Berlin.
Si.	„	Prof. Sintzow, Charkow.
Sk.	„	Dr. Salkowski, Berlin.
Sr.	„	Prof. Sommer, Danzig.
St.	„	Prof. Stäckel, Kiel.
Stz.	„	Prof. Steinitz, Berlin.
Tn.	„	Prof. Treutlein, Karlsruhe.
Tx.	„	Prof. Teixeira, Porto.
V.	„	Dr. Valentiner, Kopenhagen.
Vi.	„	Prof. Vivanti, Messina
Wbg.	„	Dr. Wallenberg, Charlottenburg.
Wn.	„	Prof. Wangerin, Halle a. S.
Wö.	„	Prof. Wölffing, Stuttgart.
Wz.	„	Prof. Weltzien, Zehlendorf.
Z.	„	Dr. Zühlke, Charlottenburg.
Zch.	„	Dr. Zacharias, Berlin.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittlung der Verlagsbuchhandlung oder unter der Adresse:

Professor Dr. Lampe, Berlin W. 15, Fasanenstraße 82.



Das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.

Rückblick und Ausblick.*)

Von **Emil Lampe.**

Wenn ich den angekündigten Vortrag über das von mir geleitete Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik jetzt zu halten beginne, so muß ich mich zuerst entschuldigen, daß ich damit in einer scheinbar persönlichen Angelegenheit das Wort nehme. Das Jahrbuch bespricht aber alle Erscheinungen der mathematischen Literatur jedes einzelnen Jahres; daher ist es für die Geschichte der Mathematik, die ja ein Teil der unserer Sektion zugehörigen Geschichte der exakten Wissenschaften ist, dasjenige Werk, welches kommenden Geschlechtern das Material in bequemer Zusammenstellung möglichst vollständig überliefert; es ist eine fortlaufende Chronik aller Geschehnisse auf dem Gebiete der Mathematik. Somit darf wohl das von mir gewählte Thema als berechtigt angesehen werden.

Vor wenigen Jahren gab die Royal Society in London die Anregung zur Gründung des „Scientific Catalogue", damit die Literatur der exakten Wissenschaften, die bei den verschiedenen Nationen des ganzen Erdballs einen für den einzelnen Forscher nicht mehr übersehbaren Umfang angenommen hat, durch die gemeinschaftliche Mitarbeit aller zivilisierten Völker in sachlich geordneter Form den beteiligten Gelehrten zur Kenntnis gebracht werden kann. Ähnliche Erwägungen haben in früherer Zeit für einzelne Zweige der Wissenschaft zu Sammelwerken mit umfassenderen Inhaltsangaben geführt. Wir erwähnen hier nur die „Fortschritte der Physik", herausgegeben von der Physikalischen Gesellschaft in Berlin. Aus Vorträgen über die neuesten Veröffentlichungen hervorgegangen, stellt dieses Werk seit 1845 für die einzelnen Jahre nicht bloß die Titel der Schriften, nach Kapiteln geordnet, sachlich zusammen, sondern gibt knappe, objektiv gehaltene Inhaltsangaben, damit jeder Leser beurteilen kann, ob für bestimmte Forschungen die Einsichtnahme der Originalarbeiten erforderlich ist.

*) Vortrag, gehalten in der Sektion VIII des internationalen Kongresses der historischen Wissenschaften zu Rom am 4. April 1903. Abgedruckt aus den Atti del congresso internazionale di scienze storiche. Vol. XII, S. 97-104.

Da der Nutzen eines solchen die erste Orientierung ermöglichenden und erleichternden Werkes von den Physikern allseitig anerkannt wurde, so regte Carl Ohrtmann zu Berlin im Jahre 1868 die Gründung eines ähnlichen Organs für die Mathematik an. Während aber die „Fortschritte der Physik" von einer wissenschaftlichen Gesellschaft gestützt waren, in der die Professoren der Universität und Mitglieder der Akademie vertreten waren, und daher durch zahlreiche Personen für die ruhige und sichere Fortführung des Unternehmens gesorgt wurde, waren die Gründer des „Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik" Privatleute, die ohne Rückendeckung seitens einer gelehrten Gesellschaft aus eigenem Antriebe und auf eigene Gefahr hin vorgingen. Die Herren Ohrtmann und Felix Müller waren befreundete Oberlehrer der damaligen Königlichen Realschule, die jetzt Kaiser-Wilhelms-Realgymnasium heißt. Sie verstanden es, den Inhaber der Verlagsbuchhandlung Georg Reimer zu bewegen, daß er neben den „Fortschritten der Physik" das neue, die Mathematik betreffende Werk in ganz entsprechender Ausstattung herauszugeben unternahm. Die damals leitenden Mathematiker spendeten dem Plane der neuen Schöpfung ihren Beifall, und Freunde aus dem Kreise gleichaltriger Mathematiker erklärten ihre Bereitwilligkeit zur Mitarbeit. Nun wurde die Organisation frisch in Angriff genommen.

Viele Mühe veranlaßte die Einteilung des Stoffes. Bekanntlich gibt es keine erschöpfende Systematik der mathematischen Disziplinen, und obwohl manche Gruppen von größerem Umfange leicht abgegrenzt werden können, so ist es doch ungemein schwierig, alle mathematischen Gegenstände nach einem einheitlichen Schema unzweideutig zu verteilen. Gar zu leicht gerät man in den Fehler einer Spaltung in zu viele Abteilungen mit allzu fein ausgeklügelten Einteilungsgründen. Bei den vielen Sitzungen, in denen der Plan des Ganzen festgestellt wurde, hielt man besonders an dem Gesichtspunkte fest, daß vor allem eine möglichst rasche Orientierung zu erstreben sei, daß daher die leichte Übersicht das Haupterfordernis sein müsse. Die aus diesen Beratungen hervorgegangene Einteilung hat sich als recht praktisch in der Folgezeit bewährt, und trotz mancher Mängel, die ihr anhaften, sind ihre Grundzüge bis auf den heutigen Tag beibehalten worden. Als ich vor 18 Jahren mit meinem Freunde Henoch die Redaktion übernahm, waren wir darin einig, daß wir nur dringende Mißstände behutsam abstellen durften. Wer einmal gewohnt ist, gewisse Gegenstände in einem bestimmten Kapitel zu suchen, würde es unangenehm empfinden, wenn dieselben Dinge plötzlich anderswo stehen. Durch zu starre Beobachtung dieses konservativen Prinzips können allerdings schlechte Einrichtungen lange fortgeschleppt werden, und ein vorsichtiger Leiter muß ein wachsames Auge auf alle neuen Erscheinungen haben, ein offenes Ohr für alle berechtigten Klagen; er wird verständigen Vorstellungen bereitwillig nachgeben. Die Spuren solcher Änderungen können durch Vergleichung späterer Bände mit früheren leicht verfolgt werden. Im ganzen ist aber zur allgemeinen Befriedigung bis jetzt noch immer der ursprüngliche Plan festgehalten worden.

Eine andere schwierige Frage ist die Abgrenzung der aufzunehmenden Artikel. Sollen nur solche Arbeiten besprochen werden, die dem Titel des Jahrbuches gemäß einen wirklichen Fortschritt in der Wissenschaft herbeiführen, so müßte eine meistens sehr strittige Auswahl getroffen werden, die doch nur die Anschauungen des Leiters des Jahrbuchs widerspiegeln würde. Mit Verzicht auf diesen Gedanken scheint es daher das Ideal zu sein, daß die gesamte mathematische Literatur der Erde für jedes Jahr gesammelt wird; ein sehr schöner Gedanke, aber auch nur ein schöner Traum. Was gehört denn alles zur mathematischen Literatur? Wir haben Übergänge von den Erzeugnissen tiefster mathematischer Forschungen bis zu den populären Darstellungen in plattester Form für Volksschulen und Handwerkerbildungsanstalten, ja zur geselligen Unterhaltung; Rechenbücher und geometrische Leitfäden für den Bedarf des bürgerlichen Lebens, wo von wissenschaftlicher Behandlung keine Rede ist. Diese letzteren Erzeugnisse der Buchdruckerkunst mußten ausgeschlossen bleiben. Selbst viele Lehrbücher für Gymnasien und verwandte Schulen können kaum mehr beanspruchen, als mit ihrem Titel eingestellt zu werden, es sei denn, daß sie sich durch Besonderheiten auszeichnen, deren Kenntnis allgemein interessiert. Ähnlich verhält es sich mit den mathematischen Aufsätzen, die in Zeitschriften erscheinen, welche dem Unterricht gewidmet sind. Obgleich das Jahrbuch in der angedeuteten Richtung großer Zurückhaltung sich befleißigt hat, soll doch zugegeben werden, daß die wünschenswerte Linie nicht immer innegehalten ist; es ist eben zu schwer, eine Sichtung nach strengen Grundsätzen stets durchzuführen. Und doch ist dies nötig. Das stetige Anschwellen der mathematischen Produktion bewirkt ein fortdauerndes Wachstum des Jahrbuchs und damit eine fortschreitende Verteuerung der sich folgenden Bände. Dadurch werden manche Abonnenten bewogen, die Anschaffung aufzugeben; somit ist die Einschränkung des Umfanges eine Lebensfrage für das Jahrbuch.

Aber noch nach einer anderen Seite hin ist die Absteckung der Grenze für den zu berücksichtigenden Stoff mit Schwierigkeiten verbunden. Mit der Mathematik stehen in enger Berührung die Geschichte, die Philosophie und die Pädagogik dieser Wissenschaft, sind ferner an vielen Stellen untrennbar verbunden die Physik, die Astronomie und Geodäsie, die technischen Wissenschaften. Besonders bei den Anwendungen der Mathematik auf die letztgenannte Gruppe von Wissenschaften ist es oft schwer, eine richtige Grenze zu finden, bis zu der eine Berücksichtigung der Literatur erforderlich ist. Nach den Grundsätzen, welche im Jahrbuche maßgebend gewesen sind, werden nur solche Arbeiten aus der „angewandten Mathematik" besprochen, welche entweder theoretisch wichtige Prinzipien erörtern, oder eine mathematische Behandlung nach theoretischen Gesichtspunkten enthalten. Das subjektive Ermessen des Auswählenden kann hierbei manchmal zu enge Grenzen stecken, manchmal zu weite. Da der mathematischen Behandlung in vielen Wissenschaften neuerdings ein größerer Raum gewährt wird, so hat das dritte Heft des Jahrbuchs, das der angewandten Mathematik gewidmet ist, in den letzten Jahren

trotz aller angewandten Vorsicht an Umfang stark zugenommen. Unter anderem besteht gegenwärtig ein Schwanken darüber, wie weit die thermodynamische Behandlung chemischer Vorgänge berücksichtigt werden kann.

Bezüglich der Referate selbst ist von Anfang an allen Mitarbeitern ans Herz gelegt worden, wesentlich objektive Inhaltsangaben zu liefern, dagegen alle Polemik zu unterdrücken, insbesondere nicht einen Ton anzuschlagen, der persönlich verletzt. Das Jahrbuch soll den Leser darüber belehren, was in den Abhandlungen steht, nicht was der Referent über den Inhalt denkt. Zum Zwecke eigener Forschungen soll der Benutzer des Jahrbuchs erfahren, ob ein Aufsatz neue Gedanken enthält. Für Streitigkeiten über Meinungsverschiedenheiten besitzt das Jahrbuch keinen Platz; solche Kämpfe müssen an anderen Stellen ausgefochten werden. Nur offenbare Unrichtigkeiten sind in nicht verletzender Form zu bezeichnen; Fragen über Priorität durch genaue Anführung der Quellen im Chronikenstil zu entscheiden. Mit besonderer Genugtuung darf das Jahrbuch auf die 33 Jahrgänge zurückblicken, welche bis jetzt bearbeitet sind. Nur selten sind Reklamationen erhoben worden, und die Leiter dieses Organs haben sich stets bemüht, in versöhnlichem Sinne zu wirken, damit entstandene Mißhelligkeiten ohne Aufsehen beigelegt werden konnten.

Wenn damit die Gestaltung des Jahrbuchs, wie es in die Öffentlichkeit tritt, in den Grundzügen geschildert ist, so haben wir nun auch der geschäftlichen Seite des Unternehmens unsere Aufmerksamkeit zuzuwenden.

Besonders außerhalb Deutschlands besteht vielfach die Meinung, als ob das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik ein Unternehmen sei, das — ähnlich wie eine große politische Zeitschrift — über ein Bureau mit einem großen geschulten Personal verfügt; natürlich wird dann weiter angenommen, daß das Unternehmen durch ein Kapital gestützt sei, das sich gut verzinst, wie etwa bei einer Aktiengesellschaft. Aus solchen Ansichten lassen sich manche seltsamen Zumutungen erklären, die an die Leiter des Jahrbuchs herantreten.

Dem gegenüber muß nachdrücklich betont werden, daß die Gründer des Jahrbuchs einfache Privatpersonen waren, die kein Kapital in dem Werke anlegen konnten, und daß diese Umstände bis zur Stunde sich nicht geändert haben. Der Verleger des Jahrbuchs zahlt, dem geringen Absatze des Werkes angemessen, ein bescheidenes Honorar für jeden Druckbogen. Hiervon erhalten die Mitarbeiter den größeren Teil; der kleinere wird für die nötigen geschäftlichen Ausgaben, besonders auch für die zu haltenden Zeitschriften verwendet. Der Rest verbleibt für den Leiter des Jahrbuchs in so geringem Betrage, daß kein gewöhnlicher Arbeiter mit der Bezahlung als Stundenlohn zufrieden sein würde. Als tägliche Arbeitszeit muß der gegenwärtige Leiter etwa drei bis vier Stunden für das Jahrbuch aufwenden. Der Verleger ist insofern mit dem Stande seiner Rechnungen nicht unzufrieden, als er nichts einbüßt, aber auch nichts gewinnt.

Hiernach ist es wohl zu entschuldigen, daß das Jahrbuch besonders am Anfange seines Bestehens von dem Ideale der Vollständigkeit der

Literatur weit entfernt war und auch jetzt noch immer zu wünschen übrig läßt. Die Leiter des Jahrbuchs waren Männer, die ihren Beruf als Lehrer zu erfüllen hatten und nur ihre von Berufspflichten freie Zeit dem Unternehmen widmen konnten. Mit Berücksichtigung dieses Umstandes ist es erstaunlich, daß das Jahrbuch ins Leben gerufen werden konnte, daß es am Leben erhalten ist. Durch die selbstlose aufopfernde Tätigkeit der Redakteure, die in dem Bewußtsein der Nützlichkeit des Werkes an ihrem Platze aushielten, ist es gelungen, bis jetzt das regelmäßige Erscheinen des Jahrbuches zu bewerkstelligen. Die Anerkennung, welche von den einsichtsvollen Vertretern der mathematischen Wissenschaft auf der ganzen Erde den Bestrebungen des Jahrbuchs gezollt ist, hat alle Mitarbeiter aufgemuntert, in der Arbeit fortzufahren, obwohl weder materielle Vorteile winkten, noch auch sonst Förderung zu spüren war. Der stolze Bau ist aus eigener Kraft durch Männer aufgeführt worden, denen das Bewußtsein der Pflichterfüllung genügt.

Hiermit sind wir bei den Mitarbeitern angelangt, welche die schwierige Arbeit der Berichterstattung übernommen haben, ohne eine nennenswerte Entschädigung für ihre Mühe zu erhalten. Damit die Referate von kundiger Hand verfaßt werden konnten, wurden von Anfang an jedem Mitarbeiter nur solche Arbeiten zur Besprechung gegeben, die innerhalb seines Arbeitsgebietes fielen, wo er selbst Spezialstudien gemacht hatte. Die meisten deutschen Mathematiker, welche gegenwärtig die Lehrstühle für Mathematik an den Hochschulen innehaben, sind früher Referenten für das Jahrbuch gewesen oder fahren in dankenswerter Weise fort, sich an der Berichterstattung zu beteiligen.

Obschon es zu beklagen ist, daß die meisten von ihnen sich vom Jahrbuche zurückgezogen haben, sobald ihre Arbeitszeit durch die Berufsgeschäfte oder eigene Untersuchungen stärker in Anspruch genommen wurde, so waren doch immer unter dem Nachwuchse an jüngeren Mathematikern Ersatzmänner zu finden, welche mit frischer Energie die im Stiche gelassene Arbeit aufgenommen haben. Besonderer Dank wird den Gelehrten der nichtdeutschen Nationen geschuldet, die mit gleicher Freudigkeit und herzlichem Wohlwollen das Jahrbuch tatkräftig unterstützt haben. Die Unmöglichkeit der Beschaffung der ganzen Literatur an einem Platze machte die Zugesellung von Korrespondenten aus den verschiedenen Ländern notwendig. Im allgemeinen ist es dann auch gelungen, solche Herren der einzelnen Nationen zu gewinnen, die es übernommen haben, diejenigen Lücken auszufüllen, die zufolge des Fehlens der Literatur bei der Redaktion entstanden sein würden. Obgleich hier noch vieles zu ergänzen und zu bessern ist, so muß andererseits das freundliche Entgegenkommen vieler Gelehrten gerühmt werden, die wenigstens die Haupterscheinungen ihrer Länder im Jahrbuche regelmäßig angezeigt haben. Wie unter diesen Mitarbeitern des Jahrbuchs die besten Namen vertreten sind, so darf an dieser Stelle in der Hauptstadt Italiens nicht verschwiegen werden, daß Italiens gelehrte Gesellschaften und hervorragende Mathematiker stets in vortrefflicher Weise das Jahrbuch gefördert haben. Der anwesende Herr Loria und der leider nicht erschienene Herr Vivanti

gehören seit dem Jahrgange 1885 zu den zuverlässigsten und geschätztesten Mitarbeitern des Jahrbuchs; sie sorgen in vorzüglicher Weise dafür, daß die in Italien blühende mathematische Wissenschaft im Jahrbuche gebührende Berücksichtigung findet.

So ist das Jahrbuch seit dem Erscheinen seines ersten Bandes, entsprechend dem Jahrgange 1868, stetig gewachsen und vervollkommnet worden. Ein Menschenalter hindurch hat es seinen Platz in den mathematischen Büchereien ausgefüllt und sich während dieser Periode in etwas dem Ideale genähert, das seinen Gründern vorschwebte, dem der gegenwärtige Leiter wie einem holden Phantome nachjagt. Als wesentliches Kennzeichen an ihm ist die systematische Ordnung des Stoffes nach Jahrgängen zu betrachten. Jeder Forscher kann leicht alle Arbeiten eines und desselben Jahres aus einem und demselben Gebiete an einer und derselben Stelle übersehen. Dieser Vorteil ist so augenscheinlich, daß er nicht besonders beleuchtet zu werden braucht.

Die hauptsächlichsten Vorwürfe, die gegen das Jahrbuch erhoben zu werden pflegen, sind, abgesehen von den gegen die Einteilung erhobenen Einwänden und von dem Tadel der Unvollständigkeit: das zu späte Erscheinen und der zu hohe Preis. Die Ursachen dieser nicht zu leugnenden Übelstände hängen enge miteinander zusammen.

Daß ein sachlich geordneter Jahrgang eines derartigen Sammelwerkes schneller fertiggestellt werden kann, ist durch den in gleichem Verlage erscheinenden „Astronomischen Jahresbericht" und durch die bei Vieweg in Braunschweig verlegten „Fortschritte der Physik" bewiesen. Die Hauptsache ist ein Redakteur, der dem Unternehmen genügende Zeit widmen kann. Um dem Jahrbuche einen solchen Leiter zuzuführen, hatte ich nach dem Tode Ohrtmanns im Frühlinge des Jahres 1885 meinen Freund Henoch, der als wohlhabender Privatmann ohne Berufsgeschäfte lebte, dringend gebeten, die Redaktion zu übernehmen. Wegen Mangels an Geschäftskenntnissen ersuchte er mich, die Arbeit mit ihm zu teilen. Die Hoffnungen, welche sich an diese Vereinigung knüpften, wurden zerstört, als Henoch nach wenigen Jahren zu kränkeln begann und 1890 ins Grab sank. Nun fiel die ganze Arbeit auf meine Schultern. Zuerst durch eine auf Kroneckers Antrag von der Berliner Akademie bewilligte Unterstützung über die ersten Schwierigkeiten fortgetragen, erhielt ich von dem Vater meines verstorbenen Freundes in einem Vermächtnisse die Mittel zur Besoldung eines Schreibers. Dreizehn Jahre sind seitdem vergangen, während deren ich die Last der Fortführung des Jahrbuches weiter getragen habe. Die Erwartung, in Herrn Dr. Wallenberg, einem tüchtigen jungen Mathematiker, mir einen Nachfolger zu erziehen, ist getäuscht worden. Die Arbeitslast der Schriftleitung des Jahrbuchs ist eine so große, daß Herr Wallenberg seinen Entschluß kundgegeben hat, unter keinen Umständen mein Nachfolger zu werden. Mit 63 Jahren stehe ich also wieder allein als der Träger des Unternehmens; auch ich habe als Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule und an der Kriegsakademie mit wöchentlich 17 Stunden Vortrag und Übungen nebst der Erledigung der Verwaltungsgeschäfte mein volles Maß an Berufs-

geschäften, und die Kräfte beginnen abzunehmen. Die Lebensfrische welkt allmählich, und ich möchte gern die Leitung des Jahrbuchs, die größte Last der letzten beiden Jahrzehnte meines Lebens, von den müde werdenden Schultern auf kräftigere Arme übertragen.

Noch immer hoffe ich, daß sich jemand findet, der mir diese Sorge abnimmt; noch immer denke ich, daß es junge Männer gibt, die aus Interesse für die Wissenschaft ihre Kräfte hergeben. Ein Werk wie das Jahrbuch, das die Berechtigung und die Notwendigkeit seiner Existenz durch 34 Jahre bewiesen hat, das vielen Hunderten von Forschern die ersprießlichsten Dienste geleistet hat, ist wert, daß es erhalten bleibt. Bis jetzt ist dieses Organ für Quellenforschung in stolzer Selbständigkeit allen Mathematikern dienstbar gewesen. Wenn es nicht anders möglich ist, müssen gelehrte Gesellschaften für die Fortführung eintreten; vielleicht sind staatliche Hilfsmittel zu diesem Zwecke flüssig zu machen, wie für das bloße Register des „Scientific Catalogue".

Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

begründet

von

Carl Ohrtmann.

Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung der Herren **Felix Müller** und **Albert Wangerin** sowie der **Berliner Mathematischen Gesellschaft**

herausgegeben

von

Emil Lampe.

Band 33. Jahrgang 1902.

(In 3 Heften.)

Heft 1.



Berlin.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1904.

Bogen 1 bis 31.

Hierzu eine Beilage betr. III. internationaler Mathematiker-Kongreß

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

Kapitel 1. Geschichte.

Zweiter Abschnitt. Algebra.

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Siebenter Abschnitt. Funktionentheorie.

Ausführliches Inhaltsverzeichnis und Namenregister folgen am Schlusse des Bandes.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittlung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Professor Dr. Lampe. Berlin W. 15, Fasanenstraße 82.

Erster Abschnitt.

Geschichte und Philosophie.

Kapitel 1.

Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

H. G. Zeuthen. Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge. Édition française, revue et corrigée par l'auteur, traduite par Jean Mascart. Paris: Gauthier-Villars. IX u. 296 S. 8°.

Die dänische Ausgabe dieser kurzgefaßten Geschichte der Mathematik im Altertum und im Mittelalter ist 1893 erschienen, die deutsche Übersetzung 1896 (F. d. M. **26**, 2, 1895). Nunmehr liegt auch eine französische Ausgabe vor, in welcher der Verf. einige neue Ergebnisse der mathematischen Geschichtsforschung hat verwerten können. An dem Zustandekommen dieser neuen Fassung hat der beste französische Kenner der Geschichte der Mathematik im Altertum, Paul Tannery, sein Interesse dadurch bekundet, daß er bei der Durchsicht einige Notizen beigesteuert hat. Bei dem neuen Erscheinen eines Werkes, das sich durch seine Vorzüge, besonders seine knappe Behandlung, den Beifall der sachkundigen Gelehrten und der lernenden Jugend erworben hat, bedarf es keiner neuen eingehenden Besprechung, obwohl nicht verschwiegen werden darf, daß von kühlen und kenntnisreichen Forschern manche Bedenken gegen eine Eigenart des hochverdienten Verf., die Hineintragung subjektiver Ansichten und Vermutungen, ausgesprochen worden sind. Als ein Vorzug der französischen Ausgabe ist das recht vollständige Namen- und Sachregister zu erwähnen. Lp.

J. Tropfke. Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Erster Band. Rechnen und Algebra. Leipzig: Veit & Co. VIII + 332 S. 8°.

Der Verf. hat im Jahre 1899 ein Programm unter dem Titel: „Erstmaliges Auftreten der einzelnen Bestandteile unserer Schulmathematik"

(F. d. M. **30**, 34-35) veröffentlicht, worin kurze Notizen über die Entstehung von Lehrsätzen, Methoden, Kunstwörtern, Zeichen u. a. aus der elementaren Mathematik gegeben wurden, die aus den bekannten Werken über Geschichte der Mathematik gesammelt waren. Dieses Material hat er nun durch mehrjähriges fleißiges Quellenstudium zu einer „Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Anordnung" vervollkommnet. Aus der Entstehung des Buches ist schon ersichtlich, daß nicht die historische Entwicklung der Disziplinen der Elementarmathematik dargestellt werden soll; sondern das Werk soll als Nachschlagebuch dienen für solche, die sich über diesen oder jenen Punkt aus der Geschichte der Schulmathematik schnell orientieren wollen. Diesen Zweck wird das Werk des Verf. gewiß in vorzüglicher Weise erfüllen, wenn, wie versprochen, ein gutes Namen- und Sachregister erschienen sein wird (ist 1903 erschienen).

Der vorliegende erste Band umfaßt „Das Rechnen" (S. 3-120) und „Die Algebra" (S. 121-306). Ersteres enthält fünf Unterabteilungen: Die Zahlen im allgemeinen (Zahlwörter und Ziffern), die Maße, die ganzen Zahlen, die Brüche und das angewandte Rechnen. Die Algebra wird in sechs Abschnitten behandelt: Die algebraische Ausdrucksweise, der Name Algebra, die Entwicklung des Zahlbegriffes, die algebraischen Operationen, die Proportionen, die Gleichungen. Ein Anhang I enthält eine „Zeittafel zur Geschichte der algebraischen Zeichenschrift", und in einem II. Anhang werden Originalbeispiele aus mathematischen Schriften verschiedener Perioden zusammengestellt, welche die damalige mathematische Schreibart zeigen sollen.

Da die Angaben des Verf. auf ernsten Quellenstudien beruhen, so sind sie im allgemeinen durchaus zuverlässig; nur hätte einiges, über dessen Entstehung noch Meinungsverschiedenheiten herrschen, nicht als unzweifelhaft sicher hingestellt werden müssen. Dahin gehört u. a. die Lebenszeit des Heron von Alexandrien, die Entstehung des Wortes degré, das Vorkommen des x und die Erklärung des Zeichens x. Die Forderung, die diophantischen Gleichungen in ganzen Zahlen zu lösen, ist schon 1545, also 67 Jahre vor Bachet de Méziriac wieder aufgestellt (vergl. unten S. 11). Moivre hat die nach ihm benannte Formel schon vor 1730 gegeben, nämlich in zwei Aufsätzen Phil. Trans. London 1707 und 1722.

Die Lebenszeit der vorkommenden Mathematiker ist hinter ihrem Namen in Klammern angeführt, auch einige biographische Notizen. Für eine neue Auflage möchten wir dem Verf. vorschlagen, diese Notizen nicht so oft zu wiederholen. Im Namenregister könnte ja durch fetteren Druck die Seitenzahl kenntlich gemacht werden, wo sich solche Angaben finden. Es macht die Lektüre des Buches nicht angenehm, wenn man immer wieder hinter Boëthius liest: (480? Rom—524 Pavia; römischer Staatsmann und Philosoph) oder hinter Michael Stifel: (1486/87 Eßlingen—1567 Jena; lutherischer Prediger an verschiedenen Orten), hinter Clavius: (1537 Bamberg—1612 Rom; Jesuit, zuletzt Lehrer der Mathematik im Ordenshause zu Rom), hinter Simon Stevin: (1538 Brügge—1620 Leiden; Kaufmann, später im Staatsdienst als Ingenieur) u. v. a. Diophant (drittes bis viertes Jahrh. v. Chr.) auf S. 252 ist nur Druck-

fehler; auf S. 159 steht bei Diophant richtig n. Chr., aber bei Pythagoras auch n. Chr. Bei literarischen Zitaten darf das Wort Opera nicht fortgelassen werden, wie bei Archimedes S. 270, 271, Diophant 271, Stevin 277, Vieta 278 und häufiger. „Opera" zu setzen für „Ges. Werke" oder „Werke" für „Opera" oder für „Oeuvres" ist auch nicht korrekt. Doch das sind Kleinigkeiten, durch deren Anführung wir den Wert des Buches nicht herabsetzen wollen. Wir wünschen, daß jeder Lehrer der Mathematik die Geschichte der Elementarmathematik von Tropfke recht fleißig studieren und bei gelegentlichen historischen Rückblicken im Unterricht recht häufig benutzen möge. M.

F. Hoefer. Histoire des mathématiques, depuis leurs origines jusqu'au commencement du 19e siècle. 5e édition. Paris: Hachette. III + 609 S. 16mo.

D. Gambioli. Breve sommario della storia delle matematiche colle due appendici sui matematici italiani e sui tre celebri problemi geometrici dell' antichità, ad uso delle scuole secondarie. Bologna: Zanichelli. 241 S. 16mo.

H. Bosmans, G. Eneström, W. Schmidt, A. Sturm, P. Tannery. Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik". Bibl. Math. (3) **3**, 137-143, 238-242, 323-328, 405-408.

Fortsetzung der Reihe von Bemerkungen, die im ersten Bande der dritten Folge der „Bibliotheca Mathematica" begann (vgl. F. d. M. **31**, 2, 1900; **32**, 2, 1901). Die Anzahl der neuen Bemerkungen beträgt etwa 60. E.

A. J. v. Oettingen. J. C. Poggendorffs Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. Vierter Band: Die Jahre 1883 bis zur Gegenwart umfassend. Lief. 1 u. 2. Leipzig: Joh. Ambr. Barth.

G. Darboux. Le catalogue international de littérature scientifique. Darb. Bull. (2) **26**, 58-67. (Extrait du Journal des Savants).

Bekanntlich gibt die Royal Society in London seit dem Jahre 1867 einen Catalogue of Scientific Papers heraus, der die wissenschaftliche Literatur des 19. Jahrhunderts umfaßt. Die bisher erschienenen zwölf Bände enthalten die Zeit von 1800 bis 1883, und ein Katalog der wissenschaftlichen Arbeiten aus den Jahren 1884-1900 ist in Vorbereitung. Für die Literatur des 20. Jahrhunderts ist nun von derselben Gesellschaft ein

neues Unternehmen: „The International Catalogue of Scientific Literature" geplant und ins Werk gesetzt. Vom 14. bis 17. Juli 1896 tagte eine zu diesem Zwecke nach London berufene internationale Konferenz, an welcher sich Delegierte von Frankreich, Deutschland, Italien, Dänemark, Schweden, Norwegen, der Schweiz, den Vereinigten Staaten Amerikas, Japan, Mexiko, Ungarn, Canada u. a. beteiligten. Eine zweite Konferenz folgte am 11. bis 13. Oktober 1898 zu London. Ein Provisional International Committee bildete sich zu London am 1. bis 5. August 1899. Auch Belgien und Rußland traten jetzt bei. Eine am 12. Dezember 1900 zu London abgehaltene Sitzung des ‚International Council' beschloß, mit der Vorbereitung des Katalogs mit dem 1. Januar 1901 zu beginnen, mit Hülfe eines ‚Executive Committee', das aus Delegierten der Royal Society und solchen der Vereinigten Staaten Amerikas, von Deutschland, Frankreich und Italien bestand. Das Material wird von ‚Regional Bureaus' geliefert, die sich in den verschiedensten Staaten befinden. Die im Katalog zu berücksichtigenden Wissenszweige sind folgende: A. Mathematik, B. Mechanik, C. Physik, D. Chemie, E. Astronomie, F. Meteorologie (einschl. Erdmagnetismus), G. Mineralogie (einschl. Petrefaktenkunde und Krystallographie), H. Geologie, I. Geographie (mathematische und physikalische), K. Pälaontologie, L. Allgemeine Biologie, M. Botanik, N. Zoologie, O. Anatomie des Menschen, P. Physische Anthropologie, Q. Physiologie (einschl. experimentelle Psychologie, Pharmakologie und experimentelle Pathologie), R. Bakteriologie. Für die einzelnen Wissenschaften werden jährlich Spezialkataloge ausgegeben, welche Sach- und Namenregister enthalten.

Darboux berichtet über die Entstehung, den Zweck, den Plan und die Ausdehnung dieses großen bibliographischen Unternehmens. M.

International Catalogue of scientific literature. First annual issue. Vol. VII. A. Mathematics. Vol. IX. B. Mechanics. London, Harrison and Sons. XIV + 201; XIV + 128 S.

Die beiden vorliegenden Bände der internationalen Bibliographie, über deren Entstehung und Plan das vorstehende Referat Auskunft gibt, zeigen deutlich, daß die Schwierigkeiten eines so ausgedehnten Unternehmens größer sind, als man sich im allgemeinen vorstellt. Bis jetzt entsprechen die Resultate den Erwartungen nicht, die man in die jahrelange Arbeit des Zentral-Bureaus und der 29 Regional-Bureaus setzen zu können glaubte, zumal da die einzelnen Staaten große Summen für die Herstellung des Katalogs bewilligt haben. Ein Einblick in die mathematischen Kataloge zeigt, daß von einer einigermaßen vollständigen Sammlung der Literatur keine Rede ist, und daß die Ausführung im einzelnen vieles zu wünschen übrig läßt. Die Systematik der mathematischen Disziplinen, über welche S. 1-45 eine englische, eine französische, eine deutsche und eine italienische Übersicht gegeben wird, ist nach unsern Erfahrungen für bibliographische Einordnungen nicht recht geeignet. Den vier Hauptabschnitten für A. Mathematik, nämlich: „Grundlegende Begriffe", „Algebra und

Zahlentheorie", „Analysis" und „Geometrie", gehen zehn einleitende Kapitel voraus: 1. Philosophie. 2. Geschichte, Biographien. 3. Periodica. Berichte von Instituten, Gesellschaften, Kongressen etc. 4. Allgemeine Abhandlungen (?), Lehrbücher (!), Wörterbücher, Bibliographien, Tabellen. 5. Festreden, Vorträge. 6. Pädagogik. 7. Institute (siehe 3!), Wirtschaftliches und Organisatorisches (?). 8. Nomenklatur. 9. Instrumente, Modelle. 10. Hülfsmittel für das Rechnen, Graphische Methoden. Die „Gruppentheorie" ist unter „Grundlegende Begriffe" aufgenommen. In der Abteilung 4 finden wir außer den Gesammelten Werken und Vorlesungen von Brioschi, Cauchy, Kronecker, Stokes (Huygens' Werke stehen wo anders): Logarithmentafeln; ferner Uppenborn, Kalender für Elektrotechniker; Sporer, Niedere Analysis; Workman, Note on circulating decimals; Ad. Goldberg, Die jüdischen Mathematiker, u. a.

Auf S. 47-111 steht das Verzeichnis der nach den Autoren geordneten Schriften. Die meisten sind aus dem Jahre 1901, nämlich ca. 1360 (in den entsprechenden Abschnitten I-IX unseres Jahrbuches für Jahrgang 1901 finden sich mehr als 2200 Schriften angeführt!), ungefähr 150 aus dem Jahre 1902, einige von 1900. Es folgt dann (S. 112 bis 194) das Sachregister. Einige der hier verzeichneten Arbeiten sucht man in dem vorstehenden „Authors' Catalogue" vergeblich. Den Schluß des Bandes bildet (S. 195-201) ein Verzeichnis der Zeitschriften mit abgekürzten Titeln. Hier sind nur 114 Journale aufgeführt (in den F. d. M. ca. 200). Allerdings ist diese Liste nicht vollständig. Es fehlen von den im Vorigen zitierten Zeitschriften u. a. Rivista filosofica (Pavia), Revue de métaphysique et morale, La Civiltà cattolica, Abh. natf. Ges. Halle, Annuario d. R. Univers. Pisa, Annuario R. Univ. Pavia, Arch. voor de verzekeringswet. u. a. Als Journal sind die Buchhändleranzeigen „Math. Abh. Verl. Schilling" Halle aufgeführt, ferner „Wissenschftl. Meeresuntersuchungen Kiel", Doktordisputatser Kjöbenhavn. Die Abkürzungen sind ganz willkürlich, ohne jedes Prinzip, gemacht. In der Abkürzung „Amsterdam, Proc. Sci. K. Akad. Wet." stehen holländische Worte neben englischen. Während Bollettino abgekürzt wird Boll., steht für Bulletin Bul.; Vehr. für Verhandlungen (Bd. 120) ist wohl Druckfehler. Die Zitate im Text lassen bisweilen die nötige Sorgfalt vermissen. M.

G. Valentin. Über einen anscheinenden Defekt im sechsten Bande von Boncompagnis „Bullettino". Bibl. Math. (3) 3, 131-132.

In einigen Exemplaren des sechsten Bandes des „Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche" fehlen die Seiten 151-152, und dies beruht, wie Valentin nachweist, darauf, daß es zwei verschiedene Auflagen des Märzheftes dieses Bandes gibt, von denen die erste mit der Seite 150, die zweite mit der Seite 152 endet. Fürst Boncompagni hatte nämlich, nachdem das Heft schon fertig und zum Teil versandt war, einen von ihm verfaßten Artikel ergänzen wollen und ließ darum den Schluß des Heftes zum zweitenmal setzen und drucken. E.

A. FAVARO. Intorno ad alcune anomalie presentate dal „Bullettino“ del principe Boncompagni. Bibl. Math. (3) 8, 383-385.

Im Anschluß an einen Artikel von G. Valentin (siehe das vorangehende Referat) berichtet Favaro über die Weise, wie Fürst Boncompagni sein „Bullettino“ redigierte; hierdurch wurde sehr oft veranlaßt, daß ein Bogen zweimal mit größeren oder kleineren Variationen des Textes gedruckt wurde. In sehr vielen Fällen ist es unmöglich, ohne genaues Vergleichen festzustellen, wo die Abweichungen zu finden sind, und auch wenn es konstatiert ist, daß zwei Exemplare des „Bullettino“ an einer gewissen Stelle von einander abweichen, so hat man zuweilen keine Möglichkeit, zu entscheiden, welche Lesart als die richtigere angesehen werden soll. E.

G. LORIA. Le scienze esatte nell'antica Grecia. Modena Mem. (2) 12, 411 S.

Nach einer durch mannigfache Arbeiten ausgefüllten Pause von sieben Jahren ist nun das große Werk unseres ausgezeichneten Mitarbeiters in Genua über die exakten Wissenschaften im alten Griechenland zum Abschluß gekommen, und wenn wir ihn zur Vollendung seines gelehrten Werkes beglückwünschen und uns der Früchte seines emsigen Fleißes freuen können, so wollen wir doch auch wieder unserem Bedauern darüber Ausdruck geben, daß es nur Wenigen vergönnt sein wird, Einsicht in sein Werk zu erhalten, weil die Denkschriften der Akademie von Modena ja nur in den größten Bibliotheken vorhanden sind.

Die anzuzeigenden „Bücher“ tragen die Nummern III bis V (vergl. F. d. M. **26**, 5, 1895).

Das dritte Buch handelt von der mathematischen Unterlage der griechischen Naturphilosophie. Die einzelnen Abschnitte sind betitelt: I. Kosmologische Hypothesen und astronomische Messungen vor Hipparch. II. Die Sphärik. III. Die Blüte der griechischen Astronomie. IV. Das Aufdämmern der mathematischen Physik. V. Heron aus Alexandria. VI. Die kleineren Feldmesser. Gegenüber dem geschlossenen Inhalte der beiden ersten Bücher scheinen die Gegenstände des dritten bunt zusammengewürfelt. Das verknüpfende Band erblickt Loria in dem Streben nach Erkenntnis der Mechanik des Himmels. Die von den Pflegern der Astronomie und der Schwesterwissenschaften ausgehenden Einflüsse waren dann wiederum von höchster Bedeutung für die Geometrie. Daher bietet das genaue Studium der physikalisch-mathematischen Werke von Euklid und Archimedes, von Ptolemaios und Heron noch immer für den Mathematiker ein hohes Interesse und ist für den Historiker unerläßlich, der die weit verzweigten Schöpfungen jener Gelehrten, welche während der griechisch-alexandrinischen Periode hervorragten, in allen ihren Zügen kennen lernen will. Dies sind aber auch in der Tat die letzten Persönlichkeiten ersten Ranges, die wir in der mathematischen Literatur der Griechen finden. Nach ihrem Abtreten beginnt der Verfall der griechischen Geometrie.

Damit sind wir beim vierten Buche angelangt, das dem silbernen Zeitalter der griechischen Geometrie gewidmet ist; diese Bezeichnung soll den geistigen Zustand der behandelten Periode andeuten. „Dem wagemutigen Heer von Geometern des goldenen Zeitalters folgt ein bleichsüchtiger Haufen entkräfteter und blutarmer Forscher, die, weil sie keine genügenden Kräfte besaßen, um sich zum Fluge nach neuen Ländern zu erheben, sich in den schon eroberten Provinzen herumdrehen und wieder drehen mußten, und somit verdient die neue historische Periode den Namen des Zeitalters der Kommentatoren, oder besser, um anzudeuten, daß es sich um geometrische Forschungen handelt, und der Gleichförmigkeit der Benennung willen: der silbernen Periode der griechischen Geometrie.“ Die Abschnitte sind betitelt: I. Geminus. II. Theon aus Smyrna. III. Pappus aus Alexandria. IV. Der Neoplatonismus. Proklus, Marinus, Simplikius. V. Eutokius. VI. Serenus. — Die hier behandelten Autoren teilt Loria in drei Klassen ein: 1. Solche, welche die Forschungen des goldenen Zeitalters vervollständigten, die Epigonen eines Euklid, Archimedes und Apollonius. Der hervorragendste Vertreter ist Pappus. 2. Die Glossatoren; sie erklären zweifelhafte Stellen, beweisen Sätze, an denen die ersten Autoren als zu gering vorüber gegangen sind, fügen bibliographische Notizen hinzu und versichern sich dadurch des Dankes der Nachwelt. 3. Solche, welche durch philosophische und methodologische Betrachtungen die berühmtesten Schriften beleuchten. Eutokius und Proklus sind die vornehmsten Vertreter der beiden letzten Klassen.

Das fünfte und letzte Buch erörtert die Geschichte der Arithmetik bei den Griechen in den Abschnitten: I. Die griechische Rechenkunst. II. Die Arithmetik in der Schule des Pythagoras. III. Die Arithmetik in der Akademie. IV. Die Neupythagoriker und die Neuplatoniker. V. Diophantus. VI. Arithmetische Belustigungen der Griechen. Wegen der Unmöglichkeit, die 179 Seiten dieser Betrachtungen über die griechische Arithmetik hier auszugsweise vorzuführen, begnügen wir uns damit, das Schlußwort herzusetzen.

„Das Gestirn von blendendem Glanze, das während so vieler Jahrhunderte die Welt der Denker mit Staunen gefüllt hatte, versank, um nicht wieder aufzugehen. Aber wir wollen nicht die Wohltaten des Lichtes gering achten, das von ihm in seiner mit einem Glorienschein strahlenden Bahn über die ganze Menschheit ausgegossen ist. Denn nicht allein die unsterblichen Geometer, die der fruchtbare Boden von Hellas erzeugt hat, werden bei der vergleichenden Wertung nach Verdienst von uns als Meister und Führer und Höhenpunkte betrachtet, denen gleichzukommen man sich bestreben muß, die übertreffen zu wollen aber Torheit ist, sondern auch unsere ganze theoretische Arithmetik ist befruchtet von den Begriffen (wenn nicht gebildet an den Methoden), welche Pythagoras und Plato, Nikomachus und Diophantus aufgestellt haben, und welche deren Schüler beim Auslegen vervollkommneten. In der Tat, wenn es auch den modernen Ideen fern liegt, zwei Primzahlen nachzugehen, wenn man von einer allgemeinen Beziehung zwischen Zahlen und Dingen träumt, trinken wir nicht aus ihren geistigen Quellen, wenn wir jene Forschungen

über die natürliche Zahlreihe anstellen, welche Kummer mit tiefem und genialem Blicke als die Chemie der Zahlen bezeichnet hat? Und liegen nicht in ihren Werken die Uranfänge der Forschungen vor über die figurierten Zahlen und somit, wenn nicht die Grundlagen der heutigen kombinatorischen Analysis, doch mindestens der erste Hinweis auf die Fruchtbarkeit der Idee, geometrische Betrachtungen in die reine Wissenschaft der Zahl einzuführen? Und ist es nicht vielleicht das tägliche Studium der uns hinterlassenen Bruchstücke aus dem Werke des Diophant, das Fermat zu den unvergänglichen Forschungen begeisterte, die ihn auf die Höhe des Vaters der modernen Zahlentheorie geführt haben?

Verneigen wir uns daher vor den griechischen Arithmetikern mit einer Ehrfurcht, die nicht von derjenigen verschieden ist, mit der wir vor den Geometern des goldenen Zeitalters unser Knie beugen. Zollen wir ihnen — nicht die kalte und dürre Bewunderung, die man den dem Kreise unserer Gedanken schon ferner liegenden Werken zuzugestehen pflegt —, sondern jenen warmen Enthusiasmus, dessen Feuer durch die ewigen Quellen einer gediegenen Belehrung und einer beständig gehobenen Stimmung entfacht wird.“ Lp.

H. Bosmans. Histoire des mathématiques. Rev. des qu. sc. (3) **1**, 659-682.

Bericht über verschiedene Veröffentlichungen der jüngsten Zeit: Bibliotheca Mathematica **1**; die Astronomie der Chaldäer von Kugler; die Bücher III und IV des Loriaschen Werkes über die exakten Wissenschaften im Altertume; einige Artikel von Tannery, Gravelaar usw.
Mn. (Lp.)

Ad. Weyh. Die wichtigsten Mathematiker und Physiker des Altertums, für Schüler dargestellt. Pr. Gymn. Kreuzburg O.-S. 26 S. 4°.

Das Bestreben der Lehrer der Mathematik, die Schüler mit der Geschichte der Wissenschaft bekannt zu machen, ist stets lobenswert. In diesem Sinne begrüßen wir mit Freuden die vorliegende Darstellung. Nach den Werken von M. Cantor und Rosenberger werden die Leistungen der wichtigsten Mathematiker und Physiker des Altertums geschildert und wird das Nötigste über ihre Lebensumstände angegeben. Nachdem die Ägypter auf den beiden ersten, die Babylonier auf der folgenden Seite abgehandelt sind, folgen die griechischen Mathematiker und Physiker. Sie werden nach ihren verschiedenen Wirkungskreisen örtlich geschieden in A. kleinasiatische (Thales, Anaximander, Anaximenes), B. süditalienische (Pythagoras und seine Schule), C. athenische (Anaxagoras, Hippokrates, Platon, Eudoxus, Aristoteles) und D. alexandrinische (Euklid, Archimedes, Eratosthenes, Apollonius von Pergae, Hippokrates, Heron, Menelaus, Ptolemäus, Nikomachus, Pappus, Diophant). Bei Euklid wird eine Übersicht über die Elemente, bei Archimedes der Inhalt des Buches De sphaera et cylindro kurz angegeben. Aus dem letzten Satz auf S. 15 könnte ein Nichtkundiger heraus-

lesen, daß auch die Data Euklids verloren gegangen seien, was nicht der Fall ist. Die Zahlenangaben in den biographischen Notizen über Pythagoras und Heron von Alexandrien sind wohl noch nicht so sicher nachgewiesen, wie der Verf. sie hinstellt. Bei Anaximander hätte erwähnt werden können, daß er mit dem Gnomon die Schiefe der Ekliptik bestimmt und Landkarten entworfen hat, und bei Eudoxus, daß er das älteste Lehrbuch der Stereometrie geschrieben hat. Sonst ist die Auswahl eine recht geschickte, die Darstellung klar und dem Zweck angemessen. M.

E. Musmacher. Kurze Biographien berühmter Physiker. Freiburg i. Br.: Herdersche Verl. 280 S.

J. H. Graf. Notizen zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in der Schweiz. Nr. 59. Einige schweizerische Geographen. Separat-Abdr. Mitteilungen der Naturf. Ges. Bern (1901). 12 S. 8°.

Gibt in Fortsetzung früherer Notizen (vergl. F. d. M. **27**, 2, 1896 und frühere Jahrgänge) Lebensdaten von schweizerischen Geographen (J. Graber † 1895, H. B. de Beaumont † 1898, P. Chaix † 1901), dann aus dem Briefwechsel (1753) zwischen M. du Crest und J. J. Huber Mitteilungen, die sich auf Thermometerstudien und Erdgestalt, insbesondere die Messungen in Peru beziehen. Tn.

L. Isely. Histoire des sciences mathématiques dans la Suisse Française. Neuchâtel. 215 S. 8° (1901).

C. J. Keyser. Mathematical productivity in the United States. Educ. Review 1902, 346-357.

J. Purser. Address to the Mathematical and Physical Science Section of the British Association. Brit. Ass. Rep. 1902, 499-511.

Die Rede gibt eine interessante historische Skizze der irischen mathematischen und physikalischen Schule während des XIX. Jahrhunderts. Über folgende Männer werden kurze Notizen gegeben: Bartholomew und Humphrey Lloyd, Vater und Sohn, R. Robinson, Lord Rosse, W. R. Hamilton, J. MacCullagh, J. H. Jellet, Michael und William Roberts, A. S. Hart, C. Graves, R. Townsend, J. Casey, G. Fitzgerald, T. Beston, T. Andrews, James Thomson. Gbs. (Lp.)

Estanave. Thèses de sciences mathématiques soutenus devant la Faculté des sciences de Paris et devant les Facultés des sciences des départements dans le courant du XIXe siècle. Darb. Bull. (2) **26**, 201-216, 232-248, 272-280.

Für die Zeit von 1800-1890 gibt es einen „Catalogue de Thèses“ von Maire, der durch die „Revue décennale des Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris du 1er jauvier 1891 au 31 décembre 1900“ von Estanave fortgeführt ist. Aus diesen interessanten bibliographischen Werken hat nun Estanave diejenigen Thesen ausgezogen, die mathematischen Inhalts sind, und hat sie hier veröffentlicht. Die beiden ersten Artikel enthalten die Thesen der Faculté des sciences de Paris von 1811 bis 1900, der letzte die der Facultés des sciences zu Besançon, Bordeaux, Caen, Dijon, Grenoble, Lyon, Metz, Montpellier, Nancy, Rennes, Straßburg und Toulouse. M.

T. Smith. Euclid, his life and system. London and New York: Scribner. IV + 227 S. 12mo.

W. B. Frankland. The story of Euclid. London: Newnes, New York: Wessels. 176 S. 12mo.

E. Hoppe. Ein Beitrag zur Zeitbestimmung Herons von Alexandrien. Pr. Wilhelm-Gymn. Hamburg. 9 S. 4°.

Als Lebenszeit Herons wird hier erneut, in Übereinstimmung mit Cantor, „das zweite Jahrhundert vor Chr.“, genauer „der Ausgang“ dieses Jahrhunderts, also etwa die Zeit um 100 v. Chr. festgestellt. Begründet wird diese Auffassung unter Verwertung der neuesten bezüglichen Literatur durch den Hinweis auf die Unglaubwürdigkeit des Plinius, sowie auf das unverständige Abschreiben des Vitruv aus Heron, ferner durch Aufklärung über die Beziehungen zwischen Heron und den verschiedenen Posidonius, endlich durch Rückweisung der auf Herons Latinismengebrauch und auf seine erdkundliche Verwertung der Stadt Rom gebauten Schlüsse. Tn.

Max. Curtze. Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. In zwei Teilen. Erster Teil. Abh. z. Gesch. d. Math. Wiss. Lpz. Heft XII. S. 1-336. Zweiter Teil. Heft XIII. S. 337-628.

Ein Strauß wichtiger Quellenwerke ist es, den M. Curtze hier seinem Freunde Moritz Cantor zum goldenen Doktorjubiläum darbringt. Er beginnt I. mit dem „Liber embadorum“ des Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli (S. 10-183). Der Name Savasorda ist eine vom Übersetzer begangene Verdrehung des Titels Sahib al Schorta, Oberst der Leibwache, den der Verf. des Buches Abraham Bar Chijja

Ha Nasi trug. Er lebte um das Jahr 1100, meist in Barcelona. Seine praktische Geometrie, deren lateinischer Text mit deutscher Übersetzung hier abgedruckt ist, beginnt mit Definitionen, Postulaten, Axiomen Euklids und einigen seiner Sätze über Flächenvergleichung und Ähnlichkeit, behandelt dann Ausmessungen von Figuren, Aufgaben über Felderteilung, Inhaltsbestimmungen von Körpern und gibt praktische Vorschriften für Feldmesser.

II. „Der Briefwechsel Regiomontans mit Giovanni Bianchini, Jacob von Speier und Christian Roder" (S. 187-336) gewährt uns, wie nur wenige Schriften jener Zeit, einen Einblick in die Rechnungsweise und den Gedankengang Regiomontans, der hier Beispiele zu seinen „Libri V de triangulis" mitteilt. Diese Originalrechnungen zeigen, daß Regiomontan die Algebra vollständig beherrschte. Außer algebraischen Aufgaben kommen auch sehr interessante geometrische und stereometrische Probleme vor, sowie Aufgaben aus der Mechanik und sogar zwei Maxima-Aufgaben.

III. Die „Practica geometriae" des Leonardo Mainardi aus Cremona (S. 339-434) oder die „Artis Metrice Practice Compilatio" ist eine Feldmessung aus dem Jahre 1488. Interessant ist die genaue Darlegung der trigonometrischen Funktionen umbra recta und umbra versa, sowie die Berechnung des schief abgeschnittenen Prismas. Dem italienischen Text, der wegen der zum Teil sehr veralteten Ausdrucksweise schwer lesbar ist, hat der Herausgeber zum Glück eine deutsche Übersetzung zur Seite gestellt.

IV. „Die Algebra des Initius Algebras ad Ylem geometram magistrum suum" (S. 435-611) ist eine Abhandlung eines deutschen Mathematikers des 16. Jahrhunderts. Die älteste Handschrift stammt aus dem Jahre 1545. Auf die kurze Einleitung, welche Zeiten und Tatsachen in der abenteuerlichsten Weise zusammenwirft, folgt ein dem supponierten Verfasser Initius Algebras zugeschriebener Brief an seinen Lehrer Yles, der ihn gebeten haben soll, ihm zu erklären, wie die von den Arabern betrachteten Unterfälle der Gleichungen ersten und zweiten Grades: $ax = b$, $ax^2 = bx$, $ax^2 = b$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 = bx + c$ aus den Sätzen seiner Geometrie gefolgert werden können. Nachdem zu jedem Fall ein abenteuerliches Beispiel gegeben ist, beginnt die eigentliche „Gebra und Almuchabala". Bemerkenswert ist, daß hier schon die Forderung der ganzzahligen Lösung unbestimmter Gleichungen gestellt wird, also 67 Jahre vor Bachet de Méziriac (1612). Der letzte Traktat behandelt die irrationalen Wurzeln. Der Verf. zeigt sich als tüchtigen Arithmetiker und kann einem Scheubel und Stifel getrost an die Seite gestellt werden. M.

H. Suter. **Nachträge und Berichtigungen zu „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke".** Abh. zur Gesch. d. Math. **14**, 155-185.

Vergl. F. d. M. **31**, 4, 1900. — Zu mehr als 100 der 528 einzelnen Artikel des früheren Werkes werden hier Ergänzungen oder Verbesserungen

geliefert, die sich bei der Durcharbeitung der alten und neuen Quellen ergeben haben. Tn.

H. SUTER. Über die angebliche Verstümmelung griechischer Eigennamen durch arabische Übersetzer. Bibl. Math. (3) **3**, 408-409.

Nach der Ansicht von Suter ist es nicht die Schuld der arabischen Übersetzer, daß die Namen der griechischen Mathematiker im christlichen Mittelalter unrichtig wiedergegeben worden sind. Die arabischen Übersetzer schrieben die griechischen Eigennamen so, wie sie dieselben von den damaligen Griechen aussprechen hörten, und die Verstümmelung beruht teils auf den arabischen Abschreibern, teils auf den mittelalterlichen Übersetzern ins Lateinische. So z. B. wurde aus dem arabisch transskribierten Namen „Menelaos“ durch fehlerhaftes Abschreiben „Mileus“, und diese Form geben die christlichen Übersetzer ins Lateinische ohne weiteres wieder, obgleich sie ohne Mühe ausfindig gemacht haben könnten, daß dieser „Mileus“ gerade der griechische Mathematiker Menelaos war.
E.

H. SUTER. Über die im „Liber augmenti et diminutionis“ vorkommenden Autoren. Bibl. Math. (3) **3**, 350-354.

Mit der Frage über den Verfasser des „Liber augmenti et diminutionis“, sowie den dort genannten „Job filius Salomonis“ haben schon in den vorigen Jahrgängen der „Bibl. Math.“ (vergl. F. d. M. **31**, 6, 1900; **32**, 4, 1901) G. Eneström und P. Tannery sich beschäftigt, aber freilich ohne zu einem sicheren Resultate zu gelangen. Suter untersucht darum die Frage noch einmal und findet, daß Job filius Salomonis sicherlich mit Eijub ben Soleiman identisch ist, der von einem westarabischen Gelehrten aus dem 12. Jahrhundert als Verf. eines Buches über Erbteilung zitiert wird. Wann dieser Eijub ben Soleiman gelebt hat, ist in der von Suter benutzten Quelle nicht angegeben; aber wahrscheinlich handelt es sich um den Juristen dieses Namens, der 914 starb. Inbetreff des Verfassers des „Liber augmenti et diminutionis“, der im Titel nur Abraham genannt wird, ist Suter geneigt, ihn mit dem 920 verstorbenen berühmten Arithmetiker Ibrahim ben Junis oder mit Ibrahim ben Ahmed ben Moad el-Sabani, einem Schüler von Eijub ben Soleiman, zu identifizieren, gibt aber als möglich an, auch der 1056 gestorbene Ibrahim ben Muhammed ben Asah el-Fehmi könne hier in Betracht kommen. E.

G. ENESTRÖM. Hermannus secundus (Dalmata). [Anfrage 102.] Bibl. Math. (3) **3**, 410-411.

Dem Hermannus Dalmata, der in der ersten Hälfte des 12. Jahrhunderts arabische Schriften ins Lateinische übersetzte, werden auch Übersetzungen zweier astronomischen Arbeiten zugeschrieben; aber wie es sich

damit verhält, ist noch nicht genau festgestellt worden, und es wird darum gefragt, ob Hermannus Dalmata wirklich mathematische oder astronomische Schriften aus dem Arabischen übersetzt hat. E.

A. A. Björnbo. Über zwei mathematische Handschriften aus dem vierzehnten Jahrhundert. Bibl. Math. (3) 3, 63-75.

Die hier behandelten Handschriften sind Cod. Basil. F II 33 und Cod. Paris 9335; sie enthalten zum größtenteil lateinische Übersetzungen aus dem Arabischen, die von Gherardo Cremonese herrühren, und sind für die Geschichte der Mathematik im Mittelalter von besonderem Werte. Der Text der ersten Handschrift ist aber oft sehr verdorben, während der der zweiten überaus gut ist, und Björnbo gibt darum ein ausführliches Inhaltsverzeichnis derselben. Es zeigt sich daraus, daß die Handschrift aus vier Teilen besteht, nämlich 1. die sogenannten „mittleren Bücher", 2. Schriften über Optik, 3. algebraische und arithmetische Bücher, 4. vermischte Schriften astronomischen, philosophischen und medizinischen Inhalts. E.

G. Eneström. Ein verschollener deutscher Cossist aus dem Anfange des sechzehnten Jahrhunderts. Bibl. Math. (3) 3, 355-360.

Am Anfange des 16. Jahrhunderts lebte ein gewisser Andreas Alexander, der als hervorragender Mathematiker erwähnt wird und nach Adam Riese Verfasser oder wenigstens Übersetzer und Kommentator auf dem mathematischen Gebiete gewesen sein soll, aber bisher waren keine Schriften von ihm bekannt. Eine solche Schrift glaubt Eneström jetzt gefunden zu haben, und zwar ist dieselbe gerade die von Curtze in den „Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance" herausgegebene Algebra des „Initius Algebras ad Ylem geometram magistrum suum". Eneström gibt die Gründe an, die ihn zu seiner Annahme veranlaßt haben, und lenkt die Aufmerksamkeit darauf, daß die von Curtze veröffentlichte Algebra dadurch größeres Interesse bekommt. Bisher wußte man nämlich nur, daß sie vor 1545 geschrieben war. Aber wenn sie von Andreas Alexander herrührt, so muß sie jedenfalls vor 1524 verfaßt worden sein, weil sie in einer Schrift von Riese aus diesem Jahre zitiert wird (vergl. oben S. 11). E.

L. A. Birkenmajer. Nicolas Copernic. Première Partie. Études sur les travaux du célèbre astronome et matériaux pour servir à sa biographie. Cracovie 1900. 4°. XIII + 709 S. (Polnisch). Krakauer Anzeiger 1902, 200-219.

Das Werk will einige Dunkelheiten, die mehrere Punkte im Leben der großen Astronomen umhüllen, aufklären; besonders sollen die Einflüsse, welche Koppernikus zu den kritischen Ideen über die astronomischen

Theorien seiner Zeit geführt haben, und die Wege, auf denen er zu der unsterblichen Entdeckung des heliozentrischen Systems geleitet worden ist, in helleres Licht gesetzt werden. Die bisherigen Biographen haben diese wichtige Frage kaum gestreift. Durch eingehende kritische Studien des großen Werkes „De revolutionibus orbium coelestium“ und anderer Schriften des Koppernikus ist der Verf. zu neuen diese Frage betreffenden Resultaten gelangt. Die neue Ausgabe des Hauptwerkes vom Jahre 1873 weicht in mehreren, nicht unwesentlichen Punkten von der Originalhandschrift des Koppernikus ab. Der Kommentar des Erasmus Reinhold zu dem Werke bezieht sich auf den richtigen Text, der vor der Editio princeps, Nürnberg 1543, mehrfach gefälscht wurde. Deshalb war eine gründliche Revision des Textes erforderlich, die mit großen Schwierigkeiten verbunden war. Nachforschungen in verschiedenen Archiven und Bibliotheken haben hier wichtige Resultate geliefert. Es ergab sich, daß der große Astronom nach einander zwei heliozentrische Mechanismen des Weltalls ausgearbeitet hatte; der Commentariolus wurde schon vor 1512 verfaßt. Die Resultate betreffs der Genesis des neuen Systems bilden den Inhalt der Kapitel 1-14 des Werkes, die folgenden Kapitel (15-34) enthalten verschiedene biographische Einzelheiten. Der zweite Band wird eine chronologische Darstellung des Lebens und der wissenschaftlichen Leistungen des Koppernikus enthalten, wie sie auf Grund der neuen Forschungen sich ergeben (vergl. F. d. M. **31**, 6, 1900). **M.**

A. Favaro. Una lettera inedita di Ticone Brahe. Bibl. Math. (3) **3**, 188-190.

Der hier abgedruckte Brief des Tycho Brahe ist vom 28. Januar 1601 und gerichtet an den Großherzog Ferdinand I. von Toscana. Der Brief ist in erster Linie ein Empfehlungsschreiben für Tycho Brahe den Jüngeren, der sich damals in Italien befand, und enthält noch einige Notizen über die astronomischen Instrumente des Briefschreibers. E.

J. Thirion. Le troisième centenaire de la mort de Ticho Brahe. Rev. des qu. sc. (3) **1**, 248-259.

Übersicht über das Leben von Tycho Brahe und über seine wissenschaftlichen Arbeiten. Mn.

G. Huber. Der Astronom Tycho Brahe. Ein Lebensbild zum Andenken an die 300. Wiederkehr seines Todestages. Bern. Mitt. 1902, 28 S. gr. 8°.

Fr. Burkhardt. Zur Erinnerung an Tycho Brahe 1546-1601. Vortrag. Basel: Georg & Co. 26 S. gr. 8° (Verhdl. Baseler Naturf. Ges.).

Bericht über die Säkularfeier der Erinnerung an das vor 300 Jahren erfolgte Ableben des Reformators der beobachtenden Astronomie Tycho Brahe, welche die königl. böhmische Gesellschaft der Wissenschaften mit tatkräftiger Beihülfe des Präsidiums und des Rates der königl. Hauptstadt Prag am 24. X. 1901 veranstaltet hat. Prag: F. Řivnáč. 30 S. Lex. 8⁰ mit 1 Bildnis.

G. Vacca. Sui manoscritti inediti di Thomas Harriot. Loria Boll. Bibl. 5, 1-6.

Bei einer flüchtigen Durchsicht der Harriotschen Handschriften, welche im British Museum aufbewahrt sind, hat Vacca manches Interessante gefunden, und besonders:

Erstens, daß Harriot im Jahre 1603, also längst vor Girard und Cavalieri, die Fläche des sphärischen Dreieckes gemessen hat, was bisher nur aus einer Angabe von Briggs bekannt war.

Zweitens, daß Harriot sich mit den Binomialkoeffizienten mehrmals beschäftigt hat, gegenüber der gewöhnlichen Annahme, die die Untersuchung derselben Newton zuschreibt. Vi.

Galileo Galilei. Le opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli auspicii di Sua Maestà il Re d'Italia. Volume XII. Firenze: Tipografia di G. Barbèra. 527 S. 4⁰.

Der in den vorigen Bänden der Gesamtausgabe der Werke begonnene Briefwechsel Galileis wird unter den Nummern 963 bis 1432 fortgeführt; die 470 Briefe, von denen genau der zehnte Teil von Galilei selbst geschrieben ist, umfassen den Zeitraum vom 1. Januar 1614 bis zum 27. Dezember 1619. Bezüglich der Art des Abdrucks sind die bei der Anzeige des zehnten Bandes der Werke mitgeteilten Grundsätze beibehalten worden; ebenso sind am Schlusse die zur Übersicht dienenden Tafeln in gleicher Weise hinzugefügt. Die wissenschaftlichen Dinge, über welche verhandelt wird, betreffen die durch die Erfindung des Fernrohrs möglich gewordenen astronomischen Beobachtungen: die Mediceischen Gestirne, die Kometen, die Sonnenflecke. Der Aufenthalt Galileis in Rom vom Dezember 1615 bis zum Juni 1616 zum Zwecke der Rechtfertigung gegen die Beschuldigung von Irrlehren bietet Anlaß zu einem ausgedehnten Briefwechsel über diese für das Leben Galileis wichtige Periode, die in die Zeit seiner Residenz zu Florenz fällt. Natürlich werden auch physikalische Fragen mancher Art besprochen, wie z. B. im Briefe 983 von Galilei an Gio. Battista Baliani, wo Galilei erzählt, daß er Luft in ein großes Glasgefäß gepreßt und dieses nachher beim Wiegen schwerer gefunden habe. Lp.

A. Favaro. Amici e correspondenti di Galileo Galilei. IV. Alessandra Bocchineri. V. Francesco Rasi. VI. Giovanfrancesco Buonamici. Ven. Ist. Atti 61 [(8) 4], 665-701.

F. Rasi († 1621), ein berühmter Sänger seiner Zeit, war wohl um 1600 zu Mantua mit Galilei in Berührung gekommen. So bildeten sich auch Freundschaftsbeziehungen seiner Witwe Alessandra († 1649) mit Galilei, um so mehr, als dessen Sohn ihre Schwester heiratete. Der dritte Gemahl Alessandras, G. Buonamici († 1669), ein Diplomat, stand Galilei während der Zeit seines großen Prozesses hülfreich zur Seite. Alle diese Beziehungen, durch Briefstellen belegt, klärt Favaro in bekannter Gründlichkeit auf und veröffentlicht auch (S. 692 ff.) vier Briefe Alessandras und vier ihres letzten Gemahls im Urtext. Tn.

H. Bosmans. Deux lettres inédites de Grégoire de Saint-Vincent publiées avec des notes bibliographiques sur les œuvres de Grégoire de S. Vincent et sur les manuscrits de della Faille. Brux. S. sc. 26 B, 22-40.

Der eine der beiden Briefe enthält eine Lobrede auf seinen Schüler della Faille, der andere handelt vom Almagestum novum des Riccioli. Bei dieser Gelegenheit gibt der Verf. genaue biographische und bibliographische Nachrichten über Gregor von Sanct Vincentius und über della Faille. Mn. (Lp.)

G. Eneström. Giannantonio Rocca (1607-1656). [Anfrage 101.]
A. Favaro. Giannantonio Rocca (1607-1656). [Antwort auf die Anfrage 101.] Bibl. Math. (3) 8, 328-412.

Giannantonio Rocca wird von den Geschichtsschreibern der Mathematik in betreff des sogenannten Guldinschen Theorems im Vorübergehen erwähnt, und Eneström fragt, ob dieser Mathematiker eine ausführlichere Erwähnung verdient. Favaro bemerkt, daß Rocca schon 1644 in einer Schrift von Torricelli zitiert worden ist, und weist auf zwei biographische Notizen über Rocca hin. E.

R. du Boberil. Pascal et Riemann. Paris: Dubois. 14 S. 8⁰.

K. Bopp. Antoine Arnauld, der große Arnauld, als Mathematiker. Abh. zur Gesch. d. Math. 14, 187-336.

A. Arnauld (1612-1694) ist seit langem in unverdiente Vergessenheit geraten; er wird ihr hier entrissen, und seine Verdienste werden ausführlich dargelegt und begründet unter dankenswerter Mitteilung von reichlichen Beweisstellen aus Werken und Briefen. Zunächst (S. 190-218) wird sein philosophischer Standpunkt, insbesondere seine Stellung zu Descartes und zum Cartesianismus dargelegt, auch sein Eintreten für die Jansenisten und seine Verbannung; ferner werden seine Beziehungen

zu Malebranche, zu Pascal und zu Leibniz aufgedeckt, insbesondere die reichen Anregungen, die Arnauld und Pascal aus ihrem Verkehr gegenseitig erhielten. Auf den mehr überschauenden ersten Teil folgt von S. 218 ab die eingehendere Betrachtung von Arnaulds mathematischen Leistungen für die Philosophie der Mathematik, für die Zahlentheorie, für den Grenzbegriff, hauptsächlich aber für die Geometrie. Sein Hauptwerk, die Nouveaux éléments de géométrie von 1667, wird in seiner Entstehung aus allgemeineren logischen Bestrebungen, in seiner Abfassung auf Pascals Anregung hin, in seiner Bedeutsamkeit für die systematische Gestaltung der Elementargeometrie und für den Unterricht der Folgezeit ausführlich und in dankenswerter Weise besprochen. Es folgt noch (S. 302 ff.) die Darlegung der Verdienste Arnaulds um die Lehre von den magischen Quadraten. Tn.

Hoyer. Andreas Gärtner, der sächsische Archimedes. Pr. (No. 625) Dresden-Johannstadt, Städt. Realsch. 21 S. 4°.

Geb. 1654, ging als Tischlergeselle 14 Jahre auf die Wanderschaft, hierbei lange in Italien, lernte Baukunst, Optik, Astronomie während dieser Zeit kennen, kam 1686 nach Dresden und wurde Hof- und Kunsttischler, verfertigte als solcher Waffen und Geräte zum Angriff und zur Verteidigung, große parabolische Hohlspiegel, Kunstuhren, Planisphären, Himmelsgloben, Sonnenuhren usw. Die Benennung „sächsischer Archimedes" scheint immerhin eine etwas kühne Hyperbel. Lp.

Kochański und Leibniz. Der Briefwechsel von Kochański und Leibniz nach den Abschriften von Dr. E. Bodemann aus der kgl. Bibliothek zu Hannover herausgegeben von S. Dickstein. Prace mat.-fiz. 13, 237-283. (Briefe XVI bis XXXVI).

Vgl. F. d. M. **28**, 9, 1897; **32**, 7, 1901.

G. Vacca. Sur le mathématicien anglais Braikenridge. [Antwort auf die Anfrage 50.] Bibl. Math. (3) 3, 145.

Einige Notizen über den genannten Mathematiker, entnommen aus einem Briefwechsel 1732-1753 mit Birch. E.

F. Amodeo. Dai fratelli di Martino a Vito Caravelli. Memoria letta all' Accademia Pontaniana nelle tornate del 2 novembre e 7 dicembre 1902. Napoli: A. Tessitore e figlio. 64 S. 4°.

Die Abhandlung schildert das mathematische Leben an der Universität Neapel in der Zeit von 1732 bis 1778, von der Gründung der Reale Accademia delle Scienze bis zur Gründung der Società Reale. Sie ist

eine Fortsetzung des Aufsatzes „Stato delle Matematiche a Napoli dal 1650 al 1732“, im 32. und 33. Bande der Atti Acc. Napoli. Karl III. von Bourbon reformierte am 2. November 1735 die Universität; er schaffte den Lehrstuhl für Ethik und Politik ab und errichtete dafür einen Lehrstuhl für Astronomie und Nautik und einen zweiten für Mathematik. Die Brüder Niccolò di Martino (3. 12. 1701 bis 8. 12. 1769) und Pietro di Martino (1707-1746) und, nach dem frühen Tode des jüngeren, Felice Sabatelli waren es, die hier lehrten. 1735 wurde auch die K. Marine-Akademie zu Neapel gegründet, an die Pietro di Martino berufen wurde. Ebenso lehrte er an der 1744 gegründeten R. Accademia militare di artiglieria. 1754 folgte die R. Accademia del corpo degli Ingegneri und am 26. Dezember 1769 die Reale Accademia militare. Auf Betreiben und nach dem Plane Celestino Galianos wurde die K. Akademie der Wissenschaften zu Neapel 1735 wiederhergestellt. Mitglieder wurden auch die Gebrüder di Martino. Die Mathematik erfreute sich ernster Pflege in der hohen Aristokratie, auch seitens der Damen. Faustina Pignatelli, Prinzessin und Herzogin, Fürstin von Colubrano, eine Schülerin des Niccolò di Martino, eifrige Verehrerin von Leibniz, schrieb selbst mehrere mathematische Abhandlungen. Nach dem Urteil Lalandes und Voltaires war sie in der Physik und in der Mathematik sehr bewandert. Ihr Lehrer Niccolò di Martino widmete ihr seine Elementa sectionum conicarum 1734 und die neue Auflage seiner analytischen Geometrie, „Algebrae geometria promotae elementa“, 1737. Giuseppa Eleonora Barbapiccola übersetzte Descartes' Prinzipien der Philosophie 1722.

Die Brüder di Martino verfaßten eine ganze Reihe von mathematischen Lehrbüchern, über welche Amodeo eingehend berichtet. In den folgenden Paragraphen werden noch mehrere andere Mathematiker jener Zeit angeführt, wie Felice Sabatelli († 1786), Nicola Maria Carcani (1716 bis 27. 6. 1764), Giuseppe Orlando (1712 bis 15. 4. 1776), Giuseppe Marzucco († 1800), Domenico Bartoloni († Siena 1798) u. a., die in Neapel lehrten. Eingehender beschäftigt sich der Verf. mit den Leistungen des Abate Vito Caravelli, geb. am 19. April 1724 zu Montepetoso, gest. am 25. November 1800. Er war ein Schüler des Niccolò di Martino und des Sabatelli, wurde 1754 Professor der Mathematik an der Marine-Akademie und der Accademia militare di artiglieria zu Neapel, 1770 Direktor der Militär-Akademie. Er schrieb mehrere Lehrbücher und Kurse über Mathematik, Astronomie und Artilleriewesen.

Im Schlußwort erinnert Amodeo daran, daß diese Periode die Zeit der Wiederauffindung des verschütteten Herkulanum war. Für die Ausgrabungen wurden seitens der Regierung Unsummen ausgegeben; desto knapper war das Gehalt der Professoren der Mathematik. Aber um so anerkennenswerter ist der Eifer, mit dem sich letztere der Pflege und Verbreitung ihrer Wissenschaft widmeten. M.

M. CANTOR. Der Erfinder des Wilsonschen Satzes. [Anfrage 104]. Bibl. Math. (3) 3, 412.

Über den Zeitpunkt, wo Wilson zum Ritter ernannt wurde, wird Auskunft erbeten. E.

FR. KAUČIĆ. Georg Frhr. v. Vega. Zur 100. Wiederkehr seines Todestages. Mit Vegas Bildnis. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 33, 525-528.

Kurze Skizze des Lebens aus der Illustr. Ztg. v. 2. Oktober 1902. Als Sohn slovenischer Bauersleute am 23. März 1754 zu Zagorica in Krain geboren, besuchte er die Laibacher Trivialschule und das dortige Gymnasium, wurde 1775 Navigationsingenieur, trat in die Armee, war nach sieben Dienstjahren Hauptmann und Professor im Bombardierkorps, nahm an verschiedenen Feldzügen teil und rückte 1795 zum Oberstleutnant vor. Wegen seiner wissenschaftlichen Verdienste wurde er am 22. August 1800 in den Freiherrnstand erhoben. Am 26. September 1802 wurde seine Leiche in der Donau bei Wien gefunden, nachdem er seit dem 17. September vermißt war. Ein Müller hatte ihn ermordet und beraubt. Lp.

H. FEHR. Sur J. R. Argand. [Antwort auf die Anfrage 51.] Bibl. Math. (3) 3, 145.

J. R. Argand ist am 13. August 1822 in Paris gestorben. E.

S. GÜNTHER. Der Innsbrucker Mathematiker und Geophysiker Franz Zallinger (1743-1828). Bibl. Math. (3) 3, 208-225.

Enthält eine eingehende Würdigung der Verdienste Zallingers um die angewandte Mathematik. Franz Joseph Zallinger zum Thurn (nicht zu verwechseln mit seinem Zeitgenossen Jakob Anton Zallinger zum Thurn, der auch Mathematiker war), Professor der Mathematik und Physik am Lyceum in Innsbruck, wurde am 14. Februar 1743 in Bozen geboren und starb in Innsbruck am 2. Oktober 1828. Als Autor auf dem mathematischen Gebiete hat er sich mit der Elektrizitätslehre, der Meteorologie, der Kartographie und der Geodäsie, der Mechanik, sowie auch mit der Hydrologie beschäftigt. Er war einer der ersten, die die Thermoelektrizität der Krystalle näher untersuchten. E.

NIELS HENRIK ABEL. Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. Kristiania: Jacob Dybwad. Paris: Gauthier-Villars. Londres: Williams & Norgate. Leipzig: B. G. Teubner. XII + 119 + 135 + 61 + 64 + 59 S., 4°. Nebst 2 Bildnissen und 6 faksimilierten Schriftstücken.

Am 5. August 1802 wurde Abel zu Finnö bei Stavanger geboren. Die Hundertjahrfeier seiner Geburt wurde vom 4. bis 7. September 1902

durch wohlgelungene Feste in Christiania begangen, und den zahlreichen Mathematikern, die als Delegierte von Hochschulen und gelehrten Gesellschaften aller zivilisierten Länder den Einladungen zur Feier gefolgt waren, wurde als wertvolles Geschenk der prachtvolle Quartband überreicht, den wir anzuzeigen haben.

Das eine beigegebene Vollbild ist die auf photographischem Wege erzeugte Wiedergabe des einzigen Porträts von Abel, gemalt von Görbitz, das sich im Besitze einer Nichte Abels befindet: Thekla Lange, der Witwe eines früheren Ministers. Das zweite Vollbild gibt eine Ansicht des Pfarrdorfes Finnö nach einer noch zu Lebzeiten Abels angefertigten Landschaft des Malers Th. Fearnley.

Der Inhalt der Festschrift besteht aus mehreren für sich gesondert paginierten Teilen.

An der Spitze befindet sich die französische Übersetzung der von Björnstjerne Björnson für die Hauptfeier gedichteten Kantate. Von Christian Sinden würdig komponiert und in zwei Teile zerlegt, rahmte sie, unter Orchesterbegleitung von einem starken Chore geschulter Sänger vorgetragen, den feierlichen Akt wundervoll ein.

Als „historische Einleitung" bezeichnet, folgt eine angenehm zu lesende Erzählung des äußeren Lebenslaufes Abels, verfaßt von Elling Holst, angenehm besonders deshalb, weil die Beschuldigungen, welche C. A. Bjerknes in seiner Biographie Abels gegen das Andenken Jacobis mit so großer Schärfe erhoben hatte, unberücksichtigt geblieben sind. Auf vielen selbständigen Forschungen beruhend, verdient diese neue Biographie des berühmten norwegischen Mathematikers eine weitere Verbreitung und eignet sich zu einer besonderen Ausgabe, falls sie durch die später zu erwähnende Würdigung der wissenschaftlichen Leistungen Abels durch Sylow ergänzt wird.

Die von dem gefeierten Heroen herrührenden Bestandteile der Festschrift sind seine Briefe, 38 an der Zahl, nebst einigen an ihn gerichteten oder ihn betreffenden Schreiben. Zuerst werden die Abelschen Briefe in französischer Übersetzung gegeben, wie überhaupt das Französische die Sprache ist, in der die Biographie und alle übrigen Abschnitte der Festschrift geschrieben sind. Ein sehr sorgfältiger Kommentar zu jedem einzelnen Briefe gibt dahinter über die erwähnten Personen und Dinge genaue Auskunft. Als eine besondere Abteilung folgt der norwegische Originaltext der Briefe, die damit zum ersten Male in ihrer ursprünglichen Fassung erscheinen. Sehr bedauerlich ist es, daß von den an Crelle gerichteten Briefen Abels die meisten verloren gegangen sind. Wenn man berücksichtigt, daß Weierstraß zufällig einen Brief Abels an Legendre, der aus dem Crelleschen Nachlasse stammte, bei einem Berliner Antiquar gekauft hat, so scheint die Aussicht gering, von diesen Briefen, die für den Entwicklungsgang Abels von größter Bedeutung sind, noch etwas zu erlangen.

Der folgende Abschnitt besteht aus einer Sammlung von 96 Dokumenten über Abel, die Karl Störmer in den verschiedensten Akten entdeckt hat, als es sich darum handelte, den Verbleib des Abelschen

Manuskriptes ausfindig zu machen: „Über die Integration von Differentialformeln.“ Dasselbe wurde am 22. März 1823 durch Hansteen dem akademischen Rate übergeben, der Hansteen und Rasmusen mit der Prüfung der Arbeit betraute. Der wünschenswerte Druck der Abhandlung unterblieb aus Geldmangel; dagegen empfahlen die beiden Berichterstatter die Flüssigmachung einer Unterstützung zur weiteren Ausbildung des hoffnungsvollen jungen Mathematikers. Hier ist also der erste Anstoß zu finden zur Bewilligung von Staatsmitteln für die Auslandsreise Abels. — Obgleich nun das gesuchte Manuskript nicht gefunden worden ist, so hat sich die Ausbeute der aufgefundenen Nachrichten über Abels Jugend als sehr wertvoll für seine Lebensgeschichte erwiesen.

Der letzte Teil der Festschrift ist von Sylow verfaßt und betrifft die Studien Abels und seine Entdeckungen. Für die Zeit der Entstehung der einzelnen Arbeiten lagen außer den Manuskripten sechs wissenschaftliche Tagebücher vor, in welche Abel fortlaufend die Entwürfe, mit denen er sich beschäftigte, einzutragen pflegte, zum Teil mit kurzem begleitenden Texte, zum Teil aber auch nur in Gestalt von Formelrechnungen, die nicht immer zusammenhängen. Durch genaue Prüfung dieser Hefte konnte die Zeit festgestellt werden, wann jedes einzelne gefüllt ist, und damit ist für viele Arbeiten Abels die erste Spur nachgewiesen. In dem wichtigen Gebiete der elliptischen Funktionen bleibt aber trotzdem noch vieles ungewiß. Die 59 Seiten, welche Sylow dem Werdegange des wunderbaren Genius gewidmet hat, sind musterhaft in der scharfsinnigen Benutzung aller vorhandenen Hülfsmittel und in der Beherrschung der verschiedenen Gebiete, wie dies von dem Herausgeber der zweiten Auflage der Abelschen Werke zu erwarten war.

Von den sechs Schriftstücken, deren Faksimile am Schlusse auf ebenso vielen Tafeln gegeben ist, sind die Nummern I, II, VI die ersten Seiten dreier Briefe, III und IV zwei Seiten aus den Tagebüchern No. IV und V, endlich V die erste Seite des Fragmentes „Recherches sur les fonctions elliptiques. Second Mémoire“. Lp.

Adresse an die Königlich Norwegische Friedrichs-Universität Christiania zur Feier der hundertsten Wiederkehr des Geburtstages von Niels Henrik Abel. Berl. Ber. 1902, 1001-1002.

Es wird der freundschaftlichen Beziehungen gedacht, welche die Preußische Akademie und die Universität Berlin mit der Universität Christiania verbinden. Bei der Erinnerung an Abels Aufenthalt in Berlin wird auch Crelle erwähnt, der übrigens nicht Adam hieß, wie in der Adresse steht, sondern August Leopold. M.

L. Sylow. Festrede zum Abeljubiläum. Deutsche Math.-Ver. 11, 377-382.

Die von Sylow in norwegischer Sprache bei der Abelfeier gehaltene Rede erschien in der ursprünglichen Fassung sofort in der No. 635 der

„Aftenposten“ zu Christiania am 5. September 1902. In französischer Übersetzung wurde sie den Festteilnehmern am Tage der Feier zum besseren Verständnis vorweg eingehändigt. Als eine kurze Würdigung der wissenschaftlichen Leistungen Abels ist sie dann auch deutsch in den Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung übergegangen, wo ja derartige akademische Gelegenheitsreden planmäßig gesammelt werden sollen. Aus diesem Anlaß ist dem Bande eine sehr gut gelungene Reproduktion des Bildes von Abel beigegeben. Lp.

L. Sylow. Festrede zum Abeljubiläum in Christiania 5. Sept. 1902. Wiad. matem. **6**, 311-316 (in polnischer Übersetzung).

E. Czuber. Die Abelfeier in Christiania. Wien. Zeitschr. f. d. Realschulw. **27**, sep. 17 S. 8°.

Ein eingehender Bericht über die Festtage in Christiania mit Auszügen aus den gehaltenen Reden und genauer Inhaltsangabe der zur Verteilung gekommenen Festschrift. Lp.

H. Fehr. Centenaire d'Abel. Ens. math. **4**, 445-447.

Summarischer Festbericht. Lp.

P. Mansion. Le centenaire d'Abel. Rev. des qu. sc. (3) **2**, 603-618; Mathesis (3) **2**, Suppl.

Biographie Abels. Würdigung seines wissenschaftlichen Lebenswerkes von E. Picard. Feste der Hundertjahrfeier. Mn. (Lp.)

E. B. Wilson. The centenary of the birth of Abel. American M. S. Bull. (2) **9**, 154-156.

Kurzer Festbericht. Lp.

W. v. Dyck. Eine in den hinterlassenen Papieren Franz Neumanns vorgefundene Rede C. G. J. Jacobis. Münch. Ber. **31**, 203 bis 208 (1901); Math. Ann. **56**, 252-256.

Die lateinische Rede wurde von Jacobi zu seinem Eintritt in die philosophische Fakultät der Universität Königsberg 1832 bei Gelegenheit der öffentlichen Disputation gehalten und ist unter den Papieren von F. Neumann in der zu diesem Zwecke verfaßten Jacobischen Festschrift „De transformatione integralis duplicis indefiniti etc.“ (Werke 3,

91-158) von Jacobis Hand geschrieben aufgefunden. Das Thema ist etwa in den Sätzen enthalten: Est causa vera progressus mathesis necessaria eius explicatio, quae fit secundum leges menti humanae insitas aeternas. Causa accidens esse potest quaestio physica, pomum cadens, passus Virgilianus. Die bei jener Gelegenheit verteidigten Thesen lauten: 1. Mathesis est scientia eorum, quae per se clara sunt. 2. Principium methodi geometricae et analyticae idem est. 3. Per Theoriam Functionum illustrissimi Lagrange analysis infinite parvi non refutatur, sed demonstratur. Lp.

F. Klein. Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken. Fünfter Bericht. Gött. Nachr. (geschäftl. Mitt.) 1902, 10-18.

Zuerst wird über die Erwerbung einiger Briefe von Gauß berichtet. Sodann wird erzählt, daß in der Sternwarte zu Göttingen die Gaußzimmer frei geworden sind, und daß in ihnen die wissenschaftliche Hinterlassenschaft von Gauß, bestehend aus dem schriftlichen Nachlaß und aus der Bibliothek, Aufstellung finden. Endlich geben die Herausgeber des (inzwischen erschienenen) IX. Bandes der Werke, Krüger und Börsch, genauere Nachricht über ihre Arbeiten.

In einer Anmerkung wird erwähnt, daß die von E. Schering in Gött. Nachr. 1893, 617-646, als von Gauß herrührend veröffentlichte lateinische Abhandlung De integratione formulae differentialis etc., die auch in Bd. VIII, 35-64 abgedruckt ist, nach Feststellungen von Conrad Müller nicht von Gauß verfaßt ist, sondern von Thibaut, der sie der Gesellschaft der Wissenschaften 1799 eingereicht hat. — Ebenso wollen wir vorgreifend schon mitteilen, daß das Bildnis, welches dem wissenschaftlichen Tagebuche von Gauß als sein Porträt beigegeben ist, nicht ihn darstellt, sondern Bessel (Gött. Nachr. 1903). Lp.

J. Kürschák. Ein Besuch bei Gauß von Franz Mentovich. Math. és Phys. Lapok 11, 90-96.

Franz Mentovich folgte Wolfgang Bolyai auf dem Lehrstuhl für Mathematik in Marosvásárhely. Während einer Reise in Deutschland 1843 besuchte er Gauß in Göttingen, der sich bei ihm nach Bolyai erkundigte und ihm von seinen Untersuchungen über den Erdmagnetismus erzählte. S.

L. Schlesinger. Ausgewählte Briefe von Wolfgang Bolyai de Bolya an Paul Bodor de Léczfalva von 1815 bis 1825. Math. és Phys. Lapok 11, 179-230.

Die hier mitgeteilten 33 Briefe betreffen nur Privatangelegenheiten. S.

B. L. Modzalewski. Materialien zur Biographie von N. J. Lobatschewski. Briefe von N. J. Lobatschewski an J. E. Welikopolski. Kasan Ges. (2) 12, No. 2, 86-101. (Russisch.)

Diese Briefe aus den Jahren 1832-1842 sprechen nur von Familienangelegenheiten von N. J. Lobatschewski. Si.

Ioannis Bolyai in memoriam. Regia Litt. Universitas Hung. Claudiopolitana. XV u. 154 S. 4⁰ und ein Faksimile.

Außer der obigen Dedikation ist ein ausführlicherer Titel auf einem anderen Blatte gegeben: Libellus post saeculum quam Ioannes Bolyai de Bolya anno MDCCCII a. d. XVIII Kalendas Ianuarias Claudiopoli natus est ad celebrandam memoriam eius immortalem ex consilio ordinis mathematicorum et naturae scrutatorum regiae litterarum universitatis hungaricae Francisco-Josephinae Claudiopolitanae editus. Claudiopoli MCMII. L. Schlesinger als Redakteur und J. Farkas als zeitiger Dekan haben das Vorwort unterzeichnet. Der Inhalt ist der folgende I. Epistola, cuius simulacrum huic libro praefixum est, a Ioanne Bolyai ad Wolfgangum Bolyai patrem data, in Latinum conversa. II. L. Schlesinger, de nonnullis absolutae geometriae ad theoriam complexae variabilis functionum applicationibus. 1-60. III. P. Stäckel, de ea mechanicae analyticae parte, quae ad varietates complurium dimensionum spectat. 61-79. IV. R. Bonola, index operum ad geometriam absolutam spectantium. 81-154. Der auf S. IX-XV in lateinische Sprache übersetzte Brief ist in einer faksimilierten Nachbildung des ungarischen Originals beigegeben. — Über die einzelnen Teile wird an der passenden Stelle besonders referiert. Lp.

M. W. Ostrogradsky. Feier, veranstaltet von der Physiko-mathematischen Gesellschaft in Poltawa zu Ehren des 100. Geburtstags. Hrsg. von der phys.-math. Gesellschaft in Poltawa. 138 S. 8⁰. (Russisch.)

M. W. Ostrogradsky, Sohn eines Gutsherrn, wurde am 12./24. Septbr. 1801 in dem Dorfe Paschennaja (Distrikt Kobeliaki, Gouvernement Poltawa) auf dem Landgute seines Vaters geboren. In den Jahren 1817 bis 1820 war er Student an der physiko-mathematischen Abteilung der Universität Charkow, wo Prof. Pawlowski in ihm mathematische Begabungen entdeckte und zum Vorschein zu bringen wußte. Obgleich Ostrogradsky mit Erfolg die obligatorischen Prüfungen bestand, erhielt er das Kandidatendiplom nicht, und zwar infolge der Ränke einiger Professoren, welche den Professoren der Mathematik Pawlowski und Ossipowski feindlich waren. Dadurch nicht entmutigt, ging Ostrogradsky auf eigene Kosten nach Paris, wo er die Vorlesungen der Sorbonne und des Collège de France besuchte und bald die Aufmerksamkeit von Laplace, Cauchy u. a. auf sich lenkte. Er wurde Lehrer der

Mathematik am Collège Henri IV im Jahre 1826-1827 und kehrte 1828 nach St. Petersburg zurück. Seine mathematischen Arbeiten erregten die Aufmerksamkeit der Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg; am Ende desselben Jahres wurde er zum Adjunkten der angewandten Mathematik gewählt, 1830 zum außerordentlichen Akademiker, 1831 zum ordentlichen. Er hielt Vorlesungen über Mathematik und Mechanik fast an sämtlichen Ingenieur- und Militär-Hochschulen von St. Petersburg. Er starb im Jahre 1861 in Poltawa, während einer Reise in seine Heimat.

Das von der Poltawaer Gesellschaft herausgegebene Bändchen enthält die Darstellung der vorbereitenden Arbeiten der Gesellschaft für die Feier, die Beschreibung der Feier selbst und die dabei gehaltenen Reden. Ein Lebensbild von Ostrogradsky, verfaßt von Tripolsky. — Ermakow (Kiew): Über allgemeine Aufgaben der Erziehung. — Tichomandritzky (Charkow): Über Arbeiten Ostrogradskys aus der Analysis. — Liapunoff: Über Arbeiten von Ostrogradsky auf dem Gebiete der Mechanik. — Steklow: Über Arbeiten aus dem Gebiete der mathematischen Physik. — Endlich eine Liste der Abhandlungen von Ostrogradsky, zusammengestellt von Tichomandritzky. Si.

E. Th. Sabinin. M. W. Ostrogradsky. Moskau Math. Samml. **22**, 499 bis 531. (Russisch.)

N. J. Joukofsky. Einige Züge aus dem Leben Ostrogradskys Ib. 532-539.

L. K. Lachtin. Arbeiten von M. W. Ostrogradsky auf dem Gebiete der Analysis. Ib. 540-554.

N. J. Joukofsky. Wissenschaftliche Arbeiten Ostrogradskys auf dem Gebiete der Mechanik. Ib. 555-573.

Die Moskauer Mathematische Gesellschaft widmete dem Andenken Ostrogradskys ihre Sitzung am 16./29. Oktober 1901. Es wurden die oben angeführten Mitteilungen vorgelesen, welche eine Darstellung des Lebensbildes des gefeierten Gelehrten und eine Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen gaben. Si.

Bernhard Riemanns Gesammelte Mathematische Werke. Nachträge, herausgegeben von M. Noether und W. Wirtinger. Mit 9 Figuren im Text. Leipzig: B. G. Teubner. VIII u. 116 S. gr. 8°.

In den seit dem Erscheinen der zweiten Auflage von Riemanns Werken verflossenen zehn Jahren ist für die Hauptgebiete seiner Tätigkeit, die Theorien der Abelschen Funktionen und der linearen Differentialgleichungen, neues Material, und zwar vorwiegend in der Form von Nachschriften seiner Vorlesungen, zum Vorschein gekommen; dasselbe zeigt oder bestätigt, daß Riemann in seinen Vorlesungen erheblich weiter gegangen ist als in seinen Veröffentlichungen. Dieses Material

allgemein zugänglich zu machen, ist der Zweck der Publikation der Nachträge zu Riemanns Gesammelten Mathematischen Werken.

Die einzelnen Abschnitte sind betitelt: I. Vorlesungen über die allgemeine Theorie der Integrale algebraischer Differentialien. II. Die Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in einem Verzweigungspunkt. III. Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe. IV. Mathematische Noten. V. Berichte.

Über den Wert einer solcher Veröffentlichung kann ja nur eine Stimme gelten. Wir geben aus der Vorrede die Äußerungen der beiden Herausgeber wieder:

„Es ist selbstverständlich, daß durch die Feststellung einer Reihe von Gedanken, welche Riemann für sich oder für einen kleinen Kreis von Zuhörern entwickelte, die Verdienste derjenigen nicht beeinträchtigt werden, ja eher in einem höheren Lichte erscheinen, welche später dieselben Probleme unabhängig erfaßt und ihnen durch eingehende Bearbeitung die gebührende Stellung in der heutigen Mathematik verschafft haben. Aber die Tatsache, daß diese Fragestellungen und Methoden dem ursprünglichen Riemannschen Gedankenkreis angehören, beansprucht ein ähnliches historisches Interesse, wie die andere, daß Gauß lange vor Abel und Jacobi im Besitze wesentlicher Teile der Theorie der elliptischen Funktionen war. Riemann selbst hatte den Plan gefaßt, während seines Aufenthalts in Italien seine Untersuchungen über Abelsche Funktionen als Fortsetzung der ersten Abhandlung im Zusammenhang auszuarbeiten, denselben aber aufgeben müssen: meist zu schwach zum Arbeiten, sei es ihm nur bei größter Hitze im Juli 1864 zu Pisa gelungen, jene Abhandlung (Über das Verschwinden der Thetafunktionen) niederzuschreiben. Unsere jetzige Veröffentlichung kann wohl, soweit sie die Abelschen Funktionen berührt, die Absichten Riemanns aufklären.“

Den beiden Herausgebern wird viel Dank geschuldet für die Selbstlosigkeit, mit der sie sich der mühsamen Arbeit unterzogen haben, aus den verschiedenen Vorlesungsheften und den Notizen auf einzelnen Blättern das zur Veröffentlichung Geeignete herauszufinden und durch sachkundige Noten zu erläutern. Lp.

Hermann Graßmanns Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physischen Klasse der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren J. Lüroth, E. Study, J. Graßmann, H. Graßmann der Jüngere, G. Scheffers herausgegeben von Fr. Engel. II. Band. II. Teil. Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Herausgegeben von J. Lüroth und Fr. Engel. Leipzig: B. G. Teubner. VIII u. 266 S. 8°.

Der zweite Band der Graßmannschen Werke soll die Abhandlungen über Geometrie und Analysis im ersten Teile bringen; da der Druck dieses Teiles sich aber verzögert, so hat der Herausgeber den zweiten

Teil in besonderer Paginierung vor dem ersten erscheinen lassen. Die hierher gehörigen Arbeiten sind in zwei Abteilungen zusammengestellt. Die erste, welche die analytische Mechanik enthält, ist von J. Lüroth herausgegeben; die zweite, welche die bereits gedruckten Arbeiten aus der mathematischen Physik bringt, ist von Fr. Engel durchgesehen.

In der Abteilung mit den Schriften zur analytischen Mechanik findet man zunächst zwei Abhandlungen, die bereits bekannt sind: I. Grundriß der Mechanik (für den Unterricht in Prima). Programm, Stettin 1867. II. Die Mechanik nach den Prinzipien der Ausdehnungslehre. Math. Ann. **12** (1877). Aus dem Nachlasse, der „wider Erwarten keine große Ausbeute bot“, sind zwölf kleine Aufsätze zum Abdrucke gekommen: Drehungen um einen Punkt, Bewegung eines auf einer festen Fläche gleitenden Körpers, einige Schwerpunktsbestimmungen, Darstellung der Statik nach Lagrange, statisches Schwimmen, Bestimmung der Kraft zu einer gegebenen Bahn, Bewegung auf einer sich gleichmäßig drehenden Kurve, zur Theorie des Foucaultschen Pendels, die Mechanik nach den Prinzipien der Ausdehnungslehre (zweite Abhandlung), Trägheitsmoment, Bewegung durch einen Stoß, Mittelpunkt nicht paralleler Kräfte. Hierzu bemerkt Lüroth: „Nach sorgfältiger Durchsicht aller Papiere habe ich zwölf Aufsätze zusammengestellt, welche geeignet sind, die Anwendung der Ausdehnungslehre auf die Mechanik des Punktes und des festen Körpers zu zeigen, und die zugleich alles enthalten, was aus dem gesamten Nachlaß mir als neu und interessant erschien.“

Die Abteilung der mathematischen Physik enthält folgende Nummern: I. Ableitung der Krystallgestalten aus dem allgemeinen Gesetz der Krystallbildung. Programm, Stettin (1839). II. Neue Theorie der Elektrodynamik. Pogg. Ann. **64** (1845). III. Zur Theorie der Farbenmischung. Pogg. Ann. **89** (1853). IV. Übersicht der Akustik und der niederen Optik. Programm, Stettin (1854). V. Zur Elektrodynamik. J. für Math. **83** (1877). VI. Bemerkungen zur Theorie der Farbenempfindungen. Preyers Elemente der reinen Empfindungslehre. Jena (1877). VII. Über die physikalische Natur der Sprachlaute. Wiedem. Ann. **1** (1877).

Danach folgen noch Bemerkungen, durch welche der Herausgeber seinen Pflichten als philologisch exakter Gelehrter nachkommt. Wir heben besonders das Sachregister zu den Abhandlungen über Mechanik und mathematische Physik hervor, ebenso das Namenregister. Alles, was der Nachlaß noch sonst Mitteilenswertes über mathematische Physik enthält, ist für den dritten Band aufgespart. Dem Herausgeber wird für seine Mühe viel Dank geschuldet. Wünschenswert erscheint ein beschleunigter Gang der Veröffentlichung wegen des erhöhten Interesses, das gegenwärtig der Graßmannschen Methodik zugewandt wird. Lp.

K. Lasswitz. Gustav Theodor Fechner. Mit Bildnis. Zweite verm. Aufl. Stuttgart: F. Frommann. VIII + 205 S. gr. 8°. (Frommanns Klassiker der Philosophie No. 1).

L. Koenigsberger. Hermann von Helmholtz. Erster Band. Mit drei Bildnissen. XII u. 375 S. (1902). Zweiter Band. Mit zwei Bildnissen. XVI u. 383 S. (1903). Dritter Band. Mit vier Bildnissen und einem Brieffaksimile. X u. 142 S. (1903). Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn.

Ein Freund des großen Naturforschers hat es unternommen, der Nachwelt in einer ausführlichen Biographie die Entwicklung eines der größten Denker des neunzehnten Jahrhunderts zu schildern, die Bedeutung seiner Arbeiten darzulegen, ihn als Haupt seiner Familie uns menschlich näher zu führen. Die großen Schwierigkeiten, allen Eigenschaften des Helden gerecht zu werden, der als Physiologe, als Mathematiker, als Physiker, als Philosoph, als Musikverständiger in seinen Arbeiten aufgetreten ist, sind offenkundig. Von den Verwandten und Freunden des verstorbenen Meisters unterstützt, von den Behörden gefördert, hat sich der Mathematiker Koenigsberger mit bewundernswürdiger Energie seiner Aufgabe unterzogen und ein Lebensbild geschaffen, das Zeugnis ablegt von dem, was die Mitwelt an Hermann von Helmholtz besessen hat, das der Nachwelt in einem klaren Spiegel die nie rastende Tätigkeit und die zielbewußte Forschung des universellen Genius vorführt. Die Liebe, mit der Koenigsberger sich in die verschiedenartigsten Gebiete versenkt hat, um alle Leistungen des ihm befreundeten Mannes in das rechte Licht zu setzen, erhellt aus dem warmen Tone, der durch das Werk von Anfang bis zu Ende festgehalten ist.

Die Daten für die äußeren Ereignisse des geschilderten Lebens sind bei Gelegenheit der Nekrologe nach dem Hinscheiden von H. von Helmholtz im Jahrbuche angegeben worden, so weit dies hier angeht. Eine Nacherzählung des Inhaltes würde zu weit führen. Wir beschränken daher das Referat auf die Aufzählung der in den einzelnen Bänden gemachten größeren Abschnitte, woraus der Gang der Darstellung völlig ersichtlich wird.

Band I. Das Elternhaus von Hermann Helmholtz. Jugendjahre 1821 bis 1838. Eleve des Königl. medizinisch chirurgischen Friedrich-Wilhelms-Instituts in Berlin von Michaelis 1838 bis Michaelis 1842. Eskadronchirurgus bei den Gardehusaren und als Militärarzt im Königl. Regiment der Gardes-du-Corps in Potsdam vom 1. Oktober 1843 bis zum Sommer 1848. Lehrer der Kunstakademie und Gehülfe der anatomisch-zoologischen Sammlung in Berlin vom Sommer 1848 bis Sommer 1849. Professor der Physiologie in Königsberg vom Sommer 1849 bis Michaelis 1855. Professor der Anatomie und Physiologie in Bonn von Michaelis 1855 bis Michaelis 1858. Professor der Physiologie in Heidelberg von Michaelis 1858 bis Ostern 1871.

Band II. Fortsetzung. Professor der Physik in Berlin von Ostern 1871 bis Ostern 1888.

Band III. Präsident der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt von Ostern 1888 bis zum 8. September 1894.

Innerhalb jedes der oben bezeichneten Abschnitte schreitet die Darstellung chronologisch fort, so daß im Inhaltsverzeichnis für jedes Jahr

die Arbeiten namhaft gemacht sind, die im Texte besprochen werden, sowie die Ereignisse, die in das Jahr fallen.

Um den Verfasser der Biographie zum Schlusse selbst redend einzuführen, setzen wir das Vorwort des letzten Bandes her, in welchem mit allzu großer Bescheidenheit die eigene Leistung verkleinert wird:

„Indem ich die Darstellung des Lebensganges eines der gottbegnadeten Fürsten im Reiche geistiger und sittlicher Macht abzuschließen im Begriffe stehe, überkommt mich von neuem das Gefühl der Unzulänglichkeit, mit der ich es unternommen, die schöne, aber große und schwierige Aufgabe zu lösen. Vielleicht wäre es mir möglich gewesen, derselben besser und würdiger zu entsprechen, wenn ich mehr Kraft und Zeit derselben gewidmet hätte.

Am Sarge des jüngsten Sohnes, Fritz von Helmholtz, am 18. November 1901, faßte ich unter dem Eindruck der zeitlichen Vergänglichkeit aller irdischen Größe und Herrlichkeit den Entschluß, eine Biographie des großen Forschers zu entwerfen, und wenn ich schon heute die Arbeit abschließe, so mögen meine Leser mir Nachsicht und Entschuldigung gewähren, weil ich, selbst in hohem Alter stehend, es nicht verschulden wollte, von dem einheitlichen Ganzen eines im höchsten Sinne in sich abgeschlossenen Lebens der wissenschaftlichen Welt nur ein Bruchstück zu überliefern.“

Die wissenschaftliche Welt wird es dem Verf. sicherlich Dank wissen, daß er mit einer solchen Tatkraft das Werk gefördert hat, das nur ein Augenzeuge der Geschehnisse und ein Mann in reifem Lebensalter so vollenden konnte. Es wird als Zeichen der Freundschaft, die ihn mit dem „gottbegnadeten Fürsten“ verbunden hat, für künftige Zeiten bestehen bleiben. Lp.

F. Rapisardi. Memorie biografiche di Giuseppe Zurria. Atti dell' Accademia Gioenia di Scienze naturali (4) **15**, 19 S. und ein Bildnis.

G. Zurria, geboren zu Catania am 26. Februar 1810, starb daselbst als Professor an der dortigen Universität am 14. September 1896. Vi.

Fr. Brioschi. Opere matematiche di Francesco Brioschi. Pubblicate per cura del comitato per le onoranze a Francesco Brioschi (G. Ascoli, V. Cerruti, G. Colombo, L. Cremona, G. Negri, G. Schiaparelli). Tomo secondo. Milano: Ulrico Hoepli. VIII u. 456 S. 4°.

Mit löblicher Schnelligkeit ist dieser zweite Band der mathematischen Schriften Brioschis dem ersten gefolgt (vergl. F. d. M. **32**, 13, 1901). Die Reihe der in den Annali di Mat. erschienenen Abhandlungen, die hier unter den Nummern LV bis LXXXIX weiter geführt wird, erstreckt sich über die Jahre 1858 bis 1887. Während der ersten Jahre dieser Periode war noch Tortolini der Leiter der Annali, obgleich schon unterstützt von

Brioschi. Mit dem Beginne der zweiten Serie 1867 traten Brioschi und Cremona an die Spitze dieser vornehmsten mathematischen Zeitschrift in Italien; vom VIII. Bande der zweiten Serie an (1877) erscheint Brioschi als der Hauptleiter. Auf der Höhe des geistigen Schaffens stehend, veröffentlichte er in den dreißig Jahren, die dieser Band umfaßt, die bewunderten reifen Erzeugnisse seines Genius aus den Gebieten der Algebra und der Funktionentheorie; daher bieten die abgedruckten Abhandlungen vieles, was auch heute noch anzieht und anregt. An der Durchsicht der 35 Aufsätze sind beteiligt gewesen Cerruti, Gerbaldi, Loria, Pascal, Pittarelli, Reina, Torelli, und am Schlusse ist durch die Chiffre jeder Bearbeiter kenntlich gemacht. Sowohl diese Einrichtung als auch die Hinzufügung eines alphabetischen Verzeichnisses der in dem Bande vorkommenden Eigennamen verdienen allgemeine Anerkennung. Die vornehme Ausstattung der gesammelten Werke Brioschis ist seinem Ruhme angemessen; in diesen Werken wird seinem Andenken ein bleibendes Monument errichtet. Lp.

Ernst Schering. Gesammelte mathematische Werke. Herausgegeben von R. Haußner und K. Schering. Erster Band. Mit Ernst Scherings Bildnis. Berlin: Mayer & Müller. VIII u. 412 S. 4°.

Zu den gesammelten Werken der hervorragenden deutschen Mathematiker des neunzehnten Jahrhunderts tritt nun auch die Gesamtausgabe der Schriften von Ernst Schering (gest. 1897) in derselben äußeren Ausstattung, wie die bekannte der Werke von Gauß, mit deren Herausgabe Schering im Alter von 27 Jahren betraut wurde, und deren vorläufigen Abschluß er 1874 im Alter von 41 Jahren herbeiführte. Wie er seine Lebensgefährtin in der Tochter des schwedischen Mathematikers Malmstén gefunden hatte, so verdankt diese Ausgabe der Scheringschen Schriften ihre Anregung dem Eingreifen von Mittag-Leffler. Auf den Wunsch der Witwe des Verstorbenen, die selbst die erste Korrektur aller Druckbogen gelesen hat, haben Haußner und K. Schering derart die Arbeiten unter sich geteilt, daß der erstere die Arbeiten rein mathematischen Inhalts, der letztere die mathematisch-physikalischen und die biographischen durchgesehen hat. Nach diesem Arbeitsplane sind von den 22 Arbeiten des ersten Bandes nur die beiden ersten dem Bruder des Verewigten zugefallen.

Bei der Anordnung der Schriften ist die Zeitfolge der Veröffentlichungen entscheidend gewesen; der vorliegende erste Band umfaßt die Abhandlungen von 1857 bis 1879. An diese Abhandlungen schließen sich einige „Bemerkungen“. Besonders hervorgehoben seien gewisse unter diesen Bemerkungen, von denen die zur Abhandlung III zwei bisher ungedruckte Artikel derselben bringen, die zu den Abhandlungen XIV bis XVI und XVII bezügliche Äußerungen und Mitteilungen aus Briefen an Kronecker enthalten.

Da seit 1868 das Jahrbuch regelmäßig Referate über Scherings Veröffentlichungen gebracht hat, so mögen hier nur die vor diesem Zeitpunkt erschienenen Abhandlungen erwähnt werden.

I. Zur mathematischen Theorie elektrischer Ströme. (Beweis der allgemeinen Lehrsätze der Elektrodynamik, insbesondere der Induktionslehre aus dem elektrischen Grundgesetze). Preisschrift und Inaugural-Dissertation. Göttingen, 1857. II. Zur mathematischen Theorie elektrischer Ströme. Pogg. Ann. **104**, 266-279, 1858. III. Über die konforme Abbildung des Ellipsoids auf der Ebene. Preisschrift. Göttingen, 1858 (Habilitationsschrift). IV. Théorèmes relatifs aux formes binaires quadratiques qui représentent les mêmes nombres. Journ. de Math. (2) **4**, 253-270, 1859. VI. Fortsetzung der Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel. Gauß' Werke **3**, 375-402, 1866.

Vermißt haben wir die im Jahrbuch **2**, 22, 1870 angezeigte „Notice biographique sur Bernhard Riemann. Traduit par P. Mansion" im Bollettino von Boncompagni **3**, 409-428, nach Gött. Nachr. 1867.

Die Mannigfaltigkeit der in den Abhandlungen durchgeführten Untersuchungen zeigt Schering als den echten Schüler von Gauß; nicht nur die abstrakten Gebiete der Zahlentheorie und der Mechanik im nichteuklidischen Raume, sondern die Anwendungen auf Geodäsie, Astronomie und mathematische Physik haben ihn beschäftigt zu derselben Zeit, als er die klassischen Erzeugnisse des Princeps mathematicorum für alle Zeiten erscheinen ließ in dem Gewande, das nun seinen eigenen Schriften so wohl ansteht. Lp.

K. Weierstraß. Mathematische Werke. Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der königlich preußischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Kommission. Vierter Band. Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transzendenten. Bearbeitet von G. Hettner und J. Knoblauch. Berlin: Mayer & Müller. XIV u. 631 S. 4°.

Über die Entstehung dieses stattlichen Bandes berichten wir mit den Worten der Bearbeiter:

„Schon im Jahre 1889 hatte Weierstraß den Wunsch geäußert, die von ihm an der hiesigen Universität gehaltenen Vorlesungen über Abelsche Transzendenten durch uns herausgeben zu lassen. Und zwar sollte sich die Veröffentlichung an die Vorlesungen vom Wintersemester 1875/76 und Sommersemester 1876 anschließen, weil sich diese durch die Einheitlichkeit ihrer Durchführung ausgezeichnet hatten; die Vorlesungen früherer oder späterer Jahre sollten nur in geringerem Umfange zur Ergänzung herangezogen werden.

Ein großer Teil des Manuskripts ist damals von uns fertig gestellt worden; allein der Druck wurde verschoben, weil Weierstraß sich inzwischen zur Herausgabe seiner Mathematischen Werke entschlossen hatte. Von diesen enthalten die drei ersten Bände die von ihm verfaßten Abhandlungen, die folgenden Bände die Vorlesungen, soweit sie zur Ver-

öffentlichung bestimmt sind. Daß die über Abelsche Transzendenten zuerst erscheinen, hat seinen Grund in dem oben Gesagten; voraussichtlich werden zunächst die über elliptische Funktionen folgen.

Obgleich die im vorliegenden Bande enthaltenen Vorlesungen von Weierstraß stets unter dem Titel „Theorie der Abelschen Funktionen" angekündigt worden sind, haben wir sie doch mit seiner Zustimmung als solche über Abelsche Transzendenten bezeichnet, weil die Theorie der Abelschen Funktionen im eigentlichen Sinne darin nur kurz skizziert ist, während die grundlegenden algebraischen Untersuchungen und die Theorie der Abelschen Integrale genau durchgeführt sind.

Der Veröffentlichung liegen die Ausarbeitungen zugrunde, die wir seinerzeit nach den Vorlesungen der beiden vorher erwähnten Semester angefertigt haben. Nur für das 26., 28. und die erste Hälfte des 29. Kapitels konnten wir uns auf ein Manuskript stützen, das Weierstraß früher bei seinen Zuhörern in Umlauf gesetzt hatte. Für die zweite Hälfte des 29., das 30. und das 34. Kapitel sind die Ausarbeitungen von G. Valentin und C. Weltzien aus dem Wintersemester 1873/74 und die beiden ersten Paragraphen des Buches von F. Schottky „Abriß einer Theorie der Abelschen Funktionen" (Leipzig, 1880) mit herangezogen worden.

Weierstraß selbst hat von dem Inhalt dieses Bandes nur zu einem kleinen Teile Kenntnis genommen; als er am 19. Februar 1897 starb, war der Druck erst bis zum achtzehnten Bogen vorgeschritten."

Der Inhalt gliedert sich in drei große Abschnitte: I. Algebraische Grundlage der Theorie (S. 11-246). II. Die Abelschen Integrale (S. 247 bis 438). III. Die Abelschen Funktionen (S. 439-624). — Voran geht eine Einleitung (S. 1-10); ein alphabetisches Inhaltsverzeichnis (S. 625 bis 631) macht den Beschluß. Da es unmöglich ist, in einer Anzeige von wenigen Seiten eine Vorstellung von dem Entwicklungsgange der Gedanken zu geben, begnügen wir uns damit, auf die „Einleitung" hinzuweisen, in der eine Übersicht des Inhaltes enthalten ist. Aus dieser Einleitung möge aber der Schluß hier Platz finden, weil Weierstraß daselbst zur Geschichte der Entwicklung das Wort nimmt.

„Bevor die Arbeiten Rosenhains und Göpels bekannt wurden, hatte auch ich das Problem in Angriff genommen. Wie wir sehen, ist jede rationale symmetrische Funktion der ϱ Wertepaare $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$, ..., $(x_\varrho\, y_\varrho)$, wenn zwischen diesen und den ϱ Variabeln u_1, u_2, ..., u_ϱ die ϱ vorher aufgestellten Differentialgleichungen bestehen, eine eindeutige Funktion der Veränderlichen u_1, u_2, ..., u_ϱ, und jede solche Funktion nennen wir eine Abelsche Funktion. Doch kann der Fall eintreten, daß auch eine algebraische symmetrische Funktion dieser ϱ Wertepaare $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$, ..., $(x_\varrho\, y_\varrho)$ eine eindeutige Funktion von $u_1\, u_2$, ..., u_ϱ ist, und auch dann wird eine solche Funktion eine Abelsche Funktion genannt. Es gelang mir nun, die Abelschen Funktionen als Quotienten zweier beständig konvergenten Potenzreihen darzustellen. Die Zähler und Nenner sind ganze rationale Funktionen von Thetafunktionen von ϱ Veränderlichen,

und so wurde ich zu den Thetafunktionen beliebig vieler Veränderlichen geführt, deren Existenz mir vorher unbekannt war.

Abel hat jedoch den Satz, welchen wir oben als Abelsches Theorem bezeichneten, auf die Integrale der aus einer beliebigen algebraischen Irrationalität entspringenden algebraischen Funktionen ausgedehnt. Auch an diese Erweiterung des Abelschen Theorems knüpft sich ein Umkehrungsproblem an, und es entstand wieder die Aufgabe, in diesem allgemeineren Falle symmetrische Funktionen der ϱ Wertepaare $(x_a\, y_a)$ als eindeutige Funktionen von ϱ Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ darzustellen.

Eine direkte Lösung dieses Problems habe ich bereits im Sommer 1857 in einer ausführlichen Abhandlung der Berliner Akademie vorgelegt. Das schon der Druckerei übergebene Manuskript wurde aber von mir wieder zurückgezogen, weil wenige Wochen später Riemann eine Arbeit über dasselbe Problem veröffentlichte, welche auf ganz anderen Grundlagen als die meinige beruhte und nicht ohne weiteres erkennen ließ, daß sie in ihren Resultaten mit der meinigen vollständig übereinstimme. Der Nachweis hierfür erforderte einige Untersuchungen hauptsächlich algebraischer Natur, deren Durchführung mir nicht ganz leicht wurde und viel Zeit in Anspruch nahm. Nachdem aber diese Schwierigkeit beseitigt war, schien mir eine durchgreifende Umarbeitung meiner Abhandlung erforderlich. Andere Arbeiten, sowie Gründe, deren Besprechung gegenwärtig nicht mehr von Interesse ist, bewirkten dann, daß ich erst gegen Ende des Jahres 1869 der Lösung des allgemeinen Umkehrungsproblems diejenige Form geben konnte, in der ich sie von da an in meinen Vorlesungen vorgetragen habe.

Die Schwierigkeiten, denen man in der Theorie der Abelschen Transzendenten begegnet ist, rühren teilweise daher, daß man sofort auf die Theorie der Integrale einging, ohne zu bedenken, daß man die Eigenschaften der zu integrierenden algebraischen Funktionen noch nicht genügend erforscht hatte. Bei den hyperelliptischen Integralen ließ sich das Meiste mittels wirklicher Durchführung der Rechnungen erledigen, bei beliebigen Abelschen Integralen ist dies jedoch unmöglich. Es muß daher der Theorie der Abelschen Integrale eine ausführliche Untersuchung der algebraischen Funktionen vorangeschickt werden."

Bisher war die Weierstraßsche Theorie allgemein nur durch das Referat von Brill und Noether im Jahresbericht III der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (1892/93) bekannt geworden. Daß Hettner und Knoblauch große Schwierigkeiten zu überwinden hatten, bis sie das Werk abschließen konnten, ist aus der langen Dauer des Druckes zu erkennen. Jetzt, wo das stolze Gebäude fertig ist, kann sich jeder seiner Festigkeit und seiner Schönheit freuen und der selbstlosen Arbeit der pietätvollen beiden Schüler des großen Meisters warmen Dank aussprechen. Lp.

Fr. Engel. Sophus Lie (Traduzione di Ugo Amaldi). Batt. G. **40**, 325-363.

Vergl. das Referat über die in Leipz. Ber. **51** erschienene Rede: F. d. M. **30**, 22, 1899. Lp.

Nekrolog für Friedrich August. Leopoldina **36**, 46-47 (1900).

Nachträglich werden wir auf die kurze Notiz aufmerksam gemacht, in der einige Nachrichten über das Leben unseres treuen ehemaligen Mitarbeiters gegeben sind. Friedrich Wilhelm Oskar August (geb. 17. Septbr. 1840 zu Berlin, gest. ebenda 8. Jan. 1900), promovierte 1862 in Berlin (Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis), war Lehrer für Mathematik an dem Friedrichs-Realgymnasium und am Humboldts-Gymnasium, seit 1877 ausschließlich Professor an der vereinigten Artillerie- und Ingenieurschule, wo er schon vorher unterrichtet hatte. Seine Arbeiten sind im Jahrbuche regelmäßig besprochen worden. Um das Gedeihen des Jahrbuchs hat er sich sehr verdient gemacht. Lp.

E. Beltrami. Opere matematiche di Eugenio Beltrami. Pubblicate per cura della Facoltà di Scienze della R. Università di Roma. Tomo primo. Con ritratto e biografia dell' autore. Milano: Ulrico Hoepli. XII + 437 S. 4°.

In derselben würdigen Ausstattung wie die Werke Brioschis erscheinen nun auch die gesammelten Schriften Beltramis. Der Vorsitzende der Fakultät der Wissenschaften bei der Universität in Rom, Tonelli, teilt in der Vorrede mit, daß ein Ausschuß, bestehend aus ihm selbst, Cremona und Castelnuovo, mit der Sorge für die Fertigstellung der Ausgabe von der Fakultät betraut worden ist, daß ferner Bianchi, Burgatti, Cerruti, Dini, Pittarelli, Reina, Volterra ihre Mitwirkung zugesagt haben. Voraussichtlich werden mindestens vier Bände erscheinen.

Bei dem Abdrucke wird die chronologische Folge des Erscheinens der Schriften so genau wie möglich innegehalten, damit der Leser Schritt für Schritt die Entwicklung der Gedanken des Autors besser verfolgen kann. Der Vorrang wird hierbei den wissenschaftlichen Originalarbeiten eingeräumt; dann folgen die Übersetzungen, die Biographien, die bibliographischen Kritiken und andere ähnliche Schriften, falls dieselben zum Wiederabdruck für geeignet erachtet werden.

Der gegenwärtige Band umfaßt 26 Artikel aus den Jahren 1861 bis 1868; obschon sie nur die ersten acht Jahre der wissenschaftlichen Forschung Beltramis begreifen, so stellen sie einen erheblichen Posten in der Geschichte der Wissenschaft dar. Man braucht nur darauf hinzuweisen, daß unter anderen folgende Abhandlungen hierher gehören: Untersuchungen aus der Analysis in ihrer Anwendung auf die Geometrie (1864/65). Über die Biegung der Regelflächen (1865). Lösung der Aufgabe: die Punkte einer Oberfläche auf eine Ebene so abzubilden, daß die geodätischen Linien durch gerade Linien dargestellt werden (1865). Komplexe Variabeln auf einer beliebigen Oberfläche (1867).

Versuch einer Deutung der nichteuklidischen Geometrie (1868). Grundlegende Theorie der Räume von konstanter Krümmung (1868/69).

Das Bildnis des Verstorbenen ziert den ersten Band seiner Werke. Die Gedächtnisrede des nun auch schon dahingeschiedenen Cremona (vergl. F. d. M. **31**, 23, 1900) leitet den Band stimmungsvoll ein. „Mir und denen, die mit mir das Alter Beltramis überschritten haben, bleibt kein Trost, es sei denn die Erinnerung an seine werte und köstliche Freundschaft. Aber die Jüngeren mögen nicht vergessen, daß sie einen Schatz zu hüten haben: das Muster eines makellosen Lebens, ganz dem Kultus der Wissenschaft und der Schule der Pflicht hingegeben, und das ruhmreiche Andenken an einen der höchst stehenden Geister, eine Ehre für sein Vaterland und für die Menschheit.“ Der geistige Schatz wird in den gesammelten Werken der Nachwelt bewahrt. Lp.

E. Pascal. Eugenio Beltrami. Wiad. mat. **6**, 1-55.

Polnische Übersetzung der in Lomb. Ist. Rend. (2) 34, 57-108 veröffentlichten Charakteristik der wissenschaftlichen Leistungen Beltramis. Vgl. F. d. M. **32**, 17-18, 1901. Dn.

J. Bertrand. Éloges académiques. Nouvelle série: Poinsot, Cosson, Chasles, Cordier, Paris, Cauchy, Tisserand, Viète, Galilée, D. Papin, Clairaut, Euler, d'Alembert et Lagrange, Abel, Galois, Faraday, Pasteur. Avec un éloge historique de Joseph Bertrand, par G. Darboux. Paris: Hachette. LI + 411 S. 16mo.

G. Darboux. Un enfant prodige: J. Bertrand. Mathesis (3) **2**, 167-170.

A. Birk. Wilhelm Keck. Biogr. Jahrb. u. Deutscher Nekrolog **5**, 185-186.

Geb. 7. Juli 1841 zu Kniestedt bei Salzgitter, gest. 20. Juli 1900 in Hannover. Nach Vollendung der Schulzeit am Andreanum zu Hildesheim studierte Keck auf dem Polytechnikum in Hannover (1858/62), arbeitete in der Praxis und wurde 1870 der Nachfolger Ritters auf dem Lehrstuhle für Mechanik. Er verfaßte hier das Werk: „Vorträge über Mechanik als Grundlage für das Bau- und Maschinenwesen“. Von 1875 an war er auch Redakteur der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover. Lp.

A. Viterbi. Necrologio. Camillo Tito Cazzaniga. Loria Boll. Bibl. **5**, 87-90.

Von diesem zu früh verstorbenen, vielversprechenden italienischen Mathematiker (1872-1900) sind 16 gedruckte Arbeiten vorhanden, deren wichtigste sich auf die Determinanten von unendlicher Ordnung beziehen. Vi.

Angaben über einige im Jahre 1900 verstorbene Mathematiker. Biogr. Jahrb. u. Deutscher Nekrolog 5, 78-127.

Eugen Dreher (* Stettin, 21. I. 41, † Berlin 6. III. 00), Astronom und Philosoph.

Joh. Friedr. Adalbert Gebhardt (* Neu-Ebersbach bei Löbau 9. X. 30, † Leipzig 13. I. 00), Mathematiker, Prof. und Konrektor am Nikolaigymn. Leipzig.

Karl Josef Küpper († 72 Jahre alt, Septbr. 00), Professor der Geom. an der deutschen Techn. Hochschule in Prag.

Rudolf Mayer (* Wien 25. III. 61, † 30. XI. 00), Prof. für Baumechanik und graphische Statik an der Techn. Hochschule in Wien.

Josef Wex (* München 14. XI. 34, † 26. VIII. 00), Mathematiker, Meteorolog und Dichter. Lp.

E. Lampe. **Richard Doergens †.** Deutsche Math.-Ver. 11, 57-68.

Richard Doergens, geb. am 13. Dezember 1839 zu Elberfeld, besuchte die Gewerbeschule daselbst und studierte von 1856-1859 auf dem Königlichen Gewerbeinstitut zu Berlin, wo er u. a. bei Weierstraß und Dove hörte. Von letzterem empfohlen, berechnete er die von den Gebrüdern Hermann und Robert von Schlagintweit in Indien und Hochasien gemachten meteorologischen, hypsometrischen und trigonometrischen Beobachtungen. Im Jahre 1860 machte er in Begleitung des preußischen Konsuls Wetzstein zu Damaskus eine wissenschaftliche Reise nach dem Hauran im Ostjordanlande. Nachdem er 1865 seine Feldmesserprüfung bestanden, wurde er Assistent bei dem Königlichen Gewerbeinstitute, 1869 Dozent und 1874 etatsmäßiger Lehrer der Gewerbe-Akademie, Dr. phil. zu Göttingen und 1878 Professor der Geodäsie an der technischen Hochschule. Er starb am 5. Februar 1901 zu Berlin. Seine wissenschaftlichen Arbeiten betreffen die Geodäsie. M.

G. Fr. Fitzgerald. **The scientific writings of the late George Francis Fitzgerald. Collected and edited with a historical introduction by Joseph Larmor.** Dublin: Hodges, Figgis & Co.; London: Longmans, Green & Co. LXIV + 576 S.

In diesem Bande erscheinen die Veröffentlichungen des verstorbenen Professors Fitzgerald unter der sachkundigen Leitung von Larmor, der nicht nur erklärende Noten hinzugefügt, sondern auch eine sehr interessante Einleitung geliefert hat. Gbs. (Lp.)

A. Pringsheim. **Charles Hermite.** Münch. Ber. 1902, 262-268.

Der Nachruf gilt dem Nestor der französischen Mathematiker, der länger als ein halbes Jahrhundert durch Schrift und Wort den Ausbau und die Verbreitung mathematischen Wissens in hervorragender Weise

gefördert hat. Nach vorangehenden kurzen biographischen Notizen gibt der Verf. eine Würdigung der wissenschaftlichen Leistungen Hermites. Diese erstrecken sich über die verschiedensten Gebiete der Analysis, Algebra und Zahlentheorie. Auf gewissen Grenzgebieten sich bewegende Arbeiten sind von ganz hervorragender Bedeutung, z. B. diejenigen, welche sich mit der Theorie der elliptischen und hyperelliptischen Transzendenten und deren Beziehungen zur Algebra und Zahlentheorie beschäftigen. M.

E. Borel. Charles Hermite. 24 décembre 1822—14 janvier 1901. Annuaire des math. XI-XXII.

Mit dem Bildnis des Verewigten geschmückt, dient diese von einem begeisterten Schüler geschriebene kurze Biographie als Schmuck des von Laisant und Buhl herausgegebenen Annuaire des mathématiciens 1901/2. Lp.

G. Loria. L'œuvre mathématique d'Ernest de Jonquières. Mit Bildnis. Bibl. Math. (3) 8, 276-322.

Ernest de Jonquières wurde am 3. Juli 1820 in Carpentras geboren und starb in Monans-Sartoux bei Grasse am 12. August 1901. Schon 1841 zum „enseigne de marine" ernannt, wurde er 1846 Schiffsleutnant, 1858 Fregattenkapitän, 1865 Schiffskapitän, 1874 Kontreadmiral und 1879 Vizeadmiral. Bis zu seiner im Jahre 1885 erfolgten Pensionierung hat er auch verschiedene andere Ämter bekleidet, die mit dem Berufe des Seemanns mehr oder weniger verwandt sind.

An der Seite seiner amtlichen Geschäfte ist Jonquières sein ganzes Leben als mathematischer Forscher tätig gewesen und hat auf diesem Gebiete etwa 150 größere oder kleinere Schriften veröffentlicht. Die wichtigsten derselben sind der höheren Geometrie gewidmet. Mit großem Erfolge hat sich Jonquières der Methoden der neueren Geometrie bedient, um eine große Anzahl von mehr elementaren geometrischen Sätzen aufzufinden oder zu beweisen. Dazu hat er wertvolle Beiträge zur Ausbildung der höheren Geometrie selbst gebracht, u. a. den sog. „Satz von Jonquières", der lehrt, wie man die allgemeine Kurve m-ter Ordnung konstruieren kann, wenn $\frac{1}{2}m(m+3)$ Punkte derselben gegeben sind. Wichtig sind auch seine Arbeiten auf dem Gebiete der abzählenden Geometrie; hier hat er den sog. „Index" oder die „erste Charakteristik" eingeführt; freilich waren die dadurch erhaltenen Resultate im allgemeinen nicht richtig, so daß seine Methode erst durch Hinzufügung der „zweiten Charakteristik" von Chasles verbessert werden mußte. Auch die Theorie der algebraischen Flächen verdankt Jonquières wertvolle Beiträge. — Mehr im Vorübergehen hat sich Jonquières mit algebraischen Gegenständen beschäftigt, und gegen das Ende seines Lebens interessierte er sich lebhaft für zahlentheoretische Fragen, darunter auch für die Theorie der periodischen Kettenbrüche. E.

G. Loria. Elenco delle pubblicazioni matematiche di Ernesto de Jonquières. Loria Boll. Bibl. 5, 71-82.

Fr. Lorentz. Ernst Gustav Kirsch†. Deutsche Math.-Ver. 11, 188 bis 189.

Ernst Gustav Kirsch, geb. 13. September 1841 in Sagan in Schlesien, 1866 Lehrer der Mathematik und Mechanik an der Provinzialgewerbeschule zu Görlitz und seit 1874 Professor an der königlichen Gewerbeakademie zu Chemnitz, starb daselbst am 8. Januar 1901. Seine Schriften gehören der angewandten Mechanik, der Graphostatik und der praktischen Physik an. M.

A. W. Wassilieff. P. S. Nasimow. (Nachruf.) Kasan Ges. (2) 12, 1-6 (Russisch).

P. S. Nasimow, geb. 1851, war von 1886 bis 1889 Dozent der Mathematik an der Universität Warschau, von 1889 bis zu seinem Tode (1901) Professor der Mathematik an der Universität Kasan. Seine zwei Hauptarbeiten: „Über Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit n unabhängigen Veränderlichen und 2. Ordnung mit 2 unabhängigen Veränderlichen", 1880, und „Über Anwendungen der Theorie der elliptischen Funktionen auf die Zahlentheorie", 1885 (Auszug Annales de l'Ecole Normale 1888), wurden von der Universität Moskau mit dem Braschmanns-Preis gekrönt. Letztere Abhandlung war zugleich seine Doktor-Dissertation. Wassilieff gibt auch eine Liste der Arbeiten von P. S. Nasimow. Si.

A. P. Przeborski. Peter Michailowitsch Prokrovsky. (Nachruf.) Kiew. Univ. No. 9, 1-26 (Russisch).

In dem Jahresbericht der Physiko-mathematischen Gesellschaft Kiew wird der in F. d. M. 32, 29 besprochene Nachruf abgedruckt. Si.

P. Stäckel. Franz Schmidt†. Deutsche Math.-Ver. 11, 141-146.

Der um die Geschichte der nichteuklidischen Geometrie hochverdiente Baumeister Franz Schmidt wurde am 14. Februar 1827 zu Temesvár geboren. Seine Familie stammte aus dem Széklerlande, der Heimat der Bolyai. Seitdem Hoüel sich in einem Briefe vom 21. Februar 1867 an Schmidt gewandt, um näheres über die beiden Bolyai zu erfahren, betrachtete es Schmidt als seine Lebensaufgabe, seinen beiden Landsleuten Wolfgang und Johann Bolyai in der ganzen mathematischen Welt die gebührende Anerkennung zu verschaffen. Das erste Resultat seiner For-

schungen waren die bekannten biographischen Notizen über beide in Grunerts Archiv 1868. Sein Studium des Johann Bolyaischen Nachlasses ergab weitere Resultate. Bis in das hohe Alter hinein wirkte Schmidt für die heilige Sache der Bolyai. Er starb zu Budapest am 7. März 1901. M.

E. Becker. Wilhelm Schur †. Deutsche Math.-Ver. **11**, 292-301.

Adolf Christian Wilhelm Schur wurde am 15. April 1846 in Altona geboren, studierte in Kiel, Göttingen und Berlin Astronomie, wirkte von 1868-72 im Zentralbureau als Assistent der europäischen Gradmessung und ging nach vorübergehender Beschäftigung an der Berliner Sternwarte im Juli 1873 nach Straßburg. Hier wurde er zuerst Assistent, dann Observator und seit März 1882 stellvertretender Direktor der Sternwarte. Auch hielt er seit 1881 astronomische Vorlesungen an der Universität bis 1886. Am 1. April 1886 folgte Schur einem ehrenvollen Rufe als Direktor der Sternwarte und ordentlicher Professor der Astronomie in Göttingen. Er starb am 1. Juli 1901. In dem Nachruf wird ausführlich über die Arbeiten, welche Schur als praktischer Astronom geleistet hat, und über seine wissenschaftliche Tätigkeit berichtet (vgl. F. d. M. **32**, 31, 1901). M.

A. Macfarlane. Peter Guthrie Tait. Physical Review **15**, 51-64; mit Bildnis.

Über die Lebensumstände Taits ist nach mehreren Nekrologen in F. d. M. **32**, 32-33, 1901 berichtet worden. Der gegenwärtige Nachruf zeichnet sich durch genaueres Eingehen auf die einzelnen Arbeiten aus; für das Verständnis der Leistungen Taits auf dem Gebiete der Quaternionen ist ja Macfarlane der geeignete Fachmann. Das Urteil, daß die dem Verstorbenen erteilten Ehrungen seiner Größe als Mathematiker und Physiker nicht entsprächen, dürfte aber nicht von allen Unparteiischen geteilt werden. Lp.

Désiré André. Liste des travaux scientifiques d'Eugène Vicaire. Bull. Soc. Philom. (9) **4**, 123-126.

Der im Jahre 1901 verstorbene Professor an der École Nationale Supérieure des mines Eugène Vicaire hat eine reiche und mannigfaltige schriftstellerische Tätigkeit entwickelt. Eine eingehende Analyse seiner Arbeiten hat er selbst in einer „Notice sur les travaux scientifiques de M. Eugène Vicaire", Paris: Gauthier-Villars 1896, veröffentlicht. Hier werden nur die Titel seiner Arbeiten angeführt. M.

C. A. Laisant. Xavier Antomari. Nécrologie. Nouv. Ann. (4) **2**, 239-240.

Kurze Ankündigung des Todes Antomaris, der seit 1896 Mitherausgeber der Nouvelles Annales war. M.

C. A. LAISANT et H. FEHR. A. Cornu†. (Avec portrait de ce savant.) Ens. math. 4, 212-215.

Enthält nur wenige Zeilen der Würdigung Cornus, des Fortsetzers vor allem der Arbeiten von Arago und Fresnel. Tn.

J. THIRION. Alfred Cornu. Rev. des qu. sc. (3) 2, 127-146.

Übersicht über sein Leben und seine Arbeiten. Mn.

BASSOT, L. POINCARÉ. Discours prononcés aux funérailles de M. A. Cornu le mercredi 16 avril 1902. Annuaire du Bur. des Longit. 1903, D 1-11.

S. P. THOMSON. Obituary notice of Prof. Alfred Cornu. Nature 66, 12-13.

J. STARK. Alfred Cornu. Nachruf. Naturw. Rundsch. 17, 347-348.

Geb. 6. März 1841 in Châteauneuf, gest. 12. April 1902 in Paris, Physiker, von 1867 an Professor der École Polytechnique, 1872 Mitglied der Akademie. Lp.

À la mémoire de François Deruyts, Docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université de Liége, membre correspondant de l'Académie royale de Belgique. 19 février 1864—23 février 1902. Bruxelles: Hayez. 25 S. 8°.

Die dem Andenken von Fr. Deruyts gewidmete kleine Schrift enthält die bei der Begräbnisfeier gehaltenen Reden von Dwelshauvers-Dery, P. de Heen, C. Le Paige, A. Galopin, J. Renard, J. Beaupain und das Verzeichnis seiner Schriften aus den Jahren 1886-1901. Voran geht ein sehr gutes Bildnis des früh verstorbenen Mathematikers. Geboren zu Lüttich am 19. Februar 1864, machte er seine Studien an der Universität dieser Stadt und war 1889 bis 1895 Assistent des dortigen physikalischen Laboratoriums, während er 1890 mit dem ersten Universitätspreise gekrönt wurde. Gleichzeitig wurde er 1892 Repetitor für Wahrscheinlichkeitsrechnung und analytische Mechanik. Zum Ersatz des erkrankten Graindorge wurde er 1895 mit der Vorlesung über Mechanik betraut; 1896 erhielt er den Lehrauftrag für die höhere Geometrie, seine Lieblingswissenschaft; an seinem Todestage (23. Februar 1902) bekam er die Nachricht von seiner Ernennung zum Professor der Fakultät. Mit seinem frühzeitigen Ableben ist das Zusammenarbeiten der Brüder Jacques und François Deruyts zerstört. Über die mathematischen Arbeiten des so früh Verstorbenen hat das Jahrbuch Berichte aus der

Feder seines belgischen Mitarbeiters Mansion regelmäßig gebracht. Die Rede von Le Paige steht auch in Belg. Bull. 1902, 168-171. Lp.

A. Berberich. Hervé Auguste Étienne Faye†. Nachruf. Naturw. Rundsch. 17, 425-426.

Geboren in St. Benoît du Sault (Dep. Indre) 1. Oktober 1814, gest. 5. Juli 1902 in Paris; entdeckte 1843 den periodischen Kometen, der nach ihm benannt ist; wurde 1847 Mitglied der Akademie, war Lehrer an der École Polytechnique und bekleidete in der Folge eine große Anzahl von Ämtern. Lp.

Bouquet de la Grye, Bassot, Loewy, Janssen, van de Sande Bakhuyzen. Discours prononcés aux Funérailles de M. Faye le lundi 7 juillet 1902. Annuaire du Bur. des Longit. 1903, D 13-34.

W. E. P. Obituary notice of M. Hervé Faye. Nature 66, 277.

Außer diesen Nachrufen für den verstorbenen französischen Astronomen, welche die verschiedenen Seiten seiner Tätigkeit beleuchten, befindet sich auch noch einer in Leopoldina 38, 97. Lp.

R. Pitoni. Riccardo Felici. Periodico di Mat. (2) 5, 69-72.

Der Physiker Felici (geb. zu Parma 11. Juni 1819, gest. zu S. Alessio bei Lucca 20. Juli 1902) studierte in Pisa bei Mossotti und Matteucci, wurde Assistent des letzteren 1846 und sein Nachfolger auf dem Lehrstuhl für Physik 1859, von dem er sich 1893 zurückzog. Seine Arbeiten gehören zum großen Teile der mathematischen Physik an. Bekannt ist er der ganzen wissenschaftlichen Welt auch als der langjährige Leiter des Nuovo Cimento. Eine Liste seiner Schriften ist am Schlusse des Aufsatzes gegeben. Lp.

M. Hamburger. Gedächtnisrede auf Immanuel Lazarus Fuchs (geb. am 5. Mai 1833, gest. am 26. April 1902). Sonderabdruck aus Arch. d. Math. u. Phys. (3) 3, 177-186. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. 16 S. 8° mit Portrait.

Die am 5. Mai 1902 im Mathematischen Verein der Universität Berlin gehaltene Gedächtnisrede ist ein glänzendes Zeugnis für die Dankbarkeit und Verehrung, die der Vortragende seinem plötzlich dahingeschiedenen Freunde gezollt hat, dem er nur zu bald in den Tod nachfolgen sollte.

Immanuel Lazarus Fuchs wurde am 5. Mai 1833 zu Moschin in der Provinz Posen geboren, besuchte bis 1853 das Friedrich Wilhelms-Gymnasium zu Posen, studierte in Berlin, wo er bei Dirichlet, Kummer, Borchardt und Weierstraß hörte, wurde dann Lehrer an der Friedrichs-

Werderschen Gewerbeschule zu Berlin und habilitierte sich daselbst 1865 an der Universität. Die im Programm der genannten Schule zu Ostern 1865 veröffentlichte Abhandlung: „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten“ wurde der Ausgangspunkt einer der wichtigsten Disziplinen der höheren Analysis und hat den Namen Fuchs in der Geschichte der Mathematik berühmt gemacht. Der Vortragende schildert die Bedeutung der neuen Theorie der linearen Differentialgleichungen für einen großen und wichtigen Teil der analytischen Forschung und erwähnt die ferneren folgenreichen Untersuchungen ihres Begründers. Bald nach dem Erscheinen obiger Programmabhandlung wurde Fuchs außerordentlicher Professor, ging 1869 als ordentlicher Professor nach Greifswald, 1874 nach Göttingen und im folgenden Jahre nach Heidelberg. Von hier kehrte er 1884 nach Berlin zurück. Mit einer Charakteristik des Verstorbenen als Lehrer und Mensch schließt die pietätvolle Rede. M.

G. Wallenberg. Lazarus Fuchs†. Nachruf. Naturw. Rundsch. **17**, 293-296.

Eine Schilderung seines Lebens, ein Bild seines wissenschaftlichen Schaffens, eine Charakteristik seiner Kunst der Problemstellung und der Darstellung und eine kurze Zeichnung seiner Charaktereigenschaften aus der Feder eines dankbaren Schülers. M.

G. B. M. Obituary notice of Lazarus Fuchs. Nature **66**, 156-157.

Kurze Darstellung der Verdienste von Fuchs um die Theorie der linearen Differentialgleichungen. Lp.

C. Jordan. Notice sur les travaux de M. Lazare Fuchs. C. R. **134**, 1081-1083.

Der Verf. schildert die Verdienste des Dahingeschiedenen um die Theorie der Differentialgleichungen und um die Funktionentheorie. M.

E. J. Wilczynski. Lazarus Fuchs. American M. S. Bull. (2) **9**, 46-49.

Ein Schüler des Verstorbenen rühmt seine Verdienste um die Theorie der linearen Differentialgleichungen. Lp.

A. Denizot. Immanuel Lazarus Fuchs. Wiad. mat. **6**, 245-251. (Polnisch.)

Nachruf für I. L. Fuchs mit einem Verzeichnis seiner wissenschaftlichen Arbeiten.

G. L(ORIA). Necrologio. Emanuele Lazzaro Fuchs. Loria Boll. Bibl. 5, 126-127. Vi.

S. GÜNTHER. August Heller. Mit Bildnis. Bibl. Math. (3) 3, 386-394.

August Heller wurde am 6. August 1843 in Budapest geboren und starb daselbst nach längerem Leiden am 4. September 1902. Nachdem er 1866 das Polytechnikum in Budapest absolviert und 1868 die Prüfung für das Lehramt bestanden hatte, wurde er Assistent am genannten Polytechnikum, studierte 1869 in Heidelberg, war 1870-1898 Professor der Mathematik und Physik an der Realschule seiner Geburtsstadt, zugleich 1872-1875 Privatdozent am Polytechnikum und seit 1894 Oberbibliothekar der Ungarischen Akademie der Wissenschaften.

Heller hat eine große Anzahl von Schriften vorzugsweise physikalischen und meteorologischen Inhalts veröffentlicht, von denen die meisten ungarisch geschrieben sind. Sein Hauptwerk ist die „Geschichte der Physik von Aristoteles bis auf die neueste Zeit“ in zwei Bänden (1882, 1884); die von ihm in Angriff genommene „Geschichte der Physik in Deutschland“, die den letzten Band der bekannten „Geschichte der Wissenschaften in Deutschland“ bilden würde, ist leider unvollendet geblieben. E.

O. GEBHARDT. Gedächtnisrede auf Herrn Professor Dr. Max Mögelin. Pr. Königstädtisches Realgymn. Berlin 1902, 15-20.

Max Bruno Mögelin, geb. am 2. Januar 1855 zu Landsberg an der Warthe, gest. zu Berlin 1. Februar 1902, von 1880 bis zu seinem Tode Lehrer für Mathematik und Physik am Königstädtischen Realgymnasium zu Berlin. Seine Dissertation über Fakultätenkoeffizienten reichte er 1882 bei der philosophischen Fakultät zu Halle a. S. ein und erwarb dadurch den Doktortitel. Lp.

E. R. VON OPPOLZER. Nekrolog Adalbert Safarik. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. 37, 326-327.

Adalbert Safarik, geb. 26. Oktober 1829 in Neusatz (Südungarn), besuchte 1839-45 das akademische Gymnasium in Prag, studierte Chemie, wurde nach verschiedenen Schicksalen 1865 Skriptor an der Prager Technik, 1868 Professor der Chemie, zunächst ebenda, dann 1882 an der tschechischen Universität, seit 1892 Professor für beschreibende Astronomie, nachdem er vorher eine Privat-Sternwarte gebaut hatte. Er starb am 2. Juli 1902. Lp.

R. HAUSSNER. Notizie biografiche su Ernst Schröder. Trad. di G. Vacca. Revue de math. 8, 54-56.

Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder, geb. am 25. November 1841 zu Mannheim, studierte in Heidelberg und Königsberg, wurde 1864 Privatdozent am Polytechnikum in Zürich und Lehrer an der Kantons-

schule daselbst, kehrte 1868 nach Baden zurück, ward Professor am Pro- und Realgymnasium in Baden-Baden und 1874 ordentlicher Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt, 1876 zu Karlsruhe, wo er am 16. Juni 1902 plötzlich am Gehirnschlag starb. Seine wissenschaftliche Arbeit galt in den letzten Jahren der absoluten Algebra. **M.**

G. Bellermann. Gedächtnisrede auf Herrn Professor Dr. Schwannecke. Pr. Königstädtisches Realgymn. Berlin 1902, 3-7.

Heinrich Edmund Schwannecke, geb. 20. August 1845 zu Groß-Rodensleben bei Magdeburg, promovierte in Göttingen 1870 auf Grund einer Dissertation, betitelt: „Über ein mechanisches Problem"; von 1870 bis zu seinem Tode im Januar 1902 war er Lehrer des Königstädtischen Realgymnasiums hauptsächlich für Physik und Chemie. Lp.

Kiefer. Nekrolog. Prof. Dr. Franz Xaver Stoll. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **33**, 143-144.

Geb. 8. Oktober 1834 zu Mainz, gest. 8. Januar 1902 zu Bensheim; studierte in Bonn, war Lehrer am Gymnasium in Gießen 1856-57, in Bensheim 1857-93. Er veröffentlichte mehrere geometrische Abhandlungen in den Programmen des Bensheimer Gymnasiums, vereinzelt in Math. Ann. und Zeitschr. f. Math. u. Phys., war eifriger Mitarbeiter an dem Aufgabenrepertorium der Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr., Verfasser des Lehrbuchs „Die Anfangsgründe der neueren Geometrie" (1872). Lp.

G. Eneström. Gustav Wertheim. Mit Bildnis. Bibl. Math. (3) **3**, 395-402.

Gustav Wertheim wurde am 9. Juni 1843 zu Imbshausen in Hannover geboren, bestand 1862 das Abiturientenexamen und studierte 1862-1866 in Göttingen, Berlin und Heidelberg. In Göttingen erwarb er 1866 die „Facultas docendi", worauf er einige Jahre in verschiedenen Stellen als Privatlehrer tätig war. Im Jahre 1872 wurde er ordentlicher Lehrer an der Realschule der israelititischen Gemeinde in Frankfurt am Main, trat 1900 in den Ruhestand und erlag am 31. August 1902 in Frankfurt am Main einem Schlaganfalle.

Wertheim war ein hervorragender Lehrer und ein fleißiger Schriftsteller; teils als Übersetzer wissenschaftlicher Werke, teils als Zahlentheoretiker und mathematisch-historischer Forscher, ist er literarisch tätig gewesen. Der Verf. erwähnt Wertheims Übersetzungen, verweilt etwas länger bei seinen zahlentheoretischen Arbeiten und berichtet ausführlich über seine mathematisch-historischen Schriften. Diese beziehen sich auf jüdische Mathematiker, auf zahlentheoretische Gegenstände, sowie auf einzelne Punkte der Geschichte der Arithmetik und Algebra oder auf ältere Verfasser auf arithmetischem und algebraischem Gebiete. Wertheims Ver-

dienste um die mathematisch-historische Forschung können so zusammengefaßt werden, daß er sich vorzugsweise damit beschäftigt hat, teils zu erklären, auf welche Weise gewisse, in den Schriften älterer Mathematiker vorkommende Sätze hergeleitet worden sind, teils an einzelnen Punkten die Angaben der Geschichtsschreiber der Mathematik zu berichtigen. E.

Adresse an Herrn Richard Dedekind zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 18. März 1902. Berl. Ber. 1902, 329-331.

Eine Würdigung der Verdienste des Jubilars um die Entwicklung der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren. M.

Adresse an Herrn Dedekind in Braunschweig. Gött. Nachr. (geschäftl. Mitt.) 1902, 75-76.

Glückwunschschreiben der Berliner Mathematischen Gesellschaft zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum des Herrn R. Dedekind. Berl. Math. Ges. Ber. 1, 28-29.

R. Dedekind. Antwort auf das Schreiben der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Berl. Math. Ges. Ber. 1, 34. Lp.

E. Duporcq. Un hommage au colonel Mannheim. Nouv. Ann. (4) 2, 25-27.

Beschreibung des Festes, welches am 14. Dezember 1901 zu Ehren Mannheims stattfand, der nach 42-jähriger ununterbrochener Wirksamkeit als Lehrer der Geometrie an der École Polytechnique von dieser schied. M.

Rouché. Discours prononcé à la cérémonie de l'École Polytechnique en l'honneur du colonel Mannheim. Nouv. Ann. (4) 2, 145-150.

Die Rede, welche Rouché bei dem Feste zu Ehren Mannheims (s. d. vorstehende Referat) gehalten hat, verherrlicht die Verdienste des Gefeierten um die Mathematik, besonders um die kinematische Geometrie. Mannheims erste wissenschaftliche Arbeit füllte eine Lücke aus in der Theorie der Transformation durch reziproke Polaren, die von Poncelet geschaffen war. Darauf führte ihn die Transformation durch reziproke Radien zu neuen Resultaten. Die Betrachtung der Bogen ebener und sphärischer Kurven als Enveloppen von Kreisen und die geometrische Konstruktion der Krümmungszentren beschäftigten alsdann seinen Scharfsinn. Aber der wichtigste Teil seines Schaffens galt der Begründung und Ausbildung der kinematischen Geometrie. Ihr sind die beiden Werke Mannheims gewidmet: Cours de géométrie descriptive und Principes et développements de géométrie cinématique. Die Rede gibt den Inhalt

des letzteren Werkes wieder und hebt seine Bedeutung für die reine Geometrie hervor. M.

Lord Rayleigh. Scientific papers by John William Strutt, Baron Rayleigh. Vol. III. 1887-1892. Cambridge: At the University Press. XII u. 596 S. gr. 8°.

Der dritte Band der wissenschaftlichen Abhandlungen von Lord Rayleigh umfaßt die Nummern 142 bis 196 aus den Jahren 1887 bis 1892 (vergl. F. d. M. **31**, 29, 1900). Wie in den vorigen beiden Bänden erstrecken sich die behandelten Gegenstände über weite Gebiete. So handeln die Artikel 149 und 150 über die Reflexion des Lichtes an einer krystallinischen Doppelplatte und erklären einige merkwürdige von Stokes beobachtete Erscheinungen; außerdem offenbaren sie einige unvermutete Eigentümlichkeiten hinsichtlich der Polarisation. Der Artikel 148 über die Wellentheorie des Lichtes aus der Encyclopaedia Britannica von 1888 gibt auf S. 47-189 einen vortrefflichen Überblick über die physikalische Optik. Erwähnung verdient auch der Artikel 185, in welchem gezeigt wird, daß das von Jamin gefundene, vom Wasser unter dem Polarisationswinkel reflektierte Licht einer dünnen Fettschicht zuzuschreiben ist; ebenso der Artikel 157 „Über die Grenze der Interferenz, wenn das Licht von sich bewegenden Molekeln ausstrahlt". Einige Aufsätze gehen auf Fragen der Kapillarität ein. Plateaus „Oberflächen-Viskosität" wird in Artikel 170 auf fettige Verunreinigung von Wasseroberflächen zurückgeführt. Die Theorie der Oberflächenkräfte wird in den Nummern 176, 186, 193 dargelegt, und es wird auf T. Youngs bemerkenswerte Schätzungen molekularer Größen hingewiesen. Die relativen Dichtigkeiten von Wasserstoff und Sauerstoff und die Zusammensetzung des Wassers bilden die Gegenstände der Artikel 146, 153, 157. Aus der Akustik ist die bedeutendste Arbeit die über die Glocken (164). Die Arten der Schwingungen und die zugehörigen Obertöne zahlreicher Glocken werden verzeichnet. Da viele der Aufsätze in Deutschland nicht leicht zugänglich sind, wird die Sammlung der Schriften des exakten Forschers sich als sehr nützlich erweisen. Lp.

G. Loria. Le trasfigurazioni di una scienza. Discorso, pronunziato addi 15. Novembre 1900 per la solenne inaugurazione dell' anno accademico 1900-1901 nell' Aula Magna della R. Università di Genova. 2ª edizione accresc. di note. Mantova: G. Mondovi. 26 S. 8°.

Diese schwungvolle Rede schildert in geistreicher Weise und in fast poetischer Diktion die Wandlungen, welche die Mathematik im Laufe der Jahrtausende erfahren hat. Die Anfänge unserer Wissenschaft bei Phöniziern, Babyloniern und Ägyptern, die goldene Periode der griechischen Mathematik, die darauf folgende Zeit des Verfalls, die dürftige Pflege seitens der Römer, das Wiedererwachen der Wissenschaft in Europa,

zunächst in Italien, die Verbindung der Wissenschaft der Zahl mit der der Ausdehnung im 17. Jahrhundert, die Erfindung der Infinitesimalrechnung, ihre Ausbildung im 18. Jahrhundert, das kritische 19. Jahrhundert: alles das wird uns in einer Reihe interessanter Bilder vor Augen geführt (vergl. F. d. M. **31**, 4, 1900). M.

G. Loria. Donne matematiche. Lettura tenuta nella Sala maggiore della R. Accademia Virgiliana la sera del 28 Dicembre 1901. 2ª edizione accresc. di note. Mantova: G. Mondovi, 27-55.

In blühender Rede verherrlicht der Verf. die Frauen, welche sich um die Mathematik besondere Verdienste erworben haben. Den Reigen beginnt die unglückliche Hypatia, die Tochter des Theon von Alexandrien, welche i. J. 415 bei einem Volksaufstande vom christlichen Pöbel zerrissen wurde. Ihr folgte eine große Zahl von Damen, welche lieber schriftstellerisch in der Mathematik hervortraten, als ihrem eigentlichen Berufe „das Haus zu hüten und Wolle zu spinnen" folgten. Rebière hat sie uns in seinem Buche: „Les femmes dans la science" (2. éd. Paris 1897) genannt. Die Marquise du Châtelet, Maria Gaetana Agnesi, Caroline Herschel, Sophie Germain, Sophie Kowalewski sind unter ihnen die bekanntesten. M.

E. Picard. Le premier Chapitre d'un rapport sur quelques progrès récents dans les Sciences. Darb. Bull. (2) **26**, 37-53.

Gibt zunächst einen sehr gedrängten Überblick über die mehr philosophischen Studien und Ergebnisse der letzten Jahrzehnte betreffend die Grundlagen der Analysis und der Geometrie (S. 37—42) und behandelt darauf die neueren Untersuchungen über analytische Funktionen i. a. und über gewisse besondere Funktionen, auch die Vertiefung des Funktionsbegriffes in voller Allgemeinheit, endlich (S. 46—53) nach einem Blick auf die Entwicklung der Zahlentheorie wird auch der Entwicklung der mathematischen Theorien der Himmelsmechanik gedacht, insbesondere der Forschungen von Tisserand und Poincaré, sowie des neueren Ausbaus der physischen Himmelskunde. Tn.

C. A. Laisant, Ad. Buhl. Annuaire des mathématiciens 1901-1902, publié sous la direction de MM. C.-A. L. et Ad. B. Paris: C. Naud. XII + 470 S. 8°.

Ein Adreßbuch aller Mathematiker der ganzen Erde soll das Buch sein. Daher wird der Hauptteil (S. 1-374) durch das alphabetische Namenverzeichnis eingenommen. Außer diesem wesentlichen Bestandteile enthält das Buch nach der Einleitung, welche sich über den Zweck und die Anlage des Werkes ausläßt, eine Biographie Hermites von Borel. Hinter dem Namenverzeichnis stehen unter dem Titel Nekrologie die

Namen einzelner in den letzten Jahren verstorbener Mathematiker, ohne daß ein Prinzip der Auswahl erkennbar ist. Dann folgt eine Liste wissenschaftlicher Gesellschaften und Vereine, alphabetisch nach den Ländern geordnet; hierauf eine Liste periodischer Veröffentlichungen in gleicher Anordnung. Den Beschluß machen „wissenschaftliche Notizen", d. h. sechs Originalabhandlungen.

Als erster Versuch zu einem Adressenverzeichnis aller lebenden Mathematiker, von denen, wie die Vorrede sagt, mehr als 6000 aufgenommen sind, kann man das Buch gelten lassen. Daß es weder vollständig, noch zuverlässig in seinen Angaben ist, könnte man der Unvollkommenheit des ersten Versuches zuschreiben. Allein durch systematische Benutzung der vorhandenen Hülfsmittel hätten doch viele Lücken ergänzt, zahlreiche Unrichtigkeiten beseitigt werden können. Unser Jahrbuch ist in der Liste der periodischen deutschen Veröffentlichungen nicht erwähnt; für die Revue semestrielle dagegen haben die Herausgeber bei einem der Redakteure dieser Zeitschrift, welche ähnliche Zwecke verfolgt, einen Artikel bestellt, der ihre Vorzüge zu beleuchten hat. Wenn man schon die Aufnahme eines Nekrologs für einen Mathematiker von der Bedeutung Hermites billigen kann, so sind wissenschaftliche Artikel, die in jeder Zeitschrift hätten erscheinen können, für einen Kalender ein Ballast. Bezüglich der an einen Mathematiker-Kalender zu machenden Anforderungen stellt der nachfolgend besprochene Artikel von Eneström beachtenswerte Grundsätze auf, und es ist zu wünschen, daß ein nach diesen Prinzipien bearbeiteter Kalender geringeren Umfanges öfter erscheine; dann wird auch Gelegenheit vorhanden sein, die Versehen früherer Angaben zu berichtigen. Über die einzelnen wissenschaftlichen Beigaben wird in den betreffenden Abschnitten berichtet. Lp.

G. Eneström. Wie soll ein Mathematiker-Kalender zweckmäßig bearbeitet werden? Bibl. Math. (3) 3, 226-234.

Die hier gestellte Frage ist durch den im Jahre 1902 erschienenen „Annuaire des mathématiciens" veranlaßt worden. Die Grundsätze, die bei der Bearbeitung dieses Buches maßgebend waren, kann der Verf. nur zum Teil billigen, und als Hauptzweck eines Mathematiker-Kalenders gibt er an, die Namen und die Adressen der Mathematiker zu bringen, die in ihrem Fache literarisch tätig sind. Ferner untersucht er, welche Angaben noch im Mathematiker-Verzeichnisse eingeführt werden sollen, und deutet an, welche Notizen sonst in einer solchen Arbeit angebracht sein können. E.

H. Schotten. J. C. V. Hoffmann. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 33, 4-9.

Bei der Übernahme der Redaktion der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht gibt der neue Leiter einen Abriß des Lebensganges des zurücktretenden Gründers und bisherigen Redakteurs (geb. 24. Dezbr. 1825 zu Mauna bei Meißen). Lp.

H. SCHOTTEN. Zur Einführung. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 33, 1-3.

Versprechen, die Zeitschrift in der bisher festgehaltenen Richtung weiter zu führen. Lp.

G. HOLZMÜLLER. Vorschlag zu einem gemeinsamen Arbeitsplane. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 33, 153-163.

H. SCHOTTEN. Über eine geplante Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ibid. 217-229.

Über den Plan einer Encyklopädie für die Elementar-Mathematik. Diskussion auf der Hauptversammlung zu Düsseldorf. Unterrichtsbl. f. Math. u. Naturw. 8, 97-103.

G. HOLZMÜLLER und H. SCHOTTEN. Zu der Diskussion über den Plan einer Encyklopädie für die Elementar-Mathematik. Ibid. 133-134.

Erörterungen über den Zweck und den Inhalt einer zu verfassenden Encyklopädie der Elementarmathematik. Lp.

B. TH. KAGAN. Sektion der reinen Mathematik und Mechanik. Spaczinskis Bote No. 313, 1-7, No. 314, 25-30 (Russisch).

B. P. WEINBERG. Sektion der Physik. Ibidem No. 315, 49-53 (Russisch).

L. DANILOV. Sektion der Meteorologie und der Geophysik. Ibidem No. 317, 97-107 (Russisch).

Berichte über die Arbeiten dreier Sektionen der elften Versammlung russischer Naturforscher und Ärzte. Über die erste Sektion hat Ref. schon F. d. M. 32, 38 berichtet. Si.

F. N. COLE. The eighth annual meeting of the American Mathematical Society. American M. S. Bull. (2) 8, 183-198.

TH. F. HOLGATE. The January meeting of the Chicago Section. Ibid. 198-207.

ED. KASNER. The February meeting of the American Mathematical Society. Ibid. 271-279.

TH. F. HOLGATE. The March meeting of the Chicago Section. Ibid. 319-323.

F. N. COLE. The April meeting of the American Mathematical Society. Ibid. 367-375.

E. J. WILCZYNSKI. The first meeting of the San Francisco Section of the American Mathematical Society. Ibid. 429-437.

ED. KASNER. The ninth summer meeting of the American Mathematical Society. Ibid. (2) 9, 73-74.

Ed. S. Crawley. The meeting of the Section A of the American Association for the advancement of science, Pittsburgh, Pa., June 28—July 3, 1902. Ibid. 94-106.

The Pittsburgh Meeting of the American Association. Nature **66**, 299-304.

Alle diese Berichte geben Auszüge aus den gehaltenen Vorträgen, zuweilen in ziemlicher Ausführlichkeit; natürlich kann hier auf diese Auszüge nicht eingegangen werden. Lp.

Kopriwa. Bericht über Abteilung 1: Mathematik, Astronomie und Geodäsie auf der 74. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Karlsbad 1902. Naturw. Rundsch. **17**, 565-567.

M. Simon. Bericht über die Verhandlung der mathematischen Sektion der 46. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Straßburg vom 1.-4. Oktober 1901. Zs. f. math. u. naturw. Unt. **33**, 125-138.

Aus diesem Bericht ist besonders ein ausführliches Referat von J. Neuberg über neuere Dreiecksgeometrie erwähnenswert (S. 126-132). Lp.

H. Schotten. Bericht über die elfte Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften zu Düsseldorf, Pfingsten 1902. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **33**, 414-423, 517-525.

Atti del secondo congresso dei professori di matematica delle scuole secondarie, tenuto in Livorno nei giorni 17-22 agosto 1901 ad iniziativa dell' Associazione Mathesis. Livorno. 200 S. 8°.

C. H. Lees. Mathematics and physics at the British Association at Belfast. Nature **66**, 618-619.

B. Geschichte einzelner Disziplinen.

G. Eneström. Über Periodeneinteilung in der Geschichte der Mathematik. Bibl. Math. (3) **3**, 1-6.

Der Verf. bemerkt einleitungsweise, daß eine Gesamtdarstellung der Geschichte der Mathematik ohne Einteilung in Abschnitte kaum möglich ist, und daß es natürlich am besten wäre, wenn jeder Abschnitt ein im

wissenschaftlichen Sinne abgeschlossenes Ganzes, d. h. eine wirkliche Periode wäre. Er untersucht darum, ob solche Perioden in der Entwicklung der Mathematik vorkommen, und gelangt zu dem Resultate, daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist, sofern man sich nicht auf eine spezielle Theorie beschränkt. Es ist darum von rein wissenschaftlichem Gesichtspunkte aus zu empfehlen, die Geschichte der einzelnen Theorien besonders zu behandeln und als Ergänzung eine kürzere Gesamtübersicht über die Geschichte der mathematischen Ideen zu geben. Dann geht der Verf. zu der Frage über, in welche Abschnitte eine solche Übersicht eingeteilt werden soll, und hebt dabei hervor, daß die Einteilung nach Volksgrenzen eigentlich nur für eine kulturhistorische Darstellung der Geschichte der Mathematik paßt, während bei der rein fachmäßigen Behandlung fast ausnahmslos Zeitgrenzen zu empfehlen sind. Endlich gibt er an und begründet, wo die Periodengrenzen seiner Ansicht nach zu ziehen sind, macht aber darauf aufmerksam, daß die Schwierigkeiten, diese Grenzen festzustellen, um so größer werden, je mehr man sich der Gegenwart nähert. E.

E. Wölffing. Über die Abkürzungen der Titel mathematischer Zeitschriften. Bibl. Math. (3) 3, 133-136.

Felix Müller. Zur Frage über die Abkürzungen der Titel mathematischer Zeitschriften. Bibl. Math. (3) 3, 235-237.

Diese zwei Aufsätze sind von dem Stäckelschen Artikel „Wie sollen die Titel der mathematischen Zeitschriften abgekürzt werden?“ im vorhergehenden Bande der „Bibl. Math.“ (vgl. F. d. M. **32**, 41, 1901) veranlaßt, und im großen und ganzen sind Wölffing und Müller mit den Stäckelschen Regeln einverstanden. Wölffing macht indessen darauf aufmerksam, daß es in Sammelwerken, wo Zitate in großer Häufigkeit immer wiederkehren, angebracht ist, besondere Abkürzungen zu benutzen, auch wenn der Leser nicht imstande ist, aus der Abkürzung die gemeinte Zeitschrift unmittelbar zu erschließen; selbstverständlich wird in diesem Falle ein Schlüssel der Abkürzungen beigefügt werden. Als Stichwort bei Akademie- und Gesellschaftsschriften empfiehlt Wölffing nicht das Hauptwort (Abh., Ber., etc.), sondern das lokale Beiwort zu wählen.

Müller hat die Stäckelschen Regeln auf die Titel von mehr als 700 Zeitschriften angewendet und ist dadurch zu einigen Vorschlägen veranlaßt worden, die jene teils modifizieren, teils ergänzen. E.

Felix Müller. Über die Bedeutung der Zeitschriften für die mathematische Literatur und die mathematisch-historische Forschung. Berl. Math. Ges. Ber. 1, 17-19.

Auszug aus einem Vortrage. An der Hand eines Verzeichnisses von Zeitschriften mathematischen Inhaltes, das der Verf. später veröffentlicht hat, wird die Bedeutung der Journalliteratur für die mathematisch-historische Forschung nachgewiesen. M.

A. Padoa. Per la compilazione di un dizionario di matematica. Periodico di Mat. (2) **4**, 262-269.

U. Ceretti. Per il dizionario di matematica. Ibid. 269-274.

Auf der zweiten Versammlung der nationalen Mathematiker zu Livorno vom 17. bis 23. August 1901 wurde auf den Antrag von Peano hin die Veröffentlichung eines mathematischen Wörterbuches beschlossen; dasselbe soll in alphabetischer Ordnung nach jedem der verschiedenen Gebiete eine Sammlung der Kunstausdrücke enthalten, die in den gangbaren mathematischen Werken vorkommen, nebst Bemerkungen zur genaueren Bestimmung der Bedeutung jedes Ausdrucks, wie Etymologie, Geschichte, Definition usw. Vor der Drucklegung sollen einzelne Teile zur Prüfung und Begutachtung vorgelegt werden, damit alle Lehrer Gelegenheit erhalten, ihre Wünsche zu äußern. Die beiden im Artikel genannten Gelehrten sprechen in den Aufsätzen eine Reihe von Anforderungen aus. Padoa legt das größte Gewicht auf logische Definitionen und will genauen Anschluß an die Algebra der Logik. Ceretti will die Gelegenheit benutzen, um eine konsequent durchzuführende Änderung der Benennungen ins Werk zu setzen. Lp.

M. Simon. Zwei Bemerkungen. Zs. f. Math. u. naturw. Unterr. **33**, 535-536.

1. Ob die Mathematik eine Geisteswissenschaft oder eine Naturwissenschaft sei. 2. Niemals habe derjenige etwas gefunden, nach dem die Sache benannt würde. Lp.

A. von Braunmühl. Mathematisch-historische Vorlesungen und Seminarübungen an der technischen Hochschule in München 1897-1902. Bibl. Math. (3) **3**, 403-404.

Anknüpfend an zwei frühere Berichte über denselben Gegenstand (vgl. F. d. M. **26**, 1895, 89; **28**, 1897, 72) gibt Braunmühl Auskunft über eine Vorlesung über Geschichte der Trigonometrie, die er im Wintersemester 1899/1900 hielt, und über die Übungen in seinem mathematisch-historischen Seminar, das ohne Unterbrechung fortgeführt worden ist. Bis zum Wintersemester 1899/1900 wurden wie früher Vorträge von den Teilnehmern über frei gewählte oder vom Vorsteher gestellte Themata gehalten; dann wurden Cyklen von Vorträgen über ein bestimmtes Gebiet eingerichtet, wobei so verfahren wurde, daß Braunmühl zu Beginn eine kurze Übersicht über den Stoff gab, denselben in Abschnitte einteilte und deren Behandlung den einzelnen Studierenden zuwies, mit Angabe der hauptsächlichsten Quellen. Auf diese Weise wurden drei Themata behandelt, nämlich die Geschichte der Quadratur des Kreises, die Geschichte der Entstehung der Infinitesimalrechnung und die Geschichte der Geometrie des 16. und 17. Jahrhunderts. E.

P. MANSION. Sur la méthode analytique des anciens. Mathesis (2) 2, 266-273.

Die analytische Methode der Alten besteht in folgendem: 1. Man leitet aus einem als richtig vermuteten Satze eine richtige Folgerung her; aus der letzteren versucht man durch eine Synthese den als richtig angenommenen Satz zu erschließen. 2. Oder man beweist abermals durch Deduktion, daß das Gegenteil des als richtig vermuteten Satzes falsch ist (reductio ad absurdum). 3. Bezüglich der Aufgaben ist die analytische Methode der Alten analog, unterscheidet sich aber nicht von derjenigen der Neueren. Mn. (Lp.)

M. CANTOR. Die Methode der vollständigen Induktion. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 33, 536.

Der Schluß von n auf $n+1$ findet sich vor Pascal bei Maurolycus in dessen Arithmetik (1575), wie Vacca dem Verf. mitgeteilt hat. Lp.

P. RIGOBON. Studi antichi e moderni intorno alla tecnica dei commerci. Bari: Tip. Avellino. 38 S. 8°.

Es ist eine Rede, welche bei der Inauguration des Jahres 1901-1902 an der höheren Handelsschule in Bari gehalten wurde; in derselben wird die Anwendung der Mathematik auf den Handel historisch untersucht; die Verdienste eines Leonardo Pisano, eines Nicolò Tartaglia, eines Luca Paciuolo werden so in klares Licht gesetzt. La.

H. FEHR. Les extensions de la notion de nombre dans leur developpement logique et historique. Ens. math. 4, 16-27.

Als Beispiel eines passenden Stoffes zur Behandlung beim Übergang vom niederen zum höheren algebraischen Unterricht behandelt hier Fehr die Entwicklung des Zahlbegriffes, und zwar sowohl nach der logischen (S. 17-24) als nach der geschichtlichen (S. 24-27) Seite. Im ersten Teil gibt er die durch allgemeine Lösung der Grundrechnungen bedingte Ausdehnung des Zahlbegriffs bis zu den komplexen, im zweiten gibt er die Haupttatsachen der Einführung und Benennung der neuen Zahlarten. Tn.

G. ENESTRÖM. Remarque au sujet de la notion de nombre dans son développement historique. Ens. math. 4, 126-127.

Einige Ungenauigkeiten in dem geschichtlichen Abriß von Fehr (s. vorstehend) werden hier richtiggestellt: so die Angabe über Descartes' Verdienst um die negativen Zahlen, über den altgriechischen Begriff von irrationalen Zahlen oder Größen, über die Umwandlung von $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, über Cotes' und Lamberts Verdienste. Tn.

G. Eneström. Über Summierung der Reihe von Kubikzahlen im christlichen Mittelalter. [Anfrage 99.] Bibl. Math. (3) **8**, 243.

Nach einer Vermutung von Libri hat schon Leonardo Pisano die Summe der Reihe von Kubikzahlen angegeben, aber bisher ist keine Schrift aus dem christlichen Mittelalter bekannt, wo die Reihe der Kubikzahlen summiert wird; erst bei Paciuolo (1494) findet sich die betreffende Formel. Es wird gefragt, ob im Mittelalter irgend welche abendländischen Mathematiker sich mit der fraglichen Reihe beschäftigt haben.
E.

Paul Tannery. Sur la sommation des cubes entiers dans l'antiquité. Bibl. Math. (3) **8**, 257-258.

Bl. Pascal hat an einer Stelle bemerkt, daß schon die Alten die Summe der Kubikzahlen kannten. Tannery hebt hervor, daß diese Bemerkung entweder sich auf einen Satz von Nikomachos beziehen kann, woraus man unmittelbar die fragliche Summe herleitet, oder auf einige von Bachet zitierte Auszüge aus Epaphroditus und Vitruvius Rufus hinweist. Tannery ist übrigens der Ansicht, daß die Summe der Kubikzahlen lange Zeit vor Nikomachos gefunden worden ist, vielleicht schon von Archimedes. E.

G. Frizzo. De numeris libri duo Authore Johanne Noviomago; esposti e illustrati. Verona-Padova: Flli Drucker. 25 S. 8° (1903).

Nach einem Exemplar des Werkes von Noviomagus, das sich in der Stadtbibliothek von Mantua befindet, gibt der Verf. Text und Übersetzung eines Briefes, welcher als Vorwort desselben dient; so wird eine frühere Arbeit (F. d. M. **32**, 44, 1901) vervollständigt. La.

G. Wertheim. Ein Beitrag zur Beurteilung des Pietro Antonio Cataldi. Bibl. Math. (3) **8**, 76-83.

Zweck dieses Artikels ist, darauf hinzuweisen, daß Cataldis Verdienste um die Entwicklung der Mathematik von Libri überschätzt worden sind. Als Beleg hierfür gibt der Verf. eine vollständige Analyse der Schrift des Cataldi „De' numeri perfetti" (Bologna 1603), woraus hervorgeht, daß die Theorie der vollkommenen Zahlen dadurch keinen wirklichen Fortschritt erfahren hat, wenn man auch anerkennen muß, daß Cataldi den Gegenstand fehlerfrei und nicht ohne Geschick behandelt hat.
E.

L. Peprný. Zur Geschichte der Mathematik in Böhmen. Časopis **31**, 49-73 (Böhmisch).

Inhalt zweier arithmetischen Manuskripte im Museum des Königreichs Böhmen, das erstere aus dem 16. Jahrhundert: 1. Geldberech-

nungen (Ausrechnung von gewöhnlichen Prozenten und Umrechnungstafeln für verschiedene Münzen), das letztere aus dem Schlusse des 17. und dem Anfange des 18. Jahrhunderts. 2. Arithmetica dulcis. Rechnungsregeln für Lebküchler in Reimen und Berechnung der gebräuchlichen Drangabe bei Kleinverkäufern. 3. Der Rabbi David Gans auf Besuch bei Tycho Brahe in Benátek (ein Schloß 5 Meilen von Prag, angewiesen für T. B. als Wohnort und Studienstätte von Rudolf II.). Sda.

G. Eneström. Über Gleichungen, die auf Null gebracht sind. [Anfrage 98.] Bibl. Math. (3) 3, 145.

Es wird bemerkt, daß schon vor Descartes Gleichungen auf Null gebracht worden sind, und eine eingehende Untersuchung über die Verfasser, die vor Descartes solche Gleichungen aufgestellt haben, angeregt. E.

G. Wertheim. Die Algebra des Johann Heinrich Rahn (1659) und die englische Übersetzung derselben. Bibl. Math. (3) 3, 113-126.

Im Jahre 1659 gab J. H. Rahn in Zürich eine „Teutsche Algebra" heraus, die neun Jahre später von Th. Brancker ins Englische übersetzt wurde. Diese Arbeit ist besonders dadurch von Interesse, weil Rahn gewisse von ihm erfundene Zeichen anwendet, um anzugeben, welche Operationen ausgeführt werden sollen; so z. B. hat er ein besonderes Zeichen für „auf eine Potenz erheben". Auch die äußere Anordnung der Lösungen von Aufgaben ist insofern originell, als Rahn dadurch imstande ist, den Gang der Lösung fast ausschließlich durch Ziffern und Zeichen anzugeben. — Die englische Übersetzung ist von J. Pell mit Zusätzen versehen worden, worin unbestimmte Aufgaben behandelt werden, und es wird oft fälschlich behauptet, eine Lösung der unbestimmten Gleichung $x^2 - ay^2 = 1$ finde sich unter diesen Zusätzen. E.

Ch. Lambo. Une algèbre française de 1484. Nicolas Chuquet. Rev. des qu. sc. (3) 2, 442-472.

Genaue Inhaltsangabe des Triparty en la science des nombres. Der Verf. hat den wunderlichen Einfall gehabt, die alte französische Orthographie beizubehalten; dies macht den Artikel schwer lesbar.

Mn. (Lp.)

E. Bortolotti. Influenza dell' opera matematica di Paolo Ruffini sullo svolgimento delle teorie algebriche. Discorso letto il 4 novembre 1902 in occasione della solenne apertura degli studi nella R. Università di Modena. Modena: Società tipografica modenese. 57 S. 8⁰ (Auszug aus dem Annuario della R. Università di Modena 1902-03).

Eine in allgemein verständlicher Weise geführte Besprechung der Verdienste Ruffinis um die höhere Algebra. Es ist interessant für

den Mathematiker sowie für den Psychologen, aus den vom Verf. angeführten Worten der berühmtesten Zeitgenossen zu ersehen, welchen Widerwärtigkeiten der Vertreter des Begriffes von der Unlösbarkeit der Gleichungen allgemein begegnete. Vi.

R. Mehmke. Der Rechenschieber in Deutschland. Zs. f. Math. u. Phys. 47, 489-491.

Entgegen der verbreiteten Meinung, der logarithmische Rechenschieber sei in Deutschland noch nicht lange bekannt, zeigt Mehmke durch genaue Einzelhinweise, daß schon seit den 20er Jahren des 19. Jahrhunderts viel, sehr viel geschehen ist, um dem Rechenschieber in Deutschland die verdiente Geltung zu verschaffen. Daß er in England schon lange vorher verwendet ward, zeigt der folgende Bericht. Tn.

R. Mehmke. Soho rules. Zs. f. Math. u. Phys. 48, 317-318.

In Soho lag die Maschinenfabrik von Boulton, von der J. Watt 1775 Teilhaber wurde, und von dieser Fabrik aus verbreitete sich der Gebrauch der „Rechenlineale", nicht etwa überhaupt, sondern unter den Ingenieuren. Also nicht schon um 1650 fand dies statt, wie v. Ott und Favaro angegeben haben. Tn.

G. Wertheim. Die „Numeri congrui" und „congruentes". [Anfrage 97.] Bibl. Math. (3) 3, 144-145.

Wertheim weist darauf hin, daß die Ausdrücke „numeri congrui" und „numeri congruentes", deren sich Leonardo Pisano bedient hat, von späteren Verfassern, die von Leonardo abhängig sind, einfach vertauscht wurden. Bei Leonardo bedeutet nämlich „numerus congruens" eine gewisse Quadratzahl und „numerus congruus" die Differenz zweier Quadratzahlen, während bei Paciuolo und Ghaligai die Quadratzahl „congruo" und die Differenz „congruente" heißt. Wertheim fragt, ob diese Veränderung der Bedeutung der Ausdrücke erklärt werden kann. E.

G. A. Miller. Second report on recent progress in the theory of groups of finite order. American M. S. Bull. (2) 9, 106-123.

Wie der erste Bericht (F. d. M. **30**, 41, 1899) ist auch der jetzige vor der Sektion A der amerikanischen Association for the advancement of science vorgetragen worden. Zunächst werden die größeren, den Gegenstand betreffenden Werke genannt, die in den inzwischen verflossenen vier Jahren erschienen sind. Der Verf. will auf die in ihnen behandelten Gegenstände nicht näher eingehen, sondern „den meisten Raum einigen neueren Entwicklungen lassen, welche einladende Felder der Forschung

darzubieten scheinen". Dies geschieht in den Paragraphen: 1. Abstrakte Gruppen. 2. Holomorphismen. 3. Substitutionsgruppen. 4. Gruppen-Charakteristiken. Wie anziehend es auch ist, an der Hand eines sachverständigen Forschers die letzten Jahre zu durchmustern, so müssen wir es anheimstellen, die Urteile des Verf. über Dinge, die erst jüngst im Jahrbuche besprochen sind, im Originale nachzulesen. Lp.

FR. HARDCASTLE. Report on the theory of point-groups. Part II. Brit. Ass. Rep. 1902, 81-93.

Der erste Teil dieses Berichtes ist in F. d. M. **31**, 39, 1900 angezeigt worden; doch hat man es für nötig erachtet, den Titel durch Fortlassung der Worte, die das Ziel auf die gegenwärtige Zeit beschränkten, so zu ändern, daß die historische Entwicklung des Gegenstandes angedeutet würde. Die Abschnitte sind fortlaufend mit Teil I beziffert. § 6 besteht aus einer allgemeinen geschichtlichen Einleitung. § 7 handelt über die Eliminationstheorie von Leibniz bis Cramer, 1693-1750. § 8 bespricht Schriften über die Schnittpunkte ebener Kurven von Maclaurin bis Lamé, 1720-1818. In diesem Abschnitte ist die in § 2 gegebene historische Skizze beträchtlich erweitert. Gbs. (Lp.)

G. ENESTRÖM. Über den Ursprung der Benennung „Pellsche Gleichung". Bibl. Math. (3) **3**, 204-207.

Bekanntlich wird die Gleichung $ax^2+1=y^2$ allgemein die Pellsche Gleichung genannt, und in den neuesten Handbüchern der Geschichte der Mathematik wird angegeben, daß sie in den von Pell herrührenden Zusätzen zur englischen Übersetzung (1668) der Rahnschen Algebra behandelt worden ist. Daß die letzte Angabe unrichtig ist, haben schon H. Konen und G. Wertheim bemerkt, und ihre Bemerkung wird vom Verf. bestätigt; er weist auch nach, wie die unrichtige Angabe entstanden ist, und zwar hauptsächlich durch ein Mißverständnis von Hankel. Ferner untersucht der Verf., wie die Benennung „Pellsche Gleichung", die schon von Euler benutzt wurde, entstanden ist, und findet, daß sie auf einem Versehen von Euler beruht, indem dieser die zwei in den „Opera" des Wallis erwähnten englischen Verfasser Pell und Brouncker verwechselt hat. In der Tat hat Pell gar nichts mit der Gleichung $ax^2+1=y^2$ zu tun gehabt. E.

G. CANDIDO. Sulla equazione $x^y=y^x$ (Nota storica). Suppl. al Periodico **5**, 67-68.

Einige Angaben über Mathematiker, die sich mit den rationalen Auflösungen dieser Gleichung beschäftigt haben; unter ihnen Daniel Bernoulli (1728), Leonhard Euler (Introd. in anal. § 519, 1748),

wo übrigens besonders die transzendente Kurve, die zu jener Gleichung gehört, diskutiert ist. Lp.

K. Goldziher. Weierstraß über das sogenannte Dirichletsche Prinzip. Bibl. Math. (3) 8, 409-410.

Aus einer in Göttingen befindlichen handschriftlichen Ausarbeitung der einleitenden Vorlesungen über die Theorie der analytischen Funktionen, die Weierstraß im Sommersemester 1874 hielt, teilt Goldziher ein paar Zusätze mit, die teils einem Vortrage von Weierstraß aus dem Jahre 1872, teils den Weierstraßschen Vorlesungen vom Jahre 1879 entnommen sind, und die bisher fast unbeachtet zu sein scheinen. Hier wird an einem geometrischen Beispiele (der Satz von der Summe der Dreieckswinkel) die Unrichtigkeit der Dirichletschen Schlußweise nachgewiesen. E.

P. Mansion. Sur la découverte de la géométrie non-euclidienne par Jean Bolyai. Brux. S. sc. 26 A, 146-147.

Auszug aus der Stäckelschen Abhandlung in Ungar. Ber. 17, 1901 (F. d. M. 32, 54). Mn.

Ioannes Bolyai. Epistola cuius simulacrum huic libro praefixum est, ad Wolfgangum Bolyai patrem data, in latinum conversa. Festschr. d. Univ. Klausenb. IX-XV.

Lateinische Übersetzung des der Festschrift faksimiliert beigegebenen ungarischen Briefes von Joh. Bolyai, datiert Temesvar, 3. Novbr. 1823. Der Brief handelt von dem Beweise der Binomialreihe für beliebige Exponenten. Für die Feststellung der Zeit, in der Joh. Bolyai seine Arbeiten über die nichteuklidische Geometrie durchgeführt hat, ist der Schlußsatz des Briefes von Wichtigkeit. Nunc amplius nihil, nisi me ex nihilo novum et alium mundum creavisse, omniaque, quae adhuc miseram, casam esse pro turri. Lp.

R. Bonola. Index operum ad geometriam absolutam spectantium. Festschr. d. Univ. Klausenb. 81-154.

In dem von G. Loria herausgegebenen Bollettino di bibliografia hat Bonola seit 1899 eine Bibliografia sui fondamenti della geometria in relazione alla geometria non-euclidea veröffentlicht. Daher war er der geeignete Mann, um in der dem Andenken an Joh. Bolyai gewidmeten Festschrift das Verzeichnis der Schriften über nichteuklidische Geometrie von dem Zeitpunkte an fortzuführen, wo P. Stäckel und Fr. Engel in ihrem Buche „Über die Theorie der Parallellinien" dieses Verzeichnis abgebrochen hatten (1837). Das ganze Register zerfällt in zwei Teile, von denen der erste Teil die mathematischen Schriften, der zweite die historischen, kritischen und philosophischen enthält. Innerhalb jedes

Teiles sind die Schriften unter den einzelnen Jahren alphabetisch nach den Autoren geordnet. Das alphabetische Register aller vorkommenden Autoren am Schlusse ermöglicht schnelles Auffinden der einzelnen Titel. In eckigen Klammern beigesetzte Buchstaben deuten eine der sechs Klassen an, in welche der Verf. die betreffenden Schriften einteilt. Da die Grenze der einzubeziehenden Artikel nicht scharf zu ziehen ist, wird der eine vielleicht etwas vermissen, der andere einiges überflüssig finden. Im ganzen ist die mathematische Welt dem emsig sammelnden Verf. vielen Dank schuldig. Lp.

K. Löschhorn. Über das Alter des Pythagoreischen Lehrsatzes. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 33, 183.

M. Simon. Der „Magister Matheseos". Ibid. 439-440.

Beide Autoren weisen auf den Aufsatz von A. Bürk in der Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft 1901, S. 593 hin; dort wird aus rituellen Texten der Inder gefolgert, daß dieses Volk den nach Pythagoras benannten Satz schon zwischen dem 10. und 8. Jahrhundert vor Christo gekannt habe. Hierdurch werde die Auffassung M. Cantors von der indischen Mathematik als unrichtig erwiesen. Lp.

H. Suter. Über die Geometrie der Söhne des Musa ben Schâkir. Bibl. Math. (3) 3, 259-272.

Die von Gherardo Cremonese verfertigte lateinische Übersetzung der Geometrie der Söhne des Musa ben Schakir ist schon 1885 nach einer Baseler Handschrift von Curtze herausgegeben worden; aber teils ist die benutzte Handschrift sehr inkorrekt, teils war das arabische Original, das Gherardo Cremonese zur Verfügung hatte, offenbar eine andere Redaktion als die der jetzt bekannten arabischen Handschriften der Geometrie, und zwar eine sehr weitschweifige. Suter hat darum nach zwei Berliner Handschriften die interessantesten Stellen der Schrift aus dem Arabischen ins Deutsche übersetzt und mit erläuternden Anmerkungen versehen. Auch einige Zusätze, die von einem arabischen Kommentator (möglicherweise Nasireddin) herrühren, werden in deutscher Übersetzung mitgeteilt oder angedeutet.

Zum Schluß bemerkt Suter, daß die von Curtze ausgesprochene Vermutung, die echte Archimedische Kreisrechnung finde sich in der Geometrie der Söhne des Musa ben Schakir aufbewahrt, kaum als richtig anerkannt werden kann. E.

J. S. Mackay. History of a theorem in elementary geometry. Edinb. M. S. Proc. 20, 18-22.

Das Theorem ist dieses: Wenn die Winkelhalbierenden an der Basis eines Dreiecks gleich sind, so ist das Dreieck gleichschenklig. Es wurde

1840 von Lehmus in Berlin Jakob Steiner mit der Bitte um einen rein geometrischen Beweis übergeben. Der Bitte wurde sofort durch Steiner gewillfahrt, aber Steiners Beweis wurde erst einige Jahre später veröffentlicht. Verweisungen auf eine beträchtliche Zahl von Beweisen im Archiv der Math. u. Phys., in the Lady's and Gentleman's Diary, Phil. Mag. und anderen Zeitschriften werden gegeben, endlich auch ein früher noch nicht veröffentlichter Beweis von A. Miller aus Dundee.

Gbs. (Lp.)

J. Neuberg. Über neuere Dreiecksgeometrie. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 33, 126-132.

Vortrag, gehalten zu Straßburg auf der 46. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Straßburg, 1. bis 4. Oktober 1901. Der Verf. gibt eine kurze historische Einleitung und behandelt eine der bezüglichen Fragen vorzüglich vom pädagogischen Standpunkte aus. Lp.

C. Hildebrandt. Verwendung des Dandelinschen Satzes zur Konstruktion der Zentralprojektion einer Kugel. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 33, 215-216.

Zufolge einer Anfrage nach der Quelle dieser Konstruktion verweist der Verf. auf Fiedler, Darstellende Geometrie I (1885); Pohlke, Darstellende Geometrie (1876). Holzmüllers Einführung in das stereometrische Zeichnen hatte die Frage veranlaßt. Lp.

C. Seybold. Die Drusenschrift: Kitāb Alnoqat Waldawāir, „Das Buch der Punkte und Kreise". Nach dem Münchener und Tübinger Kodex. (Festschrift.) Tübingen. 111 S. 4°.

A. von Braunmühl. Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. 2. Teil: Von der Erfindung der Logarithmen bis auf die Gegenwart. Mit 39 Figuren im Text. Leipzig: B. G. Teubner. XI + 264 S. 8°.

Drei Jahre nach der Ausgabe des ersten Teiles (besprochen F. d. M. 30, 52, 1899) erscheint der zweite, der den Geschichtsstoff bis zur Gegenwart fortführt. Er wird in sechs Kapiteln untergebracht: das erste behandelt die Erfindung der Logarithmen verschiedener Art und deren Verwertung in der Trigonometrie und so die Verbesserung der trigonometrischen Rechnungen, das zweite den Ausbau der Trigonometrie im 17. Jahrhundert, insbesondere in England, auch die Lehre von den „Winkelschnitten" und der Kreismessung sowie die Einführung der Reihen. Die nächsten drei Kapitel gruppieren sich um den Riesen Euler, die Zeit vor ihm, seine eigenen Leistungen, die Zeit nach ihm bis 1800; im Schlußkapitel wird

die Trigonometrie des letzten Jahrhunderts geschildert, ihre allgemeine Begründung, ihre systematische Gestaltung, ihre Einreihung in die Funktionenlehre, auch kürzer der Ausbau der Polygonometrie und der Polyedrometrie. Ein Blick auf die mannigfaltigen sonstigen Trigonometrieausbildungen (die hyperbolische, parabolische und deren Ausgestaltungen, die sphäroidische u. a.) schließt das reiche Buch, das aus Vorlesungen an der Münchener Technischen Hochschule hervorgegangen ist. Tn.

G. Eneström. Über eine wiedergefundene Handschrift der Trigonometrie des Johannes Werner. Bibl. Math. (3) 8, 242-243.

Daß der Nürnberger Mathematiker Johannes Werner eine handschriftliche Trigonometrie nachgelassen hat, war schon längst bekannt; man wußte auch, daß diese Arbeit noch am Anfange des 17. Jahrhunderts vorhanden war und von J. Christmann benutzt wurde, aber seitdem ist sie verschollen gewesen. Indessen hat A. A. Björnbo das Glück gehabt, in der Vatikanischen Bibliothek in Rom eine Handschrift zu finden, welche die verlorene Wernersche Trigonometrie enthält. Im Jahre 1557 hatte Rheticus eine Ausgabe der Schrift in Angriff genommen, aber der Druck wurde unterbrochen, nachdem Titel und Vorwort im Satz fertig waren; gewisse Umstände deuten darauf hin, daß die von Björnbo gefundene Handschrift mit dem Druckmanuskript des Rheticus identisch ist. E.

G. Vacca. Notizie storiche sulla misura degli angoli solidi e dei poligoni sferici. Bibl. Math. (3) 8, 191-197.

Wie der Titel angibt, bringt der Verf. hier historische Notizen über das Messen von Körperwinkeln und die Bestimmung der Fläche sphärischer Polygone. Versuche, Körperwinkel zu messen, wurden zwar schon im Mittelalter gemacht, aber soweit jetzt bekannt ist, ohne Erfolg; erst am Ende des 16. Jahrhunderts finden sich bei Risner und Maurolico, etwas später bei Brozek und Harriot wertvolle Beiträge zur Lösung der Frage. Die erste Bestimmung der Fläche eines sphärischen Dreiecks rührt aus dem Jahre 1603 her, und zwar von Harriot, der auch, möglicherweise etwas später, die allgemeine Formel für die Fläche eines sphärischen Polygons gefunden hat. Harriots Entdeckung wurde indessen nicht publiziert, und erst etwa dreißig Jahre später wurde die fragliche Formel von Girard (1629) und Cavalieri (1632) veröffentlicht und bewiesen. Den Beweis von Girard hat Lagrange als ungenügend bezeichnet; aber Vacca weist nach, daß der Beweis in der Tat sehr gut ist, wenn man von der verwickelten Form absieht, die Girard demselben gegeben hat. Der Girardsche Beweis hat auch für die Geschichte der Mathematik ein besonderes Interesse darum, weil er sich auf Infinitesimalbetrachtungen gründet. E.

A. A. Björnbo. Studien über Menelaos' Sphärik. Beiträge zur Geschichte der Sphärik und Trigonometrie der Griechen. Abh. zur Gesch. d. Math. 14, VII. 1-154.

Eine reiche Ausbeute an Quellenstudien und kritischen Vergleichungen, die über manches Unklare in der Geschichte der alten Astronomie und Sphärik Aufschluß bringen. Das Hauptziel der Arbeit ist, die bisher nur in schlechten und dazu seltenen Ausgaben vorliegende „Sphärik" des Menelaos (um 100 n. Chr.) dem Inhalte nach festzustellen und durch weitausgreifende Untersuchungen ihr Verhältnis zu Vorgängern und Nachfolgern und damit ihre Bedeutung für die Geschichte der Mathematik und Astronomie zu beurteilen. Björnbo prüft zunächst durch das Studium von 13 in Europa zerstreuten Handschriften die Textüberlieferung (S. 10 ff. u. S. 137 ff.) und behandelt dann die einzelnen Sätze der drei Bücher des Werkes. Er stellt so den Inhalt einer voreuklidischen Sphärik fest (S. 63), gibt unter Benutzung der neueren Arbeiten von Tannery und von Braunmühl einen Überblick über die Geschichte der griechischen Trigonometrie (S. 81 ff. u. S. 124 ff.), erläutert die Geschichte des wichtigen Satzes von der Projektivität der Doppelverhältnisse auf der Kugel und seine Übertragung aus der Ebene (S. 96 ff.) und stellt die Verdienste des Menelaos fest, insofern dieser überhaupt erst das sphärische Dreieck in die Betrachtung eingeführt, die Grundlagen der sphärisch-trigonometrischen Dreieckslehre geschaffen und wohl auch praktischere Rechenweisen angegeben habe. Tn.

G. Eneström. Die „Leçons de ténèbres" des Desargues. [Anfrage 103.] Bibl. Math. (3) 8, 411.

In einem Briefe von Oldenburg an Leibniz vom Jahre 1673 wird eine von Desargues verfaßte Schrift „Leçons de ténèbres" erwähnt, und da keine Schrift mit diesem Titel bekannt ist, hat man vermutet, dieselbe sei mit dem „Brouillon projet" des Desargues vom Jahre 1639 identisch. Aus einem anderen Briefe von Oldenburg an Leibniz geht hervor, daß ein Exemplar der „Leçons de ténèbres" im Besitze des englischen Mathematikers Pell war, und es wird darum gefragt, ob sich dieses Exemplar noch unter Pells nachgelassenen Papieren findet, oder ob es auf andere Weise möglich ist, zu entscheiden, welcher Schrift von Oldenburg der Name „Leçons de ténèbres" beigelegt wurde. E.

T. Hayashi. The values of π used by the Japanese mathematicians of the 17th and 18th centuries. Bibl. Math. (3) 8, 273-275.

In der ältesten jetzt aufbewahrten japanischen mathematischen Arbeit (aus dem Jahre 1627) wird $\frac{79}{25}$ als Wert von π benutzt, später findet man andere bessere Werte angewendet, darunter $\frac{355}{113}$ (Ohta, 1709). Noch

genauer, aber natürlich sehr unbequem, sind die zwei von Arima im Jahre 1766 angegebenen Werte

$$\frac{5419351}{1725033} \text{ und } \frac{428224593349304}{136308121570117}.$$

Auch der Wert $\sqrt{10}$ kommt einmal in der japanischen mathematischen Literatur vor (Ando, 1660). E.

W. Schmidt. Noch einmal Archimedes' Ephodikón. Bibl. Math. (3) 3, 143-144.

Die früher von Schmidt ausgesprochene Vermutung (vgl. F. d. M. **31**, 53, 1900), der echte Titel der Archimedischen Schrift über die Quadratur der Parabel sei „Ephodikón" gewesen, wird auf Grund zweier neuen Zitate aus Herons „Metrika" dahin modifiziert, daß „Ephodikon" wahrscheinlich der Titel einer größeren Schrift war, von der uns nur ein Bruchstück über die Quadratur der Parabel erhalten ist. E.

F. Rudio. Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. Bibl. Math. (3) 3, 7-62.

Der Bericht des Simplikios über die Quadratur der Möndchen des Hippokrates ist zuerst von Bretschneider (1870) der mathematisch-historischen Forschung zugänglich gemacht worden. Leider ist seine Übersetzung an wesentlichen Stellen unrichtig, und dazu war er nicht in der Lage, im Berichte des Simplikios das, was dieser selbst hinzugefügt hat, von dem der Geschichte der Geometrie des Eudemos Entnommenen zu trennen. Diese letztere Frage wurde später von Allman (1881) und Tannery (1883-1884) eingehend behandelt; aber noch gab es viele nicht unwichtige Punkte, wo eine nähere Untersuchung nötig war, und Rudio hat es daher unternommen, eine neue Übersetzung des Berichtes des Simplikios zu geben und derselben einen ausführlichen Kommentar beizufügen. Dabei hat er sich besondere Mühe gegeben, die Stellen, wo Simplikios anscheinend ein großes Ungeschick in geometrischen Dingen an den Tag legt, kritisch zu prüfen, und es hat sich ihm dabei herausgestellt, daß diese anscheinenden Ungeschicklichkeiten teils auf mangelhafter Überlieferung, teils auf mangelhaftem Verständnisse des richtig Überlieferten beruhen. In Wirklichkeit hat Simplikios mit Geschick und Umsicht und mit vollem Verständnis für den gesamten Umfang der vorliegenden Frage eine ausführliche und wohlgeordnete Darstellung der Quadratur der Möndchen des Hippokrates gegeben. E.

Paul Tannery. Simplicius et la quadrature du cercle. Bibl. Math. (3) 3, 342-349.

Gegen den Artikel von Rudio: „Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates" (siehe das voran-

gehende Referat), hält Tannery noch fest, daß Simplikios sich in seinem Berichte zuweilen als ein ungeschickter Geometer erweist, und macht einige Ausstellungen gegen einzelne Punkte des Rudioschen Artikels. Insbesondere hat Tannery eine andere Ansicht über die Abgrenzung des im Berichte des Simplikios enthaltenen Referates des Eudemos und will nicht zugeben, daß das Wort τμῆμα, das eigentlich „Segment“ bedeutet, auch einen Sektor bezeichnen kann, eine Frage, die für die Würdigung des Berichtes des Simplikios nicht unwichtig ist. E.

B. Carrara. I tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza. Rivista di fis., mat. e sc. nat. **3**, 407-417; **4**, 36-54, 115-128, 208-220, 304-318, 492-510; **5**, 25-33, 112-123 u. ff., bis „Anno IV“, 1903.

Gino Loria. Pseudo-versiera e Quadratrice geometrica. Bibl. Math. (3) **3**, 127-130.

Im Jahre 1897 veröffentlichte Loria in der „Bibl. Math.“ zwei Artikel über eine von Maria Gaëtana Agnesi behandelte Kurve, und er beschäftigte sich darin auch mit der Geschichte einer verwandten Kurve, die er „Pseudo-versiera“ nannte (vgl. F. d. M. **28**, 47-48, 1897). Hier gibt er noch einige historische Notizen über letztere und weist deren Identität mit einer Kurve nach, die von Ozanam (1684) unter dem Namen „quadratice géométrique“ behandelt wurde. E.

A. Macfarlane. A report on recent progress in the quaternion analysis. American Assoc. Proc. **51**, 305-326.

Der Verf. gibt eine kritische, nach Ländern geordnete Übersicht über die im Laufe der letzten zwölf Jahre veröffentlichten Arbeiten, welche die Begründung, Entwicklung und Erweiterung der Quaternionentheorie und ihre Stellung zu verwandten Theorien, insbesondere der Ausdehnungslehre und der symbolischen Logik, betreffen. Eine ausführliche Besprechung wird dem Streite zwischen Gibbs und Tait gewidmet, welcher letzterer als Quaternionist strengster Observanz den allgemeineren Standpunkt, den Gibbs mit seiner Vector analysis und seiner Würdigung der Ausdehnungslehre einnahm, leidenschaftlich angegriffen hatte. Auf Grund einer von Tait nicht genügend gewürdigten Stelle in der Vorrede zur „Ausdehnungslehre von 1844“ stellt der Verf. fest, daß der Graßmannsche Exponentialausdruck $e^{\alpha\sqrt{-1}}$ nur der Hinzufügung eines die Achse der Ebene darstellenden Faktors α_0 im Exponenten bedarf, um die volle Allgemeinheit der Quaternion zu erreichen, deren übliche Bezeichnung diesem Ausdrucke erheblich nachsteht. — Während Graßmann der Quaternionentheorie ihren Platz innerhalb der Ausdehnungslehre anweist, sucht Joly Begriff

und Interpretation der Quaternionen zu erweitern, um das Umgekehrte zu erreichen. — Der Ansicht Burkhardts („Über Vector-Analysis“), daß es ein vergebliches Bemühen sei, sich durch Erweiterung der algebraischen Begriffe im Sinne der Quaternionentheorie zum Herrn über Probleme zu machen, die transzendente Funktionen erfordern, pflichtet der Verf. bei, rügt aber sowohl bei Burkhardt wie bei Klein und Sommerfeld („Über die Theorie des Kreisels“) die zu enge Fassung des Begriffes der Quaternion als „Drehstreckung“. — Im übrigen kommen ausführlicher zur Besprechung: in England Heaviside, Knott, Whitehead, McAulay, in Frankreich Combebiac, in Holland Molenbroek, van Wettum, van Elfrinkhof, in Japan Kimura, in Amerika Shaw, Hathaway, Hagen (mit einer vergleichenden Würdigung der Leistungen von Argand, Möbius, Hamilton und Graßmann, welchen der Verf. hohes Lob spendet). Mit einer Übersicht der eigenen, allen Kennern des Gegenstandes rühmlichst bekannten Arbeiten des Verf. auf diesem Gebiete schließt die trefflich orientierende, überall die Kernpunkte kurz und klar hervorhebende Arbeit. Schg.

E. Wölffing. Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von der Fresnelschen Wellenfläche. Bibl. Math. (3) **3**, 361-382.

Die Fresnelsche Wellenfläche ist eine Fläche 4. Ordnung und 4. Klasse, und zwar ist sie der Ort der Punkte, bis zu welchen eine von einem Punkte ausgehende, in einem doppeltbrechenden Medium sich fortpflanzende Welle zu einer bestimmten Zeit gelangt ist; sie wurde zuerst von Fresnel in einer Abhandlung aus dem Jahre 1821 angegeben. Die Untersuchungen über diese Fläche werden hier in systematischer Ordnungsfolge verzeichnet und ihre hauptsächlichsten Resultate mitgeteilt. Ausführlich wird über die verschiedenen Erzeugungen der Fläche berichtet; auch werden Verallgemeinerungen derselben angegeben, sowie ihre Anwendungen behandelt. Überall ist auf die einschlägige Literatur hingewiesen, die in einem besonderen „Literaturnachweis“ am Ende der Abhandlung zusammengestellt worden ist. E.

K. Scheel, R. Assmann. Halbmonatliches Literaturverzeichnis der „Fortschritte der Physik“, dargestellt von der Deutschen Physikalischen Gesellschaft. 1. Jahrgang 1902. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn. 452 S. gr. 8°.

Den Zweck dieser neuen Erscheinung auf dem Gebiete der Bibliographie geben wir mit den einführenden Worten des Vorstandes der Deutschen Physikalischen Gesellschaft an. „Die Schnelligkeit der Berichterstattung durch die seit dem Jahre 1847 erscheinenden ‚Fortschritte der Physik‘ ist dank den erfolgreichen Bemühungen unserer Herren Redakteure in den letzten Jahren erheblich gesteigert worden und hat zurzeit wohl die Grenze des Möglichen erreicht, indem die Besprechung der Publikationen eines Jahres bereits in der ersten Hälfte des folgenden ge-

bracht wird. Doch ist dadurch das Bedürfnis der Berichterstattung besonders für den Physiker, welchem daran gelegen ist, von den seine Arbeitsgebiete betreffenden Publikationen sofort und bequem Kenntnis zu erhalten, noch nicht völlig gedeckt. Diesem Mangel soll das hiermit in die Öffentlichkeit tretende ‚Halbmonatliche Literaturverzeichnis‘ abhelfen; es wird die bisher oft viele Monate ungenutzt gebliebenen redaktionellen Vorarbeiten zum Jahresbericht, ganz wie in diesem nach Materien geordnet, am 1. und am 15. jeden Monats zusammenfassen und somit als eine Art Vorläufer zu den auch fernerhin in der ersten Hälfte eines jeden Jahres zur Ausgabe gelangenden ‚Fortschritten der Physik‘ erscheinen.“

Zu dieser Ankündigung haben wir nur hinzuzufügen, daß dieses Werk rasch die Gunst der beteiligten Kreise erworben hat. Wie stark die literarische Produktion in den 60 Jahren seit der Entstehung der „Fortschritte der Physik“ angewachsen ist, kann man daraus ersehen, daß der in kleineren Typen und kompreß gedruckte Band, der nur Titel aufzählt, umfangreicher ist als die ersten Bände der die Referate enthaltenden „Fortschritte der Physik“. Für unser Jahrbuch stellt das „Halbmonatliche Verzeichnis“ die ganze Literatur der Mechanik und der mathematischen Physik (Abschnitte X und XI) in gut benutzbarer Weise zusammen.

Lp.

N. Villani. Ricerche matematiche sulle misure antiche e il sistema antico delle misure romane. Lanciana: Carabba. VII + 66 S. 16mo.

J. Hilscher. Untersuchungen zur geschichtlichen Entwicklung der Logik in den Prinzipien der Mechanik. Zürich. 87 S. 8°.

E. Eude. Histoire documentaire de la mécanique française (fragments), d'après le musée centennal de la mécanique à l'Exposition universelle de 1900. Paris. 323 S. 8°, 42 portraits.

---

d'Adhémar. Les principes de la mécanique et les idées de Hertz. Rev. des qu. sc. (3) **1**, 173-204.

1. Klassisches System. 2. Ansichten von Boltzmann, Picard, Andrade. 3. Energetisches System. 4. System von Hertz. 5. Die Vorstellungen von Poincaré.

Mn.

E. Goldbeck. Galileis Atomistik und ihre Quellen. Bibl. Math. (3) **3**, 84-112.

Enthält eine ausführliche Darstellung der Atomistik des Galilei, wie sie im ersten „Tage“ seiner „Discorsi e dimostrazioni matematiche

intorno a due nuove scienze" (1638) auseinandergesetzt wird, sowie eine eingehende Untersuchung über die Quellen derselben; auch die Frage über den Einfluß der Galileischen Lehren auf spätere Verfasser wird von Goldbeck im Vorübergehen berührt.

Die Fragen, welche Galilei an der genannten Stelle behandelt hat, werden von Goldbeck in vier Problemgruppen zusammengestellt, nämlich 1. Das Vakuum. 2. Das Wesen des Unendlichen. 3. Das Wesen des Kontinuums. 4. Die physikalische Anwendung der atomistischen Lehren. Für den Mathematiker haben natürlich die Gruppen 2 und 3 das größte Interesse. In betreff des Unendlichen lehrt Galilei, daß es nicht durch Steigerung des Endlichen erreicht wird, führt aber auch nebenbei ein Unendliches ein, das durch Steigerung des Endlichen entsteht, also eine transfinite Zahl genannt werden kann. Hinsichtlich des Kontinuums verteidigt Galilei die Ansicht, daß es aus unendlich vielen unausgedehnten Punkten besteht, die durch ebensolche Vakuen getrennt werden.

Als Quellen der Galileischen Atomistik sind zu bezeichnen teils die metaphysische Atomlehre der Alten, teils die physikalische Atomistik des Heron, teils endlich aristotelisch-scholastische und neuplatonische Lehren, die letzten vermittelt durch Nikolaus von Cusa. E.

W. Schmidt. Leonardo da Vinci und Heron von Alexandria. Bibl. Math. (3) 8, 180-187.

An einer Stelle des „Codice Atlantico" zitiert Leonardo da Vinci „Erone de acqua", und obgleich es unmöglich ist festzustellen, welche Schrift von Heron damit gemeint ist, geht daraus hervor, daß Leonardo wirklich diesen Verf. gekannt hat. Auf der andern Seite finden sich bei Leonardo Ausführungen, die augenfällig mit der Heronschen Pneumatik übereinstimmen, z. B. in betreff des Glockenhebers und der sich selbst regulierenden Lampe. Auch auf dem mathematischen Gebiete sind Übereinstimmungen zwischen Leonardo und Heron nachweisbar. E.

J. Ellend. Das physikalische Museum der Sárospataker Hochschule am Ende des 18. Jahrhunderts. Math. és Phys. Lapok 11, 79-85, 141-144 (Ungarisch).

Inventar der Instrumente des physikalischen Museums einer der ältesten Hochschulen Ungarns, geordnet nach den einzelnen Zweigen der Physik. S.

Aug. Föppl. Die Mechanik im neunzehnten Jahrhundert. Ein akademischer Festvortrag, gehalten in der Aula der k. techn. Hochschule in München am 4. Dezember 1901. München: Ernst Reinhardt. 25 S. gr. 8°.

Eine für größere Kreise berechnete Darstellung, welche in leicht faßlicher Form die Hauptleistungen des abgelaufenen Jahrhunderts in der

Mechanik vorführt und besonders den Einfluß der Mechanik auf die verschiedenen Zweige der Physik in der zweiten Hälfte der Rede schildert.
Lp.

W. Schmidt. Zur Textgeschichte der „Ochúmena“ des Archimedes. Bibl. Math. (3) 3, 176-179.

Im „Codice Atlantico“ des Leonardo da Vinci finden sich Exzerpte aus der von Wilhelm von Moerbeek verfertigten lateinischen Übersetzung der Archimedischen Schrift 'Ὀχούμενα, und es ist nicht unwahrscheinlich, daß Leonardo gerade die Originalhandschrift dieser Übersetzung (jetzt Cod. Ottobonianus 1850 in der Vatikanischen Bibliothek in Rom) benutzt hat. E.

D. Schor. Simon Stevin und das hydrostatische Paradoxon. Bibl. Math. (3) 3, 198-203.

Im 1. Bande der 3. Folge der „Bibl. Math.“ hatte P. Duhem (vergl. F. d. M. **31**, 55, 1900) konstatiert, daß nicht Archimedes, wie Lagrange behauptet hat, sondern erst Stevin das sogenannte „Hydrostatische Paradoxon“ entdeckte, und Duhem fügte hinzu, daß Stevin als Erfinder der richtigen Grundlagen der Hydrostatik betrachtet werden muß. Schor weist aber nach, daß Stevin prinzipiell den Archimedischen Standpunkt einnimmt, so daß er das Axiom aufstellt, nur die Flüssigkeit, die sich senkrecht über dem Boden des Fasses findet, übe einen Druck darauf aus. Der von Stevin angegebene Beweis des „Hydrostatischen Paradoxons“ ist darum unrichtig, und als der wirkliche Begründer der Hydrostatik muß Pascal angesehen werden. E.

P. Tannery. Du rôle de la musique grecque dans le développement de la mathématique pure. Bibl. Math. (3) 3, 161-175.

Tannery untersucht hier, ob die Theorie der Musik, wie sie in Griechenland entwickelt wurde, irgend einen Einfluß auf die klassische Mathematik gehabt hat, und er glaubt Spuren eines solchen Einflusses teils in der Proportionslehre, teils in betreff der Feststellung des Begriffes einer inkommensurablen Größe, sowie bei der Berechnung von Näherungswerten der Quadratwurzel entdeckt zu haben. In der Proportionslehre können die Kunstausdrücke dupliziertes Verhältnis und tripliziertes Verhältnis nach der Ansicht Tannerys kaum auf andere Weise erklärt werden; von einer inkommensurablen Größe kann man vom griechischen Standpunkte aus eine gute Vorstellung bekommen, wenn man sich des harmonischen Mittels bedient, das ja der Theorie der Musik entnommen ist, und auch die von den Griechen angewendete Methode, um $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ annäherungsweise zu berechnen, fußt nach Tannery auf einer Eigenschaft des harmonischen Mittels. E.

F. Jeništa. Über den Fortschritt in der Bestimmung der Länge der Lichtwellen, besonders in dem letzten Jahrzehnte. Věstník **11**, 95-120 (Böhmisch).

B. Kučera. Übersicht über die Fortschritte der Physik im Jahre 1901. Věstník **11**, 192-205, 253-307, 407-461 (Böhmisch).

F. Nušl. Übersicht über die Astronomie im Jahre 1901. Věstník **11**, 768-790 (Böhmisch).

E. H. Schütz. Die Lehre von dem Wesen und den Wanderungen der magnetischen Pole der Erde. Ein Beitrag zur Geschichte der Geophysik. Berlin: D. Reimer. XII u. 76 S. Mit 4 Tab. u. 5 kartogr. Darst.

W. Schmidt. Zur Geschichte des Dampfkessels im Altertume. Bibl. Math. (3) **3**, 337-341.

In Herons „Pneumatik“ wird u. a. auch ein Dampfkessel beschrieben, und da die von Schmidt in seiner Heron-Ausgabe angegebene Rekonstruktion dieses Kessels von den Fachmännern noch nicht genügend beachtet worden ist, so wird hier die fragliche Rekonstruktion ausführlicher begründet. Schmidt hält fest, daß man in betreff des Heronschen Kessels an ein wirkliches Innenfeuer und nicht nur an eine Unterfeuerung zu denken hat. E.

J. H. Graf. Daniel Hubers trigonometrische Vermessung des Kantons Basel (1813-1824). Sep. Abdr. Mitt. Naturf. Ges. Bern. 79 S. 8°.

D. Huber (1768-1829), der Sohn des bekannten Astronomen J. J. Huber (1733-1798), führte die von C. Bernoulli 1811 geplante Triangulation aus, die von großer Bedeutung für den Kanton Basel wurde, für die spätere schweizerische Landesaufnahme aber wegen der verwendeten ungenügenden Instrumente und wegen der Auswahl und unsicheren Festlegung der Dreieckspunkte nicht wohl brauchbar war. Die bezüglichen Aktenstücke, das Messungsverfahren, die Winkel- und Entfernungsergebnisse, auch die recht geringen Kosten der Huberschen Arbeit werden mitgeteilt. Man erkennt in D. Huber, dem auch die Erfindung der Methode der kleinsten Quadrate zugeschrieben wird, ein Muster von Gewissenhaftigkeit, von Energie und patriotischer selbstloser Hingabe. Tn.

Ch. Aug. Vogler. Johann Heinrich Lambert und die praktische Geometrie. Festrede. Berlin: P. Parey. 21 S. gr. 8°.

W. F. Wislicenus. Astronomischer Jahresbericht. Mit Unterstützung der Astronomischen Gesellschaft herausgegeben. III. Band, enthaltend die Literatur des Jahres 1901. Berlin: Georg Reimer. XXXII u. 674 S. gr. 8°.

Mit einer Pünktlichkeit, welche die des Erscheinens der ersten beiden Jahrgänge fast übertrifft, ist der dritte Band des Astronomischen Jahresberichts vollendet worden. Die Hauptarbeit ist wiederum vom Herausgeber geleistet. Daß bei der Geschwindigkeit der Veröffentlichung hin und wieder Versehen vorkommen, wird jeder begreifen und entschuldigen, der einmal solche Arbeiten zu erledigen hatte. Die Hauptsache ist, daß den drängenden Fachgenossen der geordnete Stoff in erstaunlich kurzer Zeit gedruckt übergeben wird. Lp.

G. Eneström. Über eine astronomische Schrift des A. Ricius. [Anfrage 100.] Bibl. Math. (3) 3, 328.

Über Druckort und Jahr einer Schrift des Astronomen A. Ricius „De motu octavae sphaerae“ aus dem Anfange des 16. Jahrhunderts finden sich drei verschiedene Angaben, und es wird gefragt, ob es wirklich drei Ausgaben oder wenigstens drei Titelauflagen gibt. E.

E. Stuyvaert. Les accroissements du système solaire au XIX[e] siècle. Annuaire astr. de Belgique 1902, 229-244.

Daten der Entdeckungen der Asteroiden, der Trabanten und der periodischen Kometen. Mn.

Cl. Sannier. Die Geschichte der Zeitmeßkunst von den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart. Ins Deutsche übersetzt und neu bearbeitet von G. Speckhart. 1. Lieferung. Bautzen: E. Hübner. III u. 48 S. gr. 8°.

C. F. Lehmann. Über die Beziehungen zwischen Zeit- und Raummessung im babylonischen Sexagesimalsystem. Beiträge zur alten Geschichte 1902. 20 S.

F. K. Ginzel. Die astronomischen Kenntnisse der Babylonier und ihre kulturhistorische Bedeutung. III. Beiträge zur alten Geschichte 1902. 49-80.

L. Dünner. Die älteste astronomische Schrift des Maimonides. Aus zwei Manuskripten der Nationalbibliothek in Paris, bezeichnet: Fonds hébreu No. 1058 u. No. 1061. Ein Beitrag zur Geschichte der Astronomie. Würzburg: J. Frank. 54 S. gr. 8°.

R. L. J. ELLERY. A brief history of the beginnings and growth of astronomy in Australasia. Inaugural address. Rep. Austral. Assoc. 8, 1-17.

Kapitel 2.

Philosophie und Pädagogik.

A. Philosophie.

G. GALLUCCI. Saggio di una introduzione alla filosofia delle matematiche. Caltanissetta: Tipografia dell' Omnibus. 125 S. 8°. [Loria Boll. 6, 19-21, 54-56.]

Der Verf. setzt sich als Zweck vor, den Mathematikern die Grundsätze der Erkenntnistheorie und der Psychologie darzubieten. Die vorliegende Einleitung zerfällt in zwei Teile. Der erste behandelt die Erkenntnistheorie nach den berühmtesten neueren Philosophen von Kant an. Der zweite entwickelt die Prinzipien der Philosophie der Wissenschaften im allgemeinen und inbesondere der Mathematik; als Grundlagen dieser letzteren werden die beiden Prinzipien der Zuordnung oder der Darstellung und der Verallgemeinerung bezeichnet. Vi.

H. POINCARÉ. Sur la valeur objective de la science. Rev. de métaphys. 10, 263-293.

Eine Abhandlung, die durch die Artikel von Le Roy über denselben Gegenstand veranlaßt ist, sowie durch die von ihm in der Société française de philosophie vorgetragene Promotionsschrift. Die vorliegende kritische Studie umfaßt sechs Paragraphen: Einleitung. Die Wissenschaft und die Regel der Aktion. Die rohe Tatsache und die wissenschaftliche Tatsache. Der Nominalismus und die universale Invariante. Zufall und Determinismus. Objektivität der Wissenschaft. Fr. (Lp.)

G. FR. LIPPS. Einleitung in die allgemeine Theorie der Mannigfaltigkeiten von Bewußtseinsinhalten. Wundt Philos. Studien 20, 116-151.

Die Abhandlung zerfällt in drei Teile: I. Die Denktätigkeit und der Denkgegenstand. II. Das erfassende und das beziehende Denken. Die Bewußtseinsinhalte und ihre Substanzen. III. Die Bewußtseinsinhalte als Kombinationen von Elementen und ihre Mannigfaltigkeiten.

Bei der Unmöglichkeit, die Gedankenreihen hier auch nur anzudeuten, wollen wir durch Wiedergabe des folgenden Satzes eine Vorstellung von dem Erstrebten geben (S. 151).

„Sollen die als Kombinationen der n Elemente $a_x, b_y, c_z, \ldots$ sich darbietenden Bewußtseinsinhalte $[a_x, b_y, c_z, \ldots]$ zusammengehören und eine nicht zerfallende Mannigfaltigkeit $M[a_x, b_y, c_z, \ldots]$ bilden, so dürfen die Elemente weder einzeln noch gruppenweise von den übrigen Elementen in der Veränderlichkeit ihrer Intensitäten unabhängig sein; sie müssen vielmehr Bedingungen genügen, die sich auf die Gesamtheit der variablen Intensitätswerte $x, y, z, \ldots$ beziehen. Diese Bedingungen können ebensowohl durch Gleichungen wie durch Ungleichungen gegeben sein. Durch diese Erkenntnis wird der Zugang zu der allgemeinen Theorie der Mannigfaltigkeiten von Bewußtseinsinhalten in der Tat eröffnet. Denn man kann nun durch die Wahl geeigneter Bedingungen zur Darstellung der empirisch vorliegenden Mannigfaltigkeiten gelangen." Lp.

A. Lynch. Les mouvements élémentaires de l'esprit. Ens. math. **4**, 317-322.

Enthält allgemeine Betrachtungen über die Vorgänge im menschlichen Geist, die der Bildung von Begriffen und Vorstellungen vorangehen und unterhalb der Grenze des Bewußten liegen, über Art und Wesen der Einheit, über Bedeutung und Ausbildung der Symbole, sowie über die Wege der Entwicklung des Geistes. Tn.

H. Burkhardt. Mathematisches und naturwissenschaftliches Denken. Deutsche Math.-Ver. **11**, 49-57. [Allgem. Zeitung, 22. Novbr. 1897.]

Burkhardt schildert die Diskrepanz zwischen der wesentlich ungenauen geometrisch-naturwissenschaftlichen Anschauung und der logischen Forderung absoluter Genauigkeit der Analysis. Er rät den Studenten, das Studium nicht mit dem zu beginnen, was man herkömmlich algebraische Analysis nennt, sondern sogleich mit beiden Füßen in die Differential- und Integralrechnung zu springen. Mi.

P. Natorp. Die erkenntnistheoretischen Grundlagen der Mathematik. Unterrichtsbl. f. Math. u. Naturw. 8, 2-8; Zs. f. math. u. naturw. Unt. **33**, 136-137.

Der auf der Straßburger Philologenversammlung gehaltene Vortrag berichtet über zwei früher veröffentlichte Abhandlungen des Verf.: 1. Nombre, temps et espace dans leurs rapports avec les fonctions primitives de la pensée. Bibliothèque du Congr. intern. de Philos. **1**, 343-389. Paris: A. Colin, 1900. 2. Zu den logischen Grundlagen der neueren Mathematik. Arch. f. syst. Philos. **7**, 177-209, 372-384, 1901. Es handelt sich um die letzten gemeinsamen Grundlagen der Arithmetik und der Geometrie. Der Ausgang wird gefunden in der einfachen relativen Setzung 1 zu 0, wo 0 den letzten Bezugspunkt, 1 das erste in bezug auf die Null Gesetzte besagt. Von dieser Betrachtung aus wird der

Begriff der Reihe konstruiert, und zwar der Zahlenreihe als gerader Reihe. In dieser Konstruktion sind die mathematischen Gesetze der reellen und komplexen Zahl, der Zeit und des Raumes gleichmäßig gegeben. Hinsichtlich der Dimensionenzahl ergibt sich aus der Deduktion, daß drei Dimensionen notwendig und hinreichend sind, um einen stetigen Zusammenhang der Richtungen herzustellen. Lp.

W. Wirth. Zur Theorie des Bewußtseinsumfanges und seiner Messung. Wundt Philos. Studien 20, 487-669.

1. Einleitung und Vorfragen. 2. Die Bestimmung des Umfanges der „maximalen Klarheit", des sog. Aufmerksamkeits-Umfanges, durch unmittelbare Wiedergabe eines tachistoskopisch dargebotenen Komplexes. (Bestimmung des Umfanges der klaren Neuauffassung). 3. Die erste Verwertung der Vergleichsmethode zur Umfangsbestimmung. 4. Theorie einer Bestimmung des (optischen) Bewußtseinsumfanges durch eine tachistoskopische Vergleichsmethode. — Bestimmung der einzelnen Bewußtseinsgrade durch die Unterschiedsschwelle. 5. Charakterisierung der früheren Messungen der Vorstellungskonkurrenz durch Schwellenbestimmungen. 6. Bericht über die eigenen Experimente. (Neue tachistoskopische Apparate und ihre Methode.) Lp.

F. Cipolla. Ogni relazione è immediata; Pensieri. Ven. Ist. Atti 61 [(8) 4], 315-324.

Cipolla ist der Ansicht, daß jede wirkliche Beziehung unmittelbar ist, und daß unmittelbare Beziehungen nur das Resultat, nie die Bedingung einer Reihe von unmittelbaren Beziehungen seien. Er glaubt, daß die Irrtümer der Eleaten, der platonischen Ideenlehre, des transzendentalen Skeptizismus, des Indeterminismus, Arrianismus, des Occasionalismus, der prästabilierten Harmonie aus Vernachlässigung dieses Gesetzes entsprossen seien. Mi.

P. Buffa. Principii di logica. Periodico di Mat. (2) 4, 292-300.

Fortsetzung des im Vorjahre (S. 70) besprochenen Aufsatzes. Das Prinzip des Besonderen und des Allgemeinen oder das Prinzip des Syllogismus wird zuerst erörtert; dann folgen der Widerspruch und die Unvereinbarkeit, die Konditionalsätze. Weitere Fortsetzungen werden versprochen. Lp.

G. Peano. Formulaire mathématique. Édition de l'an 1902-1903 (Tome IV de l'édition complète). Turin: Bocca-Clausen. XVI + 407 S. 8°.

In dieser Auflage ist der Stoff vollständig umgeordnet worden. Was den Inhalt betrifft, so mögen wir folgendes als neu bezeichnen: a) Einige

Übungen über mathematische Logik. b) Drei Paragraphen über Kettenbrüche, Differenzenrechnung und Wahrscheinlichkeit. c) Die Differentialgeometrie, welche von nur zwei zu 36 Seiten gestiegen ist. d) Einige bio- und bibliographische Notizen über die im Texte zitierten Schriftsteller. e) Ein mathematisches Wörterbuch. Vi.

G. Peano. Aritmetica generale e algebra particolare. Torino: Paravia. VIII + 144 S. 8°.

Dieses Lehrbuch bietet, in Zeichenschrift geschrieben, alles das, was über allgemeine Arithmetik und elementare Algebra in den klassischen Mittelschulen gelehrt wird. Zahlreiche Fußnoten erleichtern das Verständnis des Textes. Der Inhalt ist, mit kleinen Veränderungen, dem Formulaire mathématique 1902-1903 (Bericht vorstehend) entnommen, mit Ausschluß des letzten, der allgemeinen Größenlehre gewidmeten Paragraphen. Vi.

A. N. Whitehead. On cardinal numbers. American J. **24**, 367-394.

Der erste Abschnitt dieser Schrift ist der Peanoschen Zeichenschrift, der zweite der Russellschen Theorie der Relationen, der dritte, vierte und fünfte der Theorie der Kardinalzahlen gewidmet, wobei die Symbole der mathematischen Logik durchgehends gebraucht werden und die Sätze nach der dezimalen Methode numeriert sind. Hier bietet sowohl die Behandlungsweise als der Inhalt manches Neue dar, und es ist daher der Mühe wert, einige Hauptpunkte hervorzuheben.

Die Kardinalzahl einer Menge u ist die Menge der zu u ähnlichen (oder nach Cantor äquivalenten) Mengen (1,3). 1 ist eine Menge, die, wenn x ein derselben angehöriges Element ist, kein von x verschiedenes Element enthält (1,4). Von 1 ausgehend, werden sämtliche endlichen Kardinalzahlen nach und nach dadurch erzeugt, daß man n als eine Menge definiert, welche $n-1$ von einem vorgegebenen Elemente derselben verschiedene Elemente enthält (1,5). Eine nicht endliche Kardinalzahl heißt unendlich (1,8). Eine Kardinalzahl α ist dann und nur dann endlich, wenn $\alpha \neq \alpha + 1$ (2,75); sie ist dann und nur dann unendlich, wenn $\alpha = \alpha - 1$ (2,76). Es wird nun ein unbewiesener Satz als Postulat („primitive Proposition“) eingeführt (4,3); eine solche Einführung, welche wohl etwas sonderbar erscheinen darf, geschieht nach dem Verf. nur, um die Wichtigkeit des der Prüfung bedürftigen Satzes an dessen Folgen zu zeigen. Der Satz darf so ausgesprochen werden: Jede Menge läßt sich auf die Form einer Menge abzählbarer Mengen bringen; oder auch: Ist α irgend eine Kardinalzahl, so gibt es stets eine solche Kardinalzahl β, daß $\alpha = \alpha_0 \beta$ ist, wobei α_0 die Kardinalzahl der abzählbaren Mengen (das Cantorsche $\aleph_0$) bezeichnet. Als Korollare dieses Postulates mögen die folgenden Sätze angeführt werden: $\alpha + \alpha = \alpha$ (4,32); $\alpha \alpha_0 = \alpha$ (4,33); ist $\beta < \alpha$, so ist $\alpha + \beta = \alpha$ (4,38); ist $\beta < \gamma$, so ist $\alpha\beta \leq \alpha\gamma$

(4,39), $\alpha^\beta \leq \alpha^\gamma$ (4,4), $\beta^\alpha \leq \gamma^\alpha$ (4,41). Auch der Äquivalenzsatz wird vom Verf. auf Grund seines Postulates bewiesen (4,5). Wesentlich neu ist die Ausdehnung der Begriffe von Summe (7,1) und Produkt (7,21) auf unendlich viele Kardinalzahlen, sowie die Anwendung auf unendliche Kardinalzahlen der Binomialentwicklung (17 u. f.) und der Abzählung von Kombinationen (15,1) und Permutationen (22,01). Vi.

A. Padoa. Théorie des nombres entiers absolus. Revue de Math. 8, 45-54.

Während im Formulaire de mathématiques die Theorie der natürlichen Zahlen auf drei Grundbegriffen, d. i. 0, N (= ganze nicht negative Zahl) und suc (= die auf eine Zahl folgende Zahl) begründet ist, zeigt der Verf., wie man diese Theorie auf die einzigen Grundbegriffe N und suc bauen kann. Vi.

E. Bortolotti. Contributo alla teoria degli insiemi. Rom. Acc. L. Rend. (5) 11_2, 45-52.

Bortolotti bemerkt, daß die Definition des „äußeren Inhaltes" einer linearen Punktmenge auf eine in einem unendlichen Intervalle $x_0\,\infty$ liegende Menge in zweifacher Weise ausgedehnt werden kann. Entweder nämlich definiert man den äußeren Inhalt einer solchen Menge als den Grenzwert für $\lim x = \infty$ des äußeren Inhaltes der im Intervalle $x_0\,x$ liegenden Teilmenge; oder man übt direkt auf das Intervall $x_0\,\infty$ eine Folge von sukzessiven Zerlegungen aus und definiert den äußeren Inhalt als den unteren Grenzwert der Summe derjenigen Teilintervalle, welche Punkte der Menge oder Grenzpunkte desselben enthalten. Beide Definitionen stimmen im allgemeinen nicht überein. Anstatt sich für eine oder die andere dieser Definitionen zu entscheiden, zieht Bortolotti es vor, einen dritten Begriff einzuführen, der wohl gleichfalls als eine Ausdehnung des Begriffes des äußeren Inhaltes gelten darf. Er ordnet nämlich jeder im Intervalle $x_0\,\infty$ liegenden Punktmenge eine Zahl L zu, welche folgendermaßen definiert wird: Ist $x_0, x_1, x_2, \ldots$ eine unbeschränkt zunehmende Zahlenfolge, und bezeichnet L_n den äußeren Inhalt der im Intervalle $x_n\,x_{n+1}$ liegenden Teilmenge, so ist:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} L_n,$$

wenn die letzte Reihe konvergiert. — Die Zahl L ist unabhängig von der Wahl der Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Sie fällt mit dem im ersteren Sinne verstandenen äußeren Inhalte dann und nur dann zusammen, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} L_n(\delta)$ in einer Umgebung von $\delta = 0$ „streckenweise gleichmäßig konvergiert" (über die Bedeutung dieser Bezeichnung siehe: Arzelá, Intorno alla continuità della somma di infinite funzioni continue, Bologna Rend. 1883-84, 79-84); hier bedeutet $L_n(\delta)$ die Summe der Teilintervalle

von $x_n\,x_{n+1}$, welche Punkte der betrachteten Menge oder Grenzpunkte derselben enthalten, vorausgesetzt, daß man $x_n\,x_{n+1}$ in Teilintervalle zerlegt hat, deren Länge δ nicht übertrifft.

Stellt $y=f(x)$, wo $f(x)$ eine mit x beständig und unbeschränkt zunehmende Funktion von x ist, eine Abbildung des Intervalles $x_0\,\infty$ auf das Intervall $y_0\,\infty$ dar, und kommt einer in $x_0\,\infty$ enthaltenen Punktmenge eine endliche Zahl L zu, so kommt auch der entsprechenden in $y_0\,\infty$ enthaltenen Menge eine endliche Zahl L' zu; ist $L=0$, so ist auch $L'=0$. Vi.

B. Levi. Intorno alla teoria degli aggregati. Lomb. Ist. Rend. (2) 35, 863-868.

Der Verf. hält die Stichhaltigkeit einiger Beweise von Bernstein (Untersuchungen aus der Mengenlehre, Halle, 1901; F. d. M. **32**, 73, 1901) dadurch für beeinträchtigt, daß dieser den folgenden, nach Levi zweifelhaften Satz als evident stillschweigend annimmt: Wird eine Menge in Teilmengen zerlegt, so ist die Mächtigkeit der Menge dieser Teilmengen gleich oder kleiner als diejenige der gegebenen Menge. Daher gibt Levi einen von diesem Hülfssatze unabhängigen Beweis des Satzes, daß die Menge der abgeschlossenen Mengen die Mächtigkeit des Kontinuums hat. Vi.

A. Bindoni. Sui numeri infiniti ed infinitesimi attuali. Rom. Acc. L. Rend. (5) **11**$_2$, 205-209.

Hilbert hat jüngst (Grundlagen der Geometrie, Leipzig: Teubner, 1899; F. d. M. **30**, 424, 1899) einen Größenbereich mit unendlich großen und unendlich kleinen Größen aufgestellt. Der Verf. bildet einen den Hilbertschen in sich einschließenden Größenbereich, und zeigt, daß dieser durch einige beschränkende Voraussetzungen mit dem bekannten Veroneseschen in Übereinstimmung gebracht werden kann. Vi.

B. Russell. Théorie générale des séries bien ordonnées. Revue de Math. 8, 12-43.

Eine neue Darstellung der Theorie der wohlgeordneten Reihen durch die Symbole der mathematischen Logik. Vi.

K. Shakow. Begriff der Unendlichkeit in der Algebra, Analysis, Geometrie und Philosophie; Problem der Unendlichkeit des Raumes; Problem der Unendlichkeit der Materie. Fragen der Philosophie und Psychologie No. 61 (Jahrg. XIII No. 1) Abt. 2. 568-580. (Russisch).

Die Betrachtungen des Verf. über mathematische Begriffe sind mangelhaft. Er glaubt z. B., die Mathematiker operieren mit dem Unendlichen

wie mit einer bestimmten Zahl, und sieht daher das Unendliche in der Geometrie als eine Antithese des Unendlichen in der Analysis an. Si.

K. Geissler. Die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie. Leipzig: B. G. Teubner. VIII + 417 S. gr. 8°.

Geißler verfolgt den Begriff des Unendlichen auf der Fährte der mathematischen Probleme von der Linienanschauung ab bis zum Differential und versucht, nach einem Blick auf die Geschichte der Philosophie denselben endgültig zu fassen und von den in ihm liegenden Schwierigkeiten zu befreien. Statt zu sagen: „auf einer Strecke liegen so und so viel Punkte“, sagt er: „eine Strecke kann mit so und so viel Punkten behaftet werden“. „Eine räumliche Vorstellung, etwa die zweier Strecken, kann ich im allgemeinen fassen, ohne mich schon entschieden zu haben, ob es endliche, unendlichkleine oder unendlichgroße sein sollen; jedenfalls ist es möglich, so weit zu abstrahieren, daß in der Vorstellung absichtlich nur noch das Verhältnis zweier Strecken im allgemeinen vorhanden ist, und dann zu sagen, nun sollen dieselben endlich oder unendlich sein. Das will ich nunmehr so ausdrücken: es wird die Vorstellung der Strecken mit der Weitenbehaftung des Endlichen, bezw. des Unendlichkleinen oder Unendlichgroßen behaftet.“ „Die Weitenbehaftung einer räumlichen Vorstellung ist eine Eigenschaft, die in tatsächlich verschiedener Weise vorhanden ist; die eine kann nicht ohne weiteres in die andere übergehen, weder sprungweise noch sprunglos gleitend, sondern es bedarf die Beziehung zwischen verschiedenen Weitenbehaftungen besonderer Untersuchungen“. Geißler erkennt eine Fähigkeit des Geistes an, den Raum, die Zahl, die Zeit in zwei verschiedenen Weisen mit dem Endlichen und dem Unendlichen zu behaften. Bei allen Mannigfaltigkeiten erzeugt eine besondere geistige Tätigkeit die Vorstellung des Endlichen oder Unendlichen. Das Wesen des Unendlichen bestehe demnach darin, „daß es sich je ein Glied bestimmter Art mit bestimmten Beziehungen und Grundsätzen einordnet in die Reihe der Weitenbehaftungen“. Mi.

J.-F. Bonnel. L'atome dans la géométrie. Ens. math. 4, 27-32.

Als nützlich und notwendig erklärt der Verf. die Einführung des Atoms in die Geometrie, des Atoms als der kleinsten von allen unendlich kleinen Größen ihrer Art; denn nur so könne dem letzten Element der Länge (der Fläche, des Raumes) die zweifache Eigenschaft gewahrt bleiben, die es besitzen müsse, nämlich die der Ausdehnung und die der Unteilbarkeit. Der Punkt könne durchaus nicht das letzte Element der Länge sein. So könne durch Einführung des Atoms der Begriff des Inkommensurabeln unterdrückt werden und damit die Verwendung des Grenzverfahrens in den Definitionen. Tn.

J.-F. Bonnel. L'infini et l'indéfini dans les constructions géométriques. Ens. math. 4, 167-171.

Der Sinn bestimmter, unbestimmter, unendlichgroß (oder klein) werdender Größen wird erklärt an den Beispielen des Kreises, des Sehwinkels einer Strecke, der fortgesetzten Halbierung eines Strecke und ähnlichen Beispielen, dann an Zahlenreihen erläutert. Der Verf. kommt zu dem Schluß (S. 171), der Übergang vom Unbestimmten zum Unendlichen oder zu Null bleibe derart rätselhaft, daß es im elementar-mathematischen Unterricht vernünftig sei, jene beiden Ausdrücke (∞ und 0) völlig zu unterdrücken, da sie keiner positiven oder genauen Vorstellung entsprechen, und da sie ohnedem durchaus nicht unumgänglich seien. Tn.

J.-F. Bonnel. La continuité géométrique et l'atome. Ens. math. 4, 429-433.

Erneut tritt Bonnel ein für die Notwendigkeit, wie in der Physik und Chemie, so auch in der Geometrie das „Atom" als Grundstück zu wählen, um die unklaren Vermengungen von „indéfini" und „infini" zu vermeiden. Er wendet sich hierbei gegen Pascal und Kant und billigt das Vorgehen von Leibniz. Tn.

Ch. Lagrange. Sur l'infiniment petit absolu. Ens. math. 4, 172-174.

Hier findet der von Bonnel gemachte Vorschlag (vgl. vorstehend), das „Atom" oder das „Minimum der Größe" einzuführen, lebhafte Unterstützung und Verdeutlichung sowie Begründung. Tn.

G. Tschelpanow. Neogeometrie und ihre Bedeutung für die Theorie des Raumes. Fragen der Philosophie und Psychologie No. 62, Abt. I, 934-953; No. 63, 1137-1157; No. 64, 1221-1247; No. 65, 1379-1408 (Russisch).

Der Verf. gibt (im ganzen richtig) die Ansichten von Lobatschewsky, Riemann, Helmholtz, B. Erdmann, F. Klein, Russell wieder und kommt zu dem Schluß, daß die Metageometrie die Apriorität des Raumes keineswegs widerlege, wohl aber, den Begriff des Raumes erweiternd, die Möglichkeit biete, den wesentlichen Inhalt des Begriffs der Apriorität des Raumes hervorzuheben, namentlich dessen Außerhalbliegen. Si.

A. Kirschmann. Die Dimensionen des Raumes. Wundt Philos. Studien 19, 310-417.

Wir geben aus dieser umfangreichen Untersuchung nur den „Schluß" (S. 412-413) mit den Worten des Verf. wieder.

„Wir haben den Beweis zu führen gesucht, daß die im gewöhnlichen Leben und in der mathematischen Wissenschaft allgemein anerkannte Dreidimensionalität des Raumes eine konventionelle, nicht in der Natur des Raumes begründete Voraussetzung ist, und daß die auf die unkritische

Annahme des Dimensionsbegriffes aufgebauten „Überräume" der Mathematiker Produkte unberechtigter Spekulationen sind. Nun könnte man einwenden, diese Ergebnisse der fortschreitenden mathematischen Entwicklung seien hypothetischer Natur, und die Mathematik habe, wie jedes andere Lehrgebäude, das Recht zur Konstruktion von Hülfsbegriffen und zur Aufstellung brauchbarer Hypothesen. Demgegenüber muß betont werden, daß wir dem konventionellen Dimensionsbegriff seine Nützlichkeit und praktische Verwendbarkeit durchaus nicht absprechen. Wir verlangen nur, daß er nicht als etwas aus der Natur des Raumes mit Notwendigkeit Folgendes ausgegeben werde, damit keine Entstellung des wirklichen Tatbestandes der Gesetze der Raumanschauung verursacht wird.

Den metageometrischen Theorien aber soll daraus kein Vorwurf entstehen, daß sie hypothetische Elemente enthalten, also „Sache des Glaubens" sind, und wir sind gewiß die letzten, sie aus diesem Grunde zu verdammen. Wir sind im Gegenteil der Ansicht, daß der Glaube nicht bloß im gewöhnlichen Leben, sondern auch in der Wissenschaft eine viel größere Rolle spielt, als man ihm in der Regel zuzuschreiben geneigt ist. Bei allen einen Zweck verfolgenden Handlungen reagieren wir auf „Glauben" und nicht auf „Gewißheit". Gewißheit ist Ausgangspunkt und Ziel unseres Handelns, die Triebkraft ist der Glaube. Auch in der exaktesten wissenschaftlichen Forschung regiert der Glaube jeden Schritt, den wir ausführen. Sind auch die Ergebnisse absolut gewiß, der Weg zu ihnen ist mit Glaubenssätzen gepflastert.

Selbst der Mathematiker kann des Glaubens nicht entraten. Gern geben wir apodiktische Gewißheit der geometrischen Axiome (die an ihrer absoluten Einfachheit und Unzerlegbarkeit ebenso erkennbar sind wie die qualitativen Elemente der Sinneswahrnehmung) und der aus ihnen widerspruchslos abgeleiteten Sätze zu. Aber wir behaupten, daß der Mathematiker gar keine Veranlassung hätte, von einem als gewiß erkannten Satze ausgehend, nach neuen Gewißheiten und Notwendigkeiten zu suchen, wenn ihm nicht der Glaube den Antrieb gäbe.

Nicht weil sie Hypothesen, Glaubenssache sind, verwerfen wir die metageometrischen Theorien, sondern weil sie auf widerspruchsvollen Scheinbegriffen und Pseudounterscheidungen aufgebaut sind. Denn das, was einen Widerspruch enthält, kann und darf man nicht glauben. Die heutige Mathematik läuft Gefahr, sich in eine dem gesunden (ich meine nicht dem gemeinen) Menschenverstand entfremdete, analytisch-formalistische Symbolik zu verlieren. Es ist daher erwünscht, daß den allzu hoch fliegenden Spekulationen die wächsernen Flügel ein wenig schmelzen, damit sie sich nicht zu weit entfernen von dem Ausgangsgebiet aller mathematischen Forschung, von dem Gebiete, dem allein Notwendigkeit innewohnt: der Geometrie des gegebenen Raumes."

Daß der Verf. nicht ein Mathematiker ist, verrät er an manchen Stellen, unter anderem durch sein Urteil über das Gaußsche Krümmungsmaß und die sich anschließende Erklärung, im euklidischen Raume gebe es nur positiv gekrümmte Oberflächen. Lp.

E. Pietzker. Die dreifache Ausdehnung des Raumes. Unterrichtsbl. f. Math. u. Naturw. 8, 39-41.

Aus Anlaß des Natorpschen Vortrages (vgl. das Referat S. 72) setzt der Verf. die Ansichten auseinander, die er in seiner Schrift: „Die Gestaltung des Raumes“ dargelegt hat (F. d. M. 23, 530, 1891). Lp.

A. Tafelmacher, Ch. Berdellé. Sur une question de terminologie. Ens. math. 4, 298-302.

Es handelt sich hier um die Wahl und Bedeutung der Worte „kongruent“, „inhaltsgleich“, „gleich“, „ähnlich“ und um Beibehalten oder Zusammenwerfen oder Unterdrücken der Worte „congruent“, „égal“, „équivalent“ (indifférent). Jedenfalls sollte, meint Berdellé, „kongruent“ in allen Sprachen nur im Sinne der höheren Zahlenlehre Verwendung finden. Tn.

Ludwig Lange. Das Inertialsystem vor dem Forum der Naturforschung. Kritisches und Antikritisches. Wundt Philos. Studien 20, 1-71.

Die Abhandlung erörtert die Ansichten, welche seit den Arbeiten des Verf. über das Beharrungsgesetz (vgl. F. d. M. 17, 816, 1885) von hervorragenden Forschern bezüglich der hierbei in Betracht kommenden Fragen geäußert sind. Die Anmerkungen auf S. 63-71 liefern eine recht gute Zusammenstellung aller hierher gehörigen Veröffentlichungen. Zur Sache selbst lassen wir dem Verf. das Wort:

„Es bleibt dem Leser überlassen, sich je nach seinem eigenen Urteil für oder wider meine Vorschläge zu entscheiden. Wer es als Aufgabe der Wissenschaft ansieht, in ihrem Rahmen wenigstens das dem Naturmenschen angeborene, unklare und mehr oder minder willkürliche Hantieren mit geheimnisvollen Gründen der Erscheinungswelt auf ein Minimum zu beschränken, dem wird die gebotene Aufklärung ohne weiteres willkommen sein. Da übrigens das Interesse an der Frage, wie die gegebene Darstellung erkennen läßt, eher im Wachsen als in der Abnahme begriffen ist, brauche ich die Hoffnung nicht aufzugeben, daß sich künftige systematische Darstellungen der Mechanik mit der von mir angestrebten Änderung der Fundamente mehr und mehr befreunden werden. Wer in dem Trägheitsgesetz einen tieferen Sinn als den einer partiellen Konvention sucht, verläßt eben damit meiner Meinung nach das Gebiet der strengen Wissenschaft. Mit dem Standpunkt des philosophischen oder religiösen Glaubens zu rechten, ist aber natürlich niemals meine Absicht gewesen. In diesem Sinne habe ich seinerzeit die Kritik Newtons mit den Worten abgeschlossen: Dem Glauben des einzelnen bleibt es unbenommen, seine Konvention, seine subjektive Teleologie als Ausfluß einer allgeistigen, göttlichen Teleologie aufzufassen.“ Lp.

La Rédaction. Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens. Ens. math. 4, 208-211.

Hier finden sich, mit der Bitte an die Leser des Blattes um vollständige oder teilweise Beantwortung, 21 Fragen allgemeiner Art zusammengestellt, die auf die Zeit und Art des Hervortretens mathematischer Neigungen sich beziehen, ferner auf die Art des Studiums, des Betriebes, der Förderung mathematischer Arbeit, auf Art, Umfang, Einfluß mathematischer Lektüre und sonstiger Beschäftigung. Dann folgen noch sieben Fragen besonderer Art, die sich auf die Lebensgewohnheiten mathematisch Arbeitender beziehen. Die Schriftleitung hält die möglichst zahlreiche Beantwortung solcher Fragen für recht wichtig für die Geschichte der Mathematik wie für die Erkenntnis des Psychologischen. Tn.

C. A. Laisant. A propos d'un discours. Ens. math. 4, 6-9.

Hier wird der Inhalt eines Vortrages von Blutel (Paris) wiedergegeben über den Nutzen mathematischer Studien. Tn.

G. Loria. Donne matematiche. Lettura tenuta nella grande Aula della R. Accademia Virgiliana la sera del 28 dicembre 1901. Mantova: Mondovi. 26 S. 8° (Auszug aus den Memorie della R. Accademia Virgiliana).

Die Betrachtung des wissenschaftlichen Lebens von Mme du Châtelet, Maria Gaetana Agnesi, Caroline Herschel und anderen Frauen, die sich mit Mathematik und Astronomie beschäftigten, führt Loria zum Schlusse, daß die Mathematikerin nie aufhört, eine Schülerin zu sein, insofern sie immer einer Stütze, eines Führers bedarf; daß es einen Punkt in ihrem Leben gibt, an welchem ihre wissenschaftliche Tätigkeit sich auslöscht; daß nicht eine innige Freude, sondern eine tiefe Entmutigung die glänzendsten Erfolge in ihrem Geiste begleitet. Selbst das Beispiel von Frau Kowalevski entwaffnet Loria nicht, sondern bekräftigt ihn in seiner Überzeugung. Vi.

Ch. Méray. La langue internationale auxiliaire „Esperanto" et la littérature scientifique. Annuaire des Math. 445-459.

Der begeisterte Anhänger der künstlichen Weltsprache Esperanto benutzt den ihm von den Herausgebern des Adreßbuchs der Mathematiker bewilligten Raum zu einer Anpreisung der neuen Erfindung. Lp.

Weitere Literatur.

Ch. Alasia. L'induzione matematica. Il Pitagora, 9, 51-56.

F. Auerbach. Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. Leipzig: B. G. Teubner. IV u. 156 S. 8°. (Aus Natur und Geisteswelt.)

B. BOURDON. La perception visuelle de l'espace. Paris: Schleicher. 446 S. 8°.

P. CARUS. The philosophical foundations of mathematics. The Monist 13, 273-294.

L. COUTURAT. La logique de Leibniz, d'après des documents inédits. Paris: Alcan. XII + 608 S.

C. DASSEN. Metafisica de los conceptos matematicos fundamentales (Thèse). Buenos-Ayres. 185 S. gr. 8° (1901).

L. GÉRARD. Sur l'idée de nombre. Bull. d. sc. math. élém. 7, 226-230.

L. GÉRARD. Définition des nombres imaginaires. Ibid. 244-247.

L. GÉRARD. Sur la rigueur mathématique. Sur les définitions. Ibid. 258-262.

L. GÉRARD. Propriétés primitives des nombres. Ibid. 307-308.

A. HESS. Das Märchen vom Kausalzusammenhang oder Im Banne des Zwecks. Eine Kritik des kausalen Denkens. Hamburg: O. Meissner. 48 S. gr. 8°.

D. HILBERT. The foundations of geometry. Authorized translation by E. J. Townsend. Chicago: Open Court Publishing Company. VII + 132 S. 12mo.

J. F. IGURBIDE. Nature harmonique de l'espace; traduit de l'espagnol. Barcelone: Giro. 245 S. 8°.

G. H. KNIBBS. The history of the atomistic conception and its philosophical import. Presidential address. Rep. Austral. Assoc. 8, 18-44.

E. KRAEPELIN. Die Arbeitskurve. Wundt Philos. Studien 19, 459-507.

H. LESER. Das Wahrheitsproblem unter kulturphilosophischem Gesichtspunkt. Eine philosophische Skizze. Leipzig: Dürrsche Buchhdl. IV u. 90 S. (1901.)

LE VAVASSEUR. Énumération des groupes d'opérations d'ordre donné. Paris: Hermann. 128 S. 4°.

E. MACH. On the psychology and natural development of geometry. The Monist 12, 481-515.

E. MARCUS. Kants Revolutionsprinzip (Copernikanisches Prinzip). Eine exakte Lösung des Kant-Humeschen Erkenntnisproblems, insbesondere des Problems der „Erscheinung“ und des „Ding an sich“. Herford: W. Menckhoff. XII u. 181 S. gr. 8°.

G. MAUPIN. Opinions et curiosités touchant la mathématique. 2e série. Paris: Naud. 338 S. 8°.

K. E. NEUZEIT. Mechanik des Aethers. Gegen die Irrlehren des Copernicus und die materialistische Weltanschauung. Leipzig: R. Uhlig in Komm. 31 S. gr. 8°.

J. VON OLIVIER. Was ist Raum, Zeit, Bewegung, Masse? Was ist die Erscheinungswelt? Zweite bedeutend erweiterte und verbesserte Auflage. München: L. Finsterlin. VIII u. 153 S. gr. 8°.

W. OSTWALD. Vorlesungen über Naturphilosophie. Leipzig: Veit & Co. 457 S. [Nature 65, 264-268.]

W. OSTWALD. Annalen der Naturphilosophie. I. Leipzig: Veit & Co.

M. PALÁGYI. Kant und Bolzano. Eine kritische Parallele. Halle: M. Niemeyer. XI u. 124 S. gr. 8⁰.

G. PEANO. Über die Definitionen in der Mathematik. Aus der „Bibliothèque du Congrès international de Philosophie". III. Paris 1901. 279-288. Ins Polnische übersetzt von Z. Krygowski. Wiad. mat. 174-181.

G. PORTIG. Das Weltgesetz des kleinsten Kraftaufwandes in den Reichen der Natur und des Geistes. 1. Band. In der Mathematik, Physik und Chemie. Stuttgart: M. Kielmann. XII u. 332 S. gr. 8⁰.

G. RICCI. Origini e sviluppo dei moderni concetti fondamentali sulla geometria. (Annuario Univ. Padova 1902, VIII + 360 S. 4⁰.)

J. B. STAUB. Der Magnetismus als Universalfaktor im Weltenbau. Eine von Grund aus neue naturharmonische Erklärung der Ursache der Bewegungen und Formierung des Universums. Leipzig-Lindenau: Selbstverlag. 20 S. gr. 8⁰.

H. G. WELLS. Anticipation of the reaction of mechanical and scientific progress upon human life and thought. London: Chapman and Hall. 318 S. [Nature 65, Suppl. III-V.]

J. H. ZIEGLER. Die universelle Weltformel und ihre Bedeutung für die wahre Erkenntnis aller Dinge. Vortrag. 1. u. 2. Aufl. Zürich: A. Müller. 41 S. gr. 8⁰.

B. Pädagogik.

J. PERRY. Science and literature. Nature 66, 645-647.

Rede bei der Eröffnung eines Lehrjahres am Royal College of Science zu London. Merkwürdig, wie alles, was Perry schreibt, besitzt auch diese Rede neben manchem Beherzigenswerten die Vorliebe für Paradoxen. Die Kenntnis des Englischen genüge für den englischen Studenten; Deutsch und Französisch sei unnötige Belastung. Überhaupt wird vor zu vieler Lektüre gewarnt. „Einige der größten wissenschaftlichen Arbeiter unserer Tage, Männer, die fortwährend die Grenzen unserer Kenntnisse erweitern, lesen fast nichts von dem, was andere Menschen treiben. . . . Die Leute, welche alles lesen, was in wissenschaftlichen Zeitschriften geschrieben wird, scheinen mir keine Zeit zu haben, irgend etwas sonst zu tun."

Lp.

E. BLUTEL. Du rôle de l'enseignement des mathématiques dans la formation de l'esprit. Nouv. Ann. (4) 2, 385-395.

Nur wenige Schüler legen sich die Frage vor: Wozu dient das Studium der Mathematik? Diese Frage soll hier nicht behandelt werden in betreff der Anwendungen, die von der Mathematik auf Physik, Mechanik, Astronomie gemacht werden; sondern es soll die Wichtigkeit der Mathematik für die Erziehung, für die Bildung des Verstandes dargelegt werden. Sie befördert vor allem die Aufmerksamkeit, eine der wichtigsten Kräfte

der Geistestätigkeit. Ferner entwickelt sie die Abstraktion, eine der höchsten und kostbarsten Fähigkeiten. Endlich bietet die Mathematik die schönste Gelegenheit zur Bildung des Urteils. Die Wohltaten der deduktiven Methode spürt man beim Suchen der Wahrheit auch auf anderen Gebieten als auf dem der Mathematik. M.

P. Stäckel. Über die Entwicklung des Unterrichtsbetriebes in der angewandten Mathematik an den deutschen Universitäten. Deutsche Math.-Ver. 11, 26-37.

Gemäß dem Beschluß der Münchener Tagung (1899) der deutschen Mathematiker-Vereinigung wird hier über den angeführten Gegenstand berichtet. Dabei wird geschichtlich zurückgegangen auf den Stand der Sache und überhaupt des mathematischen Unterrichtes an den Universitäten zu Anfang des 19. Jahrhunderts, und es wird gezeigt, in welchem Zusammenhang die Entwicklung des betreffenden Unterrichtes stand mit der Ausbildung der Anforderungen für die höhere Lehramtsprüfung. Aus neuerer Zeit werden insbesondere die Verdienste F. Kleins gewürdigt, und man erfährt, an welchen Universitäten jetzt die angewandte Mathematik gepflegt wird, und wie weiterhin für deren Pflege gesorgt werden soll und kann. Tn.

J. Wellstein. Über das Studium der angewandten Mathematik. Deutsche Math.-Ver. 11, 198-202.

Wellstein tritt für den Betrieb der angewandten Mathematik auf der Universität ein und glaubt, daß auch für den früheren Gymnasiasten, der im Zeichnen nicht geübt ist, die Schwierigkeiten auf diesem Gebiete überwindlich sind. Mi.

Massachusetts Institute of Technology, Boston. Thirty-eighth Annual Catalogue of the officers and students, with a statement of the courses of instruction and a register of the alumni, 1902-1903. Boston: Geo. H. Ellis Co., Printers. 403 S. gr. 8°.

Dieser Jahreskatalog gibt ein vollständiges Bild der Tätigkeit des Instituts für Technologie zu Boston, welches eine technische Hochschule mit bedeutend erweitertem Lehrplane im Vergleich zu unseren Hochschulen ist. Die Mathematik wird etwa in demselben Umfange gelehrt. Doch wollen wir bemerken, daß die Amerikaner für die Schiffbau-Ingenieure die Kenntnis der elementaren Theorie der Differentialgleichungen sowie eines Kursus für höhere Wahrscheinlichkeitsrechnung fordern, während dies von den Professoren des Schiffbaus, ohne Anfrage bei denen der Mathematik, in Berlin-Charlottenburg als unnötig jüngst gestrichen ist.

Lp.

O. Kammerer. Die Aufgaben des Diplom-Ingenieurs. Rede zum Antritt des Rektorates der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin, gehalten in der Aula am 30. Juni 1902. Berlin. 11 S. gr. 8°.

Der Redner erörtert die Pflichten, welche der Technischen Hochschule und ihren Zöglingen aus den sozialen Aufgaben der Zeit zufallen, sowie die Gesichtspunkte, welche unter den bezüglichen Erwägungen für die neuen Prüfungsordnungen maßgebend sind. Lp.

A. Buhl. L'enseignement dans les universités populaires. Ens. math. 4, 37-40.

Der Verf. teilt seine Erfahrungen mit, die er in sog. Volksvorlesungen über den geistigen Zustand des „Volkes" und dessen Aufnahmefähigkeit für Geistiges gemacht hat. Tn.

Z. G de Galdeano. L'enseignement scientifique en Espagne. Ens. math. 4, 237-246.

Der in Saragossa am 18. Januar 1902 gehaltene Universitätsvortrag schildert, wie sehr Spanien auf dem Gebiete wissenschaftlicher, insbesondere mathematischer und physikalischer Studien hinter der übrigen Welt zurückgeblieben ist, und er gibt einige Mittel und Wege an, wie da abzuhelfen sei. Die Anfänge einer Besserung deutet der Schluß des Vortrages an, aber „ein langer, mühsamer und schwerer Weg" müsse noch gebahnt werden. Tn.

O. Simon. L'enseignement des mathématiques au gymnase autrichien. Ens. math. 4, 157-166.

Im Anschluß an die entsprechenden Arbeiten Günthers und Pietzkers für Deutschland wird hier die Entwicklung des mathematischen Unterrichts an den österreichischen Gymnasien geschildert, wie derselbe in den Jesuitenschulen ganz darniederlag, wie man nach der Vertreibung der Jesuiten (1773) an die Verbesserung gehen wollte, aber keine Lehrer hatte, wie die besseren Pläne von Heß (1781) und Lang (1805), zum Teil ausgeführt, etwas Besserung brachten, wie aber von 1819 ab für drei Jahrzehnte der Rückschlag erfolgte. Gründliche Änderung brachten erst die Nachwirkungen der Revolutionsstürme: Exner und Bonitz arbeiteten den „Organisations-Entwurf" aus (1849), und die damals gelegten Grundlagen wurden seitdem beibehalten und, soweit nötig, verbessert (1884 u. 1900). Der bestehende mathematische Lehrplan wird S. 164 f. mitgeteilt, auch die Grundzüge der Anforderungen für die Lehrerprüfung werden angegeben (S. 165 f.). Tn.

Ch. Berdellé. De l'expérience et de l'intuition dans l'enseignement propédeutique de la mathématique. Ens. math. **4**, 423-428.

Der Aufsatz enthält eine ausgezeichnete Darlegung der Nützlichkeit, der Notwendigkeit und der ungefähren Gestaltung eines dem eigentlich wissenschaftlichen mathematischen, insbesondere geometrischen Unterricht vorangehenden Anschauungsunterrichtes. Tn.

F. Klein. Der Unterricht in der Mathematik. Sep.-Abdr. aus Lexis, Schulreform in Preußen. Halle: Waisenhaus. 11 S. gr. 8°.

F. Klein gibt eine Übersicht über die Entwicklung des mathematischen Unterrichts an den preußischen höheren Lehranstalten während des 19. Jahrhunderts, in der er nachweist, daß Ziel, Methode und Inhalt des mathematischen Unterrichtsfaches von der historischen Tradition beherrscht werden, aber unter dem Einfluß der Zeitströmungen einer weitgehenden Umbildung unterliegen. Er setzt eine erste Periode bis 1870 an, die auf dem Süvernschen Plane von 1816 beruht und dem Gymnasium anfangs einen umfangreichen Lehrstoff, in dem reine und angewandte Mathematik verschmolzen sind, zuweist, diesen aber von den dreißiger Jahren ab, seitdem der Einfluß Johannes Schulzes maßgebend ist, von den Anwendungen fort nach der abstrakten Seite hin beschränkt und auf die Ausbildung der Einzelpersönlichkeit hinzielt. Eine zweite Periode von 1870 bis 1890 stellt das Bedürfnis des Durchschnittschülers voran und bringt die Lehrmethode zu günstiger Entwicklung; in der dritten Periode von 1890 ab hat die Erstarkung des naturwissenschaftlichen Interesses und die steigende Wichtigkeit der Technik, die sich in der Ingenieurbewegung ausspricht, wieder ihren Einfluß auf die Schule geübt und zu neuer Berücksichtigung der angewandten Mathematik, für die jetzt eine besondere Lehrfakultät erteilt wird, geführt. Mi.

F. Klein. Über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Deutsche Math.-Ver. **11**, 128-141; Zs. f. math. u. naturw. Unt. **33**, 114-125.

Der Aufsatz gibt zuerst das Gutachten wieder, das der Verf. bei den Verhandlungen der preußischen Schulkonferenz vom Jahre 1900 vorgetragen hat; dann (S. 132f.) führt er einige darin enthaltene Anregungen weiter aus, so betreffs der genügenden Berücksichtigung der Anwendungen der Mathematik im Schulunterricht, die Verbesserung der Lehrerbildung, zumal die Ausgestaltung der sog. Ferienkurse, die Aufnahme der analytischen Geometrie, sowie einer praktischen Differential- und Integralrechnung in den Unterricht der Realanstalten, endlich die Forderung eines der Fassungskraft der Schüler angepaßten und das induktive wie das deduktive Denken gleichmäßig benutzenden „mathematisch-naturwissenschaftlichen Ideals" der Realschulen. Tn.

E. Götting. Über das Lehrziel im mathematischen Unterricht der höheren Realanstalten. Deutsche Math.-Ver. **11**, 189-197; Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **33**, 294-302.

Götting tritt dafür ein, daß auf den höheren Realanstalten im mathematischen Unterrichte der Teil des Pensums fortfalle, der über das Pensum des Gymnasiums hinausgeht, dagegen in den beiden Primen die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes und die Anfänge der Differential- und Integralrechnung durchgenommen werden. Mi.

R. Fricke. Über den mathematischen Hochschulunterricht. Deutsche Math.-Ver. **11**, 236-247.

Fricke gibt eine Übersicht über die Entwicklung der Mathematik und Technik im 19. Jahrhundert, in der er zeigt, daß beide allmählich den gemeinsamen Weg und das Gemeinschaftsgefühl verfehlt haben. Er redet einer Annäherung und einem Entgegenkommen im Hochschulunterricht das Wort und weist auf die von ihm bearbeitete deutsche Ausgabe von John Perry „Calculus for engineers" hin, die er für den Unterricht des Technikers als besonders geeignet erklärt. Mi.

G. Holzmüller. Bemerkungen zu dem Aufsatz des Herrn E. Götting: Über das Lehrziel im mathematischen Unterricht der höheren Realanstalten. Deutsche Math.-Ver. **11**, 247-249.

Holzmüller erklärt Götting gegenüber, 1. daß er auf der Elberfelder Versammlung nicht eine Beschränkung der höheren Mathematik und einen Ersatz der letzteren durch Elementarmathematik auf den technischen Hochschulen gefordert habe; 2. daß er nicht erklärt habe, er wolle die Schulmathematik im Sinne einer spezielleren Vorbereitung für die technischen Fächer reformiert haben; 3. daß die Versammlung sich nicht lediglich den Thesen Schwalbes angeschlossen habe, sondern daß fünf Thesen Schwalbes und fünf Thesen Holzmüllers angenommen wurden. Mi.

E. Götting. Erwiderung. Deutsche Math.-Ver. **11**, 249-251.

Götting erwidert Holzmüller, daß dessen fünfte These ursprünglich lautete: „Auf jeder technischen Hochschule ist für das erste Studienjahr eine Vorlesung über Ingenieurmathematik in elementarer Behandlung einzurichten", und daß, da die Zeit, die bei der Ausbildung der Ingenieure den mathematischen Studien gewidmet wird, eine beschränkte ist, aus dieser These unmittelbar seine Behauptung folge. Mi.

G. Holzmüller. Zur Erwiderung des Herrn E. Götting und zu einer Bemerkung des Herrn R. Fricke. Deutsche Math.-Ver. **11**, 353-354.

Holzmüller bezeichnet den Auszug aus den Verhandlungen der Elberfelder Versammlung in der Zeitschrift deutscher Ingenieure als unvollständig bezüglich der Äußerungen Schittlers und den darauf gegen ihn gegründeten Vorwurf Göttings als ungerecht. Gegen Fricke verwahrt er sich, Träger von Bestrebungen zu sein, die die höhere Mathematik ganz von den Hochschulen verbannen wollen. Mi.

R. Fricke. Antwort. Deutsche Math.-Ver. **11**, 354-355.

Fricke erwidert Holzmüller, daß die Organisation der technischen Hochschulen es notwendig macht, daß der mathematische Unterricht in der Hauptsache im ersten Studienjahre zum Abschluß kommt, daß also, wenn das erste Studienjahr für die Elementarmathematik in Anspruch genommen wird, für die höhere Mathematik an der Hochschule kein Platz mehr bleibt. Mi.

G. Holzmüller. Zur Antwort des Herrn R. Fricke. Deutsche Math.-Ver. **11**, 425.

Holzmüller erklärt Fricke gegenüber, daß er die höhere Mathematik aus dem ersten Studienjahre des Ingenieurs nicht habe verbannen wollen, sondern, daß er sie vielmehr in das erste Studienjahr verwiesen habe. Mi.

R. Fricke. Erwiderung. Deutsche Math.-Ver. **11**, 425.

Fricke hält Holzmüller gegenüber die Ausführungen seiner vorigen Antwort ohne Einschränkung aufrecht. Mi.

Ed. Schumann, Aug. Schmidt. Zu F. Klein, über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Zs. f. math. u. naturw. Unt. **33**, 438-439.

Der erste Autor berichtet, daß in Württemberg die Elemente der höheren Analysis auf den Realanstalten schon längst gelehrt werden; der zweite bestätigt dasselbe für Wiesbaden. Lp.

Ed. Schumann. Die höhere Mathematik in den württembergischen Oberrealschulen. Zs. f. math. u. naturw. Unt. **33**, 441-446.

Kurze Darlegung der Entwicklung dieser Anstalten und Mitteilung des Lehrgangs für die Klassen IX und X, entsprechend der Unter- und Oberprima. Lp.

H. Thieme. Zur Infinitesimalrechnung an Realanstalten. Zs. f. math. u. naturw. Unt. 33, 591.

Die bezüglichen Schriften von Seeger werden empfohlen (1894). Lp.

J. Bernstein. Über den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht in den höheren Realanstalten. Zs. f. math. u. naturw. Unt. 33, 592-594.

Befürwortung der Vorschläge von F. Klein und Götting. Lp.

A. Schülke. Ein neuer Vorschlag zur Vertiefung des mathematischen Unterrichts. Zs. f. math. u. naturw. Unt. 33, 513-517.

Ausführlicher Hinweis auf die bezüglichen Stellen des griechischen Lesebuchs von U. von Wilamowitz-Moellendorff. Lp.

S. Leisen. Unnötige Erschwerungen der Arbeit von Lehrer und Schüler im mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Unterrichtsbl. f. Math. u. Naturw. 8, 137-138.

Die Mängel in der wissenschaftlichen Ausbildung der Lehrer, die ungenügende Stundenzahl und die geringen Lehrmittel an den Schulen werden kurz geschildert. Lp.

K. Schwering. Zur Methodik des mathematischen Unterrichts am Gymnasium. Zs. f. math. u. naturw. Unt. 33, 26-33.

Schwering weist nach, wie die Schulmathematik auf allen Gebieten den unverkennbaren Charakter einer echten Wissenschaft trägt. Gerade durch ihre Beschränkung in der Geometrie auf Kreis und Gerade, in der Arithmetik auf die Lösung der quadratischen Gleichungen gewinnt sie Abrundung und Geschlossenheit, und durch ihre unerbittliche Konsequenz sichert sie sich ihre ehrenvolle Stellung in der Halle der Wissenschaften für alle Zeiten. Mi.

P. Treutlein. Der mathematische Unterricht im Reformgymnasium. Zs. f. math. u. naturw. Unt. 33, 137-138.

Bericht über einen Vortrag auf der Straßburger Philologenversammlung 1901. Lp.

K. Knabe. Lehrpläne und Lehraufgaben. Zs. f. math. u. naturw. Unt. 33, 308-311.

Zerstreute Bemerkungen über einzelne Fragen. Lp.

The teaching of mathematics at public schools. Nature **65**, 258-259.

Ein Brief, unterzeichnet von 22 Lehrern, die solche Punkte des englischen Schulunterrichtes bezeichnen, wo Vereinfachungen eingeführt werden können. Lp.

C. J. Forth. The teaching of mathematics. Nature **65**, 272-273.

Zustimmung zu den im vorstehend angezeigten Briefe ausgeführten Gedanken unter Anführung von Klagen über den gegenwärtigen Betrieb, der durch die Art der Prüfungen bedingt sei. Lp.

J. W. Marshall. Elementary school mathematics. Nature **65**, 297-298.

Befürwortung der konkreten Elemente beim elementaren Unterrichte und Ablehnung der zu abstrakten Gedanken. Lp.

J. S. Yeo. Elementary school mathematics. Nature **65**, 318-319.

Empfiehlt den Gebrauch eines in Zentimeter geteilten Maßstabes beim Zeichnen von Figuren. Lp.

C. A. Rumsey. Experimental geometry in secondary schools. Nature **65**, 416.

Betont den Nutzen eines propädeutischen Kursus der Geometrie. Lp.

W. Lermantoff. Elementary mathematics. Nature **65**, 439-440.

Der Verf. benutzt die Erörterungen über die Gestaltung des Schulunterrichts in der Mathematik zur Empfehlung seines russischen Lehrbuchs, wo alles aufs beste geleistet sei. Lp.

C. S. Jackson, Fr. L. Ward. Reform in mathematical teaching. Nature **65**, 558-559.

Der erste Autor schiebt die Schuld vieler in England bestehenden Mißstände auf das dort herrschende System der Prüfungen. Der zweite verwahrt sich und seine Kollegen von gleicher Stellung gegen den verächtlichen Gebrauch der Bezeichnung Schulmeister bei Perry. Lp.

C. G. Report on the teaching of geometry. Nature **65**, 201-202.

Der Artikel berichtet über die von einem aus Lehrern bestehenden Ausschuß gemachten Vorschläge einer Reform des englischen mathematischen Unterrichts. Lp.

A. R. Forsyth. **Teaching of elementary mathematics.** Brit. Ass. Rep. 1902, 473-480.

Die Einsetzung eines Ausschusses der British Association zur Erörterung der Frage über den Unterricht in der elementaren Mathematik ist in dem vorigen Jahrgange erwähnt worden (F. d. M. **32**, 88); die Schlüsse, zu denen man gekommen ist, sind in dem gegenwärtigen Berichte enthalten, der von Forsyth abgefaßt ist. Nach einem Hinweise auf die Arbeiten früherer Ausschüsse der Association hebt der Bericht hervor, daß in England der Unterricht in weitem Umfange durch die Anforderungen der Prüfungen seine Richtung erhält, und daß Änderungen nur schrittweise erreicht werden können. Daher werden dieselben nur in breiten Zügen angedeutet; hoffentlich werden die empfohlenen Methoden nach ihrer Annahme in der Tat nur den ersten Schritt zur allmählichen Besserung sowohl des Unterrichts als auch der Prüfungen vorstellen. Bezüglich der Einheitlichkeit der Methode meint der Ausschuß, es sei nicht dieselbe Unterrichtsmethode in der Mathematik für alle Klassen der Lernenden vorzuschreiben, obschon eine Trennung der Verfahren besonders erst auf den späteren Stufen sich als nötig erweisen dürfte. Eindringlich wird empfohlen, daß dem Unterricht in der beweisenden Geometrie ein Lehrgang der praktischen und experimentellen Geometrie vorausgeschickt werde, in welchem tüchtig gezeichnet und gemessen werden soll. Die Vorschläge zu zwei Plänen experimenteller Geometrie sind beigefügt. Der eine, von Eggar entworfen, ist hauptsächlich geometrisch und schließt sich an Euklid an; der andere, von Perry ersonnen, ist dazu bestimmt, einen Lehrgang der Arithmetik, der Algebra und der experimentellen Naturwissenschaft zu begleiten. Was die beweisende Geometrie anlangt, so meint der Ausschuß, daß nicht ein einziges Lehrbuch als Autorität hinzustellen sei. Es wird angeregt, jede Prüfungsbehörde möchte ihr eigenes Normalbuch bezeichnen. Als allgemeine Ansicht des Ausschusses wird ausgesprochen, daß eine Verknüpfung der Arithmetik und der Algebra mit der Geometrie in allen Fällen, wo dies möglich ist, zu erstreben sei. Die Behandlung der Proportionslehre ist auf eine Vereinigung algebraischer Prozesse mit den Methoden der praktischen Geometrie zu gründen. Einige Änderungen bei den Prüfungen in der Geometrie werden ebenfalls empfohlen. Hinsichtlich des Rechnens und der Algebra wird das Hauptgewicht bei den Vorschlägen auf eine frühe Bekanntschaft mit den Dezimalbrüchen und auf die häufige Bestätigung algebraischer Formeln und Resultate durch rechnerische Anwendungen gelegt, ferner auf die Forderung, die Häufung bloß formaler oder von künstlichen Fragestellungen herrührender Schwierigkeiten zu verbannen, bei solchen Gegenständen z. B. wie Zerlegung in Faktoren oder Lösung von Gleichungen. Schließlich werden der Gebrauch graphischer Methoden und die frühere Einführung in die Trigonometrie als Dinge bezeichnet, die sowohl an sich wertvoll sind, als auch in natürlicher Weise und auf verhältnismäßig niedriger Stufe zur Vertrautheit mit Begriffen führen, die vollständiger bei dem Beginne der formalen Erlernung

der Infinitesimalrechnung entwickelt werden. Es kann hinzugefügt werden, daß der Bericht beifällig aufgenommen worden ist, und daß bereits Änderungen gemäß den in ihm gegebenen Anweisungen in dem ganzen Lande sich vollziehen. Gbs. (Lp.)

The teaching of science in elementary schools. Brit. Ass. Rep. 1902, 481-483.

Enthält einige interessante Statistiken. Gbs. (Lp.)

J. PERRY. The teaching of mathematics. Nature 65, 484-486.

Eine Apologie für den von dem Verf. empfohlenen Weg in den lebhaftesten Farben. Lp.

F. M. SAXELBY. Experimental mathematics. Nature 66, 30-31.

Der Verf. empfiehlt den von Perry eingeschlagenen Weg der Induktion als einen, welcher der modernen Art der Naturforschung gemäß ist und nach den seit drei Jahren gemachten Erfahrungen auch für die Schüler ermutigend und anregend wirke. Lp.

C. E. STROMEYER. Mathematical training. Nature 66, 103.

Gegen die englischen Lehrbücher nach Euklid wird die Autorität von Schopenhauer angerufen. Lp.

C. A. RUMSEY. Mathematics and science at Cambridge. Nature 65, 510-511.

Kritik der Prüfungen in Cambridge und Vorschläge zu Besserungen. Lp.

G. MOHRMANN. Eine neue Art der Einführung der Untersekundaner in die Logarithmenlehre. Pr. Oberrealschule Barmen. 29 S. 4°.

Potenztafeln, die dem Programm beigefügt sind, sollen die Einführung in die Logarithmenlehre erleichtern und vorbereiten. Mit Hülfe einer weiteren Tabelle läßt sich der Logarithmus einer zwischen 1 und 10 gelegenen Zahl a bis auf fünf Dezimalstellen genau bestimmen. Es ist $a^{10} = 10^{n_1} \cdot a_1$, wobei $1 < a_1 < 10$; ebenso $a^{100} = 10^{10 n_1 + n_2} \cdot a_2; \ldots$; $a^{100000} = 10^{10000 n_1 + 1000 n_2 + 100 n_3 + 10 n_4 + n_5} \cdot a_5$.

Bis auf fünf Stellen genau ist nun:

$$\log a = 0, n_1\, n_2\, n_3\, n_4\, n_5$$

oder

$$\log a = 0, n_1\, n_2\, n_3\, n_4\, (n_5 + 1),$$

je nachdem $a_5 < \sqrt{10}$ oder $a_5 > \sqrt{10}$ ist.

Die Tabelle liefert die Zahlen $n_1, n_2, \ldots$, und die $a_1, a_2, \ldots$ lassen sich in Grenzen einschließen. Mittels eines (stellenweise nicht einwandsfreien) Interpolationsverfahrens ist auch die Richtigkeit der fünften Dezimalstelle gewährleistet. Lwt.

Th. Reye. Die synthetische Geometrie im Altertum und in der Neuzeit. Deutsche Math.-Ver. **11**, 343-353.

In dieser Rektoratsrede aus dem Jahre 1886 empfiehlt Reye die Einführung der neueren synthetischen Geometrie, deren Wesen er in dem Nachweis des Zusammenhangs geometrischer Gestalten bei allem Wechsel der Lage und in der Ausbildung fruchtbarer Forschungsmethoden sowie in der Erweckung und Ausbildung räumlicher Anschauung sieht, und deren Leistungen er an der Methode der Zentralprojektion, dem Prinzip der Dualität und der Methode der Inversion erläutert, in die höheren Schulen. Die neuere synthetische Geometrie erscheint ihm als der Königsweg der Mathematik. Mi.

H. Thieme. Die Parallelenlehre im Unterricht. Zs. f. math. u. naturw. Unt. **33**, 549-551.

Zunächst sollen die drei ersten Kongruenzsätze mit ihren Folgerungen erledigt werden, danach erst die Parallelenlehre. Lp.

Frischauf. Über die Aufnahme der absoluten (nicht-euklidischen) Geometrie in den höheren Unterricht. Zs. f. math. u. naturw. Unt. **33**, 185.

Die absolute Geometrie ist ausschließlich an den Universitäten zu lehren. Lp.

Ernst Schulze. Über einige Bezeichnungen in der Schulmathematik Zs. f. math. u. naturw. Unt. **33**, 368-370.

Vorschläge zur Einführung fester Bezeichnungen für die Größen der elementaren Geometrie. Lp.

H. Dellac. Sur l'emploi des signes en géométrie élémentaire. Ens. math. **4**, 288-292.

Entgegen der Ansicht von Lemoine (F. d. M. **32**, 92, 1901) will Dellac nicht die Vorzeichen der Strecken gleich zu Anfang in den Elementarunterricht eingeführt haben, sondern möchte das Prinzip der Vorzeichen auf eine spätere Stufe verschieben, wo dann auch gleich die Vorzeichen der Winkel und der Flächen zu erörtern wären. Lp.

A. Richter. Die Übertragung des Unterrichtes im Linearzeichnen an die Mathematiklehrer. Zs. f. math. u. naturw. Unt. **33**, 46-47.

Mit Rücksicht auf das erstrebenswerte Ziel der Übertragung dieses Unterrichts an die Lehrer der Mathematik wird die Erwerbung der Lehrbefähigung in der angewandten Mathematik für die Kandidaten des höheren Schulamts empfohlen. Lp.

W. Janisch. Die formelarme und logarithmenlose Methode der Auflösung trigonometrischer Aufgaben. Zs. f. math. u. naturw. Unt. **33**, 551-554.

Entgegen der Programmabhandlung von Glauer, „Trigonometrische Aufgabe der Untersekunda", tritt der Verf. für die Grundlegung der goniometrischen Formeln und die Benutzung der Logarithmen ein. Lp.

W. Ostwald. Über die Einführung des Begriffes der Arbeit beim Unterricht in der Mechanik. Zs. f. math. u. naturw. Unt. **33**, 10-26.

Eine bereits vor sieben oder acht Jahren niedergeschriebene Skizze zur praktischen Erläuterung der vom Verf. wiederholt ausgesprochenen Forderung, daß man den Energiebegriff allem physikalischen Unterricht und demgemäß den Arbeitsbegriff dem mechanischen zugrunde legen müsse. Die der Reihe nach besprochenen Gegenstände sind: Arbeit als Produkt aus Weg und Kraft, die mechanischen Potenzen, die Richtung der Kräfte, das Prinzip des ausgezeichneten Falles, das homogene Kraftfeld, die Zusammensetzung der Kräfte. Über die Behandlung der Bewegungsenergie werden am Schlusse nur einige Andeutungen gegeben. Lp.

R. Heger. Energetik im Unterricht. Unterrichtsbl. f. Math. u. Naturw. 8, 58-61.

Skizze eines Lehrganges für den Schulunterricht, bei dem die energetischen Grundanschauungen sinngemäß zur Verwendung kommen. Lp.

Weitere Literatur.

H. E. Armstrong. Educational science. Opening address. Nature **66**, 589-600.

Bericht über die Verhandlungen der mathematischen Sektion der 46. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Straßburg (Els.) 1.-4. Oktober 1901. Unterrichtsbl. f. Math. u. Naturw. 8, 14-15.

L. Gérard. Sur l'enseignement de la géométrie. Bull. d. sc. math. élém. 8, 1-3, 49-52, 147, 163.

R. Kottenbach. Zur didaktischen Behandlung einiger Fragen der Mechanik. Pr. Troppau. 28 S. 8°.

J. Perry. Opening address in Section G, Engineering. (Education of engineers.) Nature **66**, 530-538.

A. Santel. Bemerkungen zur Didaktik einiger Kapitel der Mechanik. Pr. Görz. 41. S. 8°.

W. Krebs. Der Straßburger Ferienkursus für Lehrer der Naturwissenschaften und der Mathematik, 14. bis 23. Oktober 1901. Zs. f. math. u. naturw. Unt. **33**, 208-211, 302-308.

G. Leman. Sur l'enseignement de l'analyse infinitésimale. Gand. 72 S. 8° (1901).

E. Zeissig. Die Raumphantasie im Geometrieunterrichte. Ein Beitrag zur methodischen Ausgestaltung des Geometrieunterrichtes aller Schulgattungen. Berlin: Reuther & Reichard. 108 S. gr. 8°.

Zweiter Abschnitt.

Algebra.

Kapitel 1.

Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transzendente Gleichungen.)

E. B. Wilson. Vector Analysis. London: E. Arnold. XVIII + 436 S. 8°.

Der vorliegende stattliche Band verdankt seine Entstehung dem Wunsche des inzwischen verstorbenen Prof. J. Willard Gibbs, die von ihm geschaffene „Vector Analysis" — im wesentlichen eine Umarbeitung der Quaternionentheorie im Sinne der Ausdehnungslehre — in einer ausführlichen Bearbeitung veröffentlicht zu sehen. Schon in den Jahren 1881-1884 hatte Gibbs die Grundlagen seiner Theorie in einem 82 Seiten umfassenden Bande zur Unterstützung seiner physikalischen Vorlesungen an der Yale-Universität zusammengestellt. (S. F. d. M. **16**, 617, 1884). Aber dieser Band (betitelt „Elements of Vector Analysis") erschien nicht im Buchhandel, und der Verf. fand nicht die Zeit, um die geplante Herstellung eines Handbuches über den Gegenstand selbst auszuführen. Dieser Aufgabe unterzog sich schließlich einer seiner Schüler, Dr. Wilson, mit der Ermächtigung, den Stoff über die Grenzen der Vorlesungen hinaus auszudehnen und durch Beispiele zu erläutern. Hiervon hat Wilson soweit Gebrauch gemacht, wie es die geometrischen und physikalischen Anwendungen erforderten, die ja auch den Anstoß zur Begründung der Vector Analysis gegeben haben und ihre Vorzüge der Quaternionentheorie gegenüber am besten ins Licht setzen. In der Gliederung und Anordnung des Stoffes ist Wilson im ganzen der grundlegenden Arbeit von Gibbs gefolgt. Die sieben Kapitel des Buches behandeln nach einander die geometrische Addition und Subtraktion der Strecken, innere und äußere Produkte, Differential- und Integralrechnung der Strecken, lineare Vektor-Funktionen mit Anwendung auf dynamische Probleme, endlich vermischte Anwendungen auf Flächen zweiter Ordnung, den Weg des Lichtes in Kristallen, Krümmung der Oberflächen usw.

Jedem Kapitel folgt eine kurze Zusammenstellung der gewonnenen Resultate und eine Anzahl darauf bezüglicher Aufgaben. Von anderweitiger Literatur sind besonders die Arbeiten von Heaviside (Electromagnetic Theory) und Föppl (Die Maxwellsche Theorie der Elektrizität) benutzt. Diese Arbeiten zitiert der Verf. auch als besonders augenfällige Beweise für das in den letzten zehn Jahren mehr und mehr hervorgetretene Bestreben, die Quaternionen, die trotz der Bemühungen eines halben Jahrhunderts als Arbeitsinstrument nur in engen Kreisen Boden gewinnen konnten, im Sinne der Streckenrechnungs-Methoden zu reformieren. Während die Lehrbücher der Quaternionen-Richtung in der Regel die abstrakte Theorie entwickeln und, indem sie nach physikalischen Beispielen suchen, in der Addition und Subtraktion stecken bleiben, unter Vernachlässigung der so fruchtbaren Produktbildungen, stellt sich der Verf. auf den praktischen Standpunkt mit den Fragen: Welche Kombinationen oder Funktionen von Vektoren kommen in Physik und Geometrie vor, und: wie können dieselben symbolisch in der für analytische Behandlung einfachsten Form dargestellt werden? Indem der Verf. sich bei der Wahl und Ausdehnung des Stoffes von diesen praktischen Gesichtspunkten leiten läßt, gewinnt seine Darstellung einen vorteilhaften Zug von Frische und einen das Interesse des Lesers überall fesselnden Charakter. Im übrigen erblickt er in der Vektoren-Rechnung ein für das Studium der Physik (insbesondere Elektrizität, Magnetismus und elektromagnetische Theorie des Lichtes) ebenso wichtiges Werkzeug, wie es etwa die Invariantentheorie für das Studium der Geometrie ist. Im Interesse der heranwachsenden Mathematiker-Generation englischer Zunge ist das Erscheinen dieses ersten umfassenden Lehrbuches der den Quaternionen (auch in den Äußerlichkeiten) so sehr überlegenen Gibbsschen Theorie nur mit Genugtuung zu begrüßen. Aber auch seine Einbürgerung in Deutschland ist recht wünschenswert. Steht doch Gibbs schon wegen des großen Verdienstes, welches er sich um das Zustandekommen der Gesamtausgabe von Graßmanns Werken erworben hat, der wachsenden Zahl derjenigen deutschen Mathematiker nahe, welche einen Fortschritt der Wissenschaft nicht nur in der Bereicherung mit neuen Resultaten, sondern auch in der Verbesserung der Methoden erblicken. Schg.

H. E. Hawkes. Estimate of Peirce's Linear associative algebra. American J. **24**, 87-95.

Der Verf. gibt einen Vergleich zwischen Peirces Linear associative algebra (American J. **4**, 97, 1881) und den auf gleichem Gebiet sich bewegenden Arbeiten von Scheffers und Study. Peirce suchte die Theorie der hyperkomplexen Zahlen zu fördern durch Aufstellung aller Zahlensysteme mit weniger als sieben Einheiten, nach folgenden Grundsätzen: 1. Systeme mit gleicher Anzahl von Einheiten werden in derselben Gruppe vereinigt. 2. Äquivalent sind Systeme, zwischen deren beiderseitigen Einheiten lineare Beziehungen bestehen. 3. Es werden

reine und gemischte Systeme und 4. paarweise reziproke Systeme aufgestellt, woran sich 5. der Begriff der gleichwertigen Zahlen ($\alpha^m = \alpha$ für ganzes positives m) anschließt. Mit den von Scheffers aufgestellten Grundsätzen stimmen die beiden ersten im Wesen völlig, die drei letzten unter geringen Änderungen überein. Peirce hat auch die Aufgabe, die er sich stellte, vollständig gelöst; aber seine Definitionen sind zum Teil mißverständlich, seine Beweise mitunter ungenügend, und seine Einteilungsgründe erscheinen willkürlich und stehen in der Form den von Study und Scheffers aufgestellten nach. Schg.

FR. DANIELS. Sur le calcul des quaternions. Ens. math. 4, 111-124.

Der Verf. ersetzt die abstrakte Begründung der Quaternionentheorie durch eine anschauliche geometrische und entwickelt zuerst die Gesetze der Rechnung mit Strecken (Vektoren) in Hamiltonscher Bezeichnungsweise, aber unter Mitbenutzung Graßmannscher Benennungen. Dann folgt der Begriff der Quaternionen, ihre Addition, Multiplikation und Division, endlich der Vektor als Spezialfall der Quaternion (elementare Quaternion). Schg.

G. COMBEBIAC. Calcul des triquaternions. Thèse. Paris: Gauthier-Villars. 119 S. 4°; J. de l'Éc. Pol. (2) 7, 101-219.

Zweck der Arbeit ist die Aufstellung einer geometrischen Analysis, deren Methoden, wie die der Ausdehnungslehre, von allen dem Gegenstande der Untersuchung fremden Beziehungsstücken frei sein und, wie die der Quaternionentheorie, auf streng systematischer Einteilung beruhen sollen. Hierin läßt nach seiner Meinung jede der beiden genannten Disziplinen zu wünschen übrig. — In der Einleitung werden zunächst allgemeine komplexe Zahlensysteme und die Elemente der Quaternionen vorgeführt, nebst Anwendung derselben auf Rotationen um einen festen Punkt und allgemein auf die Transformationen der euklidischen Gruppe. Es folgt die Biquaternion $q + \omega q_1$ mit ihrer Anwendung auf die Gruppe der Bewegungen ohne Deformation und die linearen Komplexe. Diesen Begriff nun erweitert der Verf. im ersten Kapitel zu dem der Triquaternion $q + \omega q_1 + \mu q_2$. Hierin bedeuten q, q_1, q_2 Quaternionen, ω und μ Skalargrößen, die den Bedingungen genügen: $\omega^2 = 0$, $\mu^2 = 1$, $\omega\mu = -\mu\omega = \omega$. Das hierdurch geschaffene komplexe Zahlensystem (mit 12 Einheiten) enthält die zur Darstellung der Punkttransformationen des Raumes erforderlichen Größen und ermöglicht, im Gegensatz zur Theorie der Biquaternionen, die Darstellung der Punkte durch Symbole. Es werden nun zunächst die Rechnungsgesetze dieses Systems entwickelt, wobei als „lineares Element“ der Inbegriff einer Geraden m und eines auf ihr liegenden Punktes M auftritt. Das Produkt einer Triquaternion und ihrer Inversen ist eine Zahl. Weiter wird die Ähnlichkeitstransformation (Rotation um die Gerade m nebst Homothetie in bezug auf

den Punkt M) behandelt und die Geometrie der linearen Elemente, letztere analog zur Linien- und Kugelgeometrie. — Im zweiten Kapitel wird mit Hilfe des neuen Kalküls die Bewegung eines nicht deformierbaren Systems untersucht. Dieselbe wird durch Parameter und Gleichungen dargestellt und in eine Rotation um die Achse und Verschiebung längs derselben zerlegt. Die infinitesimale Bewegung wird durch einen linearen Komplex dargestellt, dessen Begriff hier auf jedes durch einen gewöhnlichen linearen Komplex charakterisierte Gebilde ausgedehnt wird. Hierdurch werden die für die verschiedenen Wirkungen einer Kraft auf das System eingeführten Ausdrücke entbehrlich, und die Terminologie bleibt rein geometrisch. Weiter werden behandelt: verschiedene Zerlegungen einer Bewegung, kontinuierliche Bewegungen eines festen Körpers, Gleichgewicht und Dynamik der festen Körper. — Das dritte Kapitel ist den linearen Komplexen gewidmet und behandelt verschiedene Zerlegungen, Brennpunkt und Fokalebene, Gerade, die auf ihren Konjugierten senkrecht stehen usw. Bis hierher stellen die Triquaternionen mit Rücksicht auf die durch sie vereinfachte Darstellung der behandelten Gegenstände gegenüber den Quaternionen und Biquaternionen einen Fortschritt dar. Sie versagen aber, wie sich im vierten Kapitel (Flächen zweiten Grades) herausstellt, wenn es gilt, ohne Hilfe eines Beziehungssystems gewisse einfache projektivische Beziehungen darzustellen, z. B.: Bestimmung einer Geraden S durch zwei ihrer Punkte, einer Ebene V durch Punkt und Gerade. Hier kommt auch der Verf. wieder auf das äußere Produkt der Ausdehnungslehre zurück. Im übrigen hilft er sich, um für seinen Kalkül wenigstens eine einfache Schreibweise zu erzielen, dadurch, daß er die Gebilde S und V als neue Funktionen ihrer Bestimmungsstücke betrachtet. Eine zweite Erweiterung wird erforderlich, um den Kalkül auf die ebene Geometrie anzuwenden. Hier kommt der Verf. schließlich auf die Aquipollenzenrechnung zurück. Im übrigen zeigt diese Erweiterung dieselben Lücken wie die Triquaternionen. Nunmehr gelingt auch die Behandlung der projektivischen Transformationen und der Flächen zweiten Grades. — In einem Anhange werden die Produkte aus zwei linearen Elementen, zwei Ebenen und einer Ebene mit einem linearen Element untersucht. Schg.

Ch. J. Joly. The interpretation of a quaternion as a point symbol. Dublin Trans. 32 (Sect. A), 1-16.

Bei dieser Deutung stellt die Quaternion q den Punkt Q am Ende des Vektors

$$OQ = \frac{\mathrm{V}q}{\mathrm{S}q}$$

dar, der von einem passenden Ursprung aus gezogen ist. Die Quaternion wird ferner als ein Massenpunkt oder schwerer Punkt gedeutet, indem die Masse oder das Gewicht einfach der Skalar der Quaternion ist; die Multiplikation einer Quaternion mit einem Skalar läßt den darstellenden

Punkt ungeändert und verändert nur seine Masse. Das Gesetz der Addition der Quaternionen enthält das Prinzip des Massenmittelpunktes; so besagt

$$p + q + r = (\mathrm{S}p + \mathrm{V}p) + (\mathrm{S}q + \mathrm{V}q) + (\mathrm{S}r + \mathrm{V}r)$$
$$= \mathrm{S}(p + q + r) + \mathrm{V}(p + q + r),$$

daß der Punkt $p + q + r$, dem die Masse $\mathrm{S}p + \mathrm{S}q + \mathrm{S}r$ zukommt, gleich der Summe der Punkte p, q und r ist, denen die Massen $\mathrm{S}p$, $\mathrm{S}q$ und $\mathrm{S}r$ zukommen. Ein Vektor stellt einen Punkt, nämlich den Punkt im Unendlichen, in seiner Richtung dar. Nach Aufstellung einiger notwendigen Formeln geht der Artikel dazu über, diese Deutung einer Quaternion durch zahlreiche geometrische Belege zu erläutern. Dieselben sind von großem Interesse und zeigen die Macht der Methode, können aber kaum in einem Auszuge erörtert werden. Die kurze Abhandlung ist von ungewöhnlicher Eleganz. Gbs. (Lp.)

Ch. J. Joly. **Quaternion arrays.** Dublin Trans. **32** (Sect. A), 17-30.

Hamilton gebraucht in einem Unterabschnitt seiner „Elemente" gewisse Funktionen von Quaternionen, welche durch die Relationen definiert werden:

$$[ab] = \mathrm{V}.\mathrm{V}a\mathrm{V}b,\quad (abc) = \mathrm{S}.a\,[bc],$$
$$[abc] = (abc) + [cb]\,\mathrm{S}a + [ac]\,\mathrm{S}b + [ba]\,\mathrm{S}c,\quad (abcd) = \mathrm{S}.a\,[bcd].$$

Zu diesen fügt der Verf. der gegenwärtigen Abhandlung hinzu:

$$(ab) = \mathrm{S}a.b - \mathrm{S}b.a = \mathrm{S}a.\mathrm{V}b - \mathrm{S}b.\mathrm{V}a;$$

außerdem führt er die Bezeichnung ein:

$$\{ab\} = x\,(ab) + y\,[ab],\quad \{abc\} = z\,(abc) + w\,[abc],$$
$$\{abcd\} = u\,(abcd),$$

wo x, y, z, w, u unbestimmte Skalare sind und a, b, c, d willkürliche Quaternionen. Die Elemente a, b, c, d in diesen Funktionen oder Anordnungen können mit begleitenden Zeichenwechseln umgesetzt werden, genau wie bei der Umsetzung von Zeilen oder Kolonnen einer gewöhnlichen skalaren Determinante. Die Umsetzung benachbarter Elemente ändert das Zeichen der Anordnung; demnach verschwindet eine Anordnung, wenn zwei Elemente gleich sind, oder wenn die Elemente durch eine lineare Relation mit skalaren Koeffizienten verbunden sind. Jede einreihige Anordnung von mehr als vier Quaternionen ist identisch Null. Die allgemeine Anordnung entspringt aus der Betrachtung von m Gleichungen:

$$t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3 + \cdots + t_n a_n = 0,$$
$$t_1 b_1 + t_2 b_2 + t_3 b_3 + \cdots + t_n b_n = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_1 p_1 + t_2 p_2 + t_3 p_3 + \cdots + t_n p_n = 0,$$

welche m Gruppen von n Quaternionen $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$; $\ldots$; $p_1, p_2, \ldots, p_n$ durch denselben Satz von Skalaren $t_1, t_2, \ldots, t_n$ verbinden. Die Bezeichnung

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{array}\right\}$$

wird zur Kennzeichnung einer Anordnung von m Zeilen und n Kolonnen gebraucht; diese Funktion wird so definiert, daß ihr Verschwinden die Möglichkeit der Existenz der n linearen Gleichungen ausdrücken kann. Die Theorie solcher Anordnungen wird betrachtet, und einige Erläuterungen ihres Gebrauches werden gegeben. Gbs. (Lp.)

J. Neuberg. Cours d'algèbre supérieure. Liége: Gnusé. 279 S.

Imaginäre Zahlen, Theorie der Determinanten und der linearen Gleichungen. Allgemeine Theorie der Gleichungen n-ten Grades, Aufsuchung der Wurzeln; Lehrsatz von Descartes, von Rolle, von Sturm; symmetrische Funktionen. — Hinter jedem Kapitel vortreffliche Noten und gute Übungsbeispiele. Mn. (Lp.)

J. B. J. Baron Fourier. Die Auflösung der bestimmten Gleichungen (Analyse des équations déterminées). Übersetzt und herausgegeben von A. Loewy. Mit 18 Figuren im Text. Leipzig: W. Engelmann. 263 S. 8° (Ostwalds Klassiker d. ex. Wiss. No. 127.)

Die Besprechung, welche Gauß in den Göttingischen gelehrten Anzeigen von dem nachgelassenen Werke Fouriers machte, das Navier 1831 herausgegeben hatte, ist in mehrfacher Weise interessant, indem neben aller Anerkennung der Leistungen auch diejenigen Punkte der Schrift bezeichnet werden, bei denen „noch ein weites Feld zu bearbeiten übrig bleibt". Nach einer ausführlichen Darstellung des in der Theorie der Gleichungen als Fourierscher Satz bekannten Theorems schließt jene Besprechung: „Einem so gewandten Größenforscher, wie Fourier war, konnte es, einmal im Besitze jenes schönen Lehrsatzes, nicht schwer fallen, auf demselben die Anordnung der Technik der numerischen Auflösung der Gleichungen zu begründen, und diese Entwicklung ist mit großer Vollständigkeit und Ausführlichkeit gegeben. Geübtere Leser möchten vielleicht eine etwas gedrängtere Darstellung und die Wegschneidung mancher Wiederholung vorziehen; dem weniger geübten werden die vielen gut gewählten und ausführlich behandelten Beispiele willkommen sein. Jedenfalls sichert dieses Werk Fouriers Namen auch in diesem Teile der Größenlehre einen ehrenvollen Platz, den er in andern schon längst behauptet." Nach dieser klassischen Anzeige des Werkes bedarf seine Aufnahme in die Klassiker der exakten Wissenschaften keiner Recht-

fertigung. Die neue Ausgabe ist um so willkommener, als die Analyse des équations déterminées in der neuen Ausgabe der Werke Fouriers (von 1888 u. 1890) fehlt. Für die Genauigkeit der Übersetzung bürgt die bekannte Sorgfalt des Herausgebers; zuweilen hätte Ref. eine freiere Ausdrucksweise anstatt des engen Anschlusses an das Original gewünscht. Die Anmerkungen auf S. 241-263 geben in knapper Form alle erforderlichen Aufschlüsse. Lp.

F. Mertens. Ein Beweis des Galoisschen Fundamentalsatzes. Wien. Ber. **111**, 17-37.

Den Galoisschen Satz über die Gruppe einer Gleichung beweist der Verf., indem er Gleichungen unter den Wurzeln einer vorgelegten algebraischen Gleichung durch Kongruenzen von Funktionen unbestimmter Größen für ein gewisses Modulsystem (ohne sich übrigens dieser Terminologie zu bedienen) ersetzt. Besteht unter den Wurzeln $x_1, \dots, x_n$ der Gleichung $f(x) = 0$ die Relation $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, so ist

$$F(z_1, z_2, \dots, z_n),$$

wo die $z_1, z_2, \dots, z_n$ Unbestimmte bedeuten, für das gewählte Modulsystem kongruent Null und umgekehrt. Da nun alle Funktionen, die aus $F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ entstehen, wenn für $z_1, z_2, \dots, z_n$ die Permutationen einer gewissen Gruppe G substituiert werden, für dasselbe Modulsystem auch wieder kongruent Null sind, so bleibt die Gleichung

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

für alle Permutationen der Gruppe G richtig. Weil ferner umgekehrt auch, wenn $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bei allen Permutationen der Gruppe G ungeändert bleibt, $F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ für dasselbe Modulsystem einer von den $z_1, z_2, \dots, z_n$ unabhängigen Größe kongruent ist, so gehört

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dem durch die Koeffizienten von $f(x)$ bestimmten Rationalitätsbereiche an. Die allgemeinen Entwicklungen werden schließlich angewendet auf die Kreisteilungsgleichung, die Gleichung für die Teilung der Perioden der elliptischen Funktionen und auf eine gewisse Gleichung achten Grades. F.

B. Meth. Über ein älteres Verfahren der Zerlegung ganzer rationaler Funktionen in irreduktible Faktoren. Pr. Kgl. Kaiser Wilhelms-Realgymn. Berlin. 27 S. 4°.

Der Verf. hat entdeckt, daß in einem 1719 erschienenen, von Paul Halcke, „bestalten Schreib- und Rechenmeister in Buxtehude", verfaßten Buche sich bereits eine Methode findet, um eine ganze rationale Funktion in irreduktible Faktoren zu zerlegen. Er sagt, daß dieses Verfahren in einem bestimmten Falle mit dem von Kronecker (J. für Math. **92**) ersonnenen völlig übereinstimme, obgleich beide auf recht verschiedenen Grundlagen beruhen. Ref. ist sogar der Meinung, daß die beiden Me-

thoden im Prinzip übereinstimmen, der Unterschied nur davon herrührt, daß Halcke 1719 selbstverständlich noch nicht die Lagrangesche Interpolationsformel benutzen konnte. Setzt man $F(x) = D(x) . D'(x)$, so findet Halcke, wie Kronecker, zunächst die Werte der Funktion $D(x)$ für einzelne ganzzahlige Werte $x = r_\lambda$ des Arguments unter den Teilern von $F(r_\lambda)$. Um möglichst viele unbrauchbare Kombinationen von Werten D_λ von vorn herein ausscheiden zu können, nimmt Halcke noch die Funktion $\Phi(x) = D(x) + D'(x)$ zu Hülfe. Da er nun aber nicht die Lagrangesche Interpolationsformel kennt, so kann er nicht allgemein aus $(n+1)$ Werten D_λ (wenn $D(x)$ vom n-ten Grade ist) die Funktion $D(x)$ eindeutig bestimmen; es gelingt ihm nur, für Funktionen D bis zum zweiten Grade die Koeffizienten durch die Werte der Funktion für $x = 0, +5, -5$ vollständig zu berechnen. Auch für Funktionen dritten und vierten Grades benutzt er immer nur dieselben drei Werte von x, so daß er die Koeffizienten solcher Funktionen natürlich nicht mehr eindeutig bestimmen kann, vielmehr bei Aufsuchung von Teilern höheren als des zweiten Grades aufs Probieren angewiesen ist. — Aus dem Halckeschen Buche teilt Meth ferner noch eine Methode mit, um aus einer Summe, die aus einem rationalen Gliede und einer Quadratwurzel besteht, die Kubikwurzel zu ziehen.

Die uns gar nicht geläufige Darstellungs- und Bezeichnungsweise des alten Mathematikers hat Meth in die moderne Sprache der Mathematik übersetzt und dadurch erst einem weiteren Kreise verständlich gemacht. F.

O. Eberhard. Ein Beitrag zur Theorie der Gleichungen. Deutsche Math.-Ver. **11**, 169-178.

Es sei

$$f(x) = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + \cdots \pm a_n,$$
$$f_{1,0}(x) = n \,.\, a_0 x^{n-1} - (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots \pm a_{n-1},$$
$$f_{0,1}(x) = -a_1 x^{n-1} + 2 a_2 x^{n-2} - \cdots \pm n \,.\, a_n.$$

Aus der Aufeinanderfolge der ihrer Größe nach in eine Reihe geordneten reellen Wurzeln der Gleichungen $(n-1)$-ten Grades $f_{1,0}(x) = 0$ und $f_{0,1}(x) = 0$ wird die Zahl und Lage der reellen Wurzeln der Gleichung n-ten Grades $f(x) = 0$ erschlossen. Die bezüglichen Theoreme werden zunächst für eine Gleichung n-ten Grades mit lauter reellen Wurzeln abgeleitet und die für diese gefundenen Ergebnisse durch stetige Überführung reeller Wurzeln in imaginäre auf eine allgemeine Gleichung n-ten Grades ausgedehnt. F.

A. Zoukis. Sur quelques formules des fonctions homogènes et sur la démonstration d'un théorème qui s'y rattache. S. M. F. Bull. **30**, 181-194.

Unter Verwendung mehrerer Relationen unter den partiellen Ableitungen einer homogenen Funktion zweier Variabeln (deren Abdruck hier

zu viel Raum beanspruchen würde), wird der folgende von Stephanos (Intermédiaire 8, 117, 1900) aufgestellte Satz bewiesen:

„Man transformiere eine ganze rationale Funktion $F(x, 1)$ vom Grade m nacheinander durch die Formeln

$$x = a + e + \frac{h}{z+1}, \quad x = a + \frac{e}{z+1}, \quad x = a + \frac{e+h}{z+1},$$

wo a eine beliebige reelle Zahl bedeutet und e, h reelle Zahlen von gleichem Vorzeichen sind, und bezeichne mit

$$V_{a+e}^{a+e+h}, \quad V_a^{a+e}, \quad V_a^{a+e+h}$$

die Anzahl der Variationen unter den Koeffizienten der nach Potenzen von z entwickelten ganzen Funktionen:

$$(z+1)^m . F\left(a + e + \frac{h}{z+1}, 1\right),$$

$$(z+1)^m . F\left(a + \frac{e}{z+1}, 1\right),$$

$$(z+1)^m . F\left(a + \frac{e+h}{z+1}, 1\right).$$

Alsdann besteht die Relation

$$V_a^{a+e} + V_{a+e}^{a+e+h} + 2K = V_a^{a+e+h},$$

wo K eine ganze positive Zahl oder Null ist."

Die Zahl V_a^{a+e} ist, wie Jacobi bemerkt hat, eine obere Grenze für die Zahl der reellen Wurzeln von $F(x) = 0$ im Intervall $(a \dots a + e)$.

F.

O. Biermann. Über die Bedingungen, unter denen eine ganze rationale Funktion mehrfache Nullstellen besitzt. Monatsh. f. Math. 13, 351-360.

Durch geometrische Betrachtungen leitet der Verf. Gleichungen niedrigeren Grades ab, denen die etwa vorhandenen mehrfachen Wurzeln einer Gleichung n-ten Grades genügen müssen. Es scheint Ref. aber nicht, daß die Ergebnisse sich erheblich von denen unterscheiden, die man auf rein algebraischem Wege findet. (Vgl. z. B. Netto: Vorlesungen über Algebra, I, § 142-145.)

F.

A. Tresse. Sur la méthode des racines égales. Revue de Math. spéc. 13, 33-34.

Ohne Benutzung des Fundamentalsatzes der Algebra wird gezeigt, daß jede ganze Funktion $f(x)$ sich stets und nur auf eine Art in ein gewisses Potenzenprodukt zerlegen läßt, welches folgende Eigenschaften besitzt: Die Basen sind ganze Funktionen von x, von denen keine mit

einer andern und keine mit ihrer Ableitung einen Teiler gemein hat; die Exponenten sind alle von einander verschieden.

Um zu dieser Zerlegung zu gelangen, werden drei Reihen von Funktionen gebildet. Die erste Reihe wird folgendermaßen definiert: $f_1(x)$ ist der größte gemeinsame Teiler von $f(x)$ und $f'(x)$, $f_2(x)$ der g. g. T. von $f_1(x)$ und $f'_1(x), \ldots, f_p(x)$ der g. g. T. von $f_{p-1}(x)$ und $f'_{p-1}(x)$. Die letzte Funktion $f_p(x)$ ist eine Konstante, welche gleich 1 gesetzt werden kann. Die zweite Reihe wird gebildet von den Funktionen $\varphi_1 \equiv f : f_1$, $\varphi_2 \equiv f_1 : f_2, \ldots, \varphi_p \equiv f_{p-1} : f_p$. Jede Funktion dieser beiden Reihen ist durch die folgende derselben Reihe teilbar. Die dritte Reihe besteht aus den Funktionen:

$$\theta_1 \equiv \varphi_1 : \varphi_2,\ \theta_2 \equiv \varphi_2 : \varphi_3, \ldots, \theta_{p-1} \equiv \varphi_{p-1} : \varphi_p,\ \theta_p \equiv \varphi_p.$$

Man kann nun die Funktionen der zweiten Reihe durch die der dritten und die Funktionen der ersten Reihe durch die der zweiten ausdrücken. Man gelangt daher schließlich zu einer Darstellung von $f(x)$ durch ein Produkt von Potenzen der Funktionen der dritten Reihe. Die Faktoren dieses Produktes haben die oben angegebenen Eigenschaften. Die auf diese Weise gefundene Zerlegung ist die einzige ihrer Art.

Der Verf. verweist auf den etwas abweichenden Beweis, welchen F. Engel (Leipz. Ber. 1897) für denselben Satz gegeben hat. Zch.

P. Mansion. Sur la théorie des racines égales. Mathesis (3) 2, 57-59.

Beweis des grundlegenden Satzes in der Theorie der gleichen Wurzeln, ohne die linke Seite der Gleichung in Faktoren ersten Grades zerlegt vorauszusetzen. Mn. (Lp.)

C. Isenkrahe. Neue Lehrsätze über die Wurzeln algebraischer Gleichungen. Arch. der Math. u. Phys. (3) 3, 257-260.

Stellt man die Wurzeln einer algebraischen Gleichung

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots = 0$$

mit komplexen Koeffizienten durch Punkte in der Gaußschen Zahlenebene dar und denkt sich jeden mit gleicher Masse belegt, so ist der Schwerpunkt dieses Systems der Punkt $-\frac{a_1}{n \cdot a_0}$. Dieser Schwerpunkt bleibt derselbe, wenn man die Funktion $f(x)$ beliebig oft differenziert oder (unter Hinzufügung einer beliebigen Integrationskonstante) integriert oder auch iteriert. F.

Cattaneo. Sulle soluzioni opposte delle equazioni algebriche. Suppl. al Period. 5, 97-99.

Damit die Gleichung $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$ eine Wurzel $+\beta$ und die entgegengesetzte $-\beta$ habe, müssen die beiden Glei-

chungen $a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + \cdots = 0$, $a_1 + a_3 x + a_5 x^2 + \cdots = 0$ erfüllt sein. Aus der gemeinsamen Wurzel y dieser beiden Gleichungen erhält man die entgegengesetzten Wurzeln $+\sqrt{y}$ und $-\sqrt{y}$ der gegebenen Gleichung. Dies wird auf die Gleichungen dritten, vierten und fünften Grades angewandt. Lp.

J. Bendixson. Sur les racines d'une équation fondamentale. Acta Math. **25**, 359-365.

Für die Gleichung n-ten Grades in s

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - s & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0,$$

in welcher die $a_{\lambda\nu}$ reelle Größen bedeuten sollen, werden die folgenden beiden Sätze bewiesen:

1. Der absolute Wert des imaginären Bestandteils irgend einer Wurzel s ist $\leqq g \cdot \sqrt{\frac{1}{2} n(n-1)}$, wo g die größte der Zahlen $\frac{1}{2}|a_{\lambda\nu} - a_{\nu\lambda}|$ bezeichnet.

2. Der reelle Bestandteil jeder Wurzel s liegt zwischen der kleinsten und größten Wurzel der (bekanntlich nur reelle Wurzeln besitzenden) Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - t & \frac{a_{12} + a_{21}}{2} & \dots & \frac{a_{1n} + a_{n1}}{2} \\ \frac{a_{12} + a_{21}}{2} & a_{22} - t & \dots & \frac{a_{2n} + a_{n2}}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{a_{1n} + a_{n1}}{2} & \frac{a_{2n} + a_{n2}}{2} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix} = 0.$$

F.

A. Hirsch. Sur les racines d'une équation fondamentale. Acta Math. **25**, 367-370.

Der Verf. verallgemeinert die von Bendixson in der unter demselben Titel veröffentlichten Arbeit gefundenen Sätze, indem er in derselben Gleichung die Größen $a_{\lambda\nu}$ als komplex voraussetzt. Bedeutet $\bar{a}_{\lambda\nu}$ die zu $a_{\lambda\nu}$ konjugierte Zahl, A die größte der Zahlen $|a_{\lambda\nu}|$, B die größte der Zahlen

$$\left|\left(\frac{a_{\lambda\nu} + \bar{a}_{\nu\lambda}}{2}\right)\right| \text{ und } C \text{ die größte der Zahlen } \left|\left(\frac{a_{\lambda\nu} - \bar{a}_{\nu\lambda}}{2}\right)\right|,$$

so ist der absolute Wert jeder Wurzel $\leqq nA$, der absolute Wert des reellen Bestandteils jeder Wurzel $\leqq nB$ und der absolute Wert des imaginären Bestandteils jeder Wurzel $\leqq nC$.

Der reelle Bestandteil jeder Wurzel liegt ferner zwischen der kleinsten und der größten Wurzel der (nur reelle Wurzeln besitzenden) Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{a_{11}+\bar{a}_{11}}{2}-t, & \frac{a_{12}+\bar{a}_{21}}{2}, & \ldots, \frac{a_{1n}+\bar{a}_{n1}}{2} \\ \frac{a_{21}+\bar{a}_{12}}{2}, & \frac{a_{22}+\bar{a}_{22}}{2}-t, & \ldots, \frac{a_{2n}+\bar{a}_{n2}}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{a_{n1}+\bar{a}_{1n}}{2}, & \frac{a_{n2}+\bar{a}_{2n}}{2}, & \ldots, \frac{a_{nn}+\bar{a}_{nn}}{2}-t \end{vmatrix} = 0$$

F.

T. N. Thiele. En Tilnaermelsesformel til roduddragning. Nyt. Tidss. for Math. 18 B, 1-4.

Es sei p Wurzel einer algebraischen Gleichung n-ten Grades, und $a, b, c, \ldots, l, m$ seien n rationale Zahlen, die annäherungsweise den Zahlen $1, p, p^2, \ldots, p^{n-1}, p^n$ proportional sind; dann kann man den Ausdruck

$$m + lp + \cdots + bp^{n-2} + ap^{n-1} = o^{-1}$$

bilden, wo o eine unbekannte Zahl ist. Man bilde nun unter Benutzung der gegebenen Gleichung, die r-te Potenz dieses Ausdruckes:

$$m_r + l_r p + \cdots + b_r p^{n-2} + a_r p^{n-1} = o^{-r},$$

so werden $a_r, b_r, \ldots, l_r, m_r$ im allgemeinen verbesserte Werte der Größen $a, b, \ldots, l, m$ sein. V.

Ch. J. de la Vallée Poussin. Sur les relations qui existent entre les racines d'une équation algébrique et celles de sa dérivée. Brux. S. sc. 26 B, 1-12; Mathesis (3) 2, Suppl. 1.

P. Mansion. Rapport. Ibid. A, 57-58.

Es sei $f(z) = 0$ eine algebraische Gleichung, deren linke Seite auf die Form $R \cdot e^{\theta i}$ gebracht werde. $R =$ const. und $\theta =$ const. bilden ein orthogonales System; unter den Kurven $\theta =$ const. muß man die „Grenzbahnen" auszeichnen, deren Gleichung $\theta = \theta_0$ ist, wo θ_0 der Wert vom θ in einem Wurzelpunkte von $f'(z) = 0$ ist. Der Verf. beweist folgende Verallgemeinerung des Rolleschen Theorems: Man kann von einem Wurzelpunkte von $f(z)$ zu einem anderen gelangen, indem man den Grenzbahnen auf eine einzige Art nachgeht; der eingeschlagene Weg läuft wenigstens durch einen Wurzelpunkt von $f'(z) = 0$.

Mn. (Lp.)

A. Demoulin. Sur le théorème de Rolle. Mathesis (3) 2, 81-84.

1. Ist $F(x)$ eine stetige Funktion zwischen $x_0 < X$ und X, $F(x_0) > 0$, $F(X) < 0$, so hat die Gleichung $F(x) = 0$ zwischen x_0

und X wenigstens eine Wurzel ξ, so daß in einem beliebig kleinen Intervalle $(\xi \dots \xi + \alpha, \alpha > 0)$ unendlich viele Werte von x vorhanden sind, für welche $F(x)$ negativ ist.

2. Ist $F(x)$ eine stetige Funktion zwischen $x_0 < X$ und X, $F(x_0) = 0$, $F(X) = 0$, $F'(x) = \lim (\varDelta F(x) : \varDelta x)$, wo $\varDelta x$ positiv, stetig und einzig vorhanden für jeden Wert von x zwischen x_0 und X, so wird $F'(x)$ mindestens für einen in diesem Intervalle befindlichen Wert von x zu Null. — Das Theorem ist selbstverständlich, wenn $F(x)$ von x_0 bis X beständig Null ist. Anderenfalls sei $x_0 < a < X$, $F(a) > 0$. Man kann immer einen derartigen, zwischen x_0 und a gelegenen Wert b von x finden, daß $F(b) < F(a)$ die Grenze einer Reihe von Werten von $F(x)$ ist, die $F(b)$ übertreffen, wo $x > b$ (nach No. 1); mithin ist $F'(b)$ Null oder positiv. Ebenso kann man einen zwischen a und X gelegenen derartigen Wert c finden, daß $F(c) < F(a)$ die Grenze einer Reihe von Werten von $F(x)$ ist, die unter $F(c)$ liegen, wo $x > c$ ist; also ist $F'(c)$ Null oder negativ. Wenn $F'(b)$ oder $F'(c)$ Null ist, so ist der Satz bewiesen; wenn $F'(b) > 0$, $F'(c) < 0$, so verschwindet $F'(x)$ für einen Zwischenwert.

3. Ist eine Funktion $F(x)$ zwischen x_0 und X stetig und so beschaffen, daß für ein hinreichend kleines $\varDelta x > 0$, $F(x + \varDelta x) > F(x)$, so ist unmöglich gleichzeitig $x' < x''$, $F(x') < F(x'')$ in dem betrachteten Intervalle. Denn wenn $F(x') > h > F(x'')$ in dem betrachteten Intervalle wäre, so würde $F(x) - h$ nach No. 1 für einen zwischen x' und x'' gelegenen Wert verschwinden, wo ξ die Grenze einer abnehmenden Reihe von Werten von x ist, für welche $F(x) - h$ negativ ist, was der Annahme widerstreitet.

4. Wenn die rechte Ableitung einer in der Nähe eines Wertes x_0 von x stetigen Funktion $F(x)$ in der Nähe dieses Wertes stetig ist, so existiert die linke Ableitung der Funktion für $x = x_0$ und ist der rechten Ableitung gleich.

Diese vier Theoreme verbessern und vervollständigen die Nummern 92, 202, 303 von P. Mansion, Résumé d'analyse. Mn. (Lp.)

E. Maillet. Sur les lignes de décroissance maxima des modules et les équations algébriques ou transcendantes. C. R. 134, 517-518.

„$f(z)$ sei eine in der Umgebung eines Punktes a der z-Ebene monodrome Funktion. Wenn $f(a)$ ungleich Null und $f^{(n)}(z)$ die erste für $z = a$ nicht verschwindende Ableitung von $f(z)$ ist, so nimmt $f(z)$ in der Umgebung von a n-mal alle möglichen $f(a)$ benachbarten Werte an.

Im Punkte a gibt es alsdann n Richtungen, längs deren die Abnahme von $|f(z)|$ ein Maximum erreicht. Die Differentialgleichung der Linien, welche diese Richtungen berühren und die wir Linien maximaler Abnahme der Moduln nennen wollen, ist $dP/P = dQ/Q$, wenn

$$f(z) = P + Qi.$$

Ebenso kann man in jedem Punkte die Richtungen betrachten, längs deren die Abnahme von $|f(z)|$ Null ist. Die diese Richtungen berührenden Linien haben die Gleichung $P^2 + Q^2 = \text{const.}$; wir nennen sie Linien konstanter Moduln." Wählt man speziell für $f(z)$ einerseits eine ganze rationale, andrerseits eine elliptische Funktion, so führt die Benutzung der soeben definierten Linien zu neuen Beweisen wichtiger Sätze, deren ausführliche Entwicklung in einer späteren Abhandlung erfolgen soll. F.

F. Giudice. Esistenza, calcolo e differenze di radici d'equazioni numeriche. Palermo Rend. **16**, 180-184.

Die Note soll zunächst einen einfachen, auf dem Schluß von $n-1$ auf n beruhenden Beweis für die Existenz der Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(x) = 0$ bringen. Zu dem Zwecke geht der Verf. von einer Annahme aus, die nach Ansicht des Ref. erst als berechtigt nachzuweisen wäre, daß man nämlich immer eine Zahl α angeben könne, für welche $|f(\alpha)|$ kleiner ist als jede der von Null als verschieden vorauszusetzenden Größen $|f(\beta_\nu)|$, wo die β_ν (für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$) die Nullstellen von $f'(x)$ bezeichnen. Alsdann läßt sich eine Reihe anderer Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ so finden, daß $\lim_{m=\infty} f(\sigma_m) = 0$. Hierin liegt zugleich eine Methode für die näherungsweise Berechnung der Wurzeln einer numerischen Gleichung. Unter Benutzung derjenigen Gleichung, welcher die $f(\beta_\nu)$ genügen, wird ferner eine untere Grenze für den absoluten Betrag der Differenz zweier Wurzeln der vorgelegten Gleichung $f(x) = 0$ aufgestellt. F.

E. L. Bunitzky. Über die Separation der reellen Wurzeln der algebraischen Gleichungen. Odessa Ges. **20**, XXXIX-XL (Russisch).

Sei A eine obere Grenze der absoluten Beträge der Wurzeln von $f(x) = 0$ (ohne gleiche Wurzeln); weiter seien $F(x)$ und $\varphi(x)$ zwei Polynome, welche der Gleichung $F(x) \cdot f(x) + \varphi(x) \cdot f'(x) = 1$ identisch genügen; endlich sei $\varphi_1(x)$ die Funktion, welche aus $\varphi(x)$ entsteht, indem man jeden Koeffizienten von $\varphi(x)$ durch seinen absoluten Betrag ersetzt. Der Verf. behauptet, daß der Modul der Wurzeldifferenz von $f(x) = 0$ größer als $\frac{1}{(2A)^{m-1}\varphi_1(A)}$ wird. Si.

A. Pellet. Sur l'approximation des racines réelles des équations. S. M. F. Bull. **30**, 176-177.

Untersuchung der Bedingungen, unter denen das Newtonsche Verfahren der Annäherung an eine Wurzel der Gleichung einen Wert liefert, für welchen die Verbesserung des neuen Näherungswertes größer ist als sein Fehler. Lsg.

R. Perrin. Sur une méthode nouvelle pour la séparation et le calcul approximatif des racines réelles des équations numériques. Assoc. Franç. Ajaccio (1901) 30, 152-176.

Wenn in $y = a + bx + cx^2 + \cdots + kx^n$ die Koeffizienten alle positiv sind, so nennt der Verf. diese Parabel „regulär“. Ist $p \leqq n$, so können sich zwei reguläre Parabeln p-ter und n-ter Ordnung höchstens in $p+1$ Punkten schneiden. — Die Wurzeln der numerischen Gleichungen kann man als die Schnittpunkte zweier regelmäßigen Kurven ansehen, die dadurch gebildet werden, daß man einmal $y = P$, das andere Mal $y = Q$ nimmt, wo P die Summe aller positiven, Q die aller negativen Glieder bezeichnet. Zufolge der Eigenschaften der regulären Kurven kann man sie ohne Zweideutigkeit zwischen zwei gegebenen Abszissen durch gewisse Geraden oder quadratische Parabeln ersetzen, die der Verf. angibt, und die Anwendung dieser Hülfsgeraden oder Hülfsparabeln gestattet eine beliebige Einschränkung der Wurzeln und ihre nachfolgende Berechnung mit gewünschter Genauigkeit. Das Verfahren liefert auch ein Kriterium für die Realität der Wurzeln in einem gegebenen Intervalle. Zuletzt wendet der Verf. dieselben Methoden noch auf einige transzendente Gleichungen an. Lp.

R. Heger. Näherungsweise Auflösung von numerischen höheren Gleichungen. Unterrichtsbl. f. Math. 8, 8-11.

An mehreren Beispielen wird die alte Regula falsi als für den Unterricht an Mittelschulen geeignet erläutert; dabei werden einige Vereinfachungen der Zahlenrechnungen gelehrt. Lp.

A. S. Guldberg. Sur la résolution des équations trinomes. Christiania Videnskabsselskabs Skrifter. I. Math.-naturv. Klasse 1902, No. 10. 39 S.

Um die trinomische Gleichung $x^n + ax + b = 0$ auflösen zu können, führt der Verf. eine neue Wurzel, die „Doppelwurzel“ $\sqrt[n]{\overline{a}}$ ein, definiert durch die Gleichung $x^n - ax - a = 0$. Durch Einführung dieser Wurzel ist die trinomische Gleichung $x^n + ax + b = 0$ und auch die allgemeine Gleichung $x^n + ax^p + b = 0$ auflösbar, wenn man gestattet, daß n sowohl eine ganze Zahl als ein Bruch sein kann; man findet als Lösung der zwei letzten Gleichungen respektive:

$$x = \frac{b}{a}\sqrt[n]{\overline{\frac{-a^n}{b^{n-1}}}}; \quad x = \sqrt[p]{\frac{b}{a}\sqrt[m]{\overline{\frac{-a^m}{b^{m-1}}}}}, \quad m = \frac{n}{p}.$$

Der Verf. zeigt die geometrische Darstellung der Doppelwurzel, die numerische Berechnung und die Entwicklung derselben in konvergente Reihen. Die Doppelwurzel steht in einer sehr einfachen Relation zu den gewöhnlichen Wurzeln und läßt sich auch dadurch approximativ berechnen; denn man hat:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a + \sqrt[n]{a + \sqrt[n]{a + \cdots}}}.$$

Zum Schluß gibt der Verf. die Anwendung der Doppelwurzel auf die Auflösung der allgemeinen kubischen Gleichung. Gbg.

CHR. SCHMEHL. Über ein System von n homogenen linearen Gleichungen mit n Unbekannten und ein System von n nicht-homogenen linearen Gleichungen mit $n-1$ Unbekannten. Zs. f. math. u. naturw. Unt. **33**, 345-356.

Für Mittelschulen berechnete Darstellung bekannter Relationen im Falle $n = 3$. Lp.

L. CARLINI. Sulla discussione dei problemi riducibili al 2° grado. Suppl. al Period. **6**, 3-7, 17-20.

Die quadratischen Gleichungen werden benutzt, um den Schüler einer Mittelschule in die algebraische Betrachtungsweise einzuführen, insbesondere die Bekanntschaft mit dem Sturmschen Satze zu vermitteln. Lp.

F. J. STUDNIČKA. Beitrag zur Lehre von den reziproken Gleichungen. Arch. der Math. u. Phys. (3) **8**, 16-20.

Eine reziproke Gleichung $f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots = 0$ wird durch die Identität

$$f(x) \equiv \lambda \cdot x^n \cdot f\left(\frac{k}{x}\right)$$

definiert, woraus sich, eventuell nachdem man $f(x)$ von einem Faktor $(x^2 - k)^m$ befreit hat, ergibt

$$\lambda = k^{-\frac{1}{2}n}.$$

Durch die Substitution $x + k/x = y$ geht bekanntlich die reziproke Gleichung n-ten Grades über in die Gleichung vom Grade $\frac{1}{2}n$:

$$B_0 y^{\frac{1}{2}n} + B_1 y^{\frac{1}{2}n-1} + \cdots = 0.$$

Während man gewöhnlich die B auf rekurrentem Wege aus den A bestimmt, gibt Studnička in dem vorliegenden Aufsatze eine independente Darstellung der B durch die A. F.

LELIEUVRE. Question d'algèbre. Revue de Math. spéc. **13**, 1-2.

Die Aufgabe, alle ganzen Funktionen vom Grade $2n$ zu finden, die zugleich reziprok sind und bei einer Transformation von x in $1-x$ in sich selbst übergehen, führt zunächst in dem Falle $n = 3$ zu dem Ergebnis, daß die gesuchten Funktionen von der Form:

$$\varphi(x) \equiv (x^2 - x + 1)^3 + \lambda(x^2 - x)^2$$

sein müssen, in welcher λ eine willkürliche Konstante bedeutet. Ist $n > 3$, so sind drei Fälle zu unterscheiden:

1) $n = 3p$ (p eine ganze Zahl). Die Funktionen sind von der Form:

$$F(x) \equiv U^p + \mu_1 U^{p-1} V + \mu_2 U^{p-2} V^2 + \cdots + \mu_p V^p,$$

wo $U \equiv (x^2 - x + 1)^3$ und $V \equiv (x^2 - x)^2$ zu setzen ist und $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ willkürliche Parameter bedeuten.

2) $n = 3p + 1$. Man findet:

$$F(x) \equiv (x^2 - x + 1)(U^p + \mu_1 U^{p-1} V + \mu_2 U^{p-2} V^2 + \cdots + \mu_p V^p).$$

3) $n = 3p + 2$. In diesem Falle ergibt sich:

$$F(x) \equiv (x^2 - x + 1)^2 (U^p + \mu_1 U^{p-1} V + \mu_2 U^{p-2} V^2 + \cdots + \mu_p V^p).$$

Zch.

R. Volpi. Risoluzione dell' equazione generale del 3° grado. Periodico di Mat. (2) 4, 279.

Setzt man $x = y + a/y$ in $x^3 + px + q = 0$, so erhalten y^4 und y^2 die Koeffizienten bezw. $3a + p$ und $a(3a + p)$. Für $a = -\frac{1}{3}p$ folgt daher

$$y^6 + qy^3 - \tfrac{1}{27}p^3 = 0,$$

woraus sich sofort die kardanische Formel ergibt. Lp.

E. Eckhardt. Elementare Ableitung der Realitätsbedingungen für die Gleichungen dritten Grades ohne Auflösung dieser Gleichungen. Zs. f. math. u. naturw. Unt. 33, 446-458.

Der Titel kennzeichnet den Inhalt hinreichend. Ref. kann sich von dem pädagogischen Nutzen, den der Verf. von seinen Betrachtungen erhofft, nicht überzeugen. Lp.

Th. Alexander. A cubic and submerged cubes. Nature 66, 127.

In ein kubisches Hohlgefäß, dessen horizontale Bodenfläche 27 Quadratzoll Inhalt hat, und das zwei Zoll hoch mit Wasser gefüllt ist, soll ein schwerer Würfel gestellt werden, dessen Deckfläche trocken oberhalb der Wasserfläche bleibt. Die zu lösende kubische Gleichung

$$x^3 - 27x + 54 = 0$$

hat eine Doppelwurzel $x = 3$, die der Bedingung der Aufgabe nicht entspricht. Aus Anlaß dieses Umstandes werden Bemerkungen über die Benutzung der vorliegenden Aufgabe zur Erläuterung der Eigenschaften der Wurzeln einer kubischen Gleichung gemacht. Lp.

G. P. Katschenovsky. Über die Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades. Odessa Ges. 20, X-XII (Russisch).

Die Gleichung dritten Grades $x^3+Ax+B=0$ kann durch die Substitution $x=\sqrt{-\frac{4}{3}A}\cdot\sin\theta$ in der Form $\sqrt{-(\frac{4}{3}A)^3}\cdot\sin(3\theta)+4B=0$ dargestellt werden. Sind weiter ihre Wurzeln p, $ap+m$, $ap+n$ $(a^3-1=0)$, so ist

$$p(1+2\alpha)+m+n=0,\quad mn=A,\quad m^3+n^3=B(1+2\alpha)^3.$$

Für die Gleichung vierten Grades $x^4+Ax^2+Bx+C=0$ gibt der Verf. folgendes: Sind deren Wurzeln p, $a-p$, $b-p$, $c-p$, so befriedigen a, b, c die Gleichung:

$$x^6-2Ax^4+(4A^2-16C^2)x^2-B^2=0.$$

Diese zerfällt in zwei weitere: $x^3+mx^2+\frac{n}{2}x+1=0$ mit den Wurzeln a, b, c, und $x^3-mx^2+\frac{n}{2}x-1=0$ mit den Wurzeln $-a$, $-b$, $-c$; dann wird:

$$m^2+2A=n,\quad n^2+8Bm+16C^2-4A^2=0,\quad x_1=m.$$

Si.

P. Epstein. Die Auflösung der biquadratischen Gleichungen mit Hülfe bekannter Dreiecksformeln. Zs. f. math. u. naturw. Unt. 33, 375-376.

Sind a, b, c die drei Seiten eines Dreiecks, s der halbe Umfang, $\varDelta$ der Inhalt, so sind die Größen $-s$, $s-a$, $s-b$, $s-c$ die Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$x^4-\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)x^2+abcx-\varDelta^2=0.$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten dieser Gleichung mit denen der zu lösenden $x^4+px^2-qx+t=0$ erhält man die kubische Resolvente

$$z^3+2pz^2+(p^2-4t)z-q^2=0,$$

deren Wurzeln die Zahlen a^2, b^2, c^2 sind, und hieraus folgen die Eulerschen Ausdrücke für die Wurzeln der biquadratischen Gleichung. Lp.

E. N. Barisien. Risoluzione dell' equazione di 4° grado in vari casi particolari. Periodico di Mat. (2) 5, 129-132.

Die zu lösende Gleichung sei $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$.
1. Wenn $r=\frac{1}{2}p(q-\frac{1}{4}p^2)$, so läßt sich die Gleichung in die Form bringen:

$$(x^2+\tfrac{1}{2}\,px)^2+\frac{2r}{p}(x^2+\tfrac{1}{2}px)+s=0.$$

2. Wenn $r^2 = s(4q - p^2)$, so läßt sich die biquadratische Gleichung umformen in:

$$x^2(x + \tfrac{1}{2}p)^2 = (\tfrac{1}{4}p^2 - q)\left[x + \frac{r}{2(q - \frac{1}{4}p^2)}\right]^2.$$

Außer diesen beiden Fällen, in denen die biquadratische Gleichung ohne Auflösung einer kubischen Resolvente behandelt wird, gibt der Verf. noch mehrere andere leicht erkennbare Fälle, in denen dieselbe Vereinfachung eintritt. Lp.

G. Vivanti. Lezioni sulla teoria della risoluzione delle equazioni di quinto grado tenute nella R. Università di Messina, raccolte dagli studenti. Messina: Fiore. 156 S. 4° (lithogr.).

Um das Verständnis der Kleinschen Theorie des Ikosaeders den Studierenden zu erleichtern, hat es der Verf. für gut gehalten, den Stoff einer tiefen Umordnung zu unterwerfen. Von der Theorie der Operationen ausgehend, wendet er die allgemeinen Begriffe auf die Gruppen von linearen Substitutionen einer Veränderlichen an und bestimmt alle endlichen derartigen Gruppen. Dann geht er auf die geometrische Darstellung der Substitutionen auf der Ebene und auf der Kugel ein und weist auf die Übereinstimmung der Substitutionen mit den Drehungsgruppen hin; er konstruiert diese letzteren Gruppen in analytischer Form und stellt dieselben auf einer Ebene dar. Aus der Einführung homogener Variabeln und Gruppen entsteht der Invariantenbegriff, welcher in der behandelten Theorie fundamental ist. Um die Anwendung der Theorie der Polyedergruppen auf Gleichungen fünften Grades vorzubereiten, werden hier die Prinzipien der Galoisschen Gleichungstheorie entwickelt. Es folgt die algebraische Auflösung der Dieder-, Tetraeder- und Oktaedergleichung und die Bildung der Resolventen fünften und sechsten Grades der Ikosaedergleichung. Ist nun eine Hauptgleichung fünften Grades (d. i. eine Gleichung, deren zweiter und dritter Koeffizient gleich Null sind) gegeben, so kann man, mit Hülfe einer eigentümlichen geometrischen Repräsentation, eine mit derselben zusammenhängende Gleichung (die λ-Gleichung) mit der Ikosaedergleichung zusammenfallen lassen; dann ist es möglich, eine beliebige Hauptgleichung fünften Grades als Hauptresolvente einer Ikosaedergleichung zu betrachten und dadurch zur Auflösung derselben zu gelangen, vorausgesetzt nur, daß man eine Wurzel der Ikosaedergleichung kennt. Eine beliebige Gleichung fünften Grades läßt sich aber durch eine Wurzelausziehung auf eine Hauptgleichung zurückführen. Um die Analogie mit den niedrigeren Gleichungen hervortreten zu lassen, wird die Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades vermittelst der Dieder-, bezw. Oktaedergleichung geliefert. Die Vorlesung schließt mit der Auflösung der Ikosaedergleichung durch hypergeometrische Reihen, und mit einigen Worten über die Auflösung derselben durch elliptische Funktionen. Vi.

L. Lachtin. Die Differentialresolvente einer algebraischen Gleichung 6. Grades allgemeiner Art. Math. Ann. 56, 445-481.

Klein (F. d. M. 30, 103, 1899) hat die Möglichkeit gezeigt, drei irrationale Funktionen der Wurzeln einer Gleichung sechsten Grades zu bilden, die bei geraden Substitutionen dieser Wurzeln sich linear transformieren.

Der Verf. hat sodann in einer russisch geschriebenen Arbeit (F. d. M. 32, 112, 1901) den Gedanken von Klein weiter ausgeführt und gezeigt, daß sich die Wurzeln jeder Gleichung sechsten Grades mittels quadratischer und kubischer Radikale ausdrücken lassen durch ein Lösungspaar des Fundamentalgleichungssystems:

$$(1) \qquad v = \frac{\Phi(u_1, u_2)}{F^5(u_1, u_2)}, \quad w = \frac{H(u_1, u_2)}{F^2(u_1, u_2)},$$

wo F, Φ, H die Invarianten der Valentinerschen Gruppe G_{360}, v, w rationale Funktionen eines Parameters t sind, und wo sich t (mit Hülfe obiger Radikale) durch die Koeffizienten der gegebenen Gleichung sechsten Grades ausdrücken läßt.

Bei Umläufen von t erleiden $u_1(t), u_2(t)$ lineare nichthomogene Substitutionen der G_{360}.

Daher lassen sich u_1, u_2 in die Form:

$$(2) \qquad u_1 = \frac{y_1}{y_3}, \quad u_2 = \frac{y_2}{y_3}$$

setzen, wo y_1, y_2, y_3 Integrale einer linearen Differentialgleichung dritter Ordnung mit in t rationalen Koeffizienten sind.

„Diese Gleichung ist die Differentialresolvente dritter Ordnung für die allgemeine Gleichung sechsten Grades.“

Man kann aber auch in (1) die v, w als unabhängige Variabeln betrachten, dann sind die y_1, y_2, y_3 (2) Integrale eines Systems dreier partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Dieses System heiße in allgemeinerem Sinne eine Differentialresolvente der Gleichung sechsten Grades. Führt man in (1) die y_1, y_2, y_3 (2) ein, so hat man:

$$(3) \qquad H(y) - w F^2(y) = 0, \quad \Phi(y) - v F^5(y) = 0.$$

Die Form $F(y)$, vom sechsten Grade in den y, ist die einfachste Invariante der G_{360}. Die Form $H(y)$ ist die Hessesche Kovariante von F von 12. Grade, und $\Phi(y)$ ist die geränderte Kovariante von F vom 30. Grade.

Bedeutet $\Psi(y)$ die Jacobische Determinante von F, H, Φ, so ist jede Kovariante von F ganzrational in den F, H, Φ, Ψ, und überdies ist Ψ^2 ganzrational in F, H, Φ, nach einem Gesetze von der Gestalt:

$$(4) \qquad \Psi^2(y) = f(w, v) F^{15}(y).$$

Auch als Funktion der u_1, u_2 läßt sich $\Psi(u_1, u_2)$ einfach darstellen.

Insbesondere wähle man jetzt als die Größen y_1, y_2, y_3 die folgenden:

$$(5) \qquad y_3 = F^{-\frac{1}{6}}(u_1, u_2), \quad y_1 = u_1 y_3, \quad y_2 = u_2 y_3.$$

Dann werden die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der y nach v und w durch die u_1, u_2 ausgedrückt und in invarianter Form hergestellt. Versteht man unter $y = y_0$ eine Unbekannte, so bilde man die bezüglich y_0 lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den unabhängigen Variabeln v, w:

$$\left| \frac{\partial^2 y_i}{\partial w^2}, \frac{\partial y_i}{\partial w}, \frac{\partial y_i}{\partial v}, y_i \right| = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3), \tag{6}$$

die bei linearer Transformation der y_1, y_2, y_3 invariant ist, und der diese Größen genügen. Durch geeignete Umformungen läßt sich der Gleichung (6) eine invariante Gestalt geben. Analoge Betrachtungen gelten, wenn man in (6) die $\frac{\partial^2 y_i}{\partial w^2}$ ersetzt durch die $\frac{\partial^2 y_i}{\partial v \partial w}$, resp. durch die $\frac{\partial^2 y_i}{\partial v^2}$. Das so gewonnene System von drei simultanen partiellen Differentialgleichungen ist in dem angegebenen Sinne als die Differentialresolvente der algebraischen Gleichungen (1) und damit jeder Gleichung sechsten Grades zu bezeichnen. Betrachtet man nunmehr v, resp. w als einzige unabhängige Veränderliche, so ergibt sich die Differentialresolvente durch Differentiationen und Eliminationen in der Gestalt einer linearen Differentialgleichung dritter Ordnung. Um diese Gestalten zu vereinfachen, bedarf es einiger Eigenschaften ihrer drei Integrale y_1, y_2, y_3 als Funktionen von v, resp. w. Unter „Primform“ wird in bekannter Weise eine solche ganze Form der y verstanden, die entweder einer rationalen Funktion der v, w oder wenigstens einem Radikale aus einer solchen gleich ist; die Kovarianten sind Primformen; die wichtigsten derselben werden in v, w ausgedrückt. Ein ferneres Hilfsmittel sind die Riemannschen Flächen. Hält man w, als Parameter, im Augenblick fest, so sind die u_1, u_2 zwei algebraische Funktionen von v, die eindeutig auf derselben regulären 360-blättrigen (mit w veränderlichen) Riemannschen Fläche R^v_{360} ausgebreitet werden. Entsprechend existiert eine R^w_{360}. Ihre Windungspunkte werden aufgestellt und der Zusammenhang der Blätter daselbst untersucht. Die R^v_{360} ist vom Geschlecht 55, die R^w_{360} vom Geschlecht 406. Hiermit lassen sich die Wurzeln der determinierenden Gleichungen für die obigen Differentialresolventen dritter Ordnung bestimmen. Eine besondere Rolle spielt dabei eine der Riemannschen φ-Funktionen für die Fläche R^v_{360}. Schließlich läßt sich der allgemeine Fall der Differentialresolvente dritter Ordnung erledigen, wo v und w Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen t sind. Setzt man:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = S_1 \frac{\partial y}{\partial w} + S_2 \frac{\partial y}{\partial v} + S_3\, y,$$

$$\frac{d^3 y}{dt^3} = T_1 \frac{\partial y}{\partial w} + T_2 \frac{\partial y}{\partial v} + T_3\, y,$$

wo die S und T bekannte Funktionen von t sind, so nimmt die gesuchte Differentialresolvente die einfache Gestalt an:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^3 y}{dt^3} - T_3 y, & T_1, & T_2 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} - S_3 y, & S_1, & S_2 \\ \frac{dy}{dt}, & \frac{dw}{dt}, & \frac{dv}{dt} \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man hier im besondern $t = v$, resp. w, so kommt man auf die oben erwähnten Fälle zurück. My.

L. K. Lachtin. Differentialresolvente der allgemeinen algebraischen Gleichung 6. Grades. Moskau Math. Samml. **22**, 589-658 (Russisch).

Ausführung der am Schluß der Abhandlung: „Auflösung der algebraischen Gleichung 6. Grades etc." (F. d. M. **32**, 112) angedeuteten Lösung der Aufgabe, die Differentialresolvente der allgemeinen Gleichung sechsten Grades aufzustellen, d. h. die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung für die Verhältnisse $u_1 = \frac{y_1}{y_3}$, $u_2 = \frac{y_2}{y_3}$, deren Lösungen y_1, y_2, y_3 die Eigenschaft besitzen, daß durch die daraus gebildeten Größen

$$x = f(u_1, u_2), \; y = g(u_1, u_2)$$

die Wurzeln der Gleichung sechsten Grades rational ausdrückbar sind. Der Verf. bemerkt, daß diese Aufgabe von Boulanger (Contribution à l'étude des équations différentielles intégrables algébriquement. J. de l'Éc. Pol. (2) **4**; F. d. M. **29**, 271-273, 1898) für die Hessesche Gruppe G_{216} nur in großen Zügen gelöst, für die Valentinersche Gruppe G_{360} aber nur gestellt ist. Der Verf. selbst löst sie ausführlich bis auf einige Rechnungen zur Bestimmung der numerischen Werte einiger Koeffizienten, welche in dem Endresultat vorkommen. Si.

E. Netto. Notiz über die Kreisteilungs-Polynome. Arch. der Math. u. Phys. (3) **4**, 65-67.

In den Vorlesungen über Zahlentheorie, bearbeitet und herausgegeben von K. Hensel, I, 288, teilt Kronecker den Satz mit: „Der größte gemeinsame Teiler von $F_m(x^n)$ und $F_n(x^m)$ ist stets gleich $F_{m.n}(x)$, falls m und n teilerfremd sind." $F_n(x)$ bedeutet hierbei denjenigen irreduktiblen Teiler von $x^n - 1$, welcher, gleich Null gesetzt, die primitiven n-ten Wurzeln der Einheit zu Wurzeln hat. Für diesen Satz gibt Netto eine neue Herleitung, aus welcher hervorgeht, daß die Beschränkung, m und n müssen teilerfremd sein, unnötig ist. F.

G. Pfeiffer. Zerlegung der Radikale bei der Lösung der Abelschen Gleichungen. Kiew Univ. No. 5. 1-6 (Russisch).

Die Abelsche Gruppe G_m ist in der Form:

$$G_m = \Gamma_\lambda \cdot \Gamma_\mu \cdot \Gamma_\nu \cdots \Gamma_\pi \cdot \Gamma_\varrho$$

darstellbar, wo $\lambda \cdot \mu \cdot \nu \cdots \pi \cdot \varrho = m$ und die Gruppen Γ nicht weiter zerlegbar sind. Die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, welche die Gruppe G_m zuläßt, sind rational durch die Wurzeln der Gleichungen

$$\Phi_\lambda(y_\lambda) = 0, \; \Phi_\mu(y_\mu) = 0, \; \ldots, \; \Phi_\varrho(y_\varrho) = 0$$

von den Graden $\lambda, \mu, \ldots, \varrho$ und den Gruppen $\Gamma_\lambda, \Gamma_\mu, \ldots, \Gamma_\varrho$ ausdrückbar. Si.

G. Pfeiffer. **Auflösung der binomischen Gleichung zusammengesetzten Grades.** Kiew Univ. No. 5, 1-14 (Russisch).

Anwendung des in der vorigen Abhandlung angegebenen Verfahrens zur Lösung der Gleichung $x^n - 1 = 0$ für $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_j^{r_j}$. Ausführliche Berechnung für $n = 50, 36, 24$. Si.

I. Amaldi. **Una proprietà delle radici primitive della unità di un medesimo grado.** Batt. G. **40**, 31-36.

Entwickelt man die linke Seite der irreduktiblen Gleichung, welcher die primitiven n-ten Einheitswurzeln genügen, auf zweierlei Art in eine Reihe, so ergibt sich aus der Koeffizientenvergleichung für die Summe der k-ten Potenzen (k relativ prim zu n) der primitiven n-ten Einheitswurzeln der Wert $(-1)^\nu$, wenn ν die Anzahl der Primfaktoren von n ist und jeder Primfaktor nur in der ersten Potenz vorkommt, dagegen der Wert Null, wenn n auch nur einen der Primfaktoren in einer höhern als der ersten Potenz enthält. Vergl. hierzu Netto: Vorlesungen über Algebra I, § 304. F.

A. Wiman. **Über die durch Radikale auflösbaren Gleichungen, deren Grad eine Potenz von 2 ist.** Stockh. Öfv. **58**, 543-548 (1901).

A. Wiman. **Über die Wurzeln der metacyklischen Gleichungen.** Stockh. Öfv. **58**, 669-673 (1901).

Nach einem Abelschen Satze muß der Grad einer primitiven metacyklischen Gleichung eine Primzahlpotenz p^m sein. Es handelt sich darum, aus Radikalen zusammengesetzte Ausdrücke aufzustellen, welche einer solchen Gleichung als Wurzeln genügen. Für $m = 1$ ist diese Aufgabe bereits durch die Arbeiten von Abel, Kronecker und Weber gelöst. Verf. löst sie in der ersten Arbeit für 2^m, in der zweiten für p^m. Wbg.

C. A. Chant. **The roots of the equation $u = \tan u$.** Nature **65**, 247.

Der Verf. fragt an, wo Schwerd diese Gleichung gelöst hat, wie in manchen Werken über Optik steht. Er verweist auf Euler, Intro-

ductio, Vol. II, Cap. XX, Probl. IX, wo die ersten zehn Wurzeln stehen. Ref. gestattet sich außerdem anzuführen: Cauchy, Anciens Exercices, § 11 (Oeuvres (2) **6**, 354ff.), wo die Reihenentwicklung für die Wurzeln wie bei Euler gegeben ist. Lp.

J. Mandl. Graphische Darstellung von mathematischen Formeln. Allg. Bauzeitung 1902, sep. 65 S. gr. 8°.

Eine ausführliche, klare Darstellung der nomographischen Methoden von d'Ocagne. Der Verf. bedient sich nur (im Gegensatz zu d'Ocagne) der kartesischen Punktkoordinaten und gibt genaue Diagramme für eine Anzahl in der Praxis vorkommender Formeln, auch für solche, die eine größere Zahl von Variablen enthalten. F.

M. d'Ocagne. Sopra alcuni principi elementari di nomografia. Periodico di Mat. (2) **4**, 247-262.

Um geeignete Beispiele für einen elementaren Lehrgang der analytischen Geometrie zu liefern, entwickelt der Verf. die Prinzipien seiner Nomographie für die kotierte Darstellung der Gleichungen mit drei und mit vier Unbekannten nebst Anwendungen auf die graphische Auflösung algebraischer Gleichungen. Lp.

M. d'Ocagne. Sur quelques travaux récents relatifs à la nomographie. Darboux Bull. (2) **26**, 67-83.

Der Hauptzweck der vorliegenden Note ist, eine kritische Analyse einer 300 Seiten langen Arbeit von Soreau zu geben, die im August 1901 im Bull. de la Soc. des Ingén. civils unter dem Titel „Contribution à la théorie et aux applications de la Nomographie" erschienen ist. Sodann wird auf einige Arbeiten des Verf. hingewiesen, die sich an das 13. Problem von Hilbert (F. d. M. **31**, 68) anschließen. Den Schluß bildet der Hinweis auf die Entwicklung, den der Unterricht in der Nomographie auf verschiedenen technischen Schulen Frankreichs und des Auslandes erfahren hat. Wbg.

M. d'Ocagne. Sur la résolution nomographique des équations algébriques. Nouv. Ann. (4) **2**, 49-57.

Die nomographische Auflösung der allgemeinen dreigliedrigen und viergliedrigen Gleichungen mittels des Prinzips der in gerader Linie liegenden Punkte wird in elementarer Weise, losgelöst von der allgemeinen Theorie, gezeigt. F.

M. d'Ocagne. Sur la résolution nomographique du triangle de position pour une latitude donnée. C. R. **135**, 728-730.

Auflösung der (durch Anwendung des Kosinus-Satzes auf das Dreieck Zenit-Pol-Stern entstehenden) Gleichung:

$$\cos\zeta = h\sin\delta + k\cos\delta\cos\tau$$

($h = \sin\varphi$, $k = \cos\varphi$, φ die als unveränderlich anzunehmende geographische Breite, ζ die Zenitdistanz, δ die Deklination und τ der Stundenwinkel) nach der Methode der in gerader Linie liegenden Punkte mittels zweier geradlinigen und einer krummlinigen Skala. F.

L. Kann. Zur mechanischen Auflösung von Gleichungen. Eine elektrische Gleichungs-Maschine. Zs. f. Math. u. Phys. 48, 266-272.

Es wird zuerst eine mechanische Vorrichtung zur Lösung von Gleichungen beschrieben, deren Prinzip darin besteht, daß die Glieder der Gleichung als statische Momente von Kräften aufgefaßt, die Potenzen der Unbekannten durch Hebelarme, die Koeffizienten durch Gewichte repräsentiert werden. Stellt man den Apparat so ein, daß Gleichgewicht herrscht, die algebraische Summe der statischen Momente also Null ist, so kann man den entsprechenden Wert der Unbekannten, d. h. eine Wurzel der Gleichung, unmittelbar ablesen. Von der Idee dieses Apparates ausgehend, hat der Verf. ferner zwei elektrische Gleichungsmaschinen konstruiert, bei welchen die einzelnen Glieder der Gleichung durch Leitungswiderstände dargestellt werden. Um die reellen Wurzeln zu finden, hat man den Apparat in einer Brückenanordnung so auszubalanzieren, daß das Brückengalvanometer auf Null zeigt. In bezug auf die technische Ausführung der Apparate muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden, weil ohne Figuren eine verständliche Beschreibung kaum möglich sein dürfte. F.

R. Skutsch. Über Gleichungswagen. Zs. f. Math. u. Phys. 47, 85-104.

Indem der Verf. eine Wage allgemein als „kinematische Kette" definiert, „welche für den Angriff willkürlich zu wählender Kräfte vorgerichtet ist und benutzt wird, um Beziehungen zwischen den Größen und Lagen dieser Kräfte aus der Gleichgewichtslage abzuleiten, welche die Kette unter ihrem Einflusse annimmt", nennt er eine solche Vorrichtung Gleichungswage, „wenn ihr Endzweck in der Aufsuchung des Wertes einer Koordinate besteht, welche eine gewisse Gleichung erfüllt, deren Koeffizienten durch die bekannten Kräfte und Abmessungen der Kette bestimmt sind". Ihre Anwendung zur Aufsuchung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen beruht auf folgenden Überlegungen. „Während die eine der beiden Koordinaten, von denen die Lage der Kette abhängt, durch ein Stellwerk stetig verändert wird und als Stellwerkskoordinate ξ bezeichnet werden soll, nimmt die andere, wenn die Lage und Größe der auf das System wirkenden Kräfte durch die Parameter $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestimmt ist und stabile Gleichgewichtslagen innerhalb der Beweglichkeitsgrenzen der Kette vorausgesetzt werden, Werte η an, welche durch eine Gleichgewichtsbedingung:

$$\Phi(\xi, \eta, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

mit den Werten ξ zusammenhängen. Die Systeme sind nun aber so gewählt, daß bei Erfüllung einer bestimmten, von den Parametern a_ν unabhängigen Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$ die erste Gleichung die Form annimmt $\sum_{\nu=0}^{\nu=n} A_\nu x^\nu = 0$, wo die A_ν Funktionen nur der a_ν sind, x dagegen nur eine Funktion von ξ oder η ist. Wenn nun der Apparat so eingerichtet ist, daß die Parameter a_ν stetig verändert und die zu einem beliebigen Wertsystem der A_ν gehörigen Werte der a_ν berechnet werden können, so ist leicht zu sehen, daß der Apparat zur Lösung von Gleichungen höheren Grades ganz ähnlich angewendet werden kann, wie man eine sogenannte Schnellwage handhabt. Ist nämlich eine Gleichung $\sum_{\nu=0}^{\nu=n} A_\nu x^\nu = 0$ zu lösen, so berechnet man zunächst aus den A_ν die a_ν, belastet darauf die Kette mit dem durch die a_ν bestimmten Kräftesystem und verändert ξ, bis die Gleichung $\varphi(\xi, \eta) = 0$ erfüllt ist. Nunmehr kann der gesuchte Wert von x aus ξ oder η berechnet, am einfachsten aber unmittelbar an einer Skala abgelesen werden."

Es folgt nun eine ausführliche kritische Besprechung der bereits bekannten Gleichungswagen (der von Meslin, Massau und Grant angegebenen) sowie Vorschläge zu neuen, welche die Mängel der ersteren vermeiden sollen. Auf die technischen Einzelheiten einzugehen würde aber hier zu weit führen. F.

Weitere Literatur.

M. Casamassima. Principii di calcolo vettoriale. Il Pitagora **9**, 1-8.

M. Bauer. Zur Theorie der irreduciblen Gleichungen. Math. és. term. értesitö **20**, 81-84 (Ungarisch).

G. Charassoff. Arithmetische Untersuchungen über Irreduktibilität. Diss. Heidelberg. 67 S. 8°.

J. H. Grace. On the zeros of a polynomial. Cambr. Proc. **11**, 352-356.

R. Grilli. Metodo di Horner per eseguire la divisione di due polinome. Il Pitagora **8**, 86-89.

Aug. Otto. Ein Problem der Rechenkunst. Allgemeines Verfahren zur Bildung und Auflösung von Gleichungen mit einer Unbekannten. (Beliebiger Grad und jede Form). 3. Aufl. Düsseldorf, Leipzig: O. Maier. 56 S. gr. 8°.

T. Takagi. On the Weierstrass' proof of the fundamental theorem of algebra. Tokio Math. Ges. **9**, 56-58.

Kapitel 2.

Theorie der Formen (Invariantentheorie).

C. N. Haskins. On the invariants of quadratic differential forms. American M. S. Trans. 3, 71-91.

Der Verf. bestimmt auf Grund der Lieschen Theorie der kontinuierlichen Gruppen die Anzahl der Invarianten einer allgemeinen quadratischen Differentialform in n Variabeln.

Die Form sei $\Phi \equiv \Sigma\Sigma\, a_{ik}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_i\, dx_k$ von nicht identisch verschwindender Determinante $a = |a_{ik}|$. Die a_{ik} nebst ihren partiellen Ableitungen irgend einer Ordnung werden als stetige Funktionen der x vorausgesetzt. Die Form Φ wird der unendlichen Gruppe G aller Punkttransformationen unterworfen, die durch die infinitesimale Transformation

$$(1) \qquad Xf \equiv \sum_1^n \xi_r(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_r}$$

erzeugt werden. Von den ξ gilt dieselbe Voraussetzung wie von den a_{ik}; im übrigen seien sie willkürlich. Die Gruppe G soll überdies alle Transformationen in der Nachbarschaft der identischen ($x_i' = x_i$) enthalten.

Sind x_i' die neuen Variabeln, so gehe Φ über in:

$$\Phi' \equiv \Sigma\Sigma\, a_{ik}'(x_1', \ldots, x_n')\, dx_i'\, dx_k',$$

wo

$$(2) \qquad a_{ik}' = \Sigma\Sigma\, a_{rs} \frac{\partial x_i}{\partial x_r'} \frac{\partial x_k}{\partial x_s'}.$$

Eine „Invariante" I von Φ ist eine solche Funktion der x, der a_{ik} und ihrer Ableitungen, die ihren Wert nicht ändert, wenn die x und a_{ik} durch die x' und a_{ik}' ersetzt werden. Die „Ordnung" von I ist die Ordnung der höchsten in ihr auftretenden Ableitung.

Das Hauptergebnis der Untersuchung ist, daß eine Form Φ

$$I_{n2} = \tfrac{1}{12}(n-2)(n-1)\,n\,(n+3)$$

Invarianten von der Ordnung 2 besitzt und

$$I_{n\mu} = n\,\frac{\mu-1}{2}\,\frac{(n+\mu-1)!}{(n-2)!\,(\mu+1)!}$$

Invarianten von einer Ordnung $\mu > 2$ ($n \geqq 3$). Die letztere Formel gilt auch für $\mu > 3$, wenn $n = 2$.

Die fragliche Anzahl ist gleich der der unabhängigen Lösungen vollständiger Systeme homogener linearer partieller Differentialgleichungen der ersten Ordnung, denen die Invarianten genügen müssen, d. i. gleich dem Überschuß der Zahl der Variabeln über die Zahl der unabhängigen Gleichungen. Die letztere Anzahl aber wäre direkt durch die Berechnung

von Determinanten der zugehörigen Matrix zu ermitteln. Die große Zahl der Gleichungen und ihre komplizierte Gestalt lassen indessen diese Methode als unzweckmäßig erscheinen. Der Verf. entwickelt daher eine spezifische Methode, die dem Typus der in Rede stehenden Gleichungen angepaßt ist. Die Aufgabe wird zunächst zurückgeführt auf die Bestimmung der Unabhängigkeit von Gleichungen zweier verschiedenen Systeme. Jede dieser Bestimmungen gründet sich auf das Verfahren der vollständigen Induktion. Durch geeignete Vertauschungen der Variabeln und die Verwendung spezieller Formen Φ erhält man die gewünschte Anzahl.

Nach der Lieschen Methode ist zuvörderst die Gruppe Xf zu erweitern. Daraus ergeben sich die linearen partiellen Differentialgleichungen, denen alle Invarianten von einer Ordnung $\leq \mu$ zu genügen haben. Der Bau dieser Gleichungen ist derart, daß man die Gleichungen der Ordnung $\mu + 1$ erhält, indem man die Gleichungen der Ordnung μ um gewisse Terme vermehrt und ihnen gewisse Gleichungen hinzufügt. Die letzteren heißen die „Endgleichungen" der Ordnung μ.

Mit Hülfe des Satzes: „Wenn alle Gleichungen der Ordnung $\mu - 1$ unabhängig sind und desgleichen alle Endgleichungen der Ordnung μ, so sind auch alle Gleichungen der Ordnung μ unabhängig", zerlegt sich die Frage nach der Unabhängigkeit in zwei Hülfsprobleme: 1. die Bestimmung der Unabhängigkeit der Endgleichungen einer allgemeinen Ordnung μ; 2. die Festlegung einer Ordnung μ, für die alle Gleichungen unabhängig sind.

Für $n \geqq 3$ sind alle Gleichungen der Ordnung 2 unabhängig, für $n = 2$ alle von der Ordnung 3. Es wird nun bewiesen, daß, wenn die Endgleichungen einer Ordnung $\mu + 1$ nicht alle unabhängig sind, auch die der Ordnung μ es nicht sein können. Da aber für die Ordnung $\mu = 1$ die Unabhängigkeit direkt nachweisbar ist, gilt sie allgemein.

Ähnlich wird in Hinsicht des zweiten Problems gezeigt, daß, wenn die Gleichungen der Ordnung 2 in n Variabeln unabhängig sind, sie es auch bei $n - 1$ Variabeln sind. Für $n = 3$ Variabeln läßt sich wiederum die Unabhängigkeit unmittelbar feststellen.

Da auf diese Weise die Unabhängigkeit der die Invarianten von Φ bestimmenden Differentialgleichungen allgemein erhärtet ist, so ist die Anzahl der Invarianten stets gleich dem Überschuß der Zahl der Variabeln über die Zahl der Gleichungen und läßt sich daher nach arithmetischer Rechnung durch das oben angegebene Gesetz festlegen.

Im Falle $\mu = 0$ und $\mu = 1$ besitzen die fraglichen Differentialgleichungen keine gemeinsamen Lösungen. My.

E. J. Wilczyński. Covariants of systems of linear differential equations and applications to the theory of ruled surfaces. American M. S. Trans. 3, 423-450.

Der Verf. untersucht, in Fortsetzung früherer Arbeiten, F. d. M. 32, 332-334, 1901, die Kovarianten des Systems:

$$(1)\quad \begin{cases} y'' + p_{11}\, y' + p_{12}\, z' + q_{11}\, y + q_{12}\, z \equiv Y = 0, \\ z'' + p_{21}\, y' + p_{22}\, z' + q_{21}\, y + q_{22}\, z \equiv Z = 0 \end{cases}$$

in der unabhängigen Variable x.

Das System werde der unendlichen Gruppe G unterworfen:

$$(2)\quad \begin{cases} \xi = \xi(x),\ \ \eta = \alpha(x)\, y + \beta(x)\, z_\nu, \\ \zeta = \gamma(x)\, y + \delta(x)\, z,\ \ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \end{cases}$$

Irgend eine Funktion der $y, z, y'\, z', \ldots, p_{ik}, p'_{ik}, \ldots, q_{ik}, q'_{ik}, \ldots$, die denselben Wert hat, ob sie für das System (1) oder für ein mit ihm vermöge (2) äquivalentes gebildet ist, heißt eine „absolute Kovariante", und wenn sie die $y, z, y', z', \ldots$ nicht enthält, eine „Invariante". Es werden „Gewichte" eingeführt; y, z erhalten das Gewicht 0, p_{ik} das Gewicht 1, q_{ik} das Gewicht 2. Eine Differentiation möge das Gewicht um 1 vermehren, und das Gewicht eines Produktes sei die Summe der Faktorengewichte.

Bezeichnet man die transformierten Größen mit griechischen Buchstaben, so wird eine Funktion C der

$$y, z, y', z', \ldots, p_{ik}, p'_{ik}, \ldots, q_{ik}, q'_{ik}, \ldots$$

eine „relative Kovariante", wenn die Gleichung $C = 0$ die Gleichung $\Gamma = 0$ zur Folge hat, wo Γ entsprechend für die $\eta, \zeta, \ldots, \pi_{ik}, \ldots, \varrho_{ik}, \ldots$ gebildet ist.

Verwendet man insbesondere die der Gruppe G angehörende Transformation $\xi = x$, $\eta = Cy$, $\zeta = Cz$, wo C eine Konstante ist, so wird $\eta^{(\lambda)} = Cy^{(\lambda)}$, $\zeta^{(\lambda)} = Cz^{(\lambda)}$, $\pi_{ik} = p_{ik}$, $\varrho_{ik} = q_{ik}$, woraus folgt, daß eine relative Kovariante in den $y, z, y', z', \ldots$ homogen ist, und zwar eine absolute Kovariante vom Grade Null. Dagegen lehrt die Transformation $\xi = Cx$, $\eta = y$, $\zeta = z$, daß jeder Term vom Gewichte w multipliziert wird mit C^{-w}, d. h. eine Kovariante ist in den $y, z, y', z', \ldots$ isobar, eine absolute vom Gewichte Null.

Sei jetzt $C_{\lambda, w}$ eine ganzrationale Kovariante vom Grade λ und vom Gewichte w; überdies sei $C_{\lambda, w}$ „irreduzibel", d. i. nicht zerlegbar in Faktoren von niedrigerem Grade und Gewichte. Transformiert man nur die y, z durch $y = \alpha_{11}\, \eta + \alpha_{12}\, \zeta$, $z = \alpha_{21}\, \eta + \alpha_{22}\, \zeta$, so ergibt sich:

$$\Gamma_{\lambda, w} = f(\alpha_{ik})\, C_{\lambda, w},$$

wo der Faktor f nur von den vier Größen α abhängt. Überdies ist f homogen vom Grade $-\lambda$ und läßt sich in die Gestalt bringen:

$$f(\alpha_{ik}) = \frac{\varphi(\alpha_{ik})}{\Delta^\mu},$$

wo $\Delta = \alpha_{11}\, \alpha_{22} - \alpha_{12}\, \alpha_{21}$ und φ eine ganzrationale Funktion der α_{ik} vom Grade $-\lambda + 2\mu$ ist. Eine entsprechende Relation ergibt sich durch Vertauschung von C mit Γ, und hieraus resultiert die Beziehung:

$$\varphi(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}) \cdot \varphi(\alpha_{22}, -\alpha_{12}, -\alpha_{21}, \alpha_{11}) = \Delta^{2\mu - \lambda},$$

und damit:

$$(3) \qquad \Gamma_{\lambda,w} = \Delta^{-\frac{\lambda}{2}} C_{\lambda,w}.$$

Folglich gibt es keine rationalen Kovarianten ungeraden Grades für ein binäres System von zwei linearen homogenen Differentialgleichungen.

Fügt man nunmehr die Transformation $\xi = \xi(x)$ hinzu, so erweitert sich (3) zu:

$$(4) \qquad \Gamma_{\lambda,w} = \frac{\Delta^{\frac{\lambda}{2}}}{(\xi')^w} C_{\lambda,w},$$

wo λ eine gerade Zahl ist.

Somit transformieren sich die linken Seiten Y, Z der Differentialgleichungen (1) gemäß der Regel:

$$(5) \qquad Y = \frac{\alpha_{11}\overline{Y} + \alpha_{12}\overline{Z}}{(\xi')^2}, \quad Z = \frac{\alpha_{21}\overline{Y} + \alpha_{22}\overline{Z}}{(\xi')^2}.$$

Wendet man dieselbe auf das zu (1) adjungierte System an, so gelangt man sofort zu zwei Kovarianten C_1, C_2 vom Grade und Gewichte 2.

„Semikovariante" heißt eine Bildung, wenn ihr die Kovarianteneigenschaft nur bezüglich der abhängigen Variabeln y, z zukommt. Es werden Methoden angegeben, wie sich Kovarianten und Semikovarianten konstruieren lassen.

Der Verf. unterwirft sodann seine Entwicklungen einer interessanten geometrischen Deutung.

Es seien (y_k) und (z_k) $(k = 1, 2, 3, 4)$ vier Fundamentallösungen des Systems (1); man betrachte sie als homogene Koordinaten von zwei Punkten P_y und P_z. Für variables x beschreiben P_y und P_z zwei Kurven C_y und C_z, und die Verbindungsgerade L_{yz} erzeugt die „integrierende Regelfläche" S von (1), die bei allen Transformationen der Gruppe G invariant bleibt. Da die Größen

$$\varrho_k = 2y_k' + p_{11} y_k + p_{12} z_k, \quad \sigma_k = 2z_k' + p_{21} y_k + p_{22} z_k$$

mit y_k und z_k kogredient sind, so repräsentieren sie zwei weitere mit P_y, P_z invariant verknüpfte Punkte P_ϱ und P_σ; sie liegen auf der Tangentialebene von S in P_y, resp. P_z. Jeder Geraden L_{yz} entspricht eine Gerade $L_{\varrho\sigma}$, die eine Regelfläche S' erzeugt, und die Punkte beider Geraden sind ein-eindeutig aufeinander bezogen.

Wenn $p_{12} = p_{21} = 0$, so werden die Kurven C_y, C_z zu asymptotischen Kurven von S. P_ϱ und P_σ liegen dann auf den Tangenten dieser Kurven in P_y, P_z. Da aber das System (1) stets auf die Gestalt $p_{12} = 0, p_{21} = 0$ reduziert werden kann, so liegen P_ϱ und P_σ stets auf den Tangenten der durch P_y, resp. P_z gehenden asymptotischen Linien. Die Tangenten aller durch die Punkte von L_{yz} gehenden asymptotischen Kurven erzeugen ein die Fläche längs L_{yz} oskulierendes Hyperboloid H, das sich ebenso aus $L_{\varrho\sigma}$ ableiten läßt. Durch Differentiation der obigen Gleichungen für ϱ, σ erhält man:

$$\begin{cases} R \equiv 2\varrho' + p_{11}\varrho + p_{12}\sigma \equiv u_{11}y + u_{12}z, \\ S \equiv 2\sigma' + p_{21}\varrho + p_{22}\sigma \equiv u_{21}y + u_{22}z. \end{cases}$$

Die Größen u_{12}, u_{21} sind von besonderer Wichtigkeit. Die Gleichungen $u_{12} = 0$, $u_{21} = 0$ ergeben auf S den Ort der Punkte, in denen vierpunktige Flächentangenten möglich sind. Solche Punkte heißen nach Cayley „flecnode" Punkte, ihr Ort die „flecnode" Kurve. Kennt man umgekehrt diese Kurven, so besitzt man auch die Reduktion auf die kanonische Form $u_{12} = 0, u_{21} = 0$. Weiter werden die Beziehungen von S und S' zu gewissen linearen Kongruenzen untersucht. Mit diesen Mitteln lassen sich die Kovarianten und das Verschwinden der Invarianten von (1) anschaulich verfolgen. My.

A. Capelli. Lezioni sulla teoria delle forme algebriche. Napoli: Pellerano. VIII + 295 S. (lithogr.).

Es möge hier der Inhalt dieses ausgezeichneten Lehrbuches kurz resümiert werden:

Erster Abschnitt: Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Formen. — Lineare Substitutionen. Polaren, ihre Invarianteigenschaft. Kogrediente und kontragrediente Variabelnreihen. Lineare Formen. Symbolische Bezeichnung. Sätze über Polaren. Invarianten und Kovarianten; Gewicht. Die Operationen Ω und H, und andere Polarbildungen. Ausdrückbarkeit einer Form mit n Variabelnreihen durch Polaren von Formen mit nur $(n-1)$ Variabelnreihen. Kontravarianten, adjungierte und vermischte Kovarianten.

Zweiter Abschnitt: Invariante Prozesse, Differentialgleichungen für die Kovarianten, Darstellung der invarianten Formen. — Anwendung der Operation Ω. Der Aronholdsche Prozeß und seine Anwendung auf Kovariantenbildung. Symbolische Darstellung der Formen von beliebigem Grade. Reduktion der linearen Substitutionen. Charakteristische Differentialgleichungen für die Kovarianten. Identitäten. Quellen („sources") von Kovarianten. Endlichkeit der Formensysteme. Anhang: Die binären Formen. Vi.

J. H. Grave. Linear null systems of binary forms. London M. S. Proc. 34, 168-172.

Als Beispiel zu Hilberts berühmter Arbeit „Über die vollen Invariantensysteme" (Math. Ann. 42) leitet Verf. die notwendigen und hinreichenden Bedingungen ab, daß alle Kombinantinvarianten dreier binären Formen gleichen Grades n verschwinden. Die Kovariante

$$I = (bc)(ca)(ab)\, a_x^{n-2}\, b_x^{n-2}\, c_x^{n-2}$$

muß einen Linearfaktor von höherem als $\frac{1}{2}(3n-6)$-ten Grade besitzen. Ly.

O. Pund. Zur Invariantentheorie. Hamb. Mitt. 4, 78-90.

Hat man eine Reihe von Variabelnsystemen und eine Funktion, die in allen Variabeln ganz und in jedem System homogen ist, so erfahren bei linearen homogenen Substitutionen der Variabelnsysteme auch die Koeffizienten der Form lineare homogene Substitutionen. Die Invariantentheorie der Formen hat es eigentlich nicht mit den linearen homogenen Substitutionen der Variabelnsysteme, sondern mit denen der Koeffizienten zu tun. (Vgl. vorzüglich: A. Hurwitz, Math. Ann. 45, 381, 1894). Diese Idee wendet Verf. zur Herleitung einiger einfachster Sätze über die Invarianten und Kovarianten einer binären Form an. Ly.

H. W. Richmond. On canonical forms. Quart. J. 33, 331-340.

Der Verf. weist darauf hin, wie die Methode der Konstantenzählung durch ihre unzuverlässigen Ergebnisse in Mißkredit gekommen ist. Allerdings könne sie, wie schon Clebsch betont habe, durch die Erfüllung gewisser Nebenbedingungen streng gemacht werden; aber diese Nebenbedingungen seien oft so verwickelt, daß ein Beweis nach anderen Methoden einfacher auszuführen sei. Der Verf. führt indessen einige Beispiele an, in denen, auf Grund einiger Sätze von P. Serret, die fraglichen Zusatzbedingungen keine Schwierigkeit verursachen.

Es handelt sich um die Reduktion einer Form F von der n-ten Ordnung in s Variabeln $x, y, z, \dots$ auf eine kanonische Gestalt, d. i. auf eine Summe von Produkten, die zu je n aus $n+r$ Linearformen entnommen werden, oder spezieller als Summe von n-ten Potenzen von r Linearformen. Offenbar sind vier verschiedene Fälle zu unterscheiden: 1. das Problem hat eine und nur eine Lösung; 2. eine endliche, 3. eine unendliche Anzahl von Lösungen; 4. es ist unmöglich.

Wie lassen sich diese Fälle von einander trennen, ohne vorherige Ausführung der Reduktion?

Die Schlußweise des Verf. wird am besten aus einigen Beispielen hervorgehen. Nach einem Sylvesterschen Satze läßt sich eine binäre Form F von einer ungeraden Ordnung $(2m-1)$ auf eine und nur auf eine Weise als ein Aggregat K von $(2m-1)$-ten Potenzen von m Linearformen darstellen, $K = \sum (a_r x + b_r y)^{2m-1}$ $(r = 1, 2, \dots, m)$. Die Anzahl der willkürlichen Konstanten in F wie in K beträgt laut Abzählung $2m$. Es ist die Frage, ob die $2m$ Konstanten von K unabhängig von einander sind. Zu dem Behuf frage man, ob die Identität $\sum (a_r x + b_r y)^{2m-1} \equiv \sum (c_r x + d_r y)^{2m-1}$ erfüllbar ist, ohne daß den a, b und c, d Bedingungen auferlegt werden. Unterwirft man beide Seiten der gedachten Identität den m Differentialprozessen

$$a_r \frac{\partial}{\partial y} - b_r \frac{\partial}{\partial x},$$

so erkennt man, daß zwischen den $(m-1)$-ten Potenzen der m Linearformen $c_r x + d_r y$ eine lineare Syzygie herrschen würde, d. h. die Kon-

stanten c_r, d_r wären nicht mehr allgemeiner Natur. Somit kann F auf eine und nur auf eine Art in die kanonische Gestalt K gebracht werden.

Zweitens wird die Möglichkeit der Darstellung einer allgemeinen ternären Form vierten Grades $F(x, y, z)$ in der Gestalt

$$K \equiv \sum_i A_k A_l A_m A_n \quad (i, k, l, m, n = 1, 2, 3, 4, 5)$$

untersucht, wo die A Linearformen der x, y, z sind. Die Anzahl der verfügbaren Konstanten beträgt in F, wie in K, nach bloßer Abzählung 15.

Geometrisch lautet die Frage: Kann einer allgemeinen ebenen Kurve vierter Ordnung ein vollständiges Fünfseit einbeschrieben werden? Die fünf Geraden $A_i = 0$ bestimmen als Tangenten einen Kegelschnitt, d. h. man darf setzen: $A_i \equiv a_i(x + \alpha_i y + \alpha_i^2 z)$. Man findet dann, daß die Darstellung K noch auf unendlich viele andere Arten möglich ist, d. h. eine allgemeine Form F läßt sich nicht in die Gestalt K bringen.

Nach dieser Methode wird eine Reihe instruktiver weiterer Beispiele behandelt, in denen es sich um Darstellungen von Formen als Potenzsummen von Linearformen handelt. My.

F. Severi. **Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre.** Rom. Acc. L. Rend. (5) **11**, 105-113.

Eine Reihe von Geometern hat sich mit den notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür beschäftigt, daß eine ternäre Form als lineare Kombination zweier gegebenen Formen dieser Art darstellbar ist.

Der Verf. formuliert das Problem ganz allgemein. „Seien $h (\leqq r)$ Formen $F_1, F_2, \ldots, F_h$ der $r+1$ Variabeln $x_0, x_1, \ldots, x_r$ gegeben, und es werde nur vorausgesetzt, daß die Gleichungen

$$F_1 = 0, \ldots, F_h = 0, \quad \left|\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right| = 0$$

wenigstens ∞^{r-h} gemeinsame Lösungen zulassen; man soll die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür finden, daß eine Form F der x als lineare Kombination der $F_1, F_2, \ldots, F_h$ darstellbar ist:

$$(1) \qquad F \equiv A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_h F_h,$$

wo die A_i ebenfalls Formen der x bedeuten." Operiert man statt mit den Formen selbst mit den Gleichungen $F_1 = 0, \ldots, F_h = 0, F = 0$, was nur eine unwesentliche Modifikation ist, so kann man eine geometrische Deutung in einem Linearraume S_r hinzufügen, wonach die Gleichungen $F_1 = 0, \ldots, F_h = 0$ gewisse „Flächen" darstellen, die einen „Durchschnitt" M besitzen.

Der Verf. stützt sich behufs Lösung seiner Aufgabe auf die grundlegenden Untersuchungen von Hilbert über Moduln (F. d. M. **22**, 133, 1890). Ein System von Formen bildet einen Modul, wenn jede lineare Kombination von Formen des Systems wiederum eine Form des Systems erzeugt. Dann gibt es unter den Formen des Moduls eine endliche

Anzahl $F_1, \ldots, F_k$, so daß jede Form F des Moduls in der Gestalt $F \equiv A_1 F_1 + \cdots + A_k F_k$ darstellbar ist. Die $F_1, \ldots, F_k$ heißen die Fundamentalelemente des Moduls $(F_1, \ldots, F_k)$. Die Anzahl $\chi(l)$ der unabhängigen Bedingungen dafür, daß eine Form von der Ordnung l (bez. ihrer Koeffizienten) einem gegebenen Modul angehört, ist bei genügend großem l bestimmt durch

$$\chi(l) = \chi_0 + \chi_1 \binom{l}{1} + \chi_2 \binom{l}{2} + \cdots + \chi_d \binom{l}{d},$$

wo die χ_i von l unabhängige Zahlen sind; $\chi(l)$ heißt die charakteristische Funktion des Moduls.

Dann wird die im Eingange aufgeworfene Frage beantwortet durch den Satz: „Wenn die Flächen $F_1, \ldots, F_k$ einen von Singularitäten (vielfachen Elementen) freien Durchschnitt besitzen, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $F \equiv A_1 F_1 + \cdots + A_k F_k$, die, daß die Fläche F durch den Durchschnitt $(F_1, F_2, \ldots, F_k)$ hindurchgeht". Freilich beginnen die eigentlichen Schwierigkeiten erst beim Auftreten vielfacher Schnittelemente. My.

L. Brusotti. Sopra alcune relazioni fra invarianti di terzo e quarto grado nei coefficienti di una forma binaria. Batt. G. **40**, 225-246.

Petrucci (F. d. M. **32**, 121, 1901) hat zwischen Kovarianten dritten Grades einer binären Form (von der Ordnung n) eine Reihe von Relationen entwickelt. Der Verf. erweitert diese Relationen und dehnt sie auf den vierten Grad aus, indem er eine fundamentale Formel von Gordan zugrunde legt, die dieser in seinem bekannten „Programm" (F. d. M. **7**, 50, 1875) aufgestellt hat. Sind $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ drei binäre Formen von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, so besteht zwischen den zusammengesetzten Überschiebungen $[(\varphi_1, \varphi_2)^{\alpha_2+i}, \varphi_3]^{\alpha_1+\alpha_2-i}$ und

$$[(\varphi_1, \varphi_3)^{\alpha_3+i}, \varphi_2]^{\alpha_1+\alpha_3-i} \; (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

eine lineare Identität mit numerischen Koeffizienten, die Produkte und Quotienten gewisser Binomialkoeffizienten sind ($\alpha_2 + \alpha_3 \leqq n_1$). Es seien einige Ergebnisse für Kovarianten dritten Grades mitgeteilt. Jede solche Kovariante der Ordnung $3n$ ist proportional mit f^3, jede von der Ordnung $3n-2$ verschwindet identisch, jede von der Ordnung $3n-4$ ist proportional Hf, wo $H = (f, f)^2$; jede von der Ordnung $3n-6$ ist proportional der ersten Überschiebung von H über f; jede von der Ordnung $3n-8$ ist proportional if, wo $i = (f, f)^4$, usf. Die Betrachtungen lassen sich auf eine ganz beliebige Ordnung ausdehnen. Die fraglichen Kovarianten werden auch in Reihen nach Überschiebungen („Gordansche Reihen") entwickelt. Analoge Untersuchungen werden für Kovarianten des vierten Grades angestellt. My.

A. Perna. Sulla quintica ternaria. Batt. G. **40**, 142-153.

Gordan (F. d. M. **2**, 61, 1869-1870) hat das volle System einer kubischen ternären Form aufgestellt und zugleich einen allgemeineren Prozeß angegeben, um das volle System eines vorgegebenen Grades irgend einer ternären Form zu bilden.

Maisano (F. d. M. **15**, 110, 1881) und Baker (Cambr. Phil. Trans. XV, 1885) haben den Gordanschen Prozeß angewandt; der erstere auf die vollen Systeme der ersten fünf Grade einer biquadratischen ternären Form, der letztere auf das volle System von drei quadratischen ternären Formen. Der Verf. gibt, mittels des nämlichen Prozesses, die vollen Systeme der ersten drei Grade einer ternären Form fünften Grades, ferner die Kovarianten und Kontravarianten vom vierten Grade und endlich die unabhängigen Invarianten sechsten Grades. Ist

$$f \equiv a_x^5 \equiv b_x^5 \equiv c_x^5 \equiv \dots$$

die vorgelegte Form, so ist u_x die einzige Komitante vom Grade Null, und f selbst die einzige vom ersten Grade. Der Gordansche Kombinierungsprozeß liefert als volles System zweiten Grades die Formen

$$(abu)^2 a_x^3 b_x^3, \ (abu)^4 a_x b_x.$$

Durch Anwendung des Gordanschen Kombinationsverfahrens geht man von hier zu den Bildungen dritten Grades über; diese zerfallen in zwei Gruppen, jenachdem sie einen Faktor vom Typus $(abu)^2 a_x^3 b_x^3$, oder aber einen solchen vom Typus $(abu)^4 a_x b_x$ enthalten. Die sich so zunächst ergebenden $14 + 13$ Komitanten werden nach bekannten Methoden auf $4 + 6 = 10$ reduziert.

Für den Grad 4 werden die Kovarianten und Kontravarianten ermittelt. Die Kovarianten sind entweder von der achten Ordnung, und dann von der Form $\alpha C_2' + \beta C \cdot f$, oder aber von der zweiten Ordnung, und dann von der Form γC_1; die Kontravarianten sind entweder von der zehnten Klasse, δG_2, oder von der siebenten Klasse, εG_1, oder endlich von der vierten Klasse, $(\varkappa G_3 + \lambda G_4)$. Hierbei bedeuten $C_2, C, C_1, G_2, G_1, G_3, G_4$ gewisse Fundamentalformen, $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ beliebige numerische Konstanten.

Invarianten vom Grade 6 ergeben sich zunächst 47, die sich aber sämtlich als lineare Kombinationen von dreien unter ihnen darstellen lassen. My.

P. Gordan. Das simultane System von zwei quadratischen quaternären Formen. Math. Ann. **56**, 1-48.

Es ist dem Verf. gelungen, vermöge geeigneter Weiterbildung seiner symbolischen Methoden die früher anscheinend unüberwindliche Aufgabe zu erledigen, das volle simultane Invariantensystem von zwei quadratischen quaternären Formen explizite aufzustellen.

Man hat im Raume Punktkoordinaten x, Linienkoordinaten p und Ebenenkoordinaten u zu unterscheiden. Das Invariantensystem der qua-

dratischen quaternären Form $f = a_x^2 = a_{1,x}^2 = \ldots$ besteht, wie man weiß, aus den Formen $a_x^2, (aa, p)^2, (aa_1 a_2 u)^2, (aa_1 a_2 a_3)^2$. Das simultane System zweier Formen $f = a_x^2, g = b_x^2$ ist durch Überschiebung der beiden Einzelsysteme zu bilden. Sind V, W Produkte der Invarianten der letzteren, so hat man das Produkt VW dem Faltungsprozeß zu unterwerfen, derart, daß man die symbolischen Faktoren $a_x, (aa_1 p), (aa_1 a_2 u)$ von V mit den symbolischen Faktoren $b_x, (bb_1 p), (bb_1 b_2 u)$ von W faltet. Während aber bei den binären und ternären Formen nur die Faltung von Faktorenpaaren vorkommt, treten hier auch noch solche Faltungen auf, bei denen drei Faktoren beteiligt sind.

Hierdurch ist man imstande, die Invarianten I des simultanen Systems in sechs Klassen $I^{(1)}, \ldots, I^{(6)}$ einzuteilen.

Die Anzahl der Individuen in den einzelnen Klassen ist bezw. 21, 23, 186, 134, 134, 82, sodaß das volle simultane System von f und g 580 Formen enthält.

Um nunmehr auf die Einzelheiten einzugehen, so stützt sich die Entwicklung auf eine Reihe von Hülfssätzen, wonach, wenn eine homogene Funktion von Variabeln x gewissen partiellen Differentialgleichungen genügt, sie sich als ganze Funktion von speziellem Typus darstellen läßt.

Genügt z. B. F, wenn die x in ihr nur in den Verbindungen $r_{\varrho 1} x_{\sigma 1} + r_{\varrho 2} x_{\sigma 2} + \cdots + r_{\varrho \nu} x_{\sigma \nu} = r_\varrho x_\sigma$ vorkommen, den Relationen $\frac{\partial F}{\partial x_{k1}} x_{l1} + \frac{\partial F}{\partial x_{k2}} x_{l2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_{k\nu}} x_{l\nu} = 0$, so besitzt sie die Form $F = (x_1, x_2, \ldots, x_\nu)^p F_1$, wo F_1 eine ganze Funktion der Determinanten $(r_{\mu 1} r_{\mu 2} \ldots r_{\mu \nu})$ ist. Aus diesen und verwandten Sätzen läßt sich folgern, daß eine Invariante der x, p, u die symbolischen Faktoren nur in ganz bestimmten Aggregaten enthält.

Die simultanen Invarianten I von a_x^2 und b_x^2 sind Aggregate symbolischer Produkte P, die aus den Faktoren

$$a_x, b_x, (aa_1 p), (abp), (bb_1 p), (aa_1 a_2 u), (aa_1 bu), (abb_1 u),$$
$$(bb_1 b_2 u), (aa_1 a_2 a_3), (aa_1 a_2 b), (aa_1 bb_1), (abb_1 b_2), (bb_1 b_2 b_3)$$

zusammengesetzt sind. Um die P zweckmäßig zu ordnen, werden gewisse in ihnen vorkommende Zahlen als „Charaktere" eingeführt. So ist o_1, o_2 der Grad von P in den Koeffizienten von f, resp. g; $c_{1\nu}, c_{2\nu}$ ist die Anzahl der Faktorenpaare hh_1 von P, in denen h und h_1 die Symbole $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$, resp. $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ gemein haben. Steht dann P_1 vor P_2, so heißt P_1 „einfacher" als P_2. Ist ein P als ganze Funktion von einfacheren ausdrückbar, heißt es „reduzibel". Sind alle Formen P, die einen gewissen symbolischen Faktor gemein haben, reduzibel, so wird der Faktor „Reduzent" genannt; z. B. $u_\alpha v_{\alpha_1} - u_{\alpha_1} v_\alpha, u_\beta v_{\beta_1} - u_{\beta_1} v_\beta$. Irreduzible Produkte $P_1 P_2$ heißen „äquivalent", wenn keines einfacher als das andere und $P_1 - P_2$ einfacher als P_1 und P_2 ist. Alle mit P äquivalenten Produkte bilden eine Gruppe äquivalenter Formen; es genügt, von ihnen eine einzige als Repräsentanten zu kennen.

Es wird nun eine Reihe von Kriterien für reduzible Formen P aufgestellt. Statt der ursprünglichen Symbole werden die „natürlichen“: $a_x, (a_1\, a_2\, p), (a_1\, a_2\, a_3\, u), (a_1\, a_2\, a_3\, a_4)$ nebst den entsprechenden für g eingeführt, wodurch eine wesentliche Vereinfachung erzielt wird. Wegen weiterer Einzelheiten der umfangreichen Rechnungen muß auf die Arbeit verwiesen werden. My.

A. Young. On quadratic invariant types. Messenger (2) **32**, 57-79.

Die fraglichen Invarianten sind diejenigen, welche in den Koeffizienten jeder der verschiedenen betreffenden quadratischen Formen linear sind. Sind die letzteren $a_x^2, b_x^2, c_x^2, \ldots$, so sind bekanntlich die einzigen irreduziblen Invarianten von den beiden Typen $(ab)^2, (ab)(bc)(ca)$. Nun stellt jedes symbolische Produkt aus Faktoren (ab), in denen jeder Buchstabe zweimal erscheint, einen quadratischen Invariantentypus dar. Aber jede solche Invariante ist lediglich ein Produkt aus Invarianten des Typus $(ab)(bc)(cd)\ldots(ka)$. Der Zweck der vorliegenden Note besteht in der Auffindung des wirklichen Ausdruckes für diese Invariante, wenn der Grad eine gerade Zahl ist, in Posten aus Invarianten der irreduziblen Typen. Lp.

O. Sudoi und T. Hayashi. Prof. Fujisawas Vorlesung in der November-Versammlung. Verh. Tokio Math. Ges. **6**, 2-5 (Japanisch).

Zerlegung qudratischer Formen in lineare Faktoren. Lp.

L. Autonne. Sur les groupes linéaires, réels et orthogonaux. S. M. F. Bull. **30**, 121-134.

Es sei vorgelegt eine Gruppe G_x von linearen, unimodularen, reellen, orthogonalen Substitutionen A in den Variabeln x. Unterwirft man die x von neuem einer linearen Transformation, symbolisch: $x = r\,[t]$, so entsteht aus G_x die neue Gruppe $r^{-1}\,Gr = \Gamma_t$, die aber im allgemeinen weder reell, noch orthogonal ist.

Ist indessen umgekehrt eine Gruppe Γ_t derart, daß sie durch eine Substitution $t = r^{-1}\,[x]$ in eine reell-orthogonale übergeführt werden kann, so heißt Γ_t „realisabel“ und r die „Realisante“.

Es werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, daß eine Gruppe Γ_t realisabel ist. Es ergeben sich diese Bedingungen aus den Untersuchungen (s. das folgende Referat) des Verf. über die Hermiteschen Formen. Eine Matrix (bilineare Form, Substitution) A ist im besondern symmetrisch für $A' = A$, reell für $\bar{A} = A$, orthogonal für $A'A = E$, unitär für $\bar{A}'A = E$, endlich eine Hermitesche für $\bar{A}' = A$; wenn A eine Hermitesche Form und außerdem $A(x, \bar{x})$ eine stets positive Form ist, so nennt der Verf. A „un Hermitien“.

Der Verf. gelangt zu dem Satz:

„Damit eine Gruppe Γ_t realisabel ist, ist notwendig und hinreichend, daß:

(I) Γ_t zwei absolute Invarianten besitzt, un Hermitien $H(t, \bar{t})$ und eine quadratische unimodulare Form P;

(II) nachdem Γ_t mittels der Hermiteschen Substitution $H^{-\frac{1}{2}}$ unitär gemacht ist, die transformierte Matrix P eine unitäre ist."

Der Beweis stützt sich auf die beiden Hülfssätze:

(A) „Von den drei Eigenschaften der Realität, Unitarität, Orthogonalität einer Matrix ist stets je die dritte eine Folge der beiden andern."

(B) „Jede Matrix ist das Produkt einer unitären und einer Hermiteschen." My.

L. Autonne. Sur l'hermitien. Palermo Rend. **16**, 104-128.

Sei $H(x,y) = \sum_{jk} h_{jk}\, y_j\, x_k = |h_{jk}|$ eine bilineare Form, $\bar{g}$ die Konjugierte einer komplexen Größe g. Ist dann $h_{jk} = \bar{h}_{kj}$ und $y_j = \bar{x}_j$, so ist $H(x, \bar{x})$ stets reell. Ist $H(x, \bar{x})$ überdies eine positive Form, so nennt der Verf. bekanntlich H eine „Hermitesche" Form („un hermitien"). Jeder Hermiteschen Form H korrespondiert eine „Hermitesche" Substitution („une hermitienne"): $H = |x_j, \sum_k h_{jk}\, x_k|$. Die einfachste „Hermitesche Form" ist die Einheitsform $E = \Sigma xy$, der die „Hermitesche Einheitssubstitution" entspricht.

Der Verf. stützt sich im folgenden auf die bekannte Frobeniussche symbolische Theorie der Matrices (F. d. M. **9**, 85, 1877). Ist $A = |a_{jk}|$ eine Matrix (bilineare Form), so ist $A' = |a_{kj}|$, $\bar{A} = |\bar{a}_{jk}|$. „Unitär" heißt eine Matrix U, wenn $\bar{U}'U = E$. Jede Gruppe endlicher Ordnung von Substitutionen kann so transformiert werden, daß sie nur unitäre enthält.

Durch eine auf die x ausgeübte neue lineare Transformation R geht eine „Hermitesche Form" H über in die „Hermitesche Form" $\bar{R}'HR$, und entsprechend die „Hermitesche Substitution" H in $R^{-1}HR$. Die neue Substitution entspricht aber im allgemeinen nicht mehr der neuen Form; dies ist jedoch immer der Fall, wenn R unitär ist, was von jetzt ab vorausgesetzt werde.

Die Hauptergebnisse, zu denen der Verf. gelangt, sind die folgenden:

I. Die Determinante $|H|$ von H, sowie alle Hauptminoren von $|H|$ sind positiv.

II. Eine „Hermitesche Substitution" läßt sich mittels einer unitären Substitution in die kanonische Gestalt $\Sigma c_i\, y_i\, x_i$ bringen, wo die c_i positiv sind.

III. Für irgend eine ganze, positive oder negative Zahl m ist auch H^m eine „Hermitesche Form", und es gibt nur eine solche Form A, sodaß $A^m = H$. Diese Form A heißt die m-te Wurzel aus H und wird bezeichnet durch $A = H^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{H}$.

IV. Die einzige „Hermitesche Substitution", die unitär und zugleich von endlicher Ordnung ist, ist die Einheitssubstitution.

V. Jede „Hermitesche Form" läßt sich in die Gestalt $\bar{P}'P$ bringen, wo P eine bilineare Form bedeutet. P ist dann gleich $UH^{\frac{1}{2}}$, wo U irgend

eine unitäre Form ist. Demnach gehen alle „Hermiteschen Formen“ hervor aus der Einheitsform E durch bloße Substitutionen.

VI. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß „Hermitesche Substitutionen“ eine Gruppe bilden, sind die, daß je zwei derselben vertauschbar sind.

VII. Sei G eine Gruppe linearer Substitutionen, von endlicher oder unendlicher Ordnung, die $H(x, \overline{x})$ als absolute Invariante besitze. Dann besitzt die mittels $H^{-\frac{1}{2}}$ transformierte Gruppe $H^{\frac{1}{2}} G H^{-\frac{1}{2}}$ die Invariante $E(x, \overline{x})$ und besteht ausschließlich aus unitären Substitutionen.

VIII. Besitzt eine Substitution S zwei verschiedene „Hermitesche Formen“ H und H_1 zu Invarianten, so ist S „zerlegbar“, d. h. zerfällt in Substitutionen von weniger Variabeln.

Im besondern wird untersucht, welche Modifikationen obige Sätze erleiden, wenn man sich auf reelle (d. i. symmetrische) „Hermitesche Formen“ und auf reelle (und damit orthogonale) unitäre Substitutionen beschränkt.

Die Wichtigkeit der Hermiteschen Formen für die Konstruktion linearer Substitutionsgruppen G_n endlicher Ordnung ist bekannt. Sind $A_l\,(l = 1, 2, \ldots, N)$ die Substitutionen von G_n, H eine Hermitesche Form, so ist nach einem, unabhängig von Loewy und Moore, in speziellen Fällen von Klein, Picard und Valentiner aufgestellten Satze die Hermitesche Form

$$H = \sum_l \overline{A}_l' H A_l (x, \overline{x})$$

eine absolute Invariante gegenüber G_n. My.

NICCOLETTI. Su una classe di equazioni a radici reali. Rom. Acc. L. Rend. (5) **11**$_2$, 124-132.

Ist ω_r eine Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$(1) \quad D(\omega) = |a_{\mu\nu} - \omega b_{\mu\nu}| = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

der beiden Bilinearformen

$$A(x, y) = \Sigma a_{\mu\nu}\, x_\mu\, y_\nu, \quad B(x, y) = \Sigma b_{\mu\nu}\, x_\mu\, y_\nu,$$

so lassen die Gleichungensysteme

$$(2_r) \quad \sum_\mu (a_{\mu\nu} - \omega_r\, b_{\mu\nu})\, x_\mu^{(r)} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(3_r) \quad \sum_\nu (a_{\mu\nu} - \omega_r\, b_{\mu\nu})\, y_\nu^{(r)} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

Lösungen zu, die von $(0, \ldots, 0)$ verschieden sind. Betrachtet man zwei verschiedene Wurzeln von (1), ω_r und ω_s, und sind $(x_1^{(r)} \ldots x_n^{(r)})$, $(y_1^{(s)}, \ldots, y_n^{(s)})$ Lösungen der Systeme (2_r) bezw. (3_s), so besteht die fundamentale Relation

$$(4) \qquad B(x^{(r)}, y^{(s)}) = \Sigma\, b_{\mu\nu}\, x_\mu^{(r)}\, y_\nu^{(s)} = 0.$$

Es seien jetzt A und B Hermitesche Formen (d. h. $a_{\mu\nu}$ und $a_{\nu\mu}$, ebenso $b_{\mu\nu}$ und $b_{\nu\mu}$ konjugiert komplex), und B sei definit. Dann läßt

sich mit Hülfe von (4) leicht nachweisen, daß (1) lauter reelle Wurzeln hat, und daß, falls ω eine ϱ-fache Wurzel ist, der Rang von $D(\omega)$ gleich $n-\varrho$ sein muß. Dieser (von Christoffel herrührende) Satz kann auch dahin formuliert werden, daß unter den angegebenen Bedingungen die Elementarteiler von $D(\omega)$ reell und linear sind. Der Verf. betont den rein algebraischen Charakter seines Beweises. Es wird auch gezeigt, wie sich aus den Hauptminoren von $D(\omega)$ Sturmsche Ketten für die Gleichung (1) bilden lassen.

Ist A eine beliebige Bilinearform, B dagegen eine definite Hermitesche Form, so sind die Wurzeln von (1) im allgemeinen nicht mehr reell. Es lassen sich aber, wenn $\omega=p+iq$ eine solche ist, für p und q Schranken angeben. Sind ϱ und σ beliebige reelle Größen und $m_{\varrho\sigma}$, $M_{\varrho\sigma}$ die kleinste und die größte der Wurzeln von

$$\left|\varrho\frac{a_{\mu\nu}+\bar{a}_{\nu\mu}}{2}+\sigma\frac{a_{\mu\nu}-\bar{a}_{\nu\mu}}{2i}-\omega b_{\mu\nu}\right|=0$$

($\bar{a}_{\nu\mu}$ bedeutet die zu $a_{\nu\mu}$ konjugierte komplexe Zahl), so hat man

$$m_{\varrho\sigma}\leqq\varrho p+\sigma q\leqq M_{\varrho\sigma}.$$

Es werden nun weiter einige Verallgemeinerungen des Obigen angedeutet. Die Beweise sollen an einer andern Stelle gegeben werden.

Zunächst betrachtet der Verf. im Falle dreier Hermiteschen Formen $A(x,y)=\Sigma a_{\mu\nu}x_\mu y_\nu$, $B(x,y)=\Sigma b_{\mu\nu}x_\mu y_\nu$, $C(x,y)=\Sigma c_{\mu\nu}x_\mu y_\nu$ die Gleichung

$$(5)\qquad E(\omega)=|a_{\mu\nu}+2\omega b_{\mu\nu}+\omega^2 c_{\mu\nu}|=0,$$

deren Koeffizienten reell sind. Einer Wurzel ω_r entsprechen zwei Gleichungensysteme mit verschwindender Determinante:

$$(6_r)\qquad \sum_\mu(a_{\mu\nu}+2\omega_r b_{\mu\nu}+\omega_r^2 c_{\mu\nu})x_\mu^{(r)}=0\qquad(\nu=1,2,\ldots,n),$$

$$(7_r)\qquad \sum_\nu(a_{\mu\nu}+2\omega_r b_{\mu\nu}+\omega_r^2 c_{\mu\nu})y_\nu^{(r)}=0\qquad(\mu=1,2,\ldots,n).$$

Sind ω_r und ω_s zwei verschiedene Wurzeln von (5) und $(x_1^{(r)},\ldots,x_n^{(r)})$, $(y_1^{(s)},\ldots,y_n^{(s)})$ Lösungen von (6_r) bezw. (7_s), so bestehen die drei Relationen

$$2B(x^{(r)},y^{(s)})+(\omega_r+\omega_s)\,C(x^{(r)},y^{(s)})=0,$$

$$A(x^{(r)},y^{(s)})-\omega_r\omega_s\,C(x^{(r)},y^{(s)})=0,$$

$$\left(\frac{1}{\omega_r}+\frac{1}{\omega_s}\right)A(x^{(r)},y^{(s)})+2B(x^{(r)},y^{(s)})=0.$$

Hieraus ergeben sich bemerkenswerte Folgerungen. Zunächst ist leicht eine Klasse von Fällen angebbar, in denen (5) lauter reelle Wurzeln hat. Ferner lassen sich Sätze wie der folgende aufstellen: Ist C definit, so liegt der reelle Teil p einer komplexen Wurzel ω von (5) immer zwischen der kleinsten und größten der Wurzeln von

$$|b_{\mu\nu}+\lambda c_{\mu\nu}|=0,$$

während die Norm von ω zwischen der kleinsten und größten der Wurzeln von

$$|a_{\mu\nu} - \sigma c_{\mu\nu}| = 0$$

enthalten ist.

Zum Schluß handelt es sich um zwei projektive Netze von Bilinearformen in $2n$, bezw. $2m$ Veränderlichen:

$$(8)\quad \begin{cases} \xi A + \eta B + \zeta C \\ \qquad = \Sigma(\xi a_{\mu\nu} + \eta b_{\mu\nu} + \zeta c_{\mu\nu})\, x_\mu\, y_\nu \quad (\mu, \nu = 1, \ldots, n), \\ \xi D + \eta E + \zeta F \\ \qquad = \Sigma(\xi d_{rs} + \eta e_{rs} + \zeta f_{rs})\, u_r\, v_s \quad (r, s = 1, \ldots, m). \end{cases}$$

Zwei korrespondierende Formen sind gleichzeitig speziell, wenn

$$(9) \quad |\xi a_{\mu\nu} + \eta b_{\mu\nu} + \zeta c_{\mu\nu}| = 0, \qquad |\xi d_{rs} + \eta e_{rs} + \zeta f_{rs}| = 0$$

ist. Einer Lösung $\omega_\alpha = (\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha)$ von (9) entsprechen vier Gleichungensysteme mit verschwindender Determinante:

$$\sum_\mu (\xi_\alpha\, a_{\mu\nu} + \eta_\alpha\, b_{\mu\nu} + \zeta_\alpha\, c_{\mu\nu})\, x_\mu^{(\alpha)} = 0, \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_\nu (\xi_\alpha\, a_{\mu\nu} + \eta_\alpha\, b_{\mu\nu} + \zeta_\alpha\, c_{\mu\nu})\, y_\nu^{(\alpha)} = 0, \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_r (\xi_\alpha\, d_{rs} + \eta_\alpha\, e_{rs} + \zeta_\alpha\, f_{rs})\, u_r^{(\alpha)} = 0, \qquad (s = 1, \ldots, m)$$

$$\sum_s (\xi_\alpha\, d_{rs} + \eta_\alpha\, e_{rs} + \zeta_\alpha\, f_{rs})\, v_s^{(\alpha)} = 0 \qquad (r = 1, \ldots, m).$$

Für zwei verschiedene Lösungen ω_α und ω_β von (9) gilt die fundamentale Relation

$$B(x^{(\alpha)}; y^{(\beta)})\, F(u^{(\alpha)}, v^{(\beta)}) - C(x^{(\alpha)}, y^{(\beta)})\, E(u^{(\alpha)}, v^{(\beta)}) = 0.$$

Hieraus werden Folgerungen gezogen für den Fall, daß die Formen (8) sämtlich Hermitesche Formen sind. Wird insbesondere angenommen, daß B, C, E, F definit sind und drei von ihnen dasselbe, eine das entgegengesetzte Zeichen hat, so ergibt sich u. a. der Satz, daß das Gleichungensystem

$$|a_{\mu\nu} + \omega b_{\mu\nu} + \theta c_{\mu\nu}| = 0, \quad |d_{rs} + \omega e_{rs} + \theta f_{rs}| = 0$$

lauter reelle Lösungen (ω, θ) besitzt. G. K.

S. GUNDELFINGER. Lösung der Aufgabe 42. Arch. der Math. u. Phys. (3) 8, 75-76.

Seien f und φ irgend zwei Flächen zweiter Ordnung, und es sollen nicht alle Flächen des Büschels (f, φ) in Kegel oder Ebenenpaare ausarten. Es wird gefragt nach solchen Flächenpaaren des Büschels, die gegenseitig (gleichzeitig) zu einander apolar liegen.

Es gibt drei solcher Flächenpaare; ihre Parameter hängen von einer Gleichung sechsten Grades ab, die auf Grund der Theorie der assoziierten Kovarianten in invarianter Gestalt aufgestellt wird. Die Aufgabe läßt sich verallgemeinern. My.

S. Gundelfinger. Auszug aus einem Schreiben an Herrn E. Jahnke. Arch. der Math. u. Phys. (3) 8, 78-80.

In Beantwortung einer von Kneser gestellten Aufgabe gelangt der Verf. durch Untersuchung geränderter Determinanten zu dem Satze: „Die Signatur (der Rang) einer quadratischen Form in n Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$, zwischen denen ϱ lineare Relationen bestehen, ist gleich der Summe der Signaturen (Rangzahlen) zweier reduzierten quadratischen Formen, von denen die eine nur eine gewisse Anzahl der Variabeln enthält, die andere nur die übrigen.“ My.

P. Savio. Sulle formazioni invariantive della corrispondenza binaria (2,2). Batt. G. 40, 192-222.

Unter einer „Korrespondenz“ (2,2) ist eine quadratische Form in zwei Reihen von Veränderlichen x_1, x_2; y_1, y_2 zu verstehen, die unabhängigen Substitutionen unterworfen werden. Peano (F. d. M. 14, 721, 1882) hat zuerst ein volles System von 18 Komitanten für eine solche Korrespondenz aufgestellt. Gordan (F. d. M. 21, 105, 1889) hat für eine Korrespondenz (m, n) ein System ermittelt, das jedenfalls das volle System umfaßt; im vorliegenden Falle $m = 2$, $n = 2$ fand er 38 invariante Bildungen. Der Verf. hat es unternommen, durch nicht ganz leichte symbolische Rechnungen die 38 Gordanschen Bildungen auf die 18 Peanoschen zurückzuführen. In der Tat stimmen 18 der ersteren mit den letzteren überein, und die übrigen 20 werden explizite als ganze Funktionen jener 18 nachgewiesen. My.

J.-A. de Séguier. Sur la forme canonique des substitutions linéaires. S. M. F. Bull. 30, 247-252.

Der Verf. legt den bekannten Satz zugrunde: „Liegt eine binäre Substitution $S = (a_{ik})$ in den Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ vor, so lassen sich kanonische neue Variabeln y (als lineare Formen der alten) so einführen, daß S in eine Anzahl von Teilsystemen zerfällt, sodaß im ersten Systeme $y_1, \ldots, y_m$ ersetzt werden durch

$$s_i y_1, \ldots, s_i(y_\mu + y_{\mu-1}), \ldots, s_i(y_m + y_{m-1}),$$

etc. Hier bedeutet s_i eine Wurzel der charakteristischen Gleichung von S, $\Delta_a = 0$; es sind so viele Teilsysteme da, als verschiedene Wurzeln s_i, und die Zahl der Variabeln y eines jeden Teilsystems gibt die Vielfachheit der zugehörigen Wurzel s_i an.“ Sei jetzt C der Körper, der entsteht, wenn man die a_{ik} dem Körper der rationalen Zahlen, resp. dem Körper der Zahlen $0, 1, \ldots, p-1$ mod. p (p Primzahl) adjungiert; weiter gehe C durch Adjunktion einer Wurzel s_i von Δ_a in C_i über. Dann werden die Modifikationen untersucht, die der obige Satz erleidet, wenn die Zerlegung von Δ_a in Faktoren erfolgt, die im Körper C irreduzibel sind, und wenn die Koeffizienten der x in y_i dem Körper C_i angehören sollen. My.

E. Waelsch. **Binäranalyse zur Rotation eines starren Körpers.** Wien. Anz. 1902, 40-41.

E. Waelsch. **Binäranalyse zur Mechanik deformierbarer Körper.** Wien. Anz. 1902, 82-84.

Der Verf. setzt seine vorläufigen Mitteilungen über Anwendungen der binärinvarianten Behandlung des Kugelkreises auf Mechanik fort (s. F. d. M. **32**, 125, 1901).

Der Behandlung der Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt O liegt nach dem Vorgange von Klein und Sommerfeld eine lineare unimodulare Substitution S mit den Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zugrunde. Man schreibe S als doppelt binäre „Rotations-Form“ $s_y r_x = s'_y r'_x = \dots$ Bezeichnet man die Ableitungen nach der Zeit durch obere Punkte, so stellt $(\dot{s} s)\, \dot{r}_x r_x$ die Herpolhodiekurve und $p = p_x^2 = (r\dot{r})\, s_x \dot{s}_x$ die Polhodiekurve dar. Das Trägheitsellipsoid des Punktes O ist durch eine doppeltquadratische und symmetrische „Trägheitsform“ gegeben:

$$\sigma_y^2 \varrho_x^2 = \varrho_y^2 \sigma_x^2 = a_x^2 a_y^2 + c(xy)^2,$$

wo a_x^4 eine biquadratische Form und c eine Konstante ist. Auch die Eulerschen Bewegungsgleichungen erhalten so eine durchsichtige invariante Einkleidung.

Eine analoge Anwendung wird in der zweiten Note auf deformierbare Körper gemacht. Irgend ein Punkt P eines Körpers wird dabei als Punktkugel oder vielmehr als der von ihm ausgehende Minimalkegel K aufgefaßt. Dann erscheinen Vektor, homogene Deformation, Tensor, lineare Tensorfunktion als gegeben bezw. durch eine Quadrik, Doppelquadrik, symmetrische Doppelquadrik, vierfache Quadrik. Die Elementarinvariante $(\varrho\sigma)^2 = 3c$ der Trägheitsform ist die Summe der drei Hauptträgheitsmomente. Der Tensor der Spannung ist repräsentiert durch die symmetrische „Spannungsform“ $S_y^2 R_x^2$; usf. My.

H. Kühne. **Simultaninvarianten zweier zu einander kontravarianter Systeme und ihre Anwendung auf die Biegung der Mannigfaltigkeiten.** Math. Ann. **56**, 257-264.

Es sei $a_{f_1,\dots,f_m}$ $(f_1, \dots, f_m = 1, \dots, \nu)$ ein System von Funktionen der ν Variabeln y_f $(f = 1, \dots, \nu)$ derart, daß, wenn durch eine Substitution S die y_f in die $\bar{y}_f$ übergehen, und aus den $\bar{y}_f$ entsprechend den $a_{f_1,\dots,f_m}$ die Größen $\bar{a}_{f_1,\dots,f_m}$ gebildet werden, die Beziehungen bestehen

$$(1) \qquad \bar{a}_{f_1,\dots,f_m} = \sum_{g_1,\dots,g_m} a_{g_1,\dots,g_m} y_{g_1 f_1} y_{g_2 f_2}, \dots, y_{g_m f_m}.$$

Dann bilden die a ein „kovariantes“ System von der m-ten Ordnung. Führt man denselben Prozeß aus für ein anderes System von Größen $\beta_{f_1,\dots,f_m}$ in bezug auf die zu den y_{fg} reziproken Substitutionskoeffizienten η_{gf}, so bilden die β ein „kontravariantes“ System von der m-ten Ord-

nung, und es ist $\sum_{f_1,\ldots,f_m} \alpha_{f_1,\ldots,f_m} \beta_{f_1,\ldots,f_m}$ eine Simultaninvariante beider Systeme.

Es handelt sich des weiteren um „doppelt m-fach variante" Systeme, wo jedes α und β zwei Zeigergruppen $f_1,\ldots,f_m$, $g_1,\ldots,g_m$ besitzt; insbesondere möge bei Vertauschung zweier Zeiger einer Gruppe ein Vorzeichenwechsel eintreten.

Komponiert man dann aus den α und β ein neues System j nach dem Gesetz:

$$j_{a_1 a_2} = \sum_c \alpha_{a_1 c}\, \beta_{c a_2}, \text{ so ist } J = \sum_a j_{aa}$$

eine Simultaninvariante der beiden Systeme α und β. Analoge Invarianten entstehen durch ein-, resp. mehrmalige Komposition der Matrix $(j_{a_1 a_2})$ mit sich selbst.

Auf diese Weise gelangt man zu einer unendlichen Reihe von Invarianten $J, J^{(2)},\ldots, J^{(\lambda)},\ldots$, die sich aber in bestimmter Weise durch gewisse einfache Invarianten J_λ ausdrücken lassen, nämlich wie die Potenzsummen durch die elementaren symmetrischen Funktionen. In einer ν-fachen Mannigfaltigkeit sei jetzt $ds^2 = \Sigma a_{fg}\, dy_f\, dy_g$. Bei einem Übergange zu neuen Variabeln sind die a_{fg} doppelt einfach kovariant, die Elemente α_{gf} des reziproken Systems doppelt einfach kontravariant. Die aus den a, resp. α gebildeten Determinanten zweiten Grades sind doppelt zweifach kovariant, resp. kontravariant. Die Christoffelschen 4-Indizes-Symbole, die die Koeffizienten im Riemannschen Krümmungsmaß bilden, sind doppelt zweifach kovariant.

Die obigen Größen $J^{(\lambda)}$ und J_λ sind Biegungsinvarianten. Hieraus läßt sich eine Methode ableiten, die darüber entscheidet, ob eine vorgelegte Mannigfaltigkeit verbiegbar ist oder nicht. My.

P. Muth. Zur geometrischen Deutung der Invarianten ebener Kollineationen. Math. Ann. 55, 594-596.

Liegt eine Kollineation K in der Ebene vor, so entspricht jedem Punkte P der Ebene ein bestimmter Kegelschnitt C als Ort der Punkte x, deren Verbindungsgerade mit P jeweils durch den zu x homologen Punkt x' hindurchgeht. Diese Kegelschnitte C bilden ein Netz, „das Netz von K".

Man ordne nun jeder Geraden u der Ebene denjenigen Punkt x von u zu, für den die Gerade xx' mit u zusammenfällt; dann sind u und x homologe Elemente einer quadratisch-reziproken Verwandtschaft R der Ebene. Diese Beziehung R wird durch die Kollineation K in sich selbst transformiert, und umgekehrt.

Sei $\Sigma a_{ik} x_i u_k = 0$ die Gleichung der Kollineation K, $\Sigma \alpha_{ik} x_k u_i = 0$ die Gleichung der inversen Kollineation. Die Kollineation heiße eine „ausgezeichnete", wenn die Invariante $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$ verschwindet. In diesem Falle gibt es, wie mittels gewisser homologer Vierseite be-

wiesen wird, eine Quadrupelserie von Dreiecken ABC derart, daß ABC' und $A'B'C''$, BCA' und $B'C'A''$, CAB' und $C'A'B''$ perspektiv liegen; die drei Zentren der Perspektivität bilden ein Dreieck, das seinem homologen eingeschrieben ist.

Auf diesem Wege kann aus jeder bekannten Deutung einer Invariante der Kollineation eine neue Deutung rational abgeleitet werden. My.

J. G. HUN. **Notes in mathematics. Invariant relations of two triangles.** Johns Hopkins Univ. Circ. **21**, 90.

Liegen zwei Kurven (in der Ebene) gleicher Ordnung vor, die eine f, als Ordnungskurve, die andere, φ, als Klassenkurve gedacht, so gehört zu jeder Geraden l als gemischter Polare (wenn man die Polarenbildung zuerst bez. f, sodann bez. φ ausübt) wiederum eine Gerade l'. Verlangt man, daß beide Geraden koinzidieren, so resultiert für den Proportionalitätsfaktor eine Gleichung dritten Grades, und damit ein invariantes Dreiseit. Für die Ecken desselben gilt das Entsprechende. Nunmehr wird f selbst als ein Dreiseit, φ als ein Dreieck spezialisiert; so entsteht für das in Rede stehende, sich selbst konjugierte Dreieck eine Reihe invarianter Bildungen, die im Sinne der Apolaritätstheorie geometrisch gedeutet werden. My.

X. STOUFF. **Sur la première lettre mathématique d'Hermite à Jacobi.** Darb. Bull. (2) **26**, 302-308.

Verf. gibt eine neue Herleitung eines Satzes von Hermite, der sich in dessen erstem Briefe an Jacobi [J. für Math. **40**] findet. Gz.

Weitere Literatur.

A. BAKER. The principles at the base of quaternion analysis. Canada R. S. Proc. (3) **7**, 17-20.

A. C. DIXON. Note on the reduction of a ternary quantic to a symmetrical determinant. Cambr. Proc. **11**, 350-351.

P. A. MACMAHON. Seminvariants of systems of binary quantics, the order of each quantic being infinite. Cambr. Trans. **19**, 234-248.

Kapitel 3.

Substitutionen und Gruppentheorie, Determinanten, Elimination und symmetrische Funktionen.

A. Substitutionen und Gruppentheorie.

B. S. Easton. The constructive development of group-theory (with a bibliography). Boston: Ginn. Publ. of the Univ. of Pennsylvania. IV + 89 S. gr. 8°.

Die vorliegende, sehr verdienstvolle Dissertation zerfällt in zwei Teile, deren erster in sehr gründlicher Weise die gesamte Literatur über Permutationsgruppen und abstrakte endliche Gruppen zusammenstellt. Der zweite Teil enthält die Begriffe und Theoreme und gibt zu jedem Satze diejenigen Schriften an, in denen man die Beweise finden kann. Durch sehr geschickt gewählte Abkürzungen für die in Frage kommenden Abhandlungen wird auf sehr geringem Raum viel Stoff zusammengetragen. Wer über Gruppen arbeitet, wird sich sehr vorteilhaft dieser Schrift bedienen.

Bei der bisherigen Benutzung hat Referent nur wenige Irrtümer, wie sie bei solcher Arbeit unvermeidlich auftreten, bemerkt. Sie sind in den Besprechungen von L. E. Dickson (Science, **17**, 904, 1903) und G. A. Miller (American M. S. Bull. (2) **9**, 557-558, 1903) zu finden; daher sei auf diese verwiesen. In Ergänzung zu diesen Referaten sei nur erwähnt, daß die Angaben in No. 226 über die Untersuchungen von J. W. Young nicht korrekt sind. Statt $(\alpha - 1)$-holomorphism am Ende hätte es $(\alpha - 1)$-isomorphism heißen müssen, und es wäre auch der Begriff „α-Isomorphismus" zu erklären. Zu bedauern ist, daß der Verf. sich nur auf abstrakte endliche Gruppen und Permutationsgruppen beschränkt hat. Hätte er sein Thema weiter gefaßt, so wären manche Theoreme und Begriffe anderen Autoren, als er es tut, zuzuschreiben gewesen. Ich führe nur für No. 32 an, um hiermit gleichzeitig auch Burkhardts Angabe in der Encyklopädie der math. Wiss. **1**, 212, Anm. 36 zu ergänzen, daß sich die Bezeichnung „Index" im fraglichen Sinne schon bei Poincaré, Journ. de Math. (4) **3**, 409, 1887, findet.

Wünschenswert wäre die Angabe der Bezeichnungen „homomorph" (E. Ritter im Namen von F. Klein, Math. Ann. **41**, 22, 1893), „elementare Gruppe" (Frobenius, Berl. Ber. 1902, 358), „Holomorphismus" (G. A. Millers Bezeichnung für Frobenius' Automorphismus, American M. S. Bull. (2), **9**, 112, 1902) gewesen, was für eine etwaige zweite Auflage bemerkt sei. Doch ich habe schon zu viel an der schönen Monographie gemäkelt. Ly.

M. Bauer. Über die neuere Literatur der Theorie der endlichen Gruppen. IV. Math. és Phys. Lapok **11**, 340-345.

E. H. Moore. A definition of abstract groups. American M. S. Trans. 3, 485-492.

Verf. definiert eine Gesamtheit G von Elementen, die sich untereinander komponieren lassen, als Gruppe, wenn von ihnen die folgenden fünf Postulate erfüllt werden:

1. Das Produkt $a \cdot b$ zweier beliebigen Elemente aus G gehört G an.

2. Für irgend drei Elemente a, b, c aus G gilt das assoziative Gesetz $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

3_l. Es existiert in G ein Element e_l (linkshändiges Einheitselement), sodaß für jedes Element a aus G $e_l \cdot a = a$ ist.

3_r. Es existiert in G ein Element e_r (rechtshändiges Einheitselement), sodaß für jedes Element a aus G $a \cdot e_r = a$ ist.

4_l. Wenn ein (rechtshändiges Einheitselement) e_r existiert, so soll zu jedem Elemente a aus G ein Element a_l' existieren, sodaß $a_l' \cdot a = e_r$ ist.

Die angegebenen fünf Postulate sind, wie Moore zeigt, von einander unabhängig und bleiben es auch noch, wenn man hinzufügt, G soll nur eine bestimmte endliche Anzahl, jedoch mehr als zwei verschiedene Elemente enthalten. Verf. vergleicht seine Definition einer Gruppe mit den beiden von Huntington (vergl. die zwei folgenden Referate) durch drei, bez. vier unabhängige Postulate gegebenen Definitionen sowie mit der von H. Weber in seiner Algebra, Bd. 2. Ferner gibt Moore auf Grund von sechs unabhängigen Postulaten, indem er (3_l), (3_r) und (4_l) durch vier Postulate ersetzt, eine von der obigen etwas verschiedene Gruppendefinition. Anstelle von (4_l) kann auch das Postulat (4_r): $a \cdot a_r' = e_l$ von der Existenz von a_r' eingeführt werden. Dieses Postulat (4_r) ergibt sich aus den oben angegebenen fünf Postulaten als beweisbarer Lehrsatz, und man beweist auch, daß $a_r' = a_l'$ ist. Ly.

E. V. Huntington. Simplified definition of a group. American M. S. Bull. (2) 8, 296-300.

Eine Gesamtheit G von Elementen, die unter einander komponiert werden können, bildet nach dem Verf. eine abstrakte Gruppe, wenn sie folgenden drei Bedingungen unterworfen wird: 1. Zu irgend zwei Elementen a und b aus G existiert stets ein Element x in G, daß $a \cdot x = b$. 2. Zu irgend zwei Elementen a und b aus G existiert stets ein Element y in G, daß $y \cdot a = b$. 3. Sind a, b, c, $a \cdot b$, $b \cdot c$ und entweder $(a \cdot b) \cdot c$ oder $a \cdot (b \cdot c)$ Elemente aus G, dann soll:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

sein. Die drei Postulate sind, wie der Verf. zeigt, unabhängig von einander, aus ihnen folgt die gewöhnliche Definition einer Gruppe. Fügt man als viertes Postulat noch hinzu, daß G nur die endliche Anzahl von n Elementen enthalten soll, so wird durch die vier, auch noch, falls nur $n > 2$ ist, von einander unabhängigen Postulate eine endliche Gruppe definiert. Ly.

E. V. HUNTINGTON. **A second definition of a group.** American M. S. Bull. (3) 8, 388-391.

Hier werden für die „Kombinationsregel" folgende Postulate aufgestellt: 1. Wenn a und b der Menge angehören, dann gehört $a \cdot b$ auch der Menge an. 2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, wenn $a \cdot b$, $b \cdot c$, $(a \cdot b) \cdot c$ und $a \cdot (b \cdot c)$ der Menge angehören. 3. Für je zwei Elemente a und b gibt es ein solches Element a', daß $(a \cdot a') \cdot b = b$. 4. Für je zwei Elemente a und b gibt es ein solches Element a'', daß $b \cdot (a'' \cdot a) = b$. Lp.

E. NETTO. **Über die Zusammensetzung von Substitutionen aus den Transpositionen.** Math. Ann. 56, 482-500.

Von A. Hurwitz (Math. Ann. **39**, 12, 1891; F. d. M. **23**, 429, 1891) stammt der Satz: „Die Anzahl der Darstellungen einer mit n Symbolen gebildeten Permutation als Produkt von w Transpositionen ist gleich $c_1 f_1^w + c_2 f_2^w + c_3 f_3^w + \cdots + c_k f_k^w$, wo die Zahlen

$$c_1, c_2, \ldots, c_k, \quad f_1, f_2, \ldots, f_k$$

von w nicht abhängen. Die Koeffizienten c sind rationale, von der Permutation und der Zahl n abhängende Zahlen." Verf. beweist zunächst die Hurwitzsche Formel und setzt eine Methode zur Gewinnung der c, über deren Bildung Hurwitz nichts mitgeteilt hatte, auseinander. Vermöge dieser Ergebnisse berechnet Verf. unter Benutzung der stets ganzzahligen, nur von n abhängigen Zahlen f, die der Arbeit von Hurwitz entnommen werden, die Darstellungen aller Arten von Permutationen bei 3, 4, 5, 6 und 7 Symbolen. Er weist auf die hierbei sich aufdrängenden merkwürdigen Verhältnisse hin. Sie haben nach Frobenius (Berl. Ber. 1903, 358), wie ergänzend bemerkt sei, darin ihren tieferen Grund, daß die Größen c mit der Frobeniusschen Theorie der Charaktere der symmetrischen Gruppe zusammenhängen. Ly.

G. FROBENIUS. **Über Gruppen der Ordnung $p^\alpha q^\beta$.** Acta Math. 26, 189-198.

Sind p und q zwei verschiedene Primzahlen, und gehört q mod. p zum Exponenten μ, so hat W. Burnside mit Hülfe der Permutationsgruppen, also durch Darstellungen von G, bewiesen, daß alle Gruppen G der Ordnung $p^\alpha q^\beta$ für $\beta < 2\mu$ auflösbar sind. (Theory of groups of finite order 1897, 345.) Verf. beweist diesen Satz auf rein gruppentheoretischem Wege und dehnt ihn auf $\beta = 2\mu$ aus. Hierdurch wird auch als spezieller Fall die von Burnside (ebenda, S. 348) und C. Jordan (Journ. de Liouville (5), **4**, 21-26; F. d. M. **29**, 105, 1898) erkannte Auflösbarkeit der Gruppen der Ordnung $p^\alpha q^2$ mitbewiesen. Ferner zeigt Verf. die Auflösbarkeit der Gruppen der Ordnung $p^\alpha q^\beta$, die nicht mehr als q^μ Gruppen der Ordnung p^α enthalten; μ hat dieselbe Bedeutung wie oben. Ly.

G. Frobenius. Über Gruppen des Grades p oder $p+1$. Berl. Ber. 1902, 351-369.

Ist p eine Primzahl, so gibt es bekanntlich eine transitive Permutationsgruppe des Grades $p+1$ und der Ordnung $\frac{1}{2}p(p^2-1)$; sie ist für $p>3$ einfach und wird durch die Substitutionen der Gruppe G_1: $\xi' = \frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}$, $\alpha\delta-\beta\gamma=+1$, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen mod. p bedeuten, bestimmt. Verf. beweist zunächst den Fundamentalsatz, daß für jede Primzahl p nur eine einzige transitive Permutationsgruppe des Grades $p+1$ und der Ordnung $\frac{1}{2}p(p^2-1)$ existiert. Eine Ausnahme bildet nur $p=7$. Für $p=7$ gibt es außer der erwähnten einfachen Gruppe noch eine auflösbare Permutationsgruppe des Grades 8 von der Ordnung 168. Aus dem soeben mitgeteilten Satze folgt: „Ist p eine Primzahl >3, so gibt es eine und nur eine einfache Gruppe der Ordnung $\frac{1}{2}p(p^2-1)$. Ist p eine Primzahl, so gibt es nicht mehr als eine transitive Gruppe des Grades $p+1$ und der Ordnung $p(p^2-1)$."

Von Mathieu stammen die Resultate: Ist der Grad einer transitiven Permutationsgruppe $\mathfrak{H}$ eine Primzahl p, so ist ihre Ordnung

$$h = pq(np+1),$$

wobei q ein Teiler von $p-1$ ist und $np+1$ die Anzahl der verschiedenen in $\mathfrak{H}$ enthaltenen Gruppen der Ordnung p bedeutet. Ist $n=0$, so ist $\mathfrak{H}$ eine metacyklische Gruppe. Nach einem Satze von W. Burnside (Lond. M. S. Proc. **33**, 174, 1901) kann jede transitive Permutationsgruppe vom Primzahlgrade, die nicht metacyklisch ist, nicht einfach transitiv sein; hieraus folgt, daß, wenn $n>0$ ist, h durch $p(p-1)$ ohne Rest teilbar ist. Setzt man $p(p-1)=pqr$, so ist mithin für $n>0$ die Zahl $np+1$ durch r teilbar, folglich wird $n\equiv -1$ (mod. r). Verf. benutzt diese Resultate, um die transitiven Permutationsgruppen $\mathfrak{H}$ vom Primzahlgrade p, die $p+1$ Untergruppen der Ordnung p besitzen, zu untersuchen. Für sie ist nach Mathieu $n=1$ und infolge der Kongruenz $n\equiv -1$ (mod. r) muß $r=1$ oder 2 sein, so daß die fraglichen Gruppen $\mathfrak{H}$ die Ordnung $p(p^2-1)$ oder $\frac{1}{2}p(p^2-1)$ haben. Im ersten Fall ist $\mathfrak{H}$ eine zusammengesetzte Gruppe, die eine einfache Untergruppe der Ordnung $\frac{1}{2}p(p^2-1)$ besitzt. Mit Hülfe der Resultate, die Verf. über die Permutationsgruppen der Ordnung $\frac{1}{2}p(p^2-1)$ in $p+1$ Symbolen erhalten hat, — die Eigenschaften der Gruppe $\mathfrak{H}$ lassen sich nämlich leichter erkennen, wenn man sie durch die Permutationen von $p+1$, nicht von p Symbolen darstellt — und des Galoisschen Satzes, der auch bewiesen wird, daß die Gruppe G_1 der Ordnung $\frac{1}{2}p(p^2-1)$ im Anfange des Referats sich nur für $p=5, 7$ oder 11 als Permutationsgruppe des Grades p darstellen läßt, gewinnt Frobenius den grundlegenden Satz: „Es gibt nur vier transitive Permutationsgruppen, deren Grad eine Primzahl p ist, und die $p+1$ Untergruppen der Ordnung p enthalten die alternierende und die symmetrische Gruppe des Grades 5, deren Ordnungen gleich 60 und 120 sind, und die beiden einfachen Gruppen der Grade 7

und 11, deren Ordnungen gleich 168 und 660 sind." Dieses Theorem ist, wie Verf. bemerkt, auch schon von Sylow, dem damals noch nicht der W. Burnsidesche Satz zur Verfügung stand, in den Videnskabsselskabets Skrifter I. Math.-naturw. Klasse 1897, No. 9, (F. d. M. **28**, 121, 1897) unter der Voraussetzung $q = \frac{p-1}{2}$ oder $= p - 1$ bewiesen worden.

Von den weiteren Ergebnissen der inhaltreichen Arbeit sei der folgende abstrakt gruppentheoretische Satz angegeben: „Ist p eine Primzahl der Form $4k+1$, und ist q nicht durch p teilbar, so kann eine Gruppe der Ordnung $pq(p+1)$ nur dann $p+1$ Untergruppen der Ordnung p enthalten, wenn q durch $\frac{p-1}{2}$ teilbar ist". Der Schluß der Arbeit beschäftigt sich mit transitiven Permutationsgruppen der Ordnung $pq(p+1)$ und des Grades $p+1$, die $p+1$ Untergruppen der Ordnung p enthalten, wenn $p = 4k+3$ ist. Der Fall $p = 4k+3$ erweist sich in der Arbeit stets schwieriger als $p = 4k+1$. Ref. möchte nicht unterlassen, auch auf die interessanten literarischen Bemerkungen des Verf. über transitive Permutationsgruppen hinzuweisen. Ly.

G. Frobenius. Über primitive Gruppen des Grades n und der Klasse $n-1$. Berl. Ber. 1902, 455-459.

In einer früheren Arbeit (Berl. Ber. 1901, 1226; F. d. M. **32**, 138, 1901) hat sich Verf. mit den transitiven Permutationsgruppen beschäftigt, welche außer der identischen Permutation keine Permutation besitzen, die zwei Symbole ungeändert läßt. In dem vorliegenden Aufsatz wird die Ermittlung der intransitiven Gruppen, die der gleichen Bedingung genügen, auf die der transitiven zurückgeführt. „Enthält eine Gruppe $\mathfrak{H}$ des Grades n keine Substitution, die zwei Symbole ungeändert läßt, außer der identischen, so bilden die $n-1$ Substitutionen, die alle Symbole versetzen, zusammen mit der identischen Substitution eine charakteristische Untergruppe der Ordnung n. Ist gn die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{H}$, so enthält sie n konjugierte Gruppen G der Ordnung g. Eine solche Gruppe G enthält alle Substitutionen von $\mathfrak{H}$, die von n konjugierten Symbolen ein bestimmtes ungeändert lassen. Jedes der übrigen Symbole ist mit gn anderen Symbolen konjugiert und wird durch jede von der identischen Substitution verschiedene Substitution von $\mathfrak{H}$ versetzt. Die transitiven Komponenten von $\mathfrak{H}$ sind, wenn $n > 1$ ist, alle mit $\mathfrak{H}$ einfach isomorph, haben also die Ordnung gn. Eine von ihnen ist von dem Grade n und der Klasse $n-1$. Jede der anderen aber ist eine reguläre Gruppe des Grades gn." Das wichtigste Ergebnis der Arbeit ist der Fundamentalsatz: „Eine transitive Gruppe $\mathfrak{H}$ des Grades n und der Klasse $n-1$ kann nur dann primitiv sein, wenn n eine Potenz einer Primzahl und die in $\mathfrak{H}$ enthaltene Untergruppe $\mathfrak{N}$ der Ordnung n eine elementare

ist. Unter dieser Bedingung ist $\mathfrak{H}$ stets dann und nur dann primitiv, wenn $\mathfrak{N}$ eine minimale invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$ ist." Die in dem obigen Theorem verwandte Bezeichnung elementar bedeutet, die Gruppe hat keine charakteristische Untergruppe. Anders ausgedrückt: Eine elementare Gruppe ist das direkte Produkt von mehreren holoedrisch isomorphen einfachen Gruppen. (Frobenius, Berl. Ber. 1902, 358.) Durch die über Permutationsgruppen gewonnenen Resultate wird noch folgender Satz der abstrakten Gruppentheorie erhalten: „Ist p eine Primzahl, n nicht durch p, aber durch mehrere verschiedene Primzahlen teilbar, und ist kein Divisor von n außer 1 und n kongruent 1 (mod. p), so enthält eine Gruppe der Ordnung $p^\lambda \cdot n$ stets eine invariante Untergruppe der Ordnung p^λ." Ly.

J. Schur. Neuer Beweis eines Satzes über endliche Gruppen. Berl. Ber. 1902, 1013-1019.

Verf. beweist ein von Frobenius (Über auflösbare Gruppen IV. Berl. Ber. 1901, 1216-1230; F. d. M. **32**, 137, 1901, erster Satz des dortigen Referats) stammendes Theorem über endliche diskrete Gruppen, ohne die Theorie der Frobeniusschen Gruppencharaktere zu benutzen. Es folgt noch ein direkter Beweis des aus dem fraglichen Frobeniusschen Theorem durch Spezialisierung herleitbaren Satzes: „Enthält die Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung $h = gn$ eine aus lauter invarianten Elementen von $\mathfrak{H}$ bestehende Untergruppe G der Ordnung g, und sind g und n teilerfremd, so ist $\mathfrak{H}$ das direkte Produkt der Gruppe G und einer Gruppe $\mathfrak{N}$ der Ordnung n." Ly.

J. de Séguier. Sur un théorème de M. Frobenius. C. R. **134**, 692-693; **135**, 528-530.

Verf. beschäftigt sich mit dem Beweise eines gruppentheoretischen Satzes von Frobenius aus der Arbeit „Über auflösbare Gruppen III" (Berl. Ber. 1901). Der fragliche Satz ist im Referat über Frobenius, F. d. M. **32**, 137, 1901, mit I numeriert. Nach J. Schur ist de Séguiers Beweis nicht stichhaltig (Berl. Ber. 1902, 1019). Verf. beweist separat u. a. auch den spezielleren Satz, der in dem vorstehenden Referat ausdrücklich angeführt wurde. Ly.

J. de Séguier. Sur les équations de certains groupes. Journ. de Math. (5) **8**, 253-308.

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit dehnt Verf. vorzüglich eine von C. Jordan (Traité des substitutions, Paris, 1870, S. 30 ff.) angegebene Methode der Aufsuchung mehrfach transitiver Permutationsgruppen aus und wendet sie besonders auf die Gruppen der Ordnungen $\frac{1}{2}p(p^2-1)$, $p^n(p^n-1)$, $p^n(p^{2n}-1)$ an, wobei p eine Primzahl ist. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen hat Verf. bereits in den C. R. **132**, 1030-1033, 1901 mitgeteilt; daher kann auch auf die vorjährige Besprechung

in den F. d. M. **32**, 154, 1901 verwiesen werden. Ref. möchte nur auf die verwandten Untersuchungen von Frobenius (Referat S. 144) hinweisen.

Der zweite Teil nimmt die Untersuchungen von Mathieu (Journ. de Math. (2), **18**, 25-47; F. d. M. **5**, 88, 1873) über die Bestimmung der transitiven Permutationsgruppen des Grades $q=2p+1$, wobei p und q beide Primzahlen sind, auf und ergänzt sie. Für jeden Wert von q sind außer der symmetrischen und alternierenden Gruppe die metacyklischen Permutationsgruppen, deren Ordnung $\leqq q(q-1)$ ist, transitiv. Verf. behandelt daher nur diejenigen transitiven Permutationsgruppen, deren Ordnungen $>q(q-1)$ und $<\frac{q!}{2}$ sind. Für $q=5$ gibt es keine, für $q=7$ eine zweifach transitive einfache Gruppe, für $q=11$ eine zweifach transitive, einfache Gruppe der Ordnung 660 und eine vierfach transitive einfache Gruppe der Ordnung 7920; dies steht auch im Einklange mit Coles Behandlung der transitiven Permutationsgruppen vom Grade 11 (Quarterly Journ. **27**, 47, 1894). Für $q=23$ ist jede transitive Permutationsgruppe, die weder metacyklisch ist, noch die alternierende Gruppe enthält, ähnlich zu der vierfach transitiven Gruppe, die sich ebenfalls wie alle bisher erwähnten Gruppen in Mathieus Arbeit findet, und deren Einfachheit von G. A. Miller (S. M. F. Bull. **28**, 266; F. d. M. **31**, 137, 1900) gezeigt wurde. Für $q=47$ und $q=59$ weist Verf. darauf hin, wie man die Nichtexistenz transitiver Permutationsgruppen dieser Grade, auf die C. Jordan aufmerksam gemacht hat (C. R. **79**, 1874, 1149), nachweisen kann. Wie schon Mathieu, so zieht auch Verf. die transitiven Gruppen des Grades $q+1$ in den Kreis seiner Betrachtungen. Für die einfache Mathieusche Gruppe, die fünffach transitiv ist und $q+1=12$ entspricht, werden z. B. die sich in W. Burnsides Theory of groups of finite order, 1897, 220 findenden Angaben bewiesen. Für alle besprochenen Gruppen werden, was besonders hervorgehoben werden soll, die sie definierenden Gleichungen aufgestellt; für die $q+1=24$ entsprechende fünffach transitive Gruppe von Mathieu, deren Einfachheit Miller bewiesen hat, wurde hierauf schon in dem früheren Referat hingewiesen. Ly.

W. Burnside. On the representation of a group of finite order as a permutation group, and on the composition of permutation groups. London M. S. Proc. **34**, 159-168.

Hat man eine abstrakte Gruppe G endlicher Ordnung, so bezeichnet Verf. die Permutationsgruppen, mit denen G holoedrisch oder meroedrisch isomorph ist, als Darstellungen von G als Permutationsgruppe. Unter einer Permutationsgruppe ist hierbei jene besondere Gattung endlicher linearer homogener Substitutionsgruppen verstanden, bei denen jede Operation nur in einer Permutation der Variablen besteht. Ist G auf zwei Weisen als Permutationsgruppe in der gleichen Variablenzahl dargestellt, so heißen die zwei Darstellungen äquivalent, wenn man sie durch eine

10*

lineare homogene Substitution von nicht verschwindender Determinante in einander transformieren kann.

Der Aufsatz ist der Frage gewidmet, wann sind zwei Darstellungen von G als Permutationsgruppe äquivalent, erstens, wenn die überführende Substitution darauf beschränkt ist, eine bloße Permutation zu sein, zweitens, wenn als überführende Substitution eine beliebige lineare homogene Substitution zugelassen wird? Zur Lösung betrachtet Verf. nach W. von Dyck die sämtlichen verschiedenen transitiven Darstellungen $G_1, G_2, \ldots, G_\mu$ der Gruppe G als Permutationsgruppe; ihre Anzahl ist gleich der Zahl nicht konjugierter Untergruppen von G, wobei die Identität und G selbst auch als Untergruppen zu zählen sind. Diese μ Darstellungen

$$G_1, G_2, \ldots, G_\mu$$

sind in dem Sinne verschieden, daß sie durch keine Permutation in einander transformierbar sind. Ist G zu einer intransitiven Gruppe Γ holoedrisch oder meroedrisch isomorph, so ist Γ stets von der Form

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} a_i G_i,$$

wobei a_i die Anzahl transitiver Konstituenten von Γ, die G_i äquivalent sind, angibt; a_i ist daher Null oder eine ganze positive Zahl. Jede Permutationsgruppe $\sum_{i=1}^{i=\mu} a_i G_i$ ist, wenn bloße Permutationen zur Transformation zugelassen werden, nur sich selbst äquivalent.

Zwei Permutationsgruppen, die nicht durch eine Permutation in einander überführbar sind, können sehr wohl in dem weiteren Sinne äquivalent sein. Zu jeder nicht cyklischen Gruppe G gibt es stets Darstellungen als Permutationsgruppen, wie Verf. mit Hülfe eines Frobeniusschen Satzes (Berl. Ber. 1897, 1000-1005) zeigt, die durch eine lineare homogene Substitution in einander überführbar sind, aber den Charakter der Äquivalenz verlieren, wenn von der überführenden Substitution gefordert wird, sie soll eine Permutation sein.

Für die Untersuchung verwendet Burnside den Begriff Marke (mark) einer Untergruppe einer Permutationsgruppe $\mathfrak{P}$. Er versteht hierunter die Anzahl derjenigen Symbole, auf die sich $\mathfrak{P}$ bezieht, und die bei allen Operationen der betreffenden Untergruppe ungeändert bleiben. Betrachtet man die μ^2 Marken, welche den μ Untergruppen, die den μ nicht konjugierten Untergruppen von G entsprechen, in den Permutationsgruppen $G_1, G_2, \ldots, G_\mu$ zugeordnet sind, so erhält man ein System von μ^2 Zahlen, die als Marken entweder Null oder positiv ganzzahlig sind. Bei der Darstellung von G als Permutationsgruppe spielen diese Zahlen eine analoge Rolle wie Frobenius' Gruppencharaktere bei der Darstellung einer abstrakten Gruppe durch irreduzible Gruppen linearer homogener Substitutionen. Ähnlich wie die Gruppencharaktere treten diese Zahlen bei der durch Produkttransformation aus zwei Permutationsgruppen entspringenden Gruppe auf, die wieder eine Permutationsgruppe ist. (Vgl.

zu dem letzteren Punkte das Referat über Frobenius, Komposition der Charaktere einer Gruppe, F. d. M. **30**, 130, 1899). Ly.

W. Burnside. On an unsettled question in the theory of discontinuous groups. Quart. J. **33**, 230-238.

Es ist eine noch unerledigte Frage, ob es Gruppen unendlicher Ordnung gibt, bei denen sämtliche Operationen endliche Ordnung haben. Verf. behandelt den folgenden Fall: Es sei $A_1, A_2, \ldots, A_m$ eine endliche Anzahl unabhängiger Operationen, die das durch $S^n = 1$ gegebene System von Relationen erfüllen; n sei eine gegebene endliche Zahl, und S bedeute jede Operation, welche durch die gegebenen m Operationen A erzeugt wird. Ist die so gegebene Gruppe endlich und welches ist ihre Ordnung? Für $n = 2$ und beliebiges ganzzahliges m wird die Ordnung der Gruppe gleich 2^m, für $n = 3$ und beliebiges ganzzahliges m wird die Ordnung 3^{2^m-1}, für $n = 4$ und $m = 2$ wird die Ordnung 2^{12}. In dem weiter untersuchten Fall n gleich einer beliebigen Primzahl p, die größer als 3 ist, und $m = 2$ gelangt Burnside zu keinem definitiven Resultat, sondern findet nur, daß, wenn die Gruppe endlich ist, ihre Ordnung nicht kleiner als p^{2p-3} sein kann. Ly.

W. Burnside. On soluble groups of linear substitutions. Quart. J. **33**, 242-244.

Verf. beweist folgenden Satz: Besitzt eine endliche, auflösbare, irreduzible Gruppe G linearer homogener Substitutionen in p Variablen, wobei p eine Primzahl ist, eine invariante Abelsche Untergruppe, deren Operationen nicht sämtlich in G ausgezeichnet sind, so besitzt sie eine invariante Abelsche Gruppe H, so daß G/H cyklisch oder metacyklisch ist. Bezeichnet man mit dem Verf. irgend eine Gruppe linearer homogener Substitutionen, bei der jede Substitution jede Variable, abgesehen von einem multiplikativen Faktor, durch sich selbst oder eine andere Variable ersetzt, als Permutationsgruppe mit Faktoren, so kann von der oben beschriebenen Gruppe G gesagt werden, sie lasse sich stets in eine cyklische oder metacyklische Permutationsgruppe mit Faktoren transformieren. Ly.

L. E. Dickson. An elementary exposition of Frobenius's theory of group-characters and group-determinants. Annals of Math. (2) **4**, 25-49.

Verf. schildert die Tendenz seines der Frobeniusschen Theorie der Gruppendeterminante und Gruppencharaktere gewidmeten Aufsatzes mit folgenden Worten: „Die vorliegende Arbeit stellt Frobenius' Hauptresultate dar und schließt sich hierbei an seine Methoden so eng an, wie dies eine elementare Behandlung zuläßt. Symbolische Bezeichnungen habe

ich vermieden und den Gegenstand mit beträchtlichen Einzelheiten dargestellt, indem ich eine Reihe von Beispielen zur Erläuterung ausarbeitete."

Ly.

L. E. Dickson. On the group defined for any given field by the multiplication table of any given finite group. American M. S. Trans. 3, 285-301.

Die vorliegende Arbeit ist der Frobeniusschen Theorie der Gruppendeterminante (Berl. Ber. 1896, 1343-1382; 1897, 994-1015; F. d. M. **27**, 94, 1896; **28**, 130, 1897) gewidmet. Sie knüpft im besonderen an W. Burnsides Untersuchungen „On the continuous group that is defined by any given group of finite order" (London M. S. Proc. **29**; F. d. M. **29**, 103, 1898) an und berichtigt auch diese. (Vergl. auch hierzu W. Burnside, London M. S. Proc. **35**, 206, die Anmerkung). Während Burnside jeder endlichen abstrakten Gruppe g eine endliche kontinuierliche Transformationsgruppe zuordnet und mit Lies Theorie der Transformationsgruppen operiert, ordnet Verf. der Gruppe g eine lineare homogene Substitutionsgruppe G mit Koeffizienten aus irgend einem Körper (Feld) F zu. Ist F der Körper aller reëllen und imaginären Zahlen, so ist G identisch mit der von Burnside betrachteten Gruppe. Verf. führt die Untersuchung algebraisch, ohne Benutzung der Lieschen Theorien, so daß sie für jedes F gültig ist. Ausgeschlossen wird nur, daß, wenn F ein Galoissches Feld ist, sein Modul ein Teiler der Ordnung von g ist. Wie bei Frobenius (Zerlegung der Gruppendeterminante) und bei Burnside (vergl. die Referate) handelt es sich vorzüglich um die Zerlegung der Gruppe G in das Produkt linearer homogener Substitutionsgruppen, die hier mit allgemeinen linearen homogenen Substitutionsgruppen mit Koeffizienten aus Körpern, die aus F durch Adjunktion hervorgehen, holoedrisch isomorph sind. In engstem Zusammenhange mit der Betrachtung von G steht die Frage der Konstruktion einer zu g isomorphen Substitutionsgruppe mit Koeffizienten aus einem gegebenen Körper in der geringsten Variablenzahl. (Verallgemeinerung des von F. Klein sogenannten Normalproblems.)

Ly.

L. E. Dickson. Cyclic subgroups of the simple ternary linear fractional group in a Galois field. American J. 24, 1-12.

Mit der Untersuchung der in der Überschrift genannten Gruppe hat sich Verf. bereits im American J. **22**, 231 (F. d. M. **31**, 141, 1900) beschäftigt und ihre cyklischen Untergruppen durch die Betrachtung kanonischer Formen für lineare homogene Substitutionen in drei Variablen untersucht. Der vorliegende Aufsatz ergänzt die frühere Arbeit durch nähere Betrachtung der linearen homogenen Substitutionen

$$x' = \alpha^r x,\ y' = \alpha^s y,\ z' = \alpha^{-r-s} z$$

und der durch sie entstehenden cyklischen Untergruppen der linear ge-

brochenen Gruppe in zwei unhomogenen Variablen. α bedeutet eine primitive Wurzel des Galoisschen Feldes $G \cdot F \cdot [p^n]$. Ly.

L. E. Dickson. Canonical form of a linear homogeneous transformation in an arbitrary realm of rationality. American J. **24**, 101-108.

Die Arbeit handelt von der Ausdehnung der bekannten C. Jordanschen Normalform einer linearen homogenen Substitution mit Koeffizienten mod. p auf den Fall, daß die Substitutionskoeffizienten einem beliebigen Rationalitätsbereich angehören, und dem Zusammenhang der ursprünglichen und transformierten Variablen. Für den Fall, daß der Rationalitätsbereich ein endlicher Körper, also ein Galoissches Feld p^n, ist, vergl. die Referate (F. d. M. **31**, 140, 1900; **32**, 134, 1901) über frühere Arbeiten des Verf. Ly.

L. E. Dickson. The hyperorthogonal groups. Math. Ann. **55**, 521-572.

Als hyperorthogonale Gruppe definiert Verf. in der vorliegenden Arbeit eine Gruppe $H_{m,p,s}$ der Ordnung

$$O_{m,p,s} = [p^{sm} - (-1)^m]\, p^{s(m-1)}\, [p^{s(m-1)} - (-1)^{m-1}]\, p^{s(m-2)} \ldots \\ \ldots (p^{2s} - 1)\, p^s;$$

sie wird gebildet von allen linearen homogenen Substitutionen der Determinante $+1$ in m Variablen, die Koeffizienten aus einem Galoisschen Felde der Ordnung p^{2s} haben und die Funktion:

$$\xi_1^{p^s+1} + \xi_2^{p^s+1} + \cdots + \xi_m^{p^s+1}$$

invariant lassen. In seinem Buche „Linear groups with an exposition of the Galois field theory (Leipzig 1901)“ bezeichnet Verf. übrigens die Gruppe der Ordnung $\Omega_{m,p,s} = (p^s + 1) \cdot O_{m,p,s}$, von welcher die hier vorliegende Gruppe $H_{m,p,s}$ eine invariante Untergruppe ist, als hyperorthogonale Gruppe. (Vergl. auch das Referat in den F. d. M. **30**, 1899, 140 u. 141). Die Arbeit knüpft an des Verf. Untersuchungen in den Math. Ann. **52** an, auf deren Besprechung auch eben verwiesen wurde. Verf. zeigt von der Gruppe $H_{m,p,s}$, daß sie sukzessive Allgemeinheit hat, eine Eigenschaft, die er auch schon früher behandelt hat (F. d. M. **32**, 135, 1901). Die Gruppe $H_{m,p,s}$ sowie die einfache Gruppe linear gebrochener Substitutionen, die aus ihr entspringt, werden als transitive Permutationsgruppen dargestellt. Der Hauptteil der Arbeit ist der Untersuchung der charakteristischen Gleichung einer hyperorthogonalen Substitution, der hierauf beruhenden Reduktion hyperorthogonaler Substitutionen in kanonische Formen, die ebenfalls der hyperorthogonalen Gruppe angehören, und ihrer Verteilung in Klassen konjugierter Substitutionen gewidmet. Ly.

L. E. Dickson. Linear groups in an infinite field. London M. S. Proc. **34**, 185-205.

Der vorliegende Aufsatz ist inhaltlich eine Fortführung der Untersuchungen des Verf. in den American M. S. Trans. **2**, 363-394 (F. d. M. **32**, 131, 1901). F bedeute irgend einen beliebigen Rationalitätsbereich oder nach Bezeichnung der amerikanischen Mathematiker ein Feld, d. h. ein derartig vollständiges System von Elementen, daß es durch Ausführung der rationalen Operationen der Algebra nicht erweiterungsfähig sei. F möge nur insofern beschränkt sein, daß es ein Element ν enthält, das nicht in F Quadrat ist, und daß, wenn F durch einen Modul definiert ist, dieser nicht den Wert 2 habe. Q sei das aus F durch Adjunktion einer Wurzel J der in F irreduziblen Gleichung $x^2 = \nu$ hervorgehende Feld. Die Elemente von Q sind daher von der Form $q = \alpha + \beta J$, wobei α und β dem Felde F angehören. Unter $\bar{q}$ sei die zu $q = \alpha + \beta J$ konjugierte Größe $\alpha - \beta J$ verstanden.

Verf. untersucht die Gruppe linearer homogener Substitutionen der $2m$ Variablen ξ_i, η_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ mit Koeffizienten aus Q, die mit den zu ihnen konjugierten Substitutionen die Form:

$$\sum_{i=1}^{i=m} (\xi_i \bar{\eta}_i - \eta_i \bar{\xi}_i)$$

absolut invariant lassen; die Gesamtheit dieser Substitutionen bildet die hyperabelsche Gruppe. [Die Bezeichnung ist auch im Einklang mit Dicksons Buch „Linear groups with an exposition of the Galois field theory" (1901); die Invariante, welche dort auf S. 115 die hyperabelsche Gruppe definiert, läßt sich, da die dortigen ξ^{p^n} und ξ konjugiert sind, in die obige Form bringen.] Die Untergruppe dieser hyperabelschen Gruppe, die durch die Substitutionen der Determinante $+1$ gebildet wird, hat, wie Verf. beweist, $\xi_i' = \mu\xi_i$, $\eta_i' = \mu\eta_i$ $(\mu^{2m} = 1,\ \mu\bar{\mu} = 1)$ zur größten invarianten Untergruppe. Hieraus folgt, daß die Gruppe, die aus den linear gebrochenen hyperabelschen Substitutionen der Determinante $+1$ besteht, für jedes Feld Q eine einfache Gruppe ist.

Mit der quaternären hyperabelschen Gruppe, deren Substitutionen Koeffizienten aus Q haben, hängt diejenige Gruppe in sechs Variablen auf das engste zusammen, deren Substitutionen die quadratische Form $\xi_0^2 - \nu\eta_0^2 + \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2$ absolut invariant lassen und Koeffizienten aus F haben. Verf. untersucht daher die Gruppe G linearer homogener Substitutionen, welche Koeffizienten aus F haben und die Form:

$$\xi_0^2 - \nu\eta_0^2 + \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \dots + \xi_m\eta_m$$

absolut in sich transformieren. Es wird hierbei angenommen, daß ν wohl F angehört, aber kein Quadrat eines Elementes aus F ist. Ist ν ein Quadrat aus F, so ist die quadratische Form nämlich reduzierbar auf $x_0y_0 + \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \dots + \xi_m\eta_m$, und die zu dieser Form gehörige Gruppe hat Verf. bereits früher (F. d. M. **32**, 132, 1901) untersucht. Das Studium der in der vorliegenden Arbeit untersuchten Gruppe G in $2m+2$ Variablen kann anschließend an das der senären Gruppe, die

$$\xi_0^2 - \nu\eta_0^2 + \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2$$

invariant läßt, durchgeführt werden. Ly.

L. E. Dickson. A class of simply transitive linear groups. American M. S. Bull. (2) 8, 394-401.

„Bei der Erforschung der Gruppe, welche für jedes gegebene Feld durch die Multiplikationstafel einer beliebigen gegebenen Gruppe definiert wird, ist es notwendig, die Typen einfach transitiver, linearer, homogener Gruppen G zu erörtern, deren Transformationen in der Form gegeben werden können:

$$\xi_1' = \eta_1\xi_1, \; \xi_2' = \eta_2\xi_1 + \eta_1\xi_2, \; \xi_3' = \eta_3\xi_1 + \alpha\xi_2 + \eta_1\xi_3,$$
$$\xi_4' = \eta_4\xi_1 + \beta\xi_2 + \gamma\xi_3 + \eta_1\xi_4,$$
$$\xi_5' = \eta_5\xi_1 + \lambda\xi_2 + \mu\xi_3 + \nu\xi_4 + \eta_1\xi_5, \; \dots$$

Hier sind $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \dots$ unabhängige Parameter, während $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \dots$ lineare homogene Funktionen der η_i sind. Burnside war zu dem irrigen Schlusse geführt worden, daß jede solche Gruppe eine Abelsche Gruppe ist" (F. d. M. **29**, 103-105, 1898). Der Verf. weist an dem besonderen Falle von $n = 3$, 4, 5 Variabeln das wahre Sachverhältnis nach. Während für $n = 3$ die Gruppe in der Tat eine Abelsche ist, braucht dies für $n = 4$ und 5 nicht zu gelten, wo besondere Bedingungen zu diesem Behufe zu erfüllen sind. Die Stelle des Beweises von Burnside, wo der Fehlschluß gemacht ist, wird genau bezeichnet. Lp.

L. E. Dickson. The groups of Steiner in problems of contact. American M. S. Trans. 3, 38-45.

L. E. Dickson. The groups of Steiner in problems of contact (second paper). American M. S. Trans. 3, 377-382.

Ist C_n eine Kurve n-ter Ordnung ohne Doppelpunkte, so gibt es $2^{\frac{1}{2}n(n-3)}$ $(2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} - 1)$ Kurven $(n - 3)$-ter Ordnung, welche die gegebene C_n in $\frac{1}{2}n(n - 3)$ Punkten zweipunktig berühren. (Vergl. Clebsch, J. für Math. **63**, 208, 1864). Die Bestimmung dieser Kurven $(n - 3)$-ter Ordnung hängt von einer Gleichung des Grades $2^{2p-1} - 2^{p-1}$ ab, wobei p das Geschlecht der C_n bedeutet. Die Gruppe dieser algebraischen Gleichung ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist, Untergruppe einer Gruppe G oder G_1; diese Gruppen heißen nach C. Jordan (Traité des substitutions (1870), p. 229) Steinersche Gruppen. C. Jordan hat in seinem Traité bewiesen, daß die geradem n entsprechende Gruppe G holoedrisch isomorph mit der linearen Abelschen Gruppe, die ungeradem n entsprechende Gruppe G_1 holoedrisch isomorph mit der ersten hypoabelschen Gruppe ist. Die fragliche lineare Abelsche sowie die hypoabelsche Gruppe sind hierbei Gruppen in $2p$ Variablen mit Koeffizienten

mod. 2. Verf. liefert für diese Jordanschen Resultate einfachere und direktere Beweise, und zwar in der ersten Arbeit für ungerades n, in der zweiten Arbeit für gerades n. Ly.

G. A. Miller. On the groups of order p^m which contain operators of order p^{m-2}. American M. S. Trans. 3, 383-387.

Die Gruppen der Ordnung p^m (p Primzahl) mit einer invarianten cyklischen Untergruppe der Ordnung p^{m-2} hat W. Burnside in seiner Theory of groups of finite order (1897), S. 75 bestimmt. Die Gruppen der Ordnung p^m, welche die Abelsche Gruppe des Typus $(m-2, 1)$ zur Untergruppe besitzen, hat Verf. in den American M. S. Trans. **2**, 259, 1901 (F. d. M. **32**, 143, 1901) untersucht. Die vorliegende Arbeit handelt von den noch fehlenden Gruppen der Ordnung p^m mit Elementen der Ordnung p^{m-2}. Die bewiesenen Resultate sind folgende: Ist die Primzahl $p > 2$ und $m > 5$, so gibt es nur zwei Gruppen der Ordnung p^m, welche Elemente der Ordnung p^{m-2} enthalten und weder eine invariante cyklische Untergruppe dieser Ordnung noch eine Abelsche Untergruppe des Typus $(m-2, 1)$ besitzen. Es gibt fünf Gruppen der Ordnung 2^m $(m > 5)$ mit Elementen der Ordnung 2^{m-2}, bei denen keine cyklische Untergruppe der Ordnung 2^{m-2} invariant ist oder durch eine Abelsche Untergruppe der Ordnung 2^{m-1} in sich transformiert wird. Ly.

G. A. Miller. Groups defined by the orders of two generators and the order of their product. American J. **24**, 96-100.

Sind L und M zwei Elemente der Ordnungen l und m, und hat ihr Produkt $N = L \cdot M$ die Ordnung n, so ist die durch L und M erzeugte endliche Gruppe völlig bestimmt, wenn zwei der drei Zahlen l, m, n gleich zwei, oder $l = 2$, $m = 3$ und n eine der Zahlen 3, 4, 5 sind. Verf. beweist durch Bildung von transitiven Permutationsgruppen, daß, wenn die Zahlen l, m, n größer als 1 sind und die obigen Bedingungen nicht erfüllen, es ein unendliches System endlicher Gruppen gibt, die von den zwei Operationen L und M der vorgegebenen Ordnungen l und m erzeugt werden, und bei denen auch das Produkt $L \cdot M$ die vorgeschriebene Ordnung n besitzt. (Vergl. die Voranzeige in C. R. **133**, 624, 1901, sowie F. d. M. **32**, 144, 1901). Ly.

G. A. Miller. On a method of constructing all the groups of order p^m. American J. **24**, 395-398.

Jede Gruppe G der Ordnung p^m (p Primzahl) besitzt bekanntlich eine invariante Untergruppe H der Ordnung p^{m-1}. Verf. denkt sich G als reguläre Permutationsgruppe dargestellt. Bei dieser Darstellung hat

H p Systeme der Intransitivität, und diese p transitiven Komponenten werden durch jede Permutation von G, die nicht H angehört, cyklisch transformiert. Die Gruppen G der Ordnung p^m sucht Verf. dann auf dem Wege zu konstruieren, daß er die Operationen bestimmt, die zu H hinzutreten müssen, um alle Gruppen G der Ordnung p^m, die H zur invarianten Untergruppe haben, zu erzeugen. Für den Fall, daß H eine Abelsche Gruppe ist, hat sich Miller mit diesem Problem schon in seiner Arbeit „Determination of all the groups of order p^m which contain the Abelian group of type $(m-2, 1)$, p being any prime" (American M. S. Trans. **2**, 264, 1901) beschäftigt. Ly.

G. A. Miller. Note on the group of isomorphisms of a group of order p^m. Annals of Math. (2) **3**, 180-184.

Einen einfachen Isomorphismus einer Gruppe in sich selbst, den man nach Frobenius als Automorphismus (Berl. Ber. 1901, 1324) bezeichnet, hat Verf. gleichzeitig mit Frobenius Holomorphismus genannt (Annals of Math. (2) **2**, 78, 1901). Der vorliegende Aufsatz beschäftigt sich mit den Holomorphismen einer Gruppe G von Primzahlpotenzordnung p^m, die Operationen entsprechen, welche in der Isomorphismengruppe von G die Ordnung p^λ besitzen. Für den Fall, daß G eine Abelsche Gruppe der Ordnung p^m ist, untersucht Verf. auch eine Abelsche Untergruppe der Isomorphismengruppe von G; diese Abelsche Untergruppe hat mit ihren konjugierten Gruppen nur die ausgezeichneten Elemente der Isomorphismengruppe gemeinsam. Ly.

G. A. Miller. On the abelian groups which are conformal with non-abelian groups. American M. S. Bull. (2) 8, 154-156.

Zwei verschiedene Gruppen heißen nach dem Verf. (Quart. J. **28**, 270, 1896) „konform", wenn sie dieselbe Anzahl von Operatoren jeder Ordnung enthalten. Der gegenwärtige Aufsatz bestimmt alle Abelschen Gruppen, die mit nicht-Abelschen Gruppen konform sind. „Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine beliebige Abelsche Gruppe von der Ordnung $2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots$ (wo $p_1, p_2, \dots$ verschiedene ungerade Primzahlen sind) mit mindestens einer nicht-Abelschen Gruppe konform sei, sind diese: 1. Mindestens eine ihrer Untergruppen von den Ordnungen $2^{\alpha_0}, p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots$ ist nicht-cyklisch. 2. Wenn die Ordnung $p_\beta^{\alpha_\beta}$ dieser Untergruppe ungerade ist, so ist $\alpha_\beta > 2$; wenn die Ordnung gerade ist (2^{α_0}), so muß die Untergruppe Operatoren von der Ordnung 4 und $\alpha_0 > 3$ enthalten." Da jede Gruppe dieser Faktoren nicht-Abelsch sein kann, so kann es nicht eine obere Grenze für die Anzahl der nicht-Abelschen Gruppen geben, die mit einer Abelschen Gruppe konform sein können. Lp.

G. A. MILLER. Determination of all the groups of order p^m, p being any prime, which contain the abelian group of order p^{m-1} and of type (1, 1, 1, ...). American M. S. Bull. (2) 8, 391-394.

Es sei ϑ die Gruppe der Isomorphismen der Abelschen Gruppe H vom Typus (1, 1, 1, ...), deren unabhängige „Generatoren" $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$ sind. Eine ihrer Untergruppen ϑ_1 von der Ordnung $p^{\frac{1}{2}(m-1)(m-2)}$ wird aus allen Operatoren von ϑ gebildet, die den Holomorphismen von H entsprechen, in welchen t_a ($\alpha = 2, 3, \ldots, m - 1$) sich selbst entspricht, multipliziert mit irgend einem Operator in der durch $t_1, t_2, \ldots, t_{\alpha-1}$ erzeugten Gruppe. Hierüber gilt folgender Satz: Wenn $h_1 = p^\lambda$, so ist die Anzahl solcher Systeme cyklischer Untergruppen von ϑ_1, bei denen jedes System ein vollständiges System von Konjugierten unter ϑ umfaßt, gleich der Anzahl der Partitionen von λ bezüglich der Addition, wenn die Anzahl der Addenden $m - 1 - \lambda$ nicht übersteigt. Hieraus werden verschiedene Folgerungen gezogen. Lp.

G. A. MILLER. On an infinite system of conformal groups. Messenger (2) 31, 148-150.

Zwei Abelsche Gruppen können nicht konform sein; dagegen gibt es viele nicht-Abelsche Gruppen, die mit Abelschen Gruppen konform sind. Die vorliegende Note ist einem unendlichen System nicht-Abelscher Gruppen gewidmet, die nicht mit irgend einer Abelschen Gruppe konform sind. Lp.

G. A. MILLER. On the group of isomorphisms of an Abelian group. Prace mat.-fiz. 13, 155-158.

G. A. MILLER. Gruppi d'ordine p^m (p primo) non conformi con gruppi abeliani. Mat. pure ed appl. 2, 19-21.

T. M. PUTNAM. On the quaternary linear homogeneous group and the ternary linear fractional group. American J. 24, 319-366.

In einer früheren Arbeit (American J. 23, 41; F. d. M. 32, 134, 1901) hat Verf. die Einteilung der Substitutionen der quaternären allgemeinen linearen homogenen Gruppe mit Koeffizienten aus dem Galoisschen Felde $[p^n]$ in Klassen, die nur konjugierte Substitutionen enthalten, gegeben. Hier führt er die analoge Untersuchung für die quaternäre spezielle lineare homogene Gruppe und die aus ihr entstehende gebrochene ternäre Gruppe, die Koeffizienten aus dem Galoisschen Felde $[p^n]$ haben, durch. Ly.

W. B. Fite. On metabelian groups. American M. S. Trans. 3, 331-353.

Eine Gruppe heißt nach dem Verf. metabelsch, wenn die Gruppe ihrer kogredienten Isomorphismen Abelsch ist. Die metabelschen Gruppen gehören als spezielle Fälle zu denjenigen Gruppen, die das direkte Produkt von Gruppen von Primzahlpotenzordnung sind. (Vgl. F. d. M. **32**, 148, 1901). Damit eine Gruppe metabelsch ist, ist notwendig und hinreichend, daß ihre Kommutatoren ausgezeichnete Elemente sind. Für die Ordnungszahlen der Kommutatoren einer metabelschen Gruppe gilt der Satz: Die Ordnung jedes Elements der kogredienten Isomorphismengruppe einer metabelschen Gruppe G ist Ordnungszahl eines Kommutators von G.

Das Studium der metabelschen Gruppen führt auf die Frage nach jenen besonderen Abelschen Gruppen, die überhaupt kogrediente Isomorphismengruppen einer Gruppe sein können. Eine cyklische Gruppe kann dies z. B. nicht sein (G. A. Miller). Verf. beweist u. a.: „Die kogrediente Isomorphismengruppe einer Gruppe kann nicht das direkte Produkt cyklischer Gruppen sein, deren Ordnungszahlen so beschaffen sind, daß irgend eine von ihnen nicht wenigstens eine der anderen Ordnungszahlen ohne Rest teilt.“

Verf. weist nach, daß metabelsche Gruppen existieren, bei denen das Produkt zweier Kommutatoren kein Kommutator ist. Ferner bestimmt er die Anzahl metabelscher Gruppen von Primzahlpotenzordnung, deren ausgezeichnete Elemente eine cyklische Gruppe bilden. Die Anzahl dieser Gruppen hängt nur von den unter einander verschiedenen Ordnungszahlen der unabhängigen erzeugenden Elemente der zugehörigen kogredienten Isomorphismengruppe, nicht aber von der Anzahl dieser erzeugenden Elemente ab. „Die Anzahl metabelscher Gruppen, deren ausgezeichnete Elemente eine cyklische Gruppe der Ordnung p^a bilden, wobei p eine Primzahl ist, und deren kogrediente Isomorphismengruppe von der Ordnung $p^{2(a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n)}$ des Typus

$$(1) \qquad (\alpha_1, \alpha_1, \ldots; \alpha_2, \alpha_2, \ldots; \ldots; \alpha_n, \alpha_n, \ldots)$$

ist, beträgt $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 - \alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_n - \alpha_{n-1} + 1)$. In (1) seien die Zahlen $\alpha_i \, (i = 1, 2, \ldots, n)$, von denen jede eine gerade Anzahl mal, $2s_i$, auftritt, so geordnet, daß $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_n \leqq \alpha$.“ Der Schluß des Aufsatzes zeigt, daß ebenso wie nicht jede Abelsche, auch nicht jede metabelsche Gruppe kogrediente Isomorphismengruppe einer Gruppe sein kann. Ly.

W. B. Fite. Concerning the commutator subgroups of groups whose orders are powers of primes. American M. S. Bull. (2) 9, 139-141.

Folgende Sätze werden bewiesen: 1. Ist eine Gruppe G von der Ordnung p^m (wo p eine Primzahl) und der Klasse $2k$ oder $2k+1$, so ist ihre Kommutator-Untergruppe von der Klasse l, wo $l \leqq k$. 2. Hat eine Gruppe G von der Ordnung p^m (wo p eine Primzahl) und der Klasse $k (k \leqq p)$ eine Abelsche Kommutator-Untergruppe, so kann G' nicht ein System solcher Generatoren haben, daß die Ordnung eines der-

selben größer ist als die Ordnung jedes einzelnen der anderen. 3. Hat eine Gruppe G von der Ordnung $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ (wo $p_1, p_2, \dots, p_n$ verschiedene Primzahlen) eine Kommutator-Untergruppe von der Ordnung p_1^{β}, und ist p_1^{γ} nicht kongruent 1 modulo p_i $(v < \gamma \leqq \beta;\ i = 2, 3, \dots, n)$, so ist G das direkte Produkt von Gruppen der Ordnungen $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_n^{\alpha_n}$.

Lp.

W. B. Fite. Concerning the class of a group of order p^m that contains an operator of order p^{m-2} or p^{m-3}, p being a prime. American M. S. Bull. (2) 8, 236-239.

Beweis folgender Sätze: Eine Gruppe von der Ordnung p^m, die einen Operator von der Ordnung p^{m-2} enthält, ist von der Klasse k, wo $k \gtreqless 3$, wenn p eine ungerade Primzahl ist. Ferner ist $k \gtreqless 4$, wenn die Gruppe von der Ordnung p^m ist und einen Operator von der Ordnung p^{m-3} enthält, wo p eine Primzahl > 3 ist.

Lp.

J. W. Young. On the holomorphisms of a group. American M. S. Trans. 3, 186-191.

Ist eine endliche abstrakte Gruppe G auf sich selbst oder auf eine ihrer Untergruppen derartig isomorph bezogen, daß jeder Operation von G ihre a-te Potenz entspricht, so führt der Verf. hierfür die Bezeichnung a-Isomorphismus ein. Ist der betrachtete Isomorphismus holoedrisch, so spricht Verf. von einem a-Holomorphismus. Für Abelsche Gruppen hat G. A. Miller (American M. S. Trans. **2**; F. d. M. **32**, 143, 1901) bereits a-Holomorphismen betrachtet. Young beweist u. a.: Damit eine endliche Gruppe G einen a-Holomorphismus gestatten soll, müssen die $(a - 1)$-ten Potenzen jedes Elementes von G ausgezeichnete Elemente von G sein. Jede Gruppe, die einen a-Holomorphismus besitzt, gestattet einen $(a - 1)$-Isomorphismus. Sind bei irgend einer Gruppe die zwei angegebenen, für den a-Holomorphismus notwendigen Bedingungen erfüllt, so existiert auch stets, wenn a relativ prim zu der Ordnung jedes Elementes der Gruppe ist, ein a-Holomorphismus von G. Jede Operation, die in der Isomorphismengruppe von G einem a-Holomorphismus entspricht, ist eine ausgezeichnete Operation der Isomorphismengruppe von G.

Ly.

A. Young. On quantitative substitutional analysis (Second paper). Lond. M. S. Proc. 34, 361-397.

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortführung der vom Verf. in den London M. S. Proc. **33**, 97 (F. d. M. **32**, 1901, 157) veröffentlichten. Obgleich von den gruppentheoretischen fundamentalen Untersuchungen von Frobenius völlig unbeeinflußt entstanden, steht der erste Teil der vorliegenden Abhandlung, wie Frobenius im § 8 seiner Arbeit „Über

die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe", Berl. Ber. 1903, ausführt, in innigstem Zusammenhange mit Frobenius' Behandlung der Charaktere der symmetrischen Gruppe. Von des Verf. wichtigen Ergebnissen über die Permutationen der symmetrischen Gruppe dem Leser hier in Kürze ein Bild zu geben, erscheint mir wegen der verwandten komplizierten Formelsymbolik nicht möglich. Eine Fortführung sowie durchsichtigere und vereinfachte Darstellung der erzielten Resultate hat Frobenius in der zitierten Arbeit, über die im nächstjährigen Bande der Fortschritte zu referieren sein wird, gegeben.

Im zweiten Teile wendet der Verf. seine Resultate über die Permutationen der symmetrischen Gruppe auf Invariantentheorie an. Er zeigt auf diesem Wege, daß jede ganze rationale Funktion der Koeffizienten von Formen in mehreren Reihen von gleichvielen Variablen sich durch die Koeffizienten von Konkomitanten dieser Formen linear ausdrücken läßt. Ferner weist er nach, daß die Invarianten einer einzelnen binären Form n-ten Grades linear durch gewisse Invarianten $f(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ausdrückbar sind; hierbei sind $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ gewisse Zahlen, welche die Invarianten f völlig charakterisieren und den Gleichungen

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = \delta,$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + n\alpha_n = \alpha_{n-1} + 2\alpha_{n-2} + \dots + n\alpha_0 = w$$

genügen. δ bedeutet den Grad, w das Gewicht der Invarianten.

Ly.

R. Le Vavasseur. Les groupes d'ordre p^2q^2, p étant un nombre premier plus grand que le nombre premier q. Ann. de l'Éc. Norm. **19**, 335-355.

Verf. leitet alle in der Überschrift genannten Gruppen mit Angabe ihrer erzeugenden Operationen her. Die fraglichen Gruppen der Ordnung $p^2 q^2$ besitzen, wie aus einem bekannten Sylowschen Satz unmittelbar folgt, außer im Falle $p = 3, q = 2$ eine invariante Untergruppe der Ordnung p^2. Eine vorläufige Mitteilung der Resultate hatte Verf. bereits in C. R. **128**, 1152-1153 (F. d. M. **30**, 145, 1899) gegeben. Ly.

L. Autonne. Sur les groupes réguliers d'ordre fini. C. R. **134**, 640-642.

Verf. teilt in Fortführung seiner Untersuchungen in den C. R. **132** (F. d. M. **32**, 151, 1901) einige Sätze über quaternäre reguläre Gruppen (d. h. Gruppen, deren Substitutionen die alternierende bilineare Form $x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3$ mit kogredienten Variablen in sich transformieren) ohne Beweis mit. Z. B. jede reguläre Gruppe, deren Substitutionen auch die Hermitesche Form $x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_3 + x_4 \bar{x}_4$ mit konjugiert imaginären Variablen in sich überführen, ist meroedrisch isomorph zu einer quinären reellen orthogonalen Gruppe. — Angabe der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß irgend eine

endliche Gruppe in n Variablen in eine reelle orthogonale Gruppe transformiert werden kann. Ly.

L. Autonne. Sur un groupe nouveau, d'ordre fini, linéaire à quatre variables. C. R. **135**, 22-23.

Angabe einer regulären, unzerlegbaren (vgl. wegen der Bezeichnungen das vorstehende Referat, sowie F. d. M. **32**, 152, 1901) quaternären endlichen Gruppe von 120 linearen, homogenen Substitutionen, die meroedrisch isomorph zu der alternierenden Gruppe von fünf Buchstaben ist. Ly.

L. Autonne. Sur les substitutions crémoniennes dans l'espace. C. R. **135**, 776-778.

Verf. ergänzt in dem vorliegenden Aufsatze einige Untersuchungen des dritten Teiles seiner Preisschrift „Sur les formes quaternaires à deux séries de variables" (Bruxelles 1901). Es handelt sich vorzüglich um die Erweiterung der vom Verf. für die Ebene durchgeführten Theorien über Cremonianen, crémoniques vom Verf. bezeichnet (Journ. de Math. (4), **3** und **4**; F. d. M. **19**, 142, 1887; **20**, 852, 1888), auf den Raum. Es wird also eine besondere Gattung von birationalen Transformationen mit zwei Reihen von vier homogenen Variablen, Koordinaten eines Punktes und einer Ebene, behandelt. Ly.

E. Ciani. Sopra i gruppi finiti di collineazioni quaternarie, oloedricamente isomorfi con quelli dei poliedri regolari. Annali di Mat. (3) 8, 1-38.

Das in der Überschrift gekennzeichnete Problem stellt einen Spezialfall der von Maschke (Math. Ann. **51**, 253; F. d. M. **29**, 115, 1898) geleisteten Bestimmung aller ternären und quaternären Kollineationsgruppen, welche mit symmetrischen und alternierenden Buchstabenvertauschungsgruppen holoedrisch isomorph sind, dar. Während Maschke das allgemeinere Problem rein analytisch behandelt, bedient sich Verf. geometrischer Überlegungen. Er findet 13 Gruppen, von denen drei vom Tetraeder-, je fünf vom Oktaeder- und Ikosaedertypus sind. Elf der erhaltenen Gruppen sind reell und finden sich daher auch in der Arbeit von Bagnera „I gruppi finiti reali di sostituzioni quaternarie lineari" (Palermo Rend. **15**; F. d. M. **32**, 155, 1901). Die beiden nicht in reeller Gestalt darstellbaren Gruppen sind vom Ikosaedertypus; von ihnen wird die eine wegen ihres geometrischen Interesses ausführlich und eingehend untersucht. Sie ist unter allen 13 Gruppen dadurch ausgezeichnet, daß die Fläche niedrigster Ordnung, die sie invariant läßt, vom vierten Grade ist; sie besitzt ein Büschel solcher Flächen. Sie allein weist unter allen fünf Gruppen vom Ikosaedertypus nicht zerfallende invariante kubische Raumkurven auf, und zwar zwei und auch nur zwei. Ly.

F. Gerbaldi. Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane. Palermo Rend. **16**, 129-154.

Verf. setzt seine Untersuchungen über die einfache Gruppe von 360 ebenen Kollineationen fort. (Palermo Rend. **12**, **13**, **14**; F. d. M. **29**, 120, 1898; **30**, 147, 1899; **31**, 145, 1900). Es handelt sich vorzüglich um die Aufstellung und nähere Untersuchung der Invarianten der G_{360} und ihrer Untergruppen sowie der Gleichungen 6., 10. und 15. Grades, zu denen die G_{360} wegen der in ihr auftretenden Untergruppen führt. Infolge des großen Formelapparats muß bezüglich Einzelheiten auf die inhaltreiche Arbeit selbst verwiesen werden. Ly.

A. Bienaymé. Sur un problème de substitutions étudié par Monge. Nouv. Ann. (4) **2**, 443-446.

Behandlung eines von Monge (Mém. des savants étrangers, t. 7 (1773)) angegebenen Spieles des Mischens von mit Nummern versehenen Karten. Ly.

E. N. Martin. On the imprimitive substitution groups of degree fifteen and the primitive substitution groups of degree eighteen. Diss. Baltimore. 28 S. 4°.

Separatabzug aus American J. **23**, 259-286, 1901. Referat in F. d. M. **32**, 157, 1901. Ly.

E. Cartan. Sur la structure des groupes infinis. C. R. **135**, 851-854.

Sind $m+n$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_m$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gegeben, und transformiert die Gruppe G die Variabeln x, die Gruppe G' die Variabeln x und y, so heißt die Gruppe G' die Fortsetzung von G, wenn sie die Variabeln x unter einander und zwar in gleicher Weise wie G transformiert. Die Fortsetzung heißt holoedrisch, wenn in G' die identische Transformation allein die Variabeln x in Ruhe läßt. Zwei Gruppen G und G_1 heißen isomorph, wenn zwei ähnliche Gruppen G' und G'_1 existieren, die aus der holoedrischen Fortsetzung von G und G_1 hervorgehen. Diese Definitionen gelten nicht bloß für endliche, sondern auch für unendliche Transformationsgruppen.

Nun kann eine endliche Gruppe stets so holoedrisch fortgesetzt werden, daß sie r Pfaffsche Ausdrücke $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, die ein vollständiges geschlossenes System bilden, invariant läßt. In ähnlicher Weise kann eine unendliche und transitive Gruppe so holoedrisch fortgesetzt werden, daß sie als größte Gruppe definiert werden kann, die r Pfaffsche Ausdrücke $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ invariant läßt, welche ein vollständiges, aber nicht mehr geschlossenes System bilden. Lsg.

S. Epsteen. Les groupes qui coincident avec leurs groupes adjoints. Math. Ann. 56, 165-168.

Verf. stellt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür auf, daß eine von r infinitesimalen Transformationen X_k ($k = 1, 2, \dots, r$) erzeugte endliche kontinuierliche Transformationsgruppe mit ihrer adjungierten Gruppe zusammenfällt. Die Gruppe muß linear und homogen von der Form:

$$\begin{aligned} X_k = & (a_{11}^{(k)} x_1 + \dots + a_{1n}^{(k)} x_n) p_1 \\ + & \\ \vdots & \\ + & (a_{n1}^{(k)} x_1 + \dots + a_{nn}^{(k)} x_n) p_n \\ & (k = 1, 2, \dots, r) \end{aligned}$$

sein und die gleiche Anzahl von Variablen wie Parametern ($n = r$) haben. Schließlich müssen zwischen den a und den Konstanten der Zusammensetzung der Gruppe r^3 verträgliche Gleichungen mit r^3 Unbekannten, die linear auftreten, bestehen. Ly.

W. Ahrens. Über Transformationsgruppen, deren sämtliche Untergruppen invariant sind. Hamb. Mitt. 4, 72-78.

Verf. beweist für die Theorie der endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen folgendes Resultat: „Die Abelschen Gruppen und diejenige dreigliedrige Gruppe vom Range Null, deren Transformationen nicht sämtlich vertauschbar sind, und auch nur diese haben die Eigenschaft, daß alle ihre Untergruppen (die eingliedrigen im zweiten Falle ausgenommen) invariant sind; diese Gruppen sind zugleich die einzigen Gruppen, deren sämtliche zweigliedrige Untergruppen invariant sind."

Ly.

H. Laurent. Sur les groupes qui dépendent de fonctions arbitraires. Nouv. Ann. (4) 2, 77-82.

Handelt vorzüglich von den Transformationen, welche die lineare homogene partielle Differentialgleichung:

$$A_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \dots + A_n \frac{\partial f}{\partial y_n} = 0$$

invariant lassen. Verf. unterläßt es, bei seinen Darlegungen irgend ein Zitat aus der reichhaltigen Literatur zu geben. Ly.

K. Wörner. Über eine besondere Gattung von Gruppen. Freiburg. 36 S. 8°.

B. Determinanten.

A. Calegari. I determinanti di specie superiore. Mat. pure ed appl. **2**, 177-184, 199-203.

In der Arbeit werden die Haupteigenschaften der Determinanten höheren Ranges und die Regeln für die Rechnung mit ihnen zusammengestellt. Bei der Entwicklung der Determinanten nach den Elementen einer Schicht und bei den Sätzen über das Verhalten der Determinanten gegenüber der Vertauschung zweier parallelen Schichten tritt der Unterschied zwischen den Determinanten ungeraden Ranges und geraden Ranges deutlich hervor. Außer einigen einfachen Sätzen ist in der Arbeit noch die Entwicklung einer Determinante nach Unterdeterminanten zu finden, sowie die Darstellung des Produktes zweier Determinanten höheren Ranges in Determinantenform — und zwar auf zwei wesentlich verschiedene Arten. Lwt.

N. Traverso. Sopra una generalizzazione della teoria di determinanti (contin. e fine, v. vol. **39**, 225-239). Batt. G. **40**, 308-324.

In dem zweiten und abschließenden Teil seiner Arbeit teilt der Verf. verschiedene Methoden mit, eine rechtwinklige Hyperdeterminante zu entwickeln. Dazu beweist er eine Reihe von Sätzen, zu deren Charakterisierung es genügt, einen herauszugreifen: Eine Hyperdeterminante ist gleich der Summe der Produkte, die man erhält durch Multiplikation der $\varrho_1, \ldots, \varrho_s$-ten Horizontal-, bezw. Vertikalreihe mit entsprechenden Komplementarreihen. Jhk.

N. Traverso. Sulle principali operazioni dell' analisi combinatoria formale e su alcune loro applicazioni relative allo sviluppo rapido dei determinanti e degli iperdeterminanti. Periodico di Mat. (2) **5**, 1-30, 73-116, 155-184.

Als Vorbereitung für die Entwicklung der Determinanten und der Hyperdeterminanten (vergl. das vorstehende Referat und F. d. M. **32**, 166, 1901) zeigt der Verf. zuerst, nach welchen verschiedenen Arten man in der kombinatorischen Analysis die gesetzmäßige Bildung der Permutationen vollziehen kann. Hiernach werden die Anwendungen auf die Entwicklung der Determinanten gemacht. Ebenso führt die Theorie der zweidimensionalen Kombination von mn gegebenen Elementen zu der Entwicklung der Hyperdeterminanten. § 1. Methoden zur raschen Bildung der Permutationen von n gegebenen Elementen. § 2. Rasche Bildung der Kombinationen und einfachen Verteilungen von n Elementen zu je m. § 3. Rasche Bildung und Darstellung der Permutationen von n Elementen, die nicht alle verschieden sind. § 4. Methoden zur schnellen Entwicklung der Determinanten. § 5. Bildung und Aufzählung der zweidimensionalen Kombinationen von mn gegebenen Elementen (S. 75-116, 153

bis 180). § 6. Begriffe über die Hyperdeterminanten; Methoden zu ihrer Entwicklung und zur Bestimmung der Anzahl ihrer Glieder. Lp.

L. Carlini. Sopra due tipi di relazioni fra i prodotti delle coppie di matrici coniugate formate coi medesimi elementi. Periodico di Mat. (2) **4**, 175-179.

Es seien A und B zwei konjugierte rechtwinklige Matrizen, bezw. gebildet aus den Elementen:

$$a_{kj}\ (k=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n),$$
$$b_{ih}\ (i=1,2,\ldots,p;\ h=1,2,\ldots,q);$$

die Vertikalen gleichen Ranges mögen sich entsprechen. Unter der Voraussetzung $n \leqq q$ setze man

$$c_{ik}=a_{k1}b_{11}+a_{k2}b_{12}+\cdots+a_{kn}b_{1n},$$

dann ist

$$A\cdot B=D=\begin{vmatrix} c_{11}\, c_{12} \ldots c_{1n}\, b_{1,n+1} \ldots b_{1q} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_{p1}\, c_{p2} \ldots c_{pn}\, b_{p,n+1} \ldots b_{pq} \end{vmatrix}$$

die Determinante, von der verschiedene Eigenschaften abgeleitet werden (vergl. F. d. M. **32**, 168, 1901). Lp.

M. T. Huber. Zur Determinantentheorie. Wiad. mat. **6**, 317-324 (Polnisch).

Ableitung verschiedener Formeln für die Anzahl aller Glieder einer Determinante, welche eine gegebene Anzahl der Elemente der Hauptdiagonale oder bestimmte Elemente derselben in einer beliebigen oder bestimmten Ordnung enthalten, usw. Fortsetzung der bezüglichen Untersuchungen von Oettinger, Lehre v. Comb. 1837; Cantor, Schlöm. Ztschr. **2**, 1857; Baltzer, Leipzig. Ber. 1873; Weyrauch, J. für Math. **74** u. a. Dn.

L. Orlando. Relazione fra i minori d'ordine p d'una matrice quadrata di caratteristica p. Batt. G. **40**, 275-277.

Der Verf. beweist den folgenden Satz: Wenn die Matrix einer Determinante $\varDelta$ der Ordnung n die Charakteristik p hat, und wenn man aus den Minoren p-ter Ordnung der Determinante $\varDelta$ die Determinante D von der Ordnung $\binom{n}{p}$ in bekannter Weise bildet, so verschwinden die Minoren zweiter Ordnung dieser Determinante D. Jhk.

Fr. Palatini. L'ordine della varietà che annulla i subdeterminanti di un dato grado di un determinante emisimmetrico. Rom. Acc. L. Rend. (5) **11**$_1$, 315-318.

Betrachtet man im R_n alle ∞^m linearen Linienkomplexe, wo

$$2m = (n+2)(n-1),$$

so gehört zu jedem Komplex ein Nullsystem, d. h. eine Reziprozität, wo jeder Punkt in der ihm entsprechenden Hyperebene liegt, und die Determinante dieser Verwandtschaft ist halbsymmetrisch, vom Grade $n+1$. Wenn deren Unterdeterminanten vom Grade $2r+2$ verschwinden, so degeneriert der Komplex und erlangt die bemerkenswerte Eigenschaft, einen Zentralraum von der Dimension $n-2r$ zu besitzen. Der Verf. bestimmt nun die Ordnung derjenigen Mannigfaltigkeit von Komplexen, welchen die genannte Eigenschaft zukommt, wo also die Minoren eines gegebenen Grades $(2r+2)$ der halbsymmetrischen Determinante verschwinden. Ist z. B. $n = 2q+1$, $r = q$, so hat jene Mannigfaltigkeit die Ordnung $q+1$, wie schon Herr Castelnuovo gefunden. Jhk.

E. J. Nanson. A note on determinants. Messenger (2) **31**, 140-143.

Gegenstand der Note ist der Nachweis, daß die linearen Relationen zwischen gewissen Unterdeterminanten jeder symmetrischen Determinante, welche 1882 von Kronecker entdeckt wurden, und daher auch ein Muirscher Satz bezüglich gewisser verschwindender Aggregate von Determinanten, die aus einer allgemeinen Determinante hergeleitet werden, unmittelbare Folgerungen aus einem Sylvesterschen Satze sind, welcher das harmonische Determinantentheorem genannt werden kann. Lp.

Th. Muir. Note on Kronecker's linear relation in determinants. Messenger (2) **32**, 4-6.

Aus Anlaß der Note von Nanson (vergl. das vorangehende Referat) beschäftigt sich der Verf. mit einem Hülfssatze jener Note, den er so faßt: „Wenn die gewöhnliche Entwicklung der n-reihigen Determinante $|a_\alpha\, b_\beta\, c_\gamma \dots|$ mit der gleichen Entwicklung der n-reihigen Determinante $|a_{\alpha'}\, b_{\beta'}\, c_{\gamma'} \dots|$ multipliziert wird und in dem Resultate das Produkt jedes Paares der a, jedes Paares der b usw. in das Scheinprodukt ihrer Suffixe verwandelt wird, z. B. das Produkt $a_\alpha\, a_{\gamma'}$ in das einzelne Element $\alpha\gamma'$, so erhält man die gewöhnliche Entwicklung der Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \dots \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \dots \end{vmatrix},$$

und zwar n!-mal wiederholt." Lp.

Th. Muir. The applicability of the law of extensible minors to determinants of special form. Edinb. M. S. Proc. **20**, 44-49.

In dem Aufsatze „The automorphic linear transformation of a quadric" [F. d. M. **28**, 111, 1897] war vermutungsweise gesagt, daß das Gesetz der extensiblen Minoren auf Kroneckers lineare Relation zwischen den n-reihigen Minoren einer axisymmetrischen Determinante $(2n)$-ter Ordnung anwendbar sei. Der Beweis dieser Vermutung wird hier gegeben, und es wird auch gezeigt, daß das Gesetz auf Determinanten von einer anderen besonderen Form anwendbar ist, nämlich auf zentrosymmetrische Determinanten. Gbs. (Lp.)

Th. Muir. Vanishing aggregates of secondary minors of a persymmetric determinant. Edinb. Trans. **40**, 511-533.

Werden in einer, von Hankel ortho-, von Sylvester persymmetrisch genannten Determinante die erste und r-te Horizontal- sowie die erste und s-te Vertikalreihe weggelassen, so erhält man eine Unterdeterminante, welche der Verf. secondary minor nennt. Eine solche Unterdeterminante ist gleich der Summe zweier anderen, von denen die eine durch Weglassen der ersten und $(r+1)$-ten Horizontal- und der ersten und $(s-1)$-ten Vertikalreihe, die andere durch Weglassen der ersten und zweiten Horizontal- und der $(s-1)$-ten und r-ten Vertikalreihe entsteht. An dieses von T. Cazzaniga gefundene Resultat knüpft der Verf. an und stellt weitere Aggregate sekundärer Minoren auf, die verschwinden. U. a. findet er den einfachen Satz, daß der sekundäre Minor einer orthosymmetrischen Determinante n-ter Ordnung, der durch Weglassen der ersten und h-ten Horizontal- und der k-ten und n-ten Vertikalreihe entsteht, übereinstimmt mit demjenigen, den man durch Weglassen der ersten und $(k+1)$-ten Horizontal- und der $(h-1)$-ten und n-ten Vertikalreihe erhält. Jhk.

Th. Muir. Aggregates of minors of an axisymmetric determinant. Phil. Mag. (6) **8**, 410-416.

Kronecker hat bewiesen, daß für eine Determinante gerader $(2n)$, z. B. achter Ordnung, bei der $a_{rs} = a_{sr}$, die Summe der Unterdeterminanten

$$\sum \underline{\begin{vmatrix} 1\,2\,3\,\bar{4} \\ 5\,6\,7\,8 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 5\,6\,7\,8 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1\,2\,3\,5 \\ 4\,6\,7\,8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1\,2\,3\,6 \\ 4\,5\,7\,8 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1\,2\,3\,7 \\ 4\,5\,6\,8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1\,2\,3\,8 \\ 4\,5\,6\,7 \end{vmatrix}$$

verschwindet, wo die oberen Indices die Reihen-, die unteren die Kolumnenindizes der Unterdeterminante bezeichnen. Dieser Satz ist von Metzler erweitert worden; derselbe hat gezeigt, daß die Formel noch gilt, wenn

nur die Anzahl der unveränderlichen Reihenindizes größer als Null und kleiner als vier (allgemein $n-1$) ist. Die vorliegende Note beschäftigt sich mit der Metzlerschen Verallgemeinerung. Jhk.

Th. Muir. A continuant resolvable into rational factors. Edinb. Proc. **24**, 105-112.

Elliott hat auf indirektem Wege gezeigt, daß sich die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & p & \cdot & \cdot & & & \cdots \\ -1 & x & p-1 & \cdot & & & \cdots \\ \cdot & -2 & x & p-2 & & & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -(p-1) & x & 1 \\ & & & & & -p & x \end{vmatrix} = 0$$

entweder auf die Form

$$(x^2+1^2)(x^2+3^2)\dots(x^2+p^2)=0$$

oder auf

$$x(x^2+2^2)(x^2+4^2)\dots(x^2+p^2)=0$$

zurückführen läßt, je nachdem p ungerade oder gerade ist. Der Verf. teilt ein direktes Beweisverfahren mit, das ihn gleichzeitig zu einer Verallgemeinerung des Satzes führt. Jhk.

Th. Muir. Question 14792. Ed. Times (2) **1**, 52-53.

Dem Verf. wurde von Lord Kelvin 1886 folgender Satz mitgeteilt: „If in the case of each row of a determinant the square root of the sum of the squares of the elements be taken, the product of the said square roots is greater than the determinant". Der von Muir gegebene Beweis dieses Satzes wird an dem Beispiel der vierreihigen Determinante geführt. Ein zweiter Beweis von E. J. Nanson benutzt das Induktionsverfahren von $n-1$ auf n. Lp.

Th. Muir. The theory of Jacobians in the historical order of its development up to 1841. Edinb. Proc. **24**, 152-195.

Von der Ansicht ausgehend, daß Cauchy der erste gewesen ist, welcher Ausdrücke der Form $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$, wie sie verschiedentlich bereits in den Arbeiten des 18. Jahrhunderts auftreten, als Determinanten aufgefaßt hat, unterzieht der Verf. an erster Stelle die Abhandlung Cauchys „Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie" aus dem Jahre 1815 einer Besprechung unter Hervorhebung der geometrischen Anwendungen, welche daselbst von den Determinanten gemacht werden. Es folgen die Arbeiten Jacobis aus

J. für Math. **5** und **10**, woran sich die Hauptarbeit: De determinantibus functionalibus aus dem 22. Bande desselben Journals anschließt. Jhk.

Th. Muir. **The Jacobian of the primary minors of an axisymmetric determinant with reference to the corresponding elements of the latter.** Phil. Mag. (6) **4**, 507-512.

Th. Muir. **The theory of orthogonants in the historical order of its development up to 1832.** Edinb. Proc. **24**, 244-288.

Der Verf. beginnt mit einer Inhaltsangabe der auf das Hauptachsenproblem der Flächen zweiter Ordnung bezüglichen Arbeit Jacobis aus J. für Math. **2**. Er legt sodann ausführlich dar, wie dieselbe Methode, die Jacobi hier zur Aufstellung der kubischen Bestimmungsgleichung benutzt, auch in der Arbeit: De singulari quadam duplicis integralis transformatione zur Anwendung kommt. Handelt es sich in der erstgenannten Arbeit um die Transformation einer ternären quadratischen Form in die Form $L\xi^2+M\eta^2+N\zeta^2$ und in der zweiten um die Transformation einer quaternären quadratischen Form in die Form

$$G_1\xi_1^2+G_2\xi_2^2+G_3\xi_3^2+G_4\xi_4^2,$$

so löst Cauchy diese Aufgabe für die quadratischen Formen von n Variabeln in der Arbeit: „Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes.“ Prinzipiell wichtiger ist die Ausdehnung, welche Jacobi dem Transformationsproblem gibt, indem er statt eines Systems von drei Variablen deren zwei wählt.

Jhk.

E. Pascal. **A proposito di una recente ricerca del dott. Muir sul' hessiano di un determinante.** Lomb. Ist. Rend. (2) **35**, 941-950.

Betrachtet man eine Determinante n-ter Ordnung $\varDelta$ als algebraische Form ihrer n^2 Elemente, so kann man nach den invarianten Formen der Determinante fragen. Dem von Muir gefundenen Satz, wonach die Hessesche Form der Determinante (bis auf einen numerischen Faktor) gleich einer Potenz der ursprünglichen Determinante ist, fügt der Verf. das Resultat hinzu, daß auch die Charakteristik dieser Hesseschen Determinante (von demselben numerischen Faktor abgesehen) gleich einer Potenz von $\varDelta$ ist.

Jhk.

J. Brill. **Note on the algebraic properties of Pfaffians.** London M. S. Proc. **34**, 143-151.

Das bekannte Theorem über die Entwicklung einer Pfaffschen Funktion

$$[123\dots m]=[12][345\dots m]$$
$$-[13][245\dots m]+\cdots+(-1)^m[1m][234\dots m-1]$$

(m eine gerade Zahl) wird nach verschiedenen Richtungen verallgemeinert. Unter anderen kommt der Verf. zu dem folgenden allgemeinen Theorem:

$$[1\,2\,x_1\,y_1 \dots x_n\,y_n]\,[3\,4\,5 \dots m\,x_1\,y_1 \dots x_n\,y_n]$$
$$-[1\,3\,x_1\,y_1 \dots x_n\,y_n]\,[2\,4\,5 \dots m\,x_1\,y_1 \dots x_n\,y_n]$$
$$+\cdots+(-1)^m\,[1\,m\,x_1\,y_1 \dots x_n\,y_n]\,[2\,3\,4 \dots m-1\,x_1\,y_1 \dots x_n\,y_n]$$
$$=[x_1\,y_1 \dots x_n\,y_n]\,[1\,2\,3 \dots m\,x_1\,y_1 \dots x_n\,y_n].$$

Jhk.

J. Brill. Note on the algebraic properties of Pfaffians. Messenger (2) **32**, 88-92.

In Lond. M. S. Proc. **34**, 143-151 (vergl. den vorstehenden Bericht) beschäftigt sich der Verf. mit einigen algebraischen Eigenschaften der Pfaffschen Determinanten, die er bei der Untersuchung einer besonderen, bei der Reduktion eines Pfaffschen Ausdruckes wichtigen Identität entdeckt hat. In der vorliegenden Note werden einige andere Identitäten, auf welche die Theorie führt, abgeleitet; ihnen kommt aber nicht dieselbe Wichtigkeit zu wie der eben erwähnten. Lp.

A. Crepas. Determinanti figurati e determinanti speciali. Periodico di Mat. (2) **4**, 161-175.

Es sei F_p^q die figurierte Zahl

$$\frac{p(p+1)\dots(p+q-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots q},$$

so nennt der Verf. figurierte, aus $D=|a_{ik}|$ abgeleitete Determinante der Klasse s und des Grades q die Determinante:

$$D_q^s=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{s+1,1}+F_1^q & a_{s+1,2}+F_1^q & \dots a_{s+1,n}+F_1^q \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{s+r,1}+F_r^q & a_{s+r,2}+F_r^q & \dots a_{s+r,n}+F_r^q \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1}+F_{n-s}^q & a_{n2}+F_{n-s}^q & \dots a_{nn}+F_{n-2}^q \end{vmatrix}.$$

Setzt man an Stelle der figurierten Zahlen F_p^q die Pylogonalzahlen

$$P_r^q=r+\tfrac{1}{2}(q-2)\cdot r(r-1),$$

so wird die in gleicher Weise gebildete Determinante Δ_q^s polygonale Determinante genannt.

Über diese Determinanten werden verschiedene Sätze abgeleitet, die als Übungsaufgaben aus der Theorie der Determinanten dienen können und unter denen sich manche auf anderem Wege entwickelten Relationen befinden. Lp.

F. Sibirani. **Sopra una classe di determinanti.** Periodico di Mat. (2) **4**, 316-319.

Entwicklung einiger Formeln für die Determinanten, welche die Eigenschaften haben: 1. Die Elemente der ersten Reihe sind beliebige Zahlen. 2. Die Elemente einer beliebigen anderen Reihe sind linear durch die der vorangehenden, daher auch durch die Elemente der ersten ausdrückbar, z. B. $a_{rs} = \lambda_r a_{r-1,s} + \mu_s a_{r-1,s-1}$. Lp.

E. J. Nanson. **A set of equations connected with circulants.** Messenger (2) **31**, 143-144.

Durch Betrachtung der „Kofaktoren" von x, y, z, a, b, c in den beiden „Zirkulanten":

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a, b, c)$$

ergeben sich die Lösungen der Gleichungen

$$x^2 - yz = a,\ y^2 - zx = b,\ z^2 - xy = c$$

in der Form

$$\frac{x}{a^2 - bc} = \frac{y}{b^2 - ca} = \frac{z}{c^2 - ab} = \frac{1}{\sqrt{(a, b, c)}}.$$

Diese Betrachtung wird verallgemeinert. Lp.

A. Auric. **Sur une propriété très générale des déterminants.** S. M. F. Bull. **30**, 177-179.

Ableitung einiger wohlbekannten Determinantenrelationen aus der Theorie der linearen Gleichungen. Lsg.

G. Rados. **Notes sur les substitutions orthogonales.** Ungar. Ber. **18** (1903), 231-235.

Beweis des Satzes: Multipliziere ich der Reihe nach die Gleichungen der orthogonalen linearen Substitutionen

$$x_i = a_{i1} x'_1 + a_{i2} x'_2 + \cdots + a_{im} x'_m \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

und

$$y_j = b_{j1} y'_1 + b_{j2} y'_2 + \cdots + b_{jn} y'_n \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

so ergibt sich wieder eine lineare orthogonale Substitution zwischen den Produkten $x_i y_j$ und $x'_i y'_j$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$. Jhk.

J. Kürschák. **Über den Rang der Determinante bei induzierten linearen Substitutionen.** Ungar. Ber. 18 (1903), 229-230.

Beweis des Satzes: Wenn die Determinante der linearen Transformation vom m-ten Range ist (d. h. wenn sie wenigstens eine nicht verschwindende Unterdeterminante m-ter Ordnung besitzt, aber keine solcher $(m+1)$-ter Ordnung), so hat ihre induzierte Substitution n-ten Grades eine Determinante vom Range $\binom{m+n-1}{n}$. Jhk.

H. B. Newson. **Note on the product of linear substitutions.** Annals of Math. (2) 3, 147-148.

Werden zwei lineare Substitutionen zusammengesetzt, so ergibt sich wieder eine lineare Substitution. Das Resultat läßt sich, wie gezeigt wird, in eine elegante Determinantenform bringen. Jhk.

O. Niccoletti. **Sulle matrici associate ad una matrice data.** Torino Atti 37, 655-659.

Bildet man aus den Elementen einer Matrix von m Horizontal- und n Vertikalreihen die Minoren ϱ-ter Ordnung, so lassen sich diese zu einer neuen Matrix von $\binom{m}{\varrho}$ Horizontal- und $\binom{n}{\varrho}$ Vertikalreihen zusammensetzen, welche der Verf. die Assoziierte vom Range ϱ nennt. Versteht man nun unter der Charakteristik einer Matrix die maximale Ordnungszahl der von Null verschiedenen Unterdeterminanten, so beweist der Verf. unter anderen den Satz: Wenn eine Matrix die Charakteristik r hat, so besitzt ihre Assoziierte vom Range ϱ die Charakteristik $\binom{r}{\varrho}$. Jhk.

J. Schur. **Über einen Satz aus der Theorie der vertauschbaren Matrizen.** Berl. Ber. 1902, 120-125.

Für den von Frobenius aufgestellten Satz: „Ist $f(x, y, z, \dots)$ eine beliebige (ganze rationale) Funktion der m Variablen $x, y, z, \dots$, sind $A, B, C, \dots$ m Formen, von denen je zwei vertauschbar sind, und sind $a_1, a_2, a_3, \dots$ (resp. $b_1, b_2, b_3, \dots$; $c_1, c_2, c_3, \dots$) die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von A (resp. $B, C, \dots$), so lassen diese Wurzeln sich einander, und zwar unabhängig von der Wahl von f, so zuordnen, daß die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Form $f(A, B, C, \dots)$ den Größen $f(a_1, b_1, c_1, \dots)$, $f(a_2, b_2, c_2, \dots)$, $f(a_3, b_3, c_3, \dots)$, ... gleich werden", wird ein einfacher Beweis gegeben, ohne von einer Zerlegung der Formen $A, B, C, \dots$ Gebrauch zu machen. Jhk.

F. J. Studnička. Über die Zerlegung von gebrochenen algebraischen Funktionen in Partialbrüche durch sphenoidale Derivationsdeterminanten. Časopis **31**, 1-10 (Böhmisch).

Vergleiche des Verf. Arbeit in den Prag. Ber. 1901, No. 18; F. d. M. **32**, 161, 1901. Sda.

B. Gavrilovitch. Sur une propriété des déterminants. Belgrad Ak. **68**, 115-130.

B. Gavrilovitch. Sur les propriétés d'un certain déterminant. Belgrad Ak. **68**, 241-254.

G. Fernandez de Prado. Elementos de la teoría de los determinantes y sus aplicaciones á la eliminación y á la teoría de formas. 2ª edición, revisada y ampliada. Madrid. XII + 324 S. 4°.

A. C. Dixon. Note on the reduction of a ternary quantic to a symmetrical determinant. Cambr. Proc. (5) **11**, 350-351.

C. Elimination und symmetrische Funktionen.

G. Rados. Beitrag zur Theorie der algebraischen Resolventen. Ungar. Ber. **18**, 236-249.

Gegeben sind die beiden algebraischen Gleichungen $f(\lambda) = 0$ vom m-ten und $g(\mu) = 0$ vom n-ten Grade. Es soll die Gleichung $\varphi(z) = 0$ in expliziter Form hergestellt werden, deren Wurzeln $z = \lambda + \mu$ sind, wo für λ und μ sämtliche Wurzeln der beiden gegebenen Gleichungen zu substituieren sind. Bei der Beantwortung der Frage, wie die hierbei nötige Elimination praktisch durchführbar ist, geht der Verf. von der Bemerkung aus, daß sich die Darstellung der formalen Theorie der algebraischen Gleichungen symmetrischer und übersichtlicher gestaltet, sobald man statt der Wurzeln gewisse mit ihnen in engem Zusammenhang stehende Wertesysteme betrachtet. Nämlich, man kann stets eine lineare Substitution

$$x'_a = a_{a1} x_1 + a_{a2} x_2 + \cdots + a_{am} x_m$$

angeben, deren charakteristische Gleichung

$$|a_{rp} - \varepsilon_{rp} \lambda| = 0 \quad \left(r, s = 1, 2, \ldots, m;\ \varepsilon_{rs} = \begin{matrix} 0, r \gtrless s \\ 1, r = s \end{matrix}\right)$$

mit der gegebenen Gleichung $f(\lambda) = 0$ identisch ist. Alsdann besteht zwischen den Doppelelementen $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_m^{(i)})$ dieser linearen Substitution und den Wurzeln von $f(\lambda) = 0$ eine gegenseitig eindeutige

Beziehung derart, daß jeder Wurzel λ_i ein und nur ein Doppelelement entspricht, und umgekehrt.

Im zweiten Teil der Arbeit leitet der Verf. durch Spezialisierung verschiedene Resolventen in expliziter Form her, unter anderen auch die von Lagrange herrührende Resolventengleichung, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeldifferenzen der Gleichung $f(\lambda) = 0$ sind. Jhk.

K. Bes. L'équation finale. Amst. Akad. Verhandl. 8 (1901), 61 S.

Der Verf. gibt eine in manchen Punkten weiter führende Darstellung der Eliminationstheorie. Die Abhandlung wird in drei Kapitel gegliedert. Kapitel I behandelt die Elimination aus zwei homogenen Gleichungen in drei Variabeln, Kapitel II die aus n homogenen Gleichungen in $n+1$ Variabeln, endlich Kapitel III die Elimination aus n homogenen Gleichungen in $n+n_1$ Variabeln.

Allgemein versteht der Verf. unter équation finale (Endgleichung, Eliminante) das Resultat der Elimination von $n-1$ Variabeln aus n homogenen Gleichungen in $n+n_1$ Variabeln.

Behufs Ausführung der Elimination multipliziere man die n_1+1 Variabeln, die in der Endgleichung verbleiben sollen, mit irgend einem Faktor, den man als eine neue Hülfsvariable einführe. Ordnet man dann die gegebenen Gleichungen nach den n übrigen Variabeln, so ergeben sich n homogene Gleichungen, deren Koeffizienten homogene Funktionen der obigen n_1+1 Variabeln sind. Der Grad der Koeffizienten in ihren Variabeln ist gleich dem bezüglichen Exponenten der Hülfsvariabeln.

Eliminiert man nunmehr jene n Variabeln, so erscheint die Endgleichung als Resultante der Gleichungen. Sind die Gleichungen resp. von den Graden $g_1, g_2, \ldots, g_n$, so ist die Resultante eine homogene Funktion der Koeffizienten vom Grade

$$g_1 \cdot g_2 \cdots g_n \sum \frac{1}{g_i},$$

während der Grad in bezug auf die Koeffizienten z. B. der ersten Gleichung gleich $g_2 g_3 \ldots g_n$ ist. Hinsichtlich der übrig bleibenden Variabeln ist die Resultante vom Grade $g_1 g_2 \ldots g_n$, wie auf Grund des Gewichtes der Resultante gezeigt wird.

Man kann die Resultante auch nach den aufeinander folgenden Argumenten einer homogenen Funktion der n_1+1 verbleibenden Variabeln entwickeln, wenn man sich der Bézoutschen Methode bedient.

Der Verf. gelangt im wesentlichen zu den seit Bézout bekannten Ergebnissen; seine Methode ist eine eigenartige und zur Anwendung auf einzelne Fälle wohlgeeignete. Es ist nur bedauerlich, daß dem Verf. die einschlägigen modernen Entwicklungen, vor allem von Kronecker, unbekannt geblieben zu sein scheinen. My.

K. Bes. Les systèmes de racines d'un système de n équations homogènes à $n+1$ variables. Amst. Akad. Verhandl. 8 (1901), 52.

„Lösung“ eines Systems von n homogenen Gleichungen in $n+1$ Variabeln sei ein System von $n+1$, nicht sämtlich verschwindenden Werten, durch deren Substitution für die Variabeln die Gleichungen erfüllt werden. Sind die Gleichungen bezw. von den Graden $g_1, g_2, \ldots, g_n$, so ist bekanntlich $g_1\, g_2 \ldots g_n$ die Anzahl aller Lösungen.

Diese Lösungen sind aber im allgemeinen von einander abhängig. Der Verf. hat sich daher folgende fünf Fragen vorgelegt:

1. für jeden Grad der gegebenen Gleichungen die Zahl der unabhängigen Lösungen festzustellen; 2. die Bestimmungsgleichungen für die $g_1\, g_2 \ldots g_n$ Lösungen zu bilden; 3. Eigenschaften von Lösungen zu finden, die Elemente gemein haben; 4. die Relationen zwischen den unabhängigen und den übrigen Lösungen herzustellen; und 5. diese übrigen Lösungen als Funktionen der unabhängigen darzustellen. Das Verfahren des Verf. legt die Bézoutsche Multiplikatorenmethode zugrunde, die aber in möglichster Vollständigkeit durchgeführt wird. Hierbei wendet er die in der voraufgehenden Arbeit (s. das obige Referat) entwickelten Eliminationsmethoden an. Seien $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_n = 0$ die vorgelegten Gleichungen in $n+1$ homogenen Variabeln, von den Graden $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Man bilde die Form $F \equiv \varphi_1 \Phi_1 + \varphi_2 \Phi_2 + \cdots + \varphi_n \Phi_n$ vom Grade j, wo Φ_i vom Grade $j - g_i$ ist: Solange $j \leq \Sigma g_i - n$, kann man mit den unbestimmten Koeffizienten $s_1, s_2, \ldots, s_{\nu_1}$ der Hilfsformen Φ eine Matrix M von ν Zeilen und ν_1 Kolonnen bilden. Die einzelnen Kolonnen sind den Koeffizienten s zugeordnet, die einzelnen Zeilen den verschiedenen in F auftretenden Potenzprodukten der Variabeln. Sei beispielsweise $n = 2$, $g_1 = g_2 = 2$, so hat man für $j = 4$ zwei Hülfsformen Φ_1, Φ_2 mit $\nu_1 = 2 \cdot 6 = 12$ unbestimmten Koeffizienten

$$s_1, s_2, \ldots, s_{12};$$

andererseits treten in F die $\nu = 15$ Potenzprodukte $x^4, x^3y, \ldots, z^4$ auf. Nimmt man dagegen $j = 3$, so reduziert sich ν_1 auf 6, ν auf 10, und endlich für $j = 2$ ist $\nu_1 = 2$, $\nu = 6$. Kehren wir zurück zum allgemeinen Falle, so sind die Kolonnen der fraglichen Matrix M durch ν_2 lineare Relationen verbunden, diese wiederum durch ν_3 solche, usf. Hierbei ist

$$\nu = \binom{j+n}{n}, \quad \nu_1 = \Sigma \binom{j - g_i + n}{n}, \quad \nu_2 = \Sigma \binom{j - g_i - g_k + n}{n}, \ldots$$

$$\nu_n = \binom{j - g_1 - g_2 - \cdots - g^n + n}{n}.$$

Zwischen diesen Werten der ν besteht die Relation:

$$\nu - \nu_1 + \nu_2 - \cdots + (-1)^n \nu_n = g_1\, g_2 \ldots g_n.$$

Hat man in der Matrix M diejenigen Kolonnen unterdrückt, die von den andern abhängig sind, so erhält man eine reduzierte Matrix von ν Zeilen und $g_1\, g_2 \ldots g_n$ Kolonnen, die „Matrix der Koeffizienten“.

Verfügt man über die Unbestimmten s so, daß ebenso viele Glieder in F herausfallen, so erhält man eine Anzahl von Resultanten. Dieser Prozeß wird für die verschiedenen Werte von j in der mannigfaltigsten Art ausgeführt, und es wird gezeigt, durch welche Faktoren sich die Resultanten mit derselben Anzahl von verbleibenden Variabeln unterscheiden. Es sind diese Faktoren gewisse größte gemeinsame Teiler von Determinanten der obigen Matrizen.

Im übrigen gilt dieselbe Bemerkung wie zu Ende des obigen Referates. My.

L. Saalschütz. **Unabhängige Darstellung der MacMahonschen symmetrischen Funktionen.** Archiv der Math. u. Phys. (3) **4**, 123-127.

Mac Mahon (F. d. M. **16**, 129, 1884) hat für gewisse symmetrische Funktionen, die sich als Verallgemeinerungen der Potenzsummen ansehen lassen, eine Rekursionsformel nach Art der Newtonschen aufgestellt, und diese ist von Gegenbauer (F. d. M. **31**, 161, 1900) elementar bewiesen worden. Der Verf. gibt auf Grund einer Gegenbauerschen Hülfsgleichung eine independente Darstellung der genannten Funktionen, aus der wieder die erwähnte Rekursionsformel sofort folgt.

Man differenziere zu dem Zwecke die Identität:

$$F(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

k-mal, so kommt:

$$F^{(k)}(x) = k!\,F(x)\,\Sigma\frac{1}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)}.$$

Diese Identität dividiere man durch $k!\,F(x)$, multipliziere mit x^k, setze $\frac{1}{x} = v$, und entwickle nach Potenzen von v. Dann liefert die Methode der unbestimmten Koeffizienten nach gewissen Umformungen die gewünschten Relationen, die die Verallgemeinerung der Waringschen Formeln für Potenzsummen repräsentieren. My.

C. A. Laisant. **Sur la somme des puissances semblables des racines d'une équation algébrique.** Ens. math. **4**, 201-204.

Independente Darstellung der Potenzsummen der Wurzeln von $f(x)=0$ durch die elementarsymmetrischen Funktionen unter Benutzung der logarithmischen Ableitung $\varphi(x)$ von $f(x)$ und der sukzessiven Ableitungen von $\varphi(x)$. F.

G. Candido. **Applicazione della formola di Waring.** Suppl. al Period. **5**, 99-100.

$$\Theta = \sqrt[r]{\alpha+\beta x_1^{n_1}+\gamma x_2^{n}} + \sqrt[r]{\alpha+\beta x_1^{n}+\gamma x_2^{n_1}}$$

wird durch die Koeffizienten p und q der quadratischen Gleichung

$$x^2 - pt + q = 0,$$

deren Wurzeln x_1 und x_2 sind, ausgedrückt. Ferner werden von der Beziehung

$$s_n + q(s_2 + q)s_{n-4} + (s_3 + pq)(qs_{n-5} - ps_{n-4}) = 0$$

verschiedene Anwendungen gemacht. Lp.

E. J. Nanson. On the factors of $a(b-c)^m + b(c-a)^m + c(a-b)^m$ when m is odd. Messenger (2) 32, 9-11.

Für $m = 2n+1$ ist der im Titel stehende Ausdruck gleich

$$\frac{1}{3}\gamma\sum(-1)^{n-k-1}\frac{(n-k-1)_{2k}}{(2k+1)!}$$
$$\times\left\{(2n+1)p\beta - (n-3k-1)\Delta\right\}\beta^{n-3k-2}\gamma^{2k},$$

wo

$$\gamma = (b-c)(c-a)(a-b),$$
$$\beta = bc + ca + ab - a^2 - b^2 - c^2 = 3q - p^2,$$
$$\Delta = -2p^3 + 9pq - 27r,$$
$$p = a+b+c,\quad q = bc+ca+ab,\quad r = abc.$$

Lp.

H. Jung. Die Wurzelfunktionen in dem durch die Gleichung $G(p,q) = 0$ vom Range 2 und durch die Gleichung $z^2 = H(p,q)$ definierten algebraischen Körper $K(p,q,z)$. Marburg. 31 S. 8°. (Habilitationsschrift).

K. Bohlin. Über Elementar-Wurzel-Funktionen. Stockh. Öfv. 59, 267-280.

Dritter Abschnitt.

Niedere und höhere Arithmetik.

Kapitel 1.

Niedere Arithmetik.

O. Stolz und J. A. Gmeiner. Theoretische Arithmetik. II. Abteilung. Die Lehren von den reellen und von den komplexen Zahlen. Leipzig: B. G. Teubner. XI u. S. 99-402. 8°.

Das vorliegende Werk ist eine Neubearbeitung derjenigen Abschnitte aus den bekannten „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“ von O. Stolz, welche sich auf die Theorie der reellen (insbesondere der irrationalen) und der komplexen Zahlen beziehen. Die Zahlen werden nicht nur für sich, sondern als Unterabteilungen allgemeinerer Begriffe, der Größe und des komplexen Zahlensystems aus beliebig vielen Einheiten, betrachtet. Neu aufgenommen ist der Satz, daß außer den Systemen der reellen und der gewöhnlichen komplexen Zahlen es kein einziges Zahlensystem mehr gibt, für welches genau dieselben Rechengesetze gelten wie für die reellen Zahlen, und daß, wenn man auch auf das Kommutationsgesetz für die Multiplikation verzichtet, nur das System der Quaternionen bleibt. Hinzugefügt ist ferner ein Kapitel über komplexe Potenzen, Wurzeln und Logarithmen, sowie Übungen zu den meisten Abschnitten. F.

H. Laurent. Sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres et de la géométrie. Paris: C. Naud. 68 S. 8°.

Als No. 20 der Abteilung Phys.-Mathématique der Sammlung Scientia erschienen, behandelt das Büchlein in der gefälligen Ausstattung dieser Sammlung auf den ersten 30 Seiten die Prinzipien des Zahlbegriffs und der elementaren Rechnungsarten, danach auf 38 Seiten die Grundlehren der nichteuklidischen Geometrie. Was in beiden Teilen fehlt, ist die Angabe bezüglicher literarischer Quellenschriften. Der Verf., fruchtbar in der Herausgabe von Lehrbüchern, hat offenbar fast nur französische

Autoren vor Augen gehabt, ist im übrigen aber seinen eigenen Ideen gefolgt. Lp.

A. Capelli. Elementi di aritmetica ragionata e di algebra ad uso dell' istruzione secondaria. L. I. Genesi combinatoria dell' aritmetica e introduzione al calcolo letterale. L. II. Divisibilità e proprietà fondamentali dei numeri naturali. Napoli: Pellerano. XI u. 112 S. 8°.

Dieses kleine Buch bildet die Anwendung der vom Verf. in einigen neueren Schriften entwickelten Ansichten über die Prinzipien der Arithmetik. Einen ausführlichen Bericht liest man in Loria Boll. Bibl. **5** (1902), 120-122; vergl. auch das folgende Referat. Vi.

A. Capelli. Elementi di aritmetica ragionata e di algebra ad uso dell' istruzione secondaria. Libri I, II. Napoli: Pellerano. XI u. 112 S. 8°.

Diese Einführung in die Arithmetik basiert in ihrem ersten Abschnitte auf den Anschauungen und Methoden, welche der Verf. in seinen früheren Abhandlungen „Sull' ordine di precedenza fra le operazioni fondamentali dell' aritmetica“ und „Sulla genesi combinatoria dell' aritmetica“ (vgl. F. d. M. **31**, 167, 1900; **32**, 174, 1901) entwickelt hat, und behandelt im zweiten Abschnitt die Teilbarkeit und die wichtigsten Eigenschaften der natürlichen Zahlen. F.

R. Bettazzi. Aritmetica razionale ad uso dei ginnasi. Torino. Tipografia Salesiana. VIII u. 177 S. 8°.

Behandelt in aller Strenge die Definitionen und elementaren Rechenoperationen für die ganzen und gebrochenen (positiven) Zahlen. Im Anhange werden die Beziehungen der Aggregate irgend welcher Größen zu den Zahlen besprochen. Wenn die beigefügten Übungsbeispiele für die italienischen Schulen wirklich ausreichen, so gewinnt man den Eindruck, daß daselbst schon im Beginn des arithmetischen Unterrichts mehr Gewicht auf theoretische Einsicht als auf praktische Einübung gelegt wird. F.

B. Sellenthin. Mathematischer Leitfaden mit besonderer Berücksichtigung der Navigation. Berlin und Leipzig: B. G. Teubner. XI u. 405 S. 8°. 324 Fig.

Das vorliegende Buch soll dem mathematischen Unterrichte, der in den Steuermannsklassen der Kaiserlichen Deckoffizierschule, an Bord der Seekadetten-Schulschiffe und auf der Kaiserlichen Marineschule zu erteilen ist, als Grundlage dienen; es ist vom Verf. auf Veranlassung der Kaiserlichen Inspektion des Bildungswesens der Marine bearbeitet worden. Der mathematische Lehrstoff ist möglichst beschränkt und nur soweit in Be-

tracht gezogen worden, als derselbe für das Verständnis der nautischen Rechnungen unbedingt erforderlich ist: er umfaßt die Arithmetik bis zu den quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten, die Geometrie bis zur Ausmessung des Kreises, die ebene und sphärische Trigonometrie sowie die Stereometrie; bei jeder sich darbietenden Gelegenheit werden sogleich Anwendungen auf die Nautik gegeben. Die notwendigen Sätze sind ausführlich dargestellt worden, sodaß jeder, auch ohne Anleitung eines Lehrers, dieselben verstehen kann; letzterem Zwecke vornehmlich dienen auch die vielen sauber ausgeführten Figuren. Der Verf. hat sich, gestützt auf seine Erfahrungen, die er an Bord der Schulschiffe fünf Jahre hindurch sammeln konnte, bemüht, die nautischen Rechnungen, vom Einfacheren zum Schwierigeren fortschreitend, allmählich vorzubereiten und den in der Navigation aufgestellten Regeln Klarheit zu verleihen. Aus diesem Grunde wurde Wert auf eine allgemeine Beweisführung der sich auf das Poldreieck gründenden Formeln gelegt. — Dem Verf. hat das Ziel vorgeschwebt, ein Hülfsmittel zu schaffen, wodurch ein Zusammenarbeiten des Navigations- und Mathematiklehrers ermöglicht wird, und man kann wohl sagen, daß er dieses Ziel erreicht hat. Das schöne Werk kann in erster Reihe den Navigationsschulen, aber auch Autodidakten, sowie den Mathematikern an den höheren Lehranstalten wegen der Fülle von praktischen Beispielen, die sich zur Belebung des Unterrichtes verwerten lassen, warm empfohlen werden. Wbg.

H. Müller und A. Hupe. Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen. II. Teil. Abteilung I. Berlin u. Leipzig: B. G. Teubner. VIII u. 223 S. 8°. II. Teil. Abteilung II. VIII u. 178 S. 2 Taf. 8°.

Fortsetzung des Buches, das F. d. M. **31**, 483, 1900 angezeigt worden ist. Es enthält das Pensum der Obersekunda und Prima, und zwar die erste Abteilung die Planimetrie, Algebra, Trigonometrie und Stereometrie, die zweite die synthetische und analytische Geometrie der Kegelschnitte und die darstellende Geometrie. Bemerkenswerte Neuerungen in der Anordnung des Stoffes oder Ableitung der Sätze sind mir nicht aufgefallen. Sh.

J. P. Kirkman and A. E. Field. An arithmetic for schools. London: Edward Arnold. LVI u. 492 S.

Ein sehr gutes Muster eines Lehrbuches. Es ist interessant zu bemerken, daß der Gebrauch graphischer Methoden sich derart Bahn bricht, daß die einfacheren Anwendungen in Büchern über Arithmetik einen Platz finden. Eine ziemlich beträchtliche Anzahl von Aufgaben wird hier unter Anwendung karierten Papieres behandelt; solche Übungen können dazu beitragen, den Widerwillen zu überwinden, der oft der arithmetischen Lehrstunde entgegensteht. Gbs. (Lp).

F. X. Steck und J. Bielmayr. Lehrbuch der Arithmetik mit zahlreichen Übungsaufgaben für Latein- und Realschulen. Neu herausgegeben von W. Pözl. 2 Teile. 12. Aufl. Kempten: J. Kösel. VII u. 98 u. 98 S.

Das längst bewährte Buch, auf dessen 7. Auflage bereits F. d. M. 5, 607, 1873 hingewiesen ist, hat in der vorliegenden 12. Auflage eine teilweise andere Anordnung des Lehrstoffes erfahren, die durch eine neuerliche Verfügung der k. Bayerischen Unterrichtsverwaltung geboten war. Unmittelbar auf die theoretischen Entwicklungen folgt nun eine größere Anzahl von Übungsaufgaben. Mehrere zu abstrakte Übungen sind durch Aufgaben aus dem praktischen Leben ersetzt. M.

Th. Heller. Lehrbuch der Arithmetik nebst Übungsaufgaben. Kempten: Jos. Kösel. I. Teil: IV u. 127 S. II. Teil: 76 S.

Der Titel des Buches, dessen Verf. sich „kgl. Gymnasiallehrer für Mathematik und Arithmetik" nennt, ist irreleitend. Es ist nichts anderes als ein Rechenbuch für die unteren Klassen, an welchem bei flüchtigem Durchblättern die geringe Zahl der Übungsaufgaben ins Auge fällt. Jhk.

A. Ibor y Guardia. Nociones de aritmética y geometría practicas. Madrid.

Das Buch enthält den elementaren Teil der Arithmetik und der Geometrie. Die ebene und die räumliche Geometrie werden darin gleichzeitig behandelt. Tx. (Lp.)

W. Briggs. First stage mathematics; the algebra and Euclid required, together with the arithmetic questions for the last twenty years. London: Clive. VII + 186 S. 12°.

Ein für seine Zwecke gut eingerichtetes Buch. Gbs. (Lp.)

E. Gelin. Traité d'arithmétique élémentaire. Cinquième édition. Namur.

E. Gelin. Recueil de problèmes d'arithmétique. Quatrième édition. Namur.

Vortreffliche Bücher für den theoretischen und praktischen Schulunterricht. Mn. (Lp.)

B. Biel. Mathematische Aufgaben für die höheren Lehranstalten. Ausgabe für Realanstalten. I. Teil: Die Unterstufe. Leipzig: G. Freytag. VI u. 206 S. 8°.

Um die Prinzipien zu kennzeichnen, welche den Verf. bei der Herstellung der vorliegenden Aufgabensammlung geleitet haben, mögen fol-

gende Sätze aus der Einleitung hervorgehoben werden: „Die Sammlung steht nach Art und Anordnung des Lehrstoffes im Einklang mit den neuesten preußischen Lehrplänen von 1901. Dem Begriff Anwendung hat der Verf. in seiner weitesten Bedeutung zu entsprechen gesucht. So wird derselben bereits nach der methodischen Seite hin Rechnung getragen dadurch, daß nach genügender Einübung der Gesetze einer bestimmten Grundrechnungsgruppe alsbald zur Lösung von Bestimmungsgleichungen geschritten wird und diese dann wiederum alsbald Anwendung finden zur Behandlung von entsprechenden Textaufgaben, für die bereits durch ausdrücklich diesem Zweck dienende Übungen vorgearbeitet wird. — Die eigentlich sachlichen Anwendungen sind teils rein mathematischer Natur, insofern die gegenseitigen Beziehungen der verschiedenen Zweige der Mathematik Beachtung finden, teils erstrecken sie sich auf andere Gebiete, insbesondere auf gewisse wichtige Verhältnisse des praktischen Lebens sowie den physikalischen und chemischen Unterrichtsstoff. — Die so angestrebte Konzentration wird dadurch zu einer noch umfassenderen gemacht, daß im Interesse der Verknüpfung des mathematischen Unterrichts mit anderen Unterrichts- und Wissensgebieten besonderer Wert darauf gelegt wurde, auch Material geographischen, kulturgeschichtlichen, technischen und anderen Inhalts heranzuziehen. So war es überhaupt das Bestreben des Verf., den Aufgaben soweit als tunlich einen gewissen sachlichen Inhalt zu geben, der nicht nur als Grundlage für eine mathematische Operation dienen soll, sondern auch einen Wert an sich besitzt. Doch soll der letztere keineswegs zur Hauptsache werden, der die Mathematik nur dienstbar gemacht wird, sondern umgekehrt soll jener Inhalt dieser dienen, indem er das Interesse an den erforderlichen mathematischen Entwicklungen wecken und heben hilft.“ — Das Buch enthält in neun Abschnitten die Grundbegriffe, die Rechnungsgesetze der beiden ersten Stufen, die der dritten Stufe (Potenzierung, Radizierung, Logarithmierung), Gleichungen ersten und zweiten Grades mit einer und mehreren Unbekannten und deren Anwendungen, trigonometrische und stereometrische Aufgaben. — Einige Aufgaben sind nicht bestimmt genug, andere zu lang; im übrigen kann aber die Sammlung allen Fachlehrern als recht anregend empfohlen werden. Wbg.

F. Pietzker. Dr. E. Bardeys Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebraischer Aufgaben. 2. Aufl. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. VIII u. 159 S. gr. 8°.

An 133 den verschiedenen Teilen des Gymnasialpensums entnommenen Musterbeispielen wird in klarer Weise gezeigt, wie in Worten gegebene Aufgaben in Gleichungen umzusetzen sind. Die Anordnung ist durch den Inhalt der Aufgaben, nicht durch die Natur der entstehenden Gleichungen bestimmt, auf deren Lösung auch nicht eingegangen wird. Die Resultate aber sind am Ende des Buches zusammengestellt. Namentlich Autodidakten ist die Arbeit zu empfehlen. F.

F. Pietzker. Dr. E. Bardeys algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. 5. Auflage. I. u. II. Teil. Leipzig: B. G. Teubner. XVI u. 420 S. gr. 8°.

Die fünfte Auflage der Sammlung quadratischer Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten nebst ihren Lösungsmethoden, die von F. Pietzker bearbeitet ist, bringt im einzelnen vielfach Verbesserungen, auch Vermehrungen der behandelten Aufgaben, während Inhalt und Einteilung des Buches im ganzen ungeändert geblieben sind. F.

F. Pietzker und O. Presler. Bardey, Methodisch geordnete Aufgabensammlung. 2. Aufl. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. VII u. 395 S. gr. 8°.

Die neue Auflage dieser bekannten Aufgabensammlung bringt einige Änderungen, die hauptsächlich durch die preußischen Lehrpläne von 1901 verursacht sind. F.

C. O. Tuckey. Examples in algebra. London: George Bell & Sons. VIII + 178 S.

H. G. Willis. Algebra. Part II. London: Rivingtons. LIII u. 375 S.

Beide Bücher sind Sammlungen von Beispielen zur elementaren Algebra. Das erste kann als ein direkter Ausfluß der jüngsten Erörterungen bezeichnet werden und als ein Versuch, die Aufgaben in der Algebra zweckmäßiger und weniger gekünstelt zu gestalten, ferner auch den Gebrauch graphischer Methoden zu fördern. Gbs. (Lp.)

G. Vollprecht. Das Rechnen eine Vorbereitung zur allgemeinen Arithmetik. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. 44 S. 8°.

Vergleichende Zusammenstellung der für das Rechnen mit bestimmten Zahlen und für die Arithmetik gültigen Regeln. F.

T. Lopuszański. Versuch einer Theorie der relativen Zahlen. Wiad. mat. 6, 181-206 (Polnisch).

Strenge Begründung der Operationen mit den relativen (negativen und positiven) Zahlen auf Grund formaler Definitionen. Die positiven Zahlen und die Operationen mit ihnen werden als bekannt vorausgesetzt; die relativen Zahlen werden durch das Symbol $[a, b] = a - b$ eingeführt, welches im Falle $a > b$ die schon bekannten positiven Zahlen darstellt. Der Grundgedanke dieser Untersuchung ist mit dem einer älteren Abhandlung von Lerch (Athenaeum, Prag 1886) identisch. Dn.

L. Tripard. **Du calcul approximatif.** Ens. math. 4, 418-422.

Nach seiner kleinen Schrift „Méthode et pratique de calcul approximatif“ gibt der Verf. einige Regeln zur Methode des Rechnens mit abgekürzten Zahlen und zur Bestimmung der Genauigkeit des Resultates einer solchen Rechnung. Lp.

M. J. M. Hill. **On the fifth book of Euclid's Elements. Second paper.** Cambr. Trans. 19, 157-172.

Fortsetzung einer Arbeit in Cambr. Trans. **16**, 227-261 (vergl. F. d. M. **28**, 152-153, 1897). Verf. untersucht die Bedingungen der fünften Definition des fünften Buchs von Euklids Elementen und insbesondere ihre gegenseitige Abhängigkeit; er beweist sodann den 19., 24. und 25. Lehrsatz des fünften Buches mit alleiniger Benutzung der fünften Definition. Betreffs des Beweises der übrigen Lehrsätze verweist Verf. auf seine Ausgabe des fünften und sechsten Buches des Euklid, bezw. auf die erste Abhandlung. Zum Schluß wird aus dem 25. Lehrsatz die Richtigkeit der Formeln

$$\lim_{n=\infty} a^n = \infty \qquad \text{für} \qquad |a| > 1,$$

$$\lim_{n=\infty} a^n = 0 \qquad \text{für} \qquad |a| < 0.$$

gefolgert. Sk.

A. Kneser. **Neue Begründung der Proportions- und Ähnlichkeitslehre unabhängig vom Archimedischen Axiom und dem Begriff des Inkommensurablen.** Berl. Math. Ges. Ber. 1, 3-9.

Definiert man, daß zwischen den vier Strecken a, b, c, d die Proportion $a:b = c:d$ besteht, wenn das mit den Katheten a, b gebildete rechtwinklige Dreieck dieselben spitzen Winkel hat wie das mit den Katheten c, d gebildete, und zwar so, daß den Katheten a und c gleiche Winkel gegenüberliegen, so lassen sich zunächst aus dieser Definition auf geometrischem Wege die Sätze über die Vertauschung der Glieder einer Proportion und sodann der Satz herleiten, daß in winkelgleichen Dreiecken die entsprechenden Seiten proportional sind. Auf diesen Grundlagen läßt sich die gesamte Ähnlichkeitslehre aufbauen, ohne daß man den Zahlbegriff, das Inkommensurable und das Archimedische Prinzip benutzen müßte. Um auch die in der algebraischen Geometrie vorkommenden Rechnungen unabhängig hiervon durchführen zu können, wird das Produkt x zweier Strecken a, b durch die Proportion $a:1 = x:b$ definiert und gezeigt, daß sich aus dieser Definition die in der Arithmetik für Produkte gültigen Rechnungsregeln ableiten lassen. F.

J. Rius y Casas. Caracteres formales de la igualdad. Revista trim. de Mat. **1**, 122-126; **2**, 24-27, 116-120.

Dieser Artikel ist der Untersuchung der kombinatorischen Eigenschaften der Operationen an den Zahlen gewidmet. Tx. (Lp.)

A. Cadenat. Un nouveau système de numération. Assoc. Franç. Ajaccio (1901) **30**, 119-124.

Statt des herrschenden Dezimalsystems der Ziffernschreibung wird das biduodezimale System mit der Grundzahl 24 als vorteilhafter gepriesen und seine Einführung empfohlen. Lp.

J. W. Butters. Notes on decimal coinage. Edinb. M. S. Proc. **20**, 50-61.

Diese Notizen geben manche nützlichen Winke für den Unterricht in angenäherten Rechnungen für Elementarschüler; solche Methoden sind von besonderer Wichtigkeit, wenn, wie dies in Großbritannien der Fall ist, der Münzfuß nicht eine dezimale Grundlage hat. Gbs. (Lp.)

B. Niewenglowski und S. Dickstein. Aus der elementaren Zahlentheorie. Wiad. mat. **6**, 251-257.

Einige Sätze über die Teilbarkeit ganzer Zahlen. Dn.

W. P. Workman. Note on circulating decimals. Messenger (2) **32**, 67-68.

Die im vorigen Jahrgange unter demselben Titel gemachten Angaben (F. d. M. **32**, 176) beruhen auf den Tabellen von Shanks aus den Proc. Roy. Soc. 1874; dort fehlen, wie Cunningham gefunden hat, die beiden Primzahlen 6311 und 6917. Danach sind die Zahlenangaben so zu verbessern: Von den 1227 Primzahlen unter 10000 (mit Ausschluß von 2 und 5) geben 467 die volle Periode von $p-1$ Ziffern im Dezimalbruch, 360 die Hälfte, 84 das Drittel, 84 das Viertel, 20 das Fünftel, 61 das Sechstel, 11 das Siebentel, 21 das Achtel, 8 das Neuntel, 17 das Zehntel, die übrigen 94 einen noch höheren Teiler von $p-1$. Lp.

L. Crawford. Note on a property of circulating decimals with an even number of repeating figures equivalent to a vulgar fraction with a prime number as denominator. Edinb. M. S. Proc. **20**, 31-32.

Die Eigenschaft besteht darin, daß, wenn ein solcher Dezimalbruch $2k$ Ziffern in der Periode besitzt, von denen die ersten der Reihe nach

$a_1, a_2, \ldots$, die zweiten der Reihe nach $b_1, b_2, \ldots$ sind, zwischen den a_i und b_i die Gleichungen stattfinden:

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = \cdots = 9,$$

z. B.

$$\frac{42}{73} = 0{,}57534246\ldots$$

Gbs. (Lp.)

J. Simón y Mayorga. Caracteres de irracionalidad de los numeros enteros. Salamanca.

Der Verf. dieser Schrift gibt Regeln zur Erkennung, wann eine gegebene ganze Zahl eine genaue Potenz einer anderen ebenfalls gegebenen ganzen Zahl ist. Tx. (Lp.)

E. Sanchis Barrachina. Nota de aritmética. Revista trim. de Mat. 2, 167.

Der Verf. beweist, daß die Bedingung dafür, daß eine mit den Ziffern 25 endigende Zahl ein vollständiges Quadrat ist, darin besteht, daß das Produkt aus 4 und dem absoluten Werte seiner Hunderter, um eine Einheit vermehrt, ein solches ist. Tx. (Lp.)

F. P. Paterno. Un teorema sulle potenze dei numeri interi. Suppl. al Period. 5, 38-39.

Die Potenzen von der Ordnung $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, $4n+4$ endigen bekanntlich mit denselben Ziffern wie die Zahl, ihr Quadrat, ihr Kubus, ihr Biquadrat. Lp.

E. N. Barisien. Su di una proprietà dei numeri. Mat. pure ed appl. 2, 35-36.

Aus einer Identität ergibt sich: Ist n eine ganze Zahl, so lassen sich drei ganze Zahlen a, b, c, die nicht Primzahlen sein können (außer für $n = 3$), so bestimmen, daß

$$n^6 = a^2 + b^2 - c^2$$

wird. Lwt.

E. N. Barisien. Proprietà nella teoria dei numeri. Mat. pure ed appl. 2, 253.

Das 32-fache einer ganzen Zahl wird als Summe von sieben, teils positiv, teils negativ zu nehmenden Quadratzahlen dargestellt. Lwt.

G. DE LONGCHAMPS. Sui radicali sovrapposti. Suppl. al Period. 5, 81-83.

Wenn $vw = u^2\varrho$ ist, und wenn $u^2 - v$ sowie $u^2 - w$ zwei Quadratzahlen sind, so läßt sich

$$x = \sqrt{u + \sqrt{v} + \sqrt{w} + \sqrt{\varrho}}$$

als Summe von vier Quadratwurzeln darstellen. Lp.

G. BERNARDI. Sull' estrazione abbreviata della radice cubica intera dai numeri interi. Periodico di Mat. (2) 4, 300-307.

„Wenn die ganze Kubikwurzel aus einer ganzen Zahl a mindestens $2n+1$ Ziffern hat, wenn ferner mit c die von den Ziffern derselben mit Ausschluß der ersten n Ziffern zur Rechten gebildete Zahl bezeichnet wird, wenn endlich mit q der Quotient und mit r der Rest der Division $(a - c^3\cdot 10^{3n}) : 3c^2\cdot 10^{2n}$ bezeichnet wird, also

$$\frac{a - c^3\cdot 10^{3n}}{3c^2\cdot 10^{2n}} = q + \frac{r}{3c^2\cdot 10^{2n}},$$

so ist $\sqrt[3]{a} = c\cdot 10^n + q$ genau oder höchstens um eine Einheit zu klein oder zu groß, je nachdem $r = (3c\cdot 10^n + q)\cdot q^2$, oder größer oder kleiner als dieser Ausdruck, außer wenn $q = 10^n + 1$, in welchem Falle

$$\sqrt[3]{a} = c\cdot 10^n + q$$

um höchstens zwei Einheiten zu groß ausfällt." Beweis dieses Satzes und Anwendungen. Lp.

Weitere Literatur.

D. V. AGAPOV. Arithmetische Formeln und ihre Anwendung zur Lösung von Aufgaben. 2. Teile. Orenburg. 64 u. 69 S. 8° (Russisch).

L. B. AMERIGO. Lezioni di aritmetica e geometria ad uso delle cinque classi delle scuole elementari, arricchite di molti esempi pratici e problemi con soluzione ragionata. 13a ristampa. Genova: Lanata. 78 S. 16°.

V. J. ASCARZA y E. SOLANA. Colección de problemas de aritmética razonados y resueltos analíticamente. 3. ed. corregida y aumentada. Madrid: Imp. Moderna. 183 S. 8°.

M. A. BAILAY. High school algebra. New York: American Book Comp. 297 S. 16°.

R. BALTIN und W. MAIWALD. Kurzgefaßtes Lehrbuch der Mathematik für Seminare und Präparandenanstalten. Unter Zugrundelegung des Lehrbuchs von H. Müller: Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen, Teil IB, nach den Lehrplänen von 1901 für Seminare usw. bearbeitet. Leipzig: B. G. Teubner. VIII u. 214 S.

E. BARDEYS arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für Realschulen, höhere Bürgerschulen und verwandte Anstalten neu bearbeitet von H. Hartenstein. Ausg. B ohne Logarithmentafel. 4. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner. IV u. 170 S. gr. 8°.

W. S. BEARD. Junior arithmetic examination papers. London: Methuen & Co. VI u. 106 S.

W. W. BEMAN and D. E. SMITH. Academic algebra. Boston: Ginn. IX u. 383 S. 12°.

F. BOLTE. Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik, zum Gebrauche an Navigationsschulen bearbeitet. 3. Aufl. Hamburg: W. Peuser. 79 S. gr. 8°.

H. BORKS Mathematische Hauptsätze, Ausgabe für Gymnasien. Nach dem Tode des Verf. hrsg. von M. Nath. 1. Teil: Pensum der Unterstufe (bis zur Untersekunda einschließlich). Vierte durchgesehene und den preußischen Lehrplänen von 1901 angepaßte Auflage. Leipzig: Dürrsche Buchhdl. 200 S. gr. 8°. Ausgabe für Realgymnasien und Oberrealschulen. 202 S. gr. 8°.

H. BORK. Mathematische Hauptsätze für Gymnasien. Anhang. Nach dem Tode des Verf. bearbeitet von M. Nath. Leipzig: Dürr. 32 S. 8°.

H. BORK und F. POSKE. Hauptsätze der Arithmetik für die Unter- und Mittelklassen höherer Lehranstalten. 4. Auflage. Berlin: G. Reimer. 40 S. 8°.

J. G. BRADSHAW. A first step in arithmetic. London: Macmillan. VI u. 166 S.

E. BRIEM. Rechentabelle zum Gebrauch bei der Multiplikation und Division. Leipzig: IV u. 99 S. 8°.

W. BRIGGS. Matriculation advanced algebra and geometry; required for Syllabus in advanced mathematics of London University matriculation examination. London: Clive. 332 S. 12° (University tutorial series).

C. BRIOT. Tratado de algebra elemental y superior. Tradición de C. Sebastian y B. Portuondo. Madrid: Hernando (1901). 732 S. 8°.

C. BURCH. Short cuts and byways in arithmetic. Full explanation of all principles involved; examples worked out at length. Edinburgh: Blackie. 108 S. 8°.

E. CERCIGNANI. Riassunto d'algebra; appunti ad uso degli alunni della scuola professionale Leonardo da Vinci. Firenze: Ramella. 54 S. 8°.

W. E. CHANCELLOR. Elementary school mathematics by grades. 7th book: arithmetic, geometry and algebra. New York: Globe School Book Comp. 176 S. 12° (Globe series).

C. DE COMBEROUSSE. Curso de matemáticas. Vol. I. parte 1: Aritmética, traducida del francés par E. Prado. México: Gallegos. 242 S. 8°.

F. T. D. Solutions des exercices et problèmes proposés dans le Cours d'algèbre élémentaire. (Environ 2500 questions.) Lyon u. Paris: Vitte. 452 S. 16°.

J. DAVIDSON. Arithmetic and Algebra. London: Hodder. 248 S. 8°.

R. DEAKIN. Matriculation algebra; being the tutorial algebra, elementary course. 2. ed. London: Clive. 464 S. 12°.

F. DICKNETHER. Lehrbuch der Arithmetik nebst Übungsaufgaben für Mittelschulen. 1. Teil. München: J. Lindauer. VIII u. 136 S. gr. 8°.

L. E. DICKSON. College Algebra. New York: Wiley. VII + 214 S. 12°.

Elementos de aritmetica, con algunas nociones de algebra por los Hermanos de las escuelas cristianas. 5. edición, correspondiente á los cursos medio y superior. Paris. 392 S. 16°.

EYSSÉRIC et PASCAL. Éléments d'algèbre; à l'usage des élèves de l'enseignement secondaire et des candidats au baccalauréat. 21. éd. Paris: Delagrave. 256 S. 12°.

H. FECHNER. Aufgaben für den Unterricht in der Buchstabenrechnung (Algebra). 4. gänzlich umgearbeitete und stark vermehrte Auflage. Berlin: Schulze. VIII u. 222 S. 8°.

K. FUSS. Resultate und Andeutungen zur Auflösung der Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. Für Schulen und zum Selbstunterricht bearbeitet. Fünfte vermehrte und verbesserte Auflage. Nürnberg: F. Korn. VII u. 176 S. gr. 8°.

C. GERRISH and W. WELLS. The beginner's algebra. Boston: Heath. X u. 151 S. 12°.

E. GIDEON. The model algebra; arranged for elementary schools. Philadelphia: Eldredge. 149 S. 12°.

R. GLAUER. Aufgaben für das Rechnen mit vierstelligen Logarithmen. Zs. f. math. u. naturw. Unt. 33, 370-371.

A. GRÉVY. Arithmétique, à l'usage des élèves de troisième classique et moderne et de rhétorique. 3e édition. Paris: Nony. 199 S. 18°.

A. GUGLIELMI. Nozioni di algebra per le scuole tecniche e normali, con multi essempî ed esercizî e due note. Napoli: Romano. 76 S. 16°.

F. HABERL. Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik und Algebra. Zum Gebrauche für Oberrealschulen und verwandte Lehranstalten. 8. Aufl. Wien: Braumüller. VI u. 387 S. 8°.

F. HALLER VON HALLERSTEIN. Lehrbuch der Elementarmathematik. Für die Portepeefähnrichsprüfung in der kgl. preuß. Armee und die Prüfung z. Eintritt in d. kais. Marine bearb. 11. Aufl., herausgeg. u. f. d. Gebr. in d. Prima d. Gymnasien u. Realgymnasien erw. von B. Hülsen. Teil I: Arithmetik. Berlin: Nauck. VIII u. 411 S. 8°.

F. HALLER VON HALLERSTEIN. Lehrbuch der Elementarmathematik. N. d. Lehrplan f. d. kgl. preuß. Kadettenkorps bearb. von B. Hülsen. Teil III: Pensum der Sekunda. 4. Aufl. Berlin: Nauck. VIII u. 227 S. 8°.

H. HARTL. Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. 2. Aufl. Resultate. Wien: F. Deuticke. III u. 96 S. gr. 8°.

A. Fr. Hauck und H. Hauck. Lehrbuch der Arithmetik. Mit zahlreichen Beispielen und Übungsaufgaben. (In drei Teilen.) I. Tl. 2. Abt. u. II. Teil. I. Abt. Nürnberg: F. Korn. IV u. 191, VI u. 228 S.

R. Hickmann. Wertvolle Kunstgriffe und Vorteile beim Schnellrechnen. Lehrbuch aller praktischen Abkürzungsmethoden zum raschen und bequemen Bewältigen großer Zahlen. Mit Anhang: Zahlenkunststücke und arithmetische Geheimnisse. Leipzig: A. F. Schlöffel. 47 S. 8°.

Fr. Hočevar. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst einer Sammlung von Übungsaufgaben für Oberrealschulen. Leipzig: G. Freytag. II u. 274 S. gr. 8°.

F. Hočevar. Arithmetik und Algebra nebst einer Sammlung von Übungsaufgaben für Obergymnasien. Wien und Prag: F. Tempsky. III u. 261 S. gr. 8°.

A. E. Ikin. Knotty points in algebra. London: Simpkin. (Normal tutorial series.) 12mo.

L. P. Jocelyn. An algebra for high schools and academies. Philadelphia: Butler, Sheldon & Co. 445 S. 12°.

W. F. Koppeschaar. Theorie der logarithmen, elementair behandeld. 28 S. 8°. Theorie der machten en wortels, elementair behandeld. 60 S. 8°. Culemborg.

J. Kostecki. Algebra für höhere Klassen der Mittelschulen. Lemberg, 402 S. 8° (Polnisch).

Lasala y Amizar. Elementos de matemáticas. Vol. I: Aritmética. 240 S. Vol. II: Algebra. 304 S. México: Herrero. 8°.

G. Lazzeri e G. Pesci. Complementi d'algebra per l'ammissione alla r. Accademia navale. Livorno. VII u. 128 S. 8°.

H. Lieber und F. v. Lühmann. Leitfaden der Elementarmathematik. Nach den Bestimmungen der preußischen Lehrpläne vom Jahre 1901 neu bearbeitet von C. Müsebeck. Teil 2: Arithmetik. Ausg. B für Realschulen, Progymnasien und Realprogymnasien. Berlin: Simion. IV u. 92 S. 8°.

F. K. Ludwig. Das logarithmische Rechnen. Leichtfaßliche Darlegungen über das Wesen, die Berechnung und Anwendung der Logarithmen, nebst zahlreichen Beispielen und ausführlichen Lösungen. Zum Selbstunterricht bearbeitet. Reichenberg: Sollors. III u. 52 S. 8°.

A. Malagodi. Nozioni d'algebra elementare, con numerosi esercizi e problemi. 3. ed. Mirandola: Cagarelli. 77 S. 8°.

M. A. Martinaud. Éléments d'arithmétique et de géométrie, à l'usage de l'enseignement secondaire. Premier cycle. Paris: Belin. 207 S. 8°.

L. Matthiessen. Kommentar zu der Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra von E. Heis. 4. verb. Aufl. Köln: Du Mont-Schauberg. VIII u. 180 S. 8°.

C. Metzig. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst Aufgabensammlung für Baugewerkschulen und verwandte technische Lehranstalten, sowie zum Selbstunterrichte. 2. verm. u. verb. Aufl. Breslau: Morgenstern. VIII u. 184 S. 8°.

W. J. Milne. Advanced algebra for colleges and schools. New York: American Book Co. 608 S. 12mo.

W. J. Milne. Key to „Academic Algebra". New York: American Book Co. 397 S. 8°.

Fr. v. Močniks Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst einer Aufgabensammlung für die oberen Klassen der Realschulen, bearbeitet von A. Neumann. 26. Auflage. Leipzig: G. Freytag. 126 S. gr. 8°.

Frz. Ritter v. Močniks Lehrbuch der Arithmetik für Untergymnasien, bearbeitet von A. Neumann. 1. Abtlg. für die I. und II. Klasse. 36. veränd. Aufl. Leipzig: G. Freytag. III u. 148 S. gr. 8°.

M. Nassò. Aritmetica generale ed algebra ad uso dei licei, secondo il programmo governativo del 24 ottobre 1900. 2a edizione, interamente rifatta. Fasc. 1: per la prima classe liceale. Torino: Tipografia Salesiana. 108 S.

M. Nassò. Aritmetica generale ed algebra ad uso dei licei. 2. ed. Torino: Tipogr. Salesiana. 504 S. gr. 8°.

J. Neuberg. Surprises mathématiques. Mathesis (2) 3, 244-246.

F. Niemöller und P. Dekker. Arithmetisches und algebraisches Unterrichtsbuch. Für den mathematischen Unterricht in der Mittel- und Oberstufe höherer Lehranstalten nach den Bestimmungen der neuesten preußischen Lehrpläne bearbeitet. (In 4 Heften). 3. Heft: Pensum der Obersekunda und der beiden Primen des Gymnasiums. (Neue Auflage). Breslau: F. Hirt. 96 S. gr. 8°.

B. Niewenglowski. Cours d'algèbre, à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales et des candidats à l'École polytechnique. 5. éd. Vol. II. Paris: Colin. 492 S. 8°.

J. Nitsche. Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik für die I. und II. Gymnasialklasse. Wien: F. Deuticke. III u. 131 S. gr. 8°.

A. Otto. Ein Problem der Rechenkunst. Allgemeines Verfahren zur Bildung und Auflösung von Gleichungen mit einer Unbekannten. (Beliebiger Grad und jede Form.) 3. Aufl. Düsseldorf und Leipzig: Maier. 56 S. 8°.

F. Parinet. Éléments d'algèbre, accompagnés d'exercices et de problèmes résolus et à résoudre. 6. éd. Paris: Poussielgue. 182 S. 18° (Alliance des maisons d'éducation chrétienne).

G. Peano. Aritmetica generale e algebra elementare. Torino: Paravia. 144 S. 8°.

S. Pincherle. Algebra elementare. 8va edizione riveduta. Milano: Hoepli. VIII u. 210 S. 16°.

F. M. Rawlins. Key to Lippincott's Elementary algebra, in which are given solutions in full or in part to the more difficult exercises and problems. Philadelphia: Lippincott. V u. 192 S. 12°.

G. de Rocquigny. Notes d'arithmétique. Mathesis (3) 2, 162-165.

Th. Schröder. Beispiele und Aufgaben aus der Algebra für Gymnasien, Realschulen und zum Selbstunterricht. 11. Auflage. Nürnberg: F. Korn. VI u. 160 S. gr. 8°.

A. Schülke. Aufgabensammlung aus der Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Stereometrie, nebst Anwendungen auf Astronomie, Feldmessung, Nautik, Physik, Technik, Volkswirtschaftslehre. Leipzig: B. G. Teubner. X u. 193 S. 8°.

A. Schülke. Ergebnisse zur Aufgabensammlung. Leipzig: Teubner. 96 S. 8°.

H. Schwarz. Algebra. Teil 2: Unterweisungen und Aufgaben. 6. Aufl. Strelitz: Hittenkofer. 31 S. 8° (Methode Hittenkofer No. 56).

K. Schwering. Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik für höhere Lehranstalten. 1. Lehrgang. 2. verbesserte Auflage. Freiberg i. B.: Herder. VII u. 59 S. gr. 8°.

S. Segall. Praktische Anleitung zur Erlernung des Ansatzes von Gleichungen. Leipzig: A. O. Paul. 40 S. 32° (Miniaturbibl. No. 381).

W. Seyffarth. Allgemeine Arithmetik und Algebra. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten, insbesondere in den mittleren und oberen Klassen der Lehrerseminare herausgegeben. Dresden: Bleyl u. Kaemmerer. 119 S. 8°.

H. O. R. Siefert. Principles of arithmetic, embracing common fractions, percentage, proportion, involution, evolution, and mesuration; a manual for teachers and normal students. Boston: Heath. 163 S. 16°.

H. W. C. Smith. First principles of ratio and proportion, and their application to geometry. London: Macmillan. 12°.

Soons. Démonstration de quelques théorèmes d'arithmétique. Mathesis (3) 2, 109-112.

H. C. Symonds. Abstracts of the elements of arithmetic and elements of algebra arranged in tabular form. Revised ed. New York: Harrison. VIII u. 332 S. 12°.

A. Tartinville. Théorie des équations et des inéquations du premier et du second degré à une inconnue, à l'usage des aspirants aux baccalauréats d'ordre scientifique, des candidats aux écoles du gouvernement et des élèves des écoles normales. Paris: Nony. 230 S. 8°.

G. M. Testi. Sulla risoluzione dei sistemi di diseguaglianze. Livorno: Giusti. 7 S. 8°.

G. M. Testi. Sulla ricerca di una soluzione di una equazione di primo grado a due incognite. Livorno: Giusti. 4 S. 8°.

H. THIEME. Leitfaden der Mathematik für Gymnasien. Teil 1: Die Unterstufe. VI u. 96 S. Teil 2: Die Oberstufe. IV u. 112 S. Leipzig: Freytag. 8°.

H. THIEME. Leitfaden der Mathematik für Realanstalten. 1. Teil: Die Unterstufe. Leipzig: G. Freytag. VI u. 118 S. gr. 8°.

H. THIEME. Leitfaden der Mathematik für Realanstalten. Teil 2: Die Oberstufe. Leipzig: Freytag. IV u. 196 S. 8°.

J. VALLEREY. Arithmétique; algèbre; trigonométrie. Ouvrage rédigé conformément aux programmes des examens. 2. ed. Paris: Challamel. VIII u. 484 S. 8°.

L. VECCHI. Primi elementi d'algebra esposti ad uso dei licenziandi delle scuole tecniche. Cremona: Tipogr. Sociale. 43 S. 8°.

A. VINOGRADOV. Systematischer Lehrgang der Algebra für Schulen und zum Selbstunterricht. Vladimir. 296 S. 8° (Russisch).

P. VISALLI. Algebra. Livorno: Giusti. IV u. 160 S. 16°.

G. L. VOSE. A graphic method for solving certain questions in arithmetic and algebra. 2. ed. New York: Van Nostrand. III + 62 S. 24°.

P. WAGNER. Aufgabensammlung aus der elementaren Arithmetik, nebst einer Anleitung zum Lösen besonders schwieriger Aufgaben für Seminaristen und Lehrer. Braunschweig: Graff. IV u. 122 S. 8°.

G. A. WENTWORTH. A college algebra. Revised edition. Boston: Ginn. VI + 530 S. 12°.

E. E. WHITE. Grammar school algebra; an introduction to „Algebra for beginners“. New century edition. New York: American Book Comp. 96 S. 16°.

H. G. WILLIS. Algebra. Parts 1 and 2. London: Rivingtons.

E. WROBEL. Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra. Teil II: Resultate. 2. Aufl. Rostock: Koch. 92 S. 8°.

A. MARTINI ZUCCAGNI. Guida per la risoluzione degli esercizi d'algebra. Livorno: Giusti. VI u. 131 S. 16°.

A. MARTINI ZUCCAGNI. Trattato di algebra elementare ad uso degli istituti tecnici. Livorno: Giusti. X u. 362 S. 8°.

Kapitel 2.

Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

P. BACHMANN. Niedere Zahlentheorie. (In 2 Teilen). I. Teil. Leipzig: B. G. Teubner. X + 402 S. gr. 8° (Teubners Sammlung mathematischer Lehrbücher X, 1).

Unabhängig von seiner großen Gesamtdarstellung der Zahlentheorie hat Verf. hier als Beitrag zur Teubnerschen Sammlung mathematischer

Lehrbücher eine Bearbeitung der niederen Zahlentheorie unternommen. Schon der Umfang dieses ersten Bandes zeigt, daß es sich nicht etwa um eine Wiederholung des Stoffes seiner „elementaren Zahlentheorie“ (vergl. F. d. M. **24**, 160-162, 1892) handelt. Das vorliegende Buch enthält neben den grundlegenden Problemen der elementaren Zahlentheorie die Wiedergabe einer Reihe von kleineren Untersuchungen, welche in der Literatur zerstreut sind; dem Leser des Bachmannschen gleichlautenden Artikels in der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“ (vergl. F. d. M. **31**, 175, 1900) wird es sehr willkommen sein, viele der dort zitierten Resultate hier im Zusammenhange bewiesen zu sehen. Auch die schwierigen Teile der Theorie hat der Verf. in seiner bekannten klaren und dem Anfänger leicht verständlichen Art dargestellt.

Einer historischen Einleitung folgen sieben Kapitel: 1. Die ganze Zahl und die einfachsten Rechnungsoperationen. 2. Von der Teilbarkeit der Zahlen. 3. Reste und Kongruenzen. 4. Der Euklidische Algorithmus. 5. Die Sätze von Fermat und von Wilson. 6. Die Theorie der quadratischen Reste. 7. Die höheren Kongruenzen.

Mit besonderer Ausführlichkeit hat Verf. die Theorie der quadratischen Reste behandelt; dieses Kapitel nimmt den dritten Teil des ganzen Bandes ein; es werden dort sämtliche zurzeit bekannten Beweise nach sachlichen Gesichtspunkten gruppiert und, soweit sie der niederen Zahlentheorie angehören, im Zusammenhange dargestellt. Dieser Aufgabe hatte sich vor längerer Zeit Baumgart (vergl. F. d. M. **17**, 26-28, 1885) unterzogen; die Erneuerung dieser historisch-kritischen Untersuchung durch den Verf. ist jetzt, wo die Anzahl der Beweise fast auf das Doppelte angewachsen ist, von großem Interesse. Ln.

G. Wertheim. Anfangsgründe der Zahlenlehre. Mit den Bildnissen von Fermat, Lagrange, Euler und Gauß. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. XII + 427 S. 8°.

Dies ist das letzte Werk des verdienten Verf., der es noch kurz vor seinem Tode vollendet hat. Er verfolgt mit diesem Buch einen anderen Zweck als mit seinen vor längerer Zeit erschienenen „Elementen der Zahlentheorie“ (vergl. F. d. M. **19**, 166-167, 1887). Jene Darstellung reichte bis zur Theorie der binären quadratischen Formen, während der Stoff des vorliegenden Buches sich nicht so weit erstreckt. Verf. setzt hier einen anderen Leserkreis voraus und wendet sich nicht gerade an Studierende der Mathematik; er will Gebildete aller Stände, die Interesse für die Zahlenlehre haben, mit ihren wichtigsten Sätzen und Methoden vertraut machen, soweit diese mittels der Elementarmathematik sich begründen lassen. Die Titel der einzelnen Kapitel sind: 1. Teilbarkeit der Zahlen. 2. Kongruente Zahlen. 3. Kongruenzen ersten Grades. 4. Einige unbestimmte Gleichungen höherer Grade. Die Gleichung $x^y = y^x$. Aufgaben. 5. Die Kettenbrüche und ihre Anwendung auf die Zahlenlehre. 6. Potenzreste für Primzahlmoduln. 7. Potenzreste für zusammengesetzte Moduln. 8. Kongruenzen zweiten Grades.

Eine besondere Eigenart erhält die Darstellung dadurch, daß Verf. an vielen Stellen die Klassiker — z. B. Gauß bei der Theorie der Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche — selbst reden läßt.

Möge der Wunsch des Verf. in Erfüllung gehen und das Buch der Zahlentheorie auch unter den mathematischen Laien Freunde erwerben!

Lnd.

N. W. Bugajew. Entwicklung der Funktionen in Zahlenreihen nach Funktionen $\psi(n)$. Moskau Math. Samml. 23, 1-11 (Russisch).

Verf. zeigt, daß die Reihe von A. P. Minin (F. d. M. **29**, 165, 1898) eine bloße Folge der vom Verf. (Moskau Math. Samml. **1**, 1866) gegebenen Identität $S_1^n S_1^u \varphi(u) = (n+1) S_1^n u \varphi(u)$ ist, und zeigt einige weitere Anwendungen der Mininschen Reihe. Si.

N. W. Bugajew. Verschiedene Fragen der $E(x)$-Rechnung. Moskau Math. Samml. 23, 605-725 (Russisch).

Den Namen der $E(x)$-Rechnung gibt der Verf. dem Inbegriff der arithmologischen Wahrheiten, welche mit den Eigenschaften des Symbols $E(x)$ (größte in x enthaltene ganze Zahl) zusammenhängen. Dieser Theorie hat Bugajew eine Reihe von Arbeiten gewidmet. In dieser letzten Arbeit gibt der verstorbene Verf. eine Reihe von Methoden zur Lösung der Aufgaben dieser Rechnung. — Er bespricht die Anwendungen der im vorangehenden Referate angegebenen Identität auf das Studium der Eigenschaften des Symbols $E(x)$ und auf die Bestimmung der Summen wie $S_1^n \theta(E\sqrt[m]{u})$ und der daraus entspringenden Identitäten, dann einige spezielle Methoden zur Berechnung der Summen wie $S_1^n uE\sqrt{u}$ u. a., endlich eine allgemeine Methode zur Bestimmung der Summe

$$S_1^n F(u, E\sqrt{u}, E\sqrt[3]{u}).$$

Es folgt dann die Bestimmung der Summen $S_1^n E\sqrt{u}\cdot E\sqrt[4]{u}$ u. a. Hier wird die allgemeine Identität abgeleitet:

$$\theta\cdot S_1^n E\sqrt{\theta u} = S_1^{\theta n} E\sqrt{u} + (\theta - 1) E\sqrt{\frac{n}{\theta}}$$

$$+ \Sigma \left\{\left(1 + E\frac{\sqrt{\theta n - q} - v}{\theta} + E\frac{\sqrt{\theta n - q} + v}{\theta}\right)(\theta - 1 - q)\right\},$$

und es werden besondere Fälle von ihr betrachtet. Die Identität

$$\sum_1^\infty u_n \equiv \sum_1^\infty n(u_n - u_{n+1}),$$

auf Zahlenfunktionen angewandt, gibt die allgemeine Formel:

$$\mu S^n \varphi(\mu u) = S_1^{\mu n} \varphi(u) + (\mu - 1) S_1^n (\varphi(\mu u) - \varphi(\mu u - 1))$$
$$+ (\mu - 2) S_1^n (\varphi(\mu u - 1) - \varphi(\mu u - 2))$$
$$+ \cdots + S_1^n (\varphi(\mu u - (\mu - 2)) - \varphi(\mu u - \mu + 1)).$$

Hieraus folgen für partikulare Werte von $\varphi(u)$ verschiedene Kongruenzeigenschaften gewisser Klassen ganzer Zahlen. Eine weitere Methode besteht in der Anwendung der Irrationalen. Der Verf. nimmt für die in einer Zahlenidentität vorkommende willkürliche Funktion eine irrationale Funktion und zieht daraus eine neue Zahlenidentität zwischen den rationalen Teilen beider Glieder der Identität. Das Verfahren wird auch auf komplexe Funktionen angewandt. In dieser Weise entsteht eine Reihe neuer Zahlenidentitäten. Es wird weiter als Quelle neuer Identitäten die folgende, zwei willkürliche Funktionen $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ enthaltende Formel benutzt:

$$S_1^n \theta_2(u) + S_1^n \theta_3(u) = S_1^n \theta_1(u) + \varphi_1(u) \cdot \varphi_2(u),$$

wo:

$$\theta_1(u) = [\varphi_1(u) - \varphi_1(u-1)] \cdot [\varphi_2(u) - \varphi_2(u-1)],$$
$$\theta_2(u) = [\varphi_1(u) - \varphi_1(u-1)]\, \varphi_2(u),$$
$$\theta_3(u) = [\varphi_2(u) - \varphi_2(u-1)]\, \varphi_1(u),$$

und eine analoge Formel mit drei willkürlichen Funktionen.

Weiter wird gezeigt, daß auch die direkte Betrachtung und Umformung der Summen zu Zahlenidentitäten oder arithmologischen Gesetzen führt. Die erlangten Summen werden auch mit Hülfe der Funktion $\bar{u}(u)$ ($=1$ für Teiler, $=0$ für Nichtteiler) in Integrale nach Teilern verwandelt. Besondere Fälle und Verallgemeinerung auf Integrale nach zwei komplementaren Teilern. Si.

E. Busche. Über eine identische Gleichung. Hamb. Mitt. **4**, 63-72.

Verf. verallgemeinert eine Identität, welche er früher (vergl. F. d. M. **30**, 182-183, 1899) aufgestellt hatte. In der neuen Relation brauchen die Zahlenreihen nicht der Größe nach geordnet zu sein; auch können ihre Elemente komplex sein. Verf. zeigt die Nützlichkeit der Formel z. B. daran, daß er mit ihrer Hülfe einige a. a. O. (vergl. F. d. M. **31**, 194, 1900) durch vollständige Induktion hergeleitete Sätze direkt beweist. Lnd.

G. Csorba. Die Literatur der „Partitio numerorum". Zweite Mitteilung. Math. és Phys. Lapok **10**, 257-281 (Ungarisch).

Der Artikel zählt die bezüglichen Schriften von Euler, Cayley, Weyrauch, Kronecker, Bellavitis, Laguerre usw. auf. S.

R. Daublebsky v. Sterneck. Ein Analogon zur additiven Zahlentheorie. Wien. Ber. **111**, 1567-1601.

In der sog. additiven Zahlentheorie behandelt man die Frage, auf wie viele Arten eine gegebene Zahl als Summe gegebener Elemente dargestellt werden kann. Stern (vergl. J. für Math. **61**, 66-94, 1863) hatte die analoge Frage aufgeworfen, wie viele aus gegebenen Elementen additiv gebildete Zusammensetzungen einer gegebenen Zahl nach einem gegebenen Modul kongruent sind. Diese Frage hat jedoch bisher wenig Beachtung gefunden. Verf. liefert einen Beitrag zu ihrer Beantwortung und behandelt speziell die beiden Probleme: 1. Es ist die Anzahl der aus i beliebigen, mod. M inkongruenten Summanden bestehenden additiven Zusammensetzungen zu bestimmen, welche der Zahl n (mod. M) kongruent sind. 2. Es ist die Anzahl der der Zahl n (mod. M) kongruenten, aus i inkongruenten, aber überdies durch den Modul M unteilbaren Summanden bestehenden additiven Zusammensetzungen zu finden. Verf. löst diese Aufgaben für den Fall, daß M eine Primzahl oder das Produkt zweier verschiedenen Primzahlen oder eine Primzahlpotenz ist. Die Lösung der zweiten Aufgabe führt zu einem Analogon für den sog. Euler-Legendreschen Satz der gewöhnlichen additiven Zahlentheorie.

Lnd.

R. Daublebsky v. Sterneck. Über die Anzahl der Zerlegungen einer ganzen Zahl in sechs Summanden. Arch. der Math. u. Phys. (3) **3**, 195-216.

Die independenten Formeln für die Anzahl der Zerlegungen einer ganzen Zahl n in drei, bezw. vier und fünf Summanden waren schon von Sylvester (vergl. F. d. M. **14**, 72-74, 1882), bezw. Zuchristian (vergl. F. d. M. **25**, 256, 1893-94) und Glösel (vergl. F. d. M. **27**, 135 bis 136, 1896) ausgerechnet worden. Verf. führt hier die komplizierte Rechnung für die Anzahl der Zerlegungen in sechs Summanden durch, und zwar auf vollkommen elementarem Wege. Das Endresultat ist (wie in den früheren Fällen) eine explizite Formel, in der vom Zeichen $[x]$ ausgiebiger Gebrauch gemacht wird. Lnd.

D. Gigli. Sulle somme di n addendi diversi presi fra i numeri $1, 2, \ldots, m$. Palermo Rend. **16**, 280-285.

Wieviele der Kombinationen der ganzen Zahlen von 1 bis m zu je n haben dieselbe Summe s, und wieviele haben eine Summe $\leqq L$? Mit Hülfe einer erzeugenden Funktion löst Verf. diese Aufgaben in einfacher Weise. Lnd.

G. Mignosi. Un problema sulla partizione dei numeri. Periodico di Mat. (2) **5**, 117-123.

Es handelt sich um die Anzahl der ganzzahligen, nicht negativen Lösungen der linearen Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \lambda,$$

in der die a_i und λ nicht negativ sind, unter der zusätzlichen Bedingung $x_i \leqq i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Die Beantwortung der Frage wird nach dem Vorbilde von Euler in Zusammenhang gebracht mit der Betrachtung des Produktes:

$$(1 + v)(1 + v + v^2)\cdots(1 + v + v^2 + \cdots + v^n)$$
$$= \sum A_r v^r \{r = 1, 2, 3, \ldots, N = \tfrac{1}{2}n(n + 1)\},$$

indem gezeigt wird, wie sich die gesuchte Zahl aus den A_r finden läßt. Zuletzt folgen einige Anwendungen. Lp.

P. de Sanctis. **Formule relative ad alcune classi e sistemi di numeri di n cifre.** Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. **19**, 283-300.

Verf. betrachtet im $(k + 1)$-adischen Zahlensystem alle n-ziffrigen Zahlen, deren n Ziffern in r Gruppen von $l_1, l_2, \ldots, l_r$ Ziffern eingeteilt werden, und er löst eine Reihe hierauf bezüglicher kombinatorischer Aufgaben. Lnd.

L. Goldschmidt. **Über einen Satz von Sylvester.** Zs. f. math. u. naturw. Unt. **38**, 235-238.

Für den Unterricht auf Mittelschulen wird der Satz bewiesen: Die Anzahl der Folgen von ganzen Zahlen, deren Summe N ist, ist gleich der Anzahl der ungeraden Divisoren dieser Zahl N (vergl. F. d. M. **15**, 130, 1883). Lp.

R. W. D. Christie. **Question 14692.** Ed. Times (2) **2**, 40.

Die Summe von n Quadraten in eine andere Summe von gleich vielen Quadraten zu verwandeln, wenn die Summe der Grundzahlen beiderseits dieselbe ist. Das Verfahren wird an $n = 5$ erläutert. Man halte die ersten $n - 1 = 4$ Summanden fest; der Kürze wegen setzen wir $a + b + c + d = s$. Dann besteht die Identität:

$$(s + e)^2 + (s + f)^2 + (s + g)^2 + (s + h)^2 + (s - e - f - g - h)^2$$
$$= (s - e)^2 + (s - f)^2 + (s - g)^2 + (s - h)^2$$
$$+ (s + e + f + g + h)^2,$$

die nun weiter umgeformt werden kann. Lp.

R. W. D. Christie. **Question 13339.** Ed. Times **74**, 72; (2) **1**, 93-95.

Um zu zeigen, daß jede Quadratzahl N^2 sich auf sechs Arten in eine Summe von drei Quadraten zerlegen läßt, setzt der Verf. nach einem von Cauchy bewiesenen Fermatschen Satze:

$$N = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

daher ist N^2 gleich

1. $(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + (2ac + 2bd)^2 + (2ad - 2bc)^2$,
2. $(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + (2ac - 2bd)^2 + (2ad + 2bc)^2$,
3. $(-a^2 + b^2 - c^2 + d^2)^2 + (2ab + 2cd)^2 + (2ad - 2bc)^2$,
4. $(-a^2 + b^2 - c^2 + d^2)^2 + (2ab - 2cd)^2 + (2ad + 2bc)^2$,
5. $(-a^2 + b^2 + c^2 - d^2)^2 + (2ab + 2cd)^2 + (2ac - 2bd)^2$,
6. $(-a^2 + b^2 + c^2 - d^2)^2 + (2ab - 2cd)^2 + (2ac + 2bd)^2$.

An der zweiten Stelle teilt Whitworth die Ergebnisse einer Rechnung mit, durch die er die Zerlegung von N^2 in die Summe dreier Quadrate von $N = 1$ bis $N = 64$ ermittelt hat. Da hierbei die Zahl 6 oft nicht erreicht, aber auch überschritten wird, so erläutert Christie den Sinn seiner Frage, bei der 0^2 nicht ausgeschlossen, die gesamte Anzahl der Zerlegungen nicht gefordert ist. Lp.

J. Westlund. Note on multiply perfect numbers. Annals of Math. (2) 3, 161-163.

Im Anschluß an eine vorangegangene Untersuchung (vergl. F. d. M. 32, 190-191, 1901) bestimmt Verf. alle vielfach vollkommenen Zahlen von der Vielfachheit 3, welche die Form $p_1^{\alpha_1} p_2 p_3 p_4$ haben, wo

$$p_1 < p_2 < p_3 < p_4$$

ist. Er findet, daß $2^9 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31$ die einzige solche Zahl ist. Lnd.

L. Carlini. Un teorema sulla funzione φ di Gauss. Periodico di Mat. (2) 4, 329.

Beweis des bekannten Satzes: Wenn n eine beliebige positive ganze Zahl ist, so besteht die Gleichung

$$\sum_{h=1}^{h=n} \varphi(h)\, E\frac{n}{h} = \frac{n(n+1)}{2},$$

wo $\varphi(h)$ die Anzahl der unter h liegenden, zu h relativ primen Zahlen bezeichnet, E die größte ganze Zahl in n/h. Lp.

A. Cunningham, H. J. Woodall. Determination of successive high primes. [Showing 417 new high primes.] Messenger (2) 31, 165-176; Brit. Ass. Rep. 1901, 553.

„Die vorhandenen großen Faktorentafeln zeigen alle Primzahlen unter neun Millionen; Primzahlen über neun Millionen erfordern besondere Mittel (die beträchtliche Arbeit erheischen) zu ihrer Entdeckung und können daher passend ‚hohe Primzahlen' heißen. Die Gesamtheit der

Primzahlen p in einer gegebenen Folge kann durch das folgende umständliche Verfahren bestimmt werden: Es sei N_0 irgend eine passende Zahl (später „Zentralzahl" benannt) innerhalb oder nahe der gegebenen Folge; $N_0 - b$ und $N_0 + b'$ seien die äußersten Zahlen der Folge, die demnach $b + b' + 1$ Zahlen umfaßt.

Erster Schritt. N_0 werde durch jede Primzahl p der Reihe nach dividiert, ebenso auch durch jede Primzahlpotenz p^k der Reihe nach, bis zu den Grenzen p und $p^k > \sqrt{N_0 + b'}$. Für jeden Divisor (p und p^k) werde der Rest R in einer Tafel verzeichnet, die also $N_0 \equiv R$ (mod. p oder p^k) nachweist. Diese Tafel heiße die Resttafel.

Zweiter Schritt. Demnächst sei $R + R' = p$ oder p^k, also $R' = p - R$ oder $p^k - R$. Dann sind $N_0 - R$ und $N_0 + R$ die beiden der gewählten Zahl N_0 nächstliegenden Zahlen, die durch p oder p^k teilbar sind. Alle anderen durch p oder p^k teilbaren Zahlen werden durch die allgemeinen Formeln gegeben:

$$N = N_0 - (mp + R) \equiv 0, \quad N = N_0 + (mp + R') \equiv 0 \pmod{p},$$
$$N = N_0 - (mp^k + R) \equiv 0, \quad N = N_0 + (mp^k + R') \equiv 0 \pmod{p^k},$$

so lange die Grenzen der Folge nicht überschritten werden. Wenn die Gesamtheit der Zahlen N innerhalb der gegebenen Folge in eine Tabelle eingetragen und alle Divisoren (p, p^k) bei jeder vermerkt werden, so endet dieser Schritt mit der Aufschließung aller zusammengesetzten Zahlen innerhalb der Folge nebst ihren wichtigsten Faktoren. Die so gebildete Tabelle kann die Faktorisationstabelle heißen. Die Zahlen in der letzteren Tabelle, für welche keine Faktoren bei dem zweiten Schritt gefunden sind, müssen notwendig Primzahlen sein; außerdem wird die Gesamtheit der Primzahlen innerhalb der gegebenen Folge auf diese Weise ermittelt."

Wenn die vorstehenden Sätze das gewählte Verfahren im großen beschreiben, so sind für die Anwendungen noch die folgenden Bemerkungen über die passende Wahl von N_0 und über die Grenzen einer Folge von Wichtigkeit. Die Liste der aufgefundenen hohen Primzahlen und die Hülfstafeln müssen im Originale nachgesehen werden. Alle Rechnungen sind von beiden Autoren unabhängig durchgeführt und dann mit einander verglichen worden. Lp.

A. Cunningham. On pluperfect numbers. Brit. Ass. Rep. 1902, 528-529.

Tabelle von 85 „pluperfekten" Zahlen, d. h. bei denen die Summe der Teiler, einschließlich 1 und N, durch N teilbar ist. Lp.

A. Cunningham. Questions 14641, 14722, 14829, 14889, 14849. Ed. Times (2) 1, 26-27, 38-39, 46, 84, 118-119.

14641. Die Gleichung $N_1 N_2 = N_3 N_4$, wo

$$N_r = (x_r^6 + 3^3 y_r^6)(x_r^2 + 3 y_r^2),$$

allgemein in ganzen Zahlen zu lösen und Zahlenbeispiele zu geben.

14722. Es sei $N_r = x_r^4 + 4y_r^4$; dann soll die Gleichung

$$\frac{N_1 \cdot N_3 \cdot N_5 \cdots N_{2r+1}}{N_0 \cdot N_2 \cdot N_4 \cdots N_{2r}} = \frac{N_a}{N_b}$$

allgemein in ganzen Zahlen gelöst werden unter Hinzufügung von Zahlenbeispielen.

14829. $N = (10^4 + 82)^6 + 1$ in Primzahlen zu zerlegen.

14889. $N = x^4 + \mu y^4$ ist immer in ganze Zahlen zerlegbar, wenn $x = t^2 \backsim (\mu g^4 - 4) u^2$, $y = 4gtu$, wo g, t, u beliebige ganze Zahlen sind, t prim zu u.

14849. $N = 11^{33} + 1$ in Primzahlen zu zerlegen. Alle diese Aufgaben hängen mit der Abhandlung des Verf. „On aurifeuillians" zusammen (vergl. F. d. M. **29**, 148, 1898) und werden mit den Mitteln gelöst, die in jener Arbeit behandelt sind. Lp.

A. Cunningham and J. Cullen. On idoneal numbers. Brit. Ass. Rep. 1901, 552.

Tafel der Zahlen zwischen 10^7 und $101 . 10^5$ von der Form $x^2 + 1848y^2$, wo x relativ prim zu $1848y$; alle 189 Zahlen sind Primzahlen. Lp.

R. W. D. Christie. Question 14971. Ed. Times (2) **2**, 33-34, 53-54.

Faktoren von $N^4 + 1$ durch eine leichte allgemeine Lösung zu finden, wo N^2 die Form $(M^2 - 24)/10$ annimmt; z. B.:

$$14506^4 + 1 = 210469913 \cdot 210378169.$$

An der ersten Stelle gibt A. Cunningham eine Lösung unter Verweisung auf eine Mitteilung in Lond. M. S. Proc. An der zweiten Stelle lehrt Christie selbst ein Verfahren und verspricht weitere Entwicklungen in einem Werke: „Chips from a mathematical workshop." Lp.

F. J. Vaes. Ontbinding in factoren (II), (III). Amst. Ak. Versl. **10**, 474-486, 623-631.

Fortsetzung der in F. d. M. **32**, 188, 1901 angezeigten Arbeit. Verf. führt unter Anwendung verschiedenartiger zahlentheoretischer Sätze eine Reihe von Methoden zur Zerlegung großer Zahlen aus. Lnd.

F. J. Vaes. Ontbinding in factoren. Amsterdam. 64 S. 8°.

H. Züge. Zur Lehre von der Teilbarkeit dekadischer Zahlen. Arch. der Math. u. Phys. (3) 4, 73-76.

Das vom Verf. beschriebene Verfahren ist nicht neu, sondern findet sich (worauf eine nachträgliche Anmerkung der Red. des Arch. hinweist) schon bei Gugliuzzo-Fazio (vergl. F. d. M. 21, 170-171, 1889 und 28, 167, 1897). Lnd.

E. J. Grigoriev. Über eine Eigenschaft der primitiven Wurzeln. Kasan Ges. (2) 12, No. 1, 7-10 (Russisch).

Eine primitive Wurzel der Primzahl p kann nicht ein Produkt aus einer geraden Anzahl von primitiven Wurzeln derselben Primzahl p sein. Si.

R. W. D. Christie. Question 14894. Ed. Times (2) 1, 61-62.

Sind a, b, c, d primitive Wurzeln einer Primzahl von der Form $4m+1$ von der Beschaffenheit, daß $ab \equiv cd \equiv 1$ (mod. p), so ist $a-b=c-d=q$; den Zusammenhang zwischen den Wurzeln zu zeigen und den verwandten Satz für die Primzahlen von der Form $4m-1$ zu finden. — Die Lösung hängt mit früheren Aufgaben des Verf. zusammen. Lp.

R. W. D. Christie. Question 14810. Ed. Times (2) 1, 90-91.

Ist γ primitive Wurzel einer Primzahl von der Form $4m-1$, so können die übrigen Wurzeln aus $p-\gamma^{2^n}$ gefunden werden, z. B.:

$$p=19, \gamma=2, 15, 3, 10, 4, 3 = p-2^2, p-2^4, p-2^8, \dots.$$

Beweise von A. Cunningham, H. J. Woodall und Christie. Lp.

E. Lampe. Zwei Briefe von C. G. J. Jacobi, die in den gesammelten Werken desselben nicht abgedruckt sind. Arch. der Math. u. Phys. (3) 2, 253-256.

Diese zwei an Reuschle gerichteten Briefe, welche im Programm des Königlichen Gymnasiums zu Stuttgart 1856 veröffentlicht sind, beziehen sich namentlich auf einige spezielle Fragen aus der Theorie der höheren Potenzreste. Lnd.

A. Cunningham. Questions 14789, 14809. Ed. Times (2) 1, 108, 116.

Für jede Fermatsche Primzahl $F_n = 2^{2^n}+1 > 5$ sind 3, 5, 6, 7, 10, 12 primitive Wurzeln und 15, 18, 21, 30 quadratische Reste. Beweise von Curjel und Cunningham. Ferner ist für $F_{n+1} > 5$

$$F_n^{2^{n+2}} + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } F_{n+1}).$$

Lp.

H. J. Woodall. Question 14837. Ed. Times (2) 1, 70-72.

Für den Modul 5431 gelten die Kongruenzen:

$$-2 \equiv 10^{854},\quad 3 \equiv -10^{1819},\quad 5 \equiv 10^{1862},\quad 6 \equiv -10^{2672},$$
$$6 \equiv 10^{781},\quad 11 \equiv 10^{2140},\quad 12 \equiv -10^{812},\quad 10^{2715} \equiv +1.$$

Die entsprechenden Relationen für die Potenzen von 2, 3, 5 bei demselben Modul zu finden. Die Beispiele stammen aus einer in Arbeit befindlichen „Table of congruence solutions“ des Verf. — Die Lösung der gestellten Aufgabe wird von A. Cunningham entwickelt. Lp.

R. W. D. Christie. Question 14725. Ed. Times (2) 2, 65-66, 84-85.

Es sei P eine Primzahl, zu der ein periodischer Dezimalbruch mit einer geraden Anzahl p von Ziffern gehört; H_1 die von der ersten Hälfte der Ziffern der Periode gebildete Zahl, H_2 die von der zweiten Hälfte. Dann ist

$$P-1=\frac{H_2+1}{H_1+1}=\frac{10^{\frac{1}{2}p}-H_1}{10^{\frac{1}{2}p}-H_2},\quad \frac{H_1+H_2+2}{H_2-H_1}=\frac{P}{P-2},$$
$$H_2(P-1)=(P-2)10^{\frac{1}{2}p}+H_1,\ 10^{\frac{1}{2}p}-H_1\equiv 0 \pmod{P},$$
$$H_1+H_2+2\equiv 0 \pmod{P} \equiv 10^{\frac{1}{2}p}+1,\ P(H_1+1)=10^{\frac{1}{2}p}+1.$$

Beweise für diese Relationen werden von Aletrop, H. W. Curjel, A. M. Nesbitt und Christie selbst gegeben. Lp.

H. Hertzer. Periode des Dezimalbruches für $1/p$, wo p eine Primzahl. Arch. der Math. u. Phys. (3) 2, 249-252.

Die Bork-Kesslersche Tabelle (vergl. F. d. M. 26, 205, 1895) für die Periodenzahlen aller Dezimalbrüche $1/p$ (p Primzahl) reichte von 1 bis 100000. Verf. setzt sie bis 112500 fort. Lnd.

A. Tagiuri. Generalizzazioni riguardanti la divisibilità dei numeri e la teoria delle frazioni decimali periodiche. Periodico di Mat. (2) 5, 43-58.

Die von Loria bereits angegebenen Kriterien der Teilbarkeit einer Zahl in einem Zahlensystem mit der Basis g werden von neuem bewiesen und verallgemeinert; besonders wird der Zusammenhang mit der Theorie der periodischen Brüche in einem derartigen Systeme untersucht. Lp.

K. Hensel. Über die arithmetischen Eigenschaften der Faktoriellen. Arch. der Math. u. Phys. (3) 2, 293-294.

Verf. gibt einen anderen Beweis der Stickelbergerschen (vergl. Math. Ann. 37, 342-343, 1890) Relation: Es sei p eine Primzahl und

$$m = a_0 + a_1 p + \cdots + a_r p^r \qquad (0 \leqq a_k < p)$$

die Entwicklung einer beliebigen Zahl m nach Potenzen von p; dann ist

$$\frac{m!}{(-p)^{\mu_m}} \equiv a_0!\, a_1! \ldots a_r! \text{ (mod. } p), \text{ wo } \mu_m = \left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \cdots \text{ ist.}$$

Lnd.

L. E. Dickson. Theorems on the residues of multinomial coefficients with respect to a prime modulus. Quart. J. 33, 378-384.

Verf. verallgemeinert einen von Glaisher (vergl. F. d. M. 29, 152 bis 153, 1898) für Binomialkoeffizienten aufgestellten Satz. Es bezeichne $(m_1, m_2, \ldots, m_t)$ den Polynomialkoeffizienten

$$\frac{(m_1 + m_2 + \cdots + m_t)!}{m_1!\, m_2! \ldots m_t!};$$

k sei diejenige der Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$, welcher m kongruent modulo $p-1$ ist (p Primzahl); $k_1, k_2, \ldots, k_t$ seien feste Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, p-1$, für welche $k_1 + k_2 + \cdots + k_t \equiv k$ (mod. $p-1$) ist. Dann ist modulo p

$$\sum_{m_1, \ldots, m_t} (m_1, m_2, \ldots, m_t) \equiv \begin{cases} (k_1, k_2, \ldots, k_t) & \text{für } k_1 + \cdots + k_t = k, \\ 0 & \text{für } k_1 + \cdots + k_t > k, \end{cases}$$

wenn die Summe sich auf alle Wertsysteme > 0 erstreckt, für welche $m_1 + m_2 + \cdots + m_t = m$, $m_1 \equiv k_1$ (mod. $p-1$), $\ldots$, $m_t \equiv k_t$ (mod. $p-1$) ist. Lnd.

G. Candido. Sulle funzioni U_n, V_n di Lucas. Periodico di Mat. (2) 4, 320-325.

In der Zahlentheorie von Lucas, Chap. XVII, werden zwei Funktionen U_n und V_n betrachtet, deren Zusammenhang in der gegenwärtigen Note durch ein sehr einfaches Verfahren aufgedeckt wird, das, wie der Verf. meint, der sehr interessanten Untersuchung der numerischen Funktionen dritter (und auch vierter) Ordnung bei Lucas nicht fern stehen dürfte, obwohl dieser vor der Vollendung seines Werkes verstorbene Mathematiker hierüber keinen Aufschluß gegeben hat. Von jenen obigen Funktionen werden einige Anwendungen gegeben, welche besondere, schon von anderen untersuchte Fälle unter sich begreifen. Endlich werden einige andere Funktionen nachgewiesen, die mit denen von Lucas gewisse Analogien zeigen. Lp.

E. McClintock. On the nature and use of the functions employed in the recognition of quadratic residues. American M. S. Trans. 8, 92-109.

Bekanntlich ist das Jacobische Symbol $\left(\frac{n}{k}\right)$, wo k ungerade und zu n teilerfremd ist, gleich $(-1)^\mu$, wo μ die Anzahl der negativen absolut kleinsten Reste von $n, 2n, 3n, \ldots, \frac{k-1}{2}n$ (mod. k) bezeichnet. Verf. schreibt ausführlicher $\mu(n, k)$ statt μ, um diese Funktion auch für verschiedene Werte von n und k diskutieren zu können; auf diese Untersuchung gründet er einen Algorithmus zur Reduktion des Jacobischen Symbols auf kleinere Zahlen, d. h. zur praktischen Berechnung des Symbols. Lnd.

J. W. L. Glaisher. On the distribution of the numbers for which $\left(\frac{s}{P}\right) = 1$, or -1, in the octants, quadrants, &c., of P. Quart. J. 34, 1-27.

Durch eine Note von Osborn (vergl. F. d. M. 26, 208, 1895) über das Legendresche Symbol veranlaßt, dehnt Verf. dessen Gedankengang auf den Fall aus, daß man die Verteilung der Zahlen untersucht, für welche das Jacobische Symbol $\left(\frac{s}{P}\right)$ gleich $+1$ oder -1 ist. Lnd.

W. Scheibner. Zur Theorie des Legendre-Jacobischen Symbols $\left(\frac{n}{m}\right)$, insbesondere über zweiteilige complexe Zahlen. Abhandlung II. Leipz. Abh. 27, 653-752.

In seiner ersten Abhandlung über das Legendre-Jacobische Symbol (vergl. F. d. M. 31, 190, 1900) hatte Verf. sich im wesentlichen auf den Körper der rationalen Zahlen beschränkt; in der gegenwärtigen Fortsetzung zieht er auch die „kubischen, biquadratischen und bikubischen komplexen Zahlen" (d. h. die ganzen Zahlen des Körpers der dritten, bezw. vierten Einheitswurzeln) in Betracht, nebst einigen anderen Fällen; es handelt sich dabei durchweg um solche quadratischen Körper, welche eine eindeutige Zerlegbarkeit ihrer ganzen Zahlen zulassen. Verf. entwickelt im ersten (arithmetischen) Teil in elementarer Darstellung die Eigenschaften der ganzen Zahlen der betreffenden Körper; im zweiten (analytischen) konstruiert er mit Hülfe der elliptischen Thetafunktionen analytische Ausdrücke für das Symbol $\left(\frac{n}{m}\right)$ in seinen verschiedenen Bedeutungen, und er untersucht die Beziehungen zu den elliptischen Integralen und den zugehörigen Invarianten. Lnd.

S. O. Schatunovsky. Bedingungen der Existenz von n ungleichen Wurzeln der Kongruenz n-ter Ordnung nach einem Primzahlmodul. Kasan Ges. (2) **12**, No. 3, 33-49 (Russisch).

Damit die Kongruenz n-ter Ordnung nach dem Primzahlmodul $p (n < p)$

$$(1) \quad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \equiv 0 \pmod{p}$$

n Wurzeln zulasse, ist es notwendig, daß die Kongruenz

$$(2) \quad s_{p+q} - s_{q+1} \equiv 0 \pmod{p} \quad (s_q = x_1^q + x_2^q + \cdots + x_n^q)$$

für jede ganze Zahl $q > -1$ befriedigt werde. Damit diese n Wurzeln ungleich seien, ist es außerdem notwendig, daß die Diskriminante d von $f(x)$ nicht mit 0 modulo p kongruent sei. Wird (2) für

$$q = 1, 2, \ldots, n-1$$

befriedigt und ist $d \not\equiv 0 \pmod{p}$, so hat (1) sicher n ungleiche Wurzeln. Anwendung auf die Kongruenz dritten Grades. Si.

S. O. Schatunovsky. Über eine unbestimmte Gleichung. Odessa Ges. **20**, 1-21 (Russisch).

Auflösung der unbestimmten ganzzahligen Gleichung

$$a x^{mn} + a_1 x^{mn-1} + a_2 x^{mn-2} + \cdots + a_{mn} = b y^m$$

in ganzen Zahlen, unter der Voraussetzung $\frac{a}{b} = \pm c^m$ ($c > 0$, m, n zwei ganze positive Zahlen). Si.

E. L. Bunitzky. Zur Theorie der Kongruenzen nach einem zusammengesetzten Modul. Odessa Ges. **20**, III-VIII (Russisch).

Einige Sätze über Kongruenzen modulo M: I. Damit Kongruenzen existieren: $f(a + kh) \equiv r_k \pmod{M}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, ist es notwendig und hinreichend, daß die Koeffizienten A_i von $f(x)$ die Kongruenzen befriedigen: $k!\, h^k A_k \equiv \Delta^k r_0 \pmod{M}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. II. Hat die Kongruenz (1) $f(x) \equiv 0 \pmod{M}$ k Wurzeln

$$a, a + h, \ldots, a + (k-1) h$$

(k der kleinste Wert von x, für welchen $x!\, h^x$ durch M teilbar ist, und $k < m = \frac{M}{d}$ der größte gemeinschaftliche Divisor von M und h), so läßt die Kongruenz (1) noch die Wurzeln

$$a + kh, a + (k+1) h, \ldots, a + (m-1) h$$

zu. Si.

M. Bauer. Sur les congruences identiques. Nouv. Ann. (4) 2, 256-264.

Wenn p eine Primzahl ist, so ist bekanntlich identisch

$$x^{p-1}-1\equiv\prod_{i=1}^{p-1}(x-r_i)\qquad(\text{mod. }p),$$

wo $r_1,\dots,r_{p-1}$ ein vollständiges Restsystem teilerfremder Zahlen zu p bilden; d. h. die Koeffizienten auf beiden Seiten sind beziehlich kongruent. Gruber (vergl. F. d. M. 27, 141-142, 1896) hatte die Frage gestellt und beantwortet, für welche zusammengesetzten Moduln identisch

$$x^{\varphi(n)}-1\equiv\prod_{i=1}^{\varphi(n)}(x-r_i)\qquad(\text{mod. }n)$$

ist, wo $r_1,\dots,r_{\varphi(n)}$ ein vollständiges Restsystem teilerfremder Zahlen zu n bilden. Hier gibt Verf. eine explizite Form des Ausdrucks

$$\prod_{i=1}^{\varphi(n)}(x-r_i)\qquad(\text{mod. }n)$$

an und zieht daraus einige Folgerungen. Er beweist z. B.: Wenn p eine ungerade Primzahl ist und $n=p^\pi m$ (m nicht mehr durch p teilbar), so ist identisch

$$\prod_{i=1}^{\varphi(n)}(x-r_i)\equiv(x^{p-1}-1)^{\frac{\varphi(n)}{p-1}}\qquad(\text{mod. }p^\pi).$$

Auch löst er die Aufgabe: d sei ein Divisor von n, wann ist identisch

$$x^{\varphi(n)}-1\equiv\prod_{i=1}^{\varphi(n)}(x-r_i)\qquad(\text{mod. }d)?$$

Lnd.

M. Bauer. Zur Theorie der Kongruenzen höheren Grades. Math. és Phys. Lapok 10, 28-33 (Ungarisch).

Ist $f(x)\equiv x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n=0$ (wo A_i eine ganze rationale Zahl) eine irreduzible Gleichung mit einer Wurzel ω, und ist $(1,\omega,\omega^2,\dots,\omega^{n-1})$ das Fundamentalsystem des Zahlenkörpers ω, so gilt folgender Satz: I. Wenn p eine beliebige Primzahl ist, so läßt sich der Ausdruck $f(x)$ (mod. p^α), wo $\alpha>1$, eindeutig in das Produkt zweier mit rationalen ganzen Koeffizienten versehenen irreduziblen Faktoren zerlegen, in welchen der höchste Koeffizient gleich 1 ist. Und zwar ist im Falle $\alpha=1$, wenn also $f(x)\equiv\prod_{i=1}^{s}f_i(x)^{c_i}$ (mod. p), wo $f_i(x)$ (mod. p) verschiedene irreduzible Ausdrücke bezeichnet, im allgemeinen

$$f(x)\equiv\prod_{i=1}^{s}F_i(x)\qquad(\text{mod. }p^\alpha),$$

wo die irreduziblen Ausdrücke $F_i(x)$ (mod. p^α) der Bedingung

$$F_i(x)\equiv f_i(x)^{c_i}\qquad(\text{mod. }p)$$

entsprechen.

II. Damit die irreduzible Gleichung

$$f(x) = x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_n = 0,$$

in welcher die B_i rationale ganze Zahlen bezeichnen, und welche innerhalb des Gebietes der rationalen Zahlen eine Galoissche Gleichung ist, auf jede Primzahlpotenz reduzibel sei, genügt es, daß in dem Zahlenkörper ω jede rationale Primzahl mindestens durch zwei verschiedene Primideale teilbar sei.

III. Der Begriff der Irreduzibilität für den Modul m ist im allgemeinen folgendermaßen zu erklären: Ein Ausdruck

$$f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n \qquad (\text{mod. } m),$$

wo die c_i rationale ganze Zahlen sind, ist reduzibel, wenn er sich in solche mit rationalen ganzen Koeffizienten versehene Faktoren zerlegen läßt, bei denen die Summe der Grade gleich m ist. S.

R. Levavasseur. Sur les congruences à plusieurs inconnues relativement à un nombre premier impair. C. R. 135, 949-950.

Der Verf. stellt sich die Aufgabe, das Produkt

$$P = \Pi f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

zu bestimmen, wenn dasselbe über alle ganzen rationalen und mod. p verschiedenen Funktionen höchstens r-ten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten erstreckt wird; er findet zunächst für $r = 1$

$$P \equiv |x_i^{p^h} - x_i^{p^{h-1}}| \qquad (\text{mod. } p), \;\; (h, i = 1, 2, \ldots, m),$$

hieraus in speziellen Fällen auch den Wert von P, wenn $r > 1$ ist, und wenn alsdann das Produkt nur über die irreduktibeln Funktionen erstreckt wird. Lsg.

J. Cullen. The solutions of a system of linear congruences. London M. S. Proc. 34, 323-334.

Es handelt sich hier um Systeme linearer Kongruenzen mit einer Unbekannten. Verf. gibt eine graphische Methode an, um die innerhalb gegebener Grenzen gelegenen Lösungen des Systems zu finden. Die Methode ist auch geeignet für die Faktorenzerlegung großer Zahlen, die Auffindung großer Primzahlen, die Darstellung großer Zahlen durch binäre quadratische Formen usw. Lnd.

E. Cahen. Sur la résolution exacte en nombres entiers des équations linéaires à coefficients quelconques. S. M. F. Bull. 30, 234-242.

Verf. versteht unter Normalreihe von Näherungswerten für die positive (rationale oder irrationale) Zahl a eine unendliche Folge von Brüchen $\frac{m^{(1)}}{n^{(1)}}, \frac{m^{(2)}}{n^{(2)}}, \ldots$ mit folgender Eigenschaft: Wird

$$a = \frac{m^{(\nu)}}{n^{(\nu)}} + \frac{\varepsilon^{(\nu)}}{n^{(\nu)}}$$

gesetzt, so ist $\lim_{\nu=\infty} \varepsilon^{(\nu)} = 0$. Daß eine solche Normalreihe stets vorhanden ist, folgt aus den einfachsten Eigenschaften der Kettenbrüche. Analog folgt aus einem bekannten Hermiteschen Satze, daß für p positive Zahlen $a_1, \ldots, a_p$ eine Normalreihe von Näherungswerten existiert, d. i. eine unendliche Folge von Systemen von p Brüchen mit folgender Eigenschaft: Wenn dem Index ν die p Brüche $\frac{m_1^{(\nu)}}{n^{(\nu)}}, \ldots, \frac{m_p^{(\nu)}}{n^{(\nu)}}$ entsprechen und

$$a_1 = \frac{m_1^{(\nu)}}{n^{(\nu)}} + \frac{\varepsilon_1^{(\nu)}}{n^{(\nu)}}, \ldots, a_p = \frac{m_p^{(\nu)}}{n^{(\nu)}} + \frac{\varepsilon_p^{(\nu)}}{n^{(\nu)}}$$

gesetzt wird, so ist $\lim_{\nu=\infty} \varepsilon_1^{(\nu)} = 0, \ldots, \lim_{\nu=\infty} \varepsilon_p^{(\nu)} = 0$.

Verf. beweist folgende Haupteigenschaft der Normalreihen: Wenn zwischen den p Zahlen $a_1, \ldots, a_p$ eine ganzzahlige lineare Relation besteht $A_1 a_1 + \cdots + A_p a_p + B = 0$, so gilt dieselbe Relation zwischen den Brüchen jeder Normalreihe von einem gewissen Index an:

$$A_1 \frac{m_1^{(\nu)}}{n^{(\nu)}} + \cdots + A_p \frac{m_p^{(\nu)}}{n^{(\nu)}} + B = 0.$$

Dann entwickelt er noch einen komplizierteren Satz ähnlicher Art, welcher in Zusammenhang mit dem Kroneckerschen (vergl. F. d. M. **16**, 83-84, 1884) Problem von der näherungsweisen Auflösung linearer Gleichungen steht; hierbei kommt es ja zuerst darauf an, die etwa vorhandenen genauen ganzzahligen linearen Gleichungen zwischen den Koeffizienten aufzufinden. Lnd.

A. Thue. Et par antydninger til en taltheoretisk methode. Christiania Videnskabsselskabs Forhandlinger 1902, No. 7, 21 S.

Der Verf. beweist unter anderm den folgenden Satz: Sind a und b zwei beliebig gegebene Zahlen, die beide relativ prim zu einer gegebenen Zahl $p > 1$ sind, so können die Gleichungen

$$aq = \alpha p + h, \quad bq = \beta p + k$$

in solchen positiven und negativen ganzen Zahlen α, β, h, k und q befriedigt werden, daß $0 < h^2 < p$, $0 < k^2 < p$ sind. Gbg.

C. Störmer. Remarque préliminaire sur l'équation indéterminée $x_1^2 - Ax_2^2 - 2Bx_2x_3 - Cx_3^2 + (AC - B^2)x_4^2 = \pm 4$. Christiania. Videnskabsselskabets Skrifter. I. Mathem.-naturw. Klasse 1902, No. 8.

Es werden einige vorläufige Resultate über die im Titel stehende unbestimmte Gleichung ohne Beweis gegeben. A, B und C sind dabei

ganze Zahlen. Auf die Gleichung ist Humbert gestoßen bei seinen Untersuchungen über die komplexe Multiplikation Abelscher Funktionen.

Unter anderen wird folgendes Theorem gegeben:

Sämtliche ganzzahligen Lösungen u, x, y, z der unbestimmten Gleichung

$$u^2 - 2x^2 - 3y^2 + 6z^2 = 1$$

werden durch leicht angebbare Formeln aus folgenden zwei irrationalen Fundamentallösungen hergeleitet:

$$u = \sqrt{2}, \quad x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad y = 0, \quad z = 0;$$
$$u = \tfrac{1}{2}\sqrt{6}, \quad x = 0, \quad y = \tfrac{1}{6}\sqrt{6}, \quad z = 0.$$

Gbg.

A. Cunningham. Question 14970. Ed. Times (2) 2, 64.

Drei oder mehr Primzahlen q_r zu finden, so daß

$$x^{q_0} - 1, \; x^{q_1} - 1, \; x^{q_2} - 1, \; \ldots$$

bezw. durch $q_0, q_1, q_2, \ldots$ für mehrere angegebene Werte von x ($= a, b, c, \ldots$) zugleich teilbar sind, unter Hinzufügung von Zahlenbeispielen. Lp.

R. Grilli. Risoluzione in numeri interi dell' equazione lineare a più incognite. Suppl. al Period. 5, 33-38, 49-51.

Für Schüler auf Mittelschulen entwickelt der Verf. die einfachen Methoden zur Lösung diophantischer Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten: a) Eulersche Methode, b) Lagrangesche Methode, c) Binetsche Methode. Im Schlußartikel werden lineare Gleichungen mit drei Unbekannten behandelt. Lp.

A. Pleskot. Über eine Methode der Lösung der unbestimmten Gleichungen. Zs. f. math. u. naturw. Unt. 33, 47-51.

Eine Modifikation der Eulerschen Methode zur Lösung einer diophantischen Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten. Lp.

Sanjána. Question 12471. Ed. Times (2) 2, 101.

Setzt man

$$a = mx^2 + my^2, \; b = m^2 + x^2y^2, \; c = (x^2 - m)(y^2 + m),$$

so wird der Inhalt Δ des Dreiecks mit den Seiten a, b, c:

$$\Delta = mxy(x^2 - m)(y^2 + m).$$

Die Formel wird geometrisch erläutert und spezialisiert. Lp.

K. Schwering. Anwendung des Abelschen Theorems auf die Lösung der diophantischen Gleichungen $x^3 + Ay^3 = z^3$ und $x^3 + y^3 = z^3$. Arch. d. Math. u. Phys. (3) **2**, 285-288.

Den schon von Jacobi (vergl. J. für Math. **13**, 353-355, 1835) bemerkten Zusammenhang zwischen dem Abelschen Theorem und gewissen diophantischen Gleichungen hatte Verf. bei einer früheren Gelegenheit (vergl. F. d M. **29**, 156-157, 1898) näher erforscht; er gibt hier zwei weitere Beispiele. Es handelt sich insbesondere bei der ersten, schon von Legendre untersuchten Gleichung darum, aus einer Lösung eine neue abzuleiten; des Verf. Behandlungsweise klärt diesen Zusammenhang wesentlich auf. Lnd.

K. Schwering. Vereinfachte Lösung der Eulerschen Aufgabe: $x^3 + y^3 + z^3 + v^3 = 0$. Arch. der Math. u. Phys. (3) **2**, 280-284.

Verf. gibt eine erhebliche Vereinfachung der Eulerschen Lösung dieser diophantischen Gleichung an. Er beweist, daß die allgemeinste Lösung in folgenden Formeln enthalten ist:

$$x = m\alpha - n^2,\ y = -m\beta + n^2,\ z = -n\alpha + m^2,\ v = n\beta - m^2,$$

wo die Zahlen α, β, m, n durch eine Gleichung verbunden sind:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 3mn.$$

Aus diesen Formeln schließt Verf. unter Benutzung des großen Fermatschen Satzes (für $n = 3$), daß die Gleichung $4x^3 = 1 + 3y^2$ in (ganzen oder gebrochenen) rationalen Zahlen nur die zwei Lösungen $x = 1$, $y = \pm 1$ besitzt. Es sei übrigens bemerkt, daß schon Kronecker (vergl. J. für Math. **56**, 188, 1859) dies direkt aus dem Fermatschen Satze geschlossen hat. Lnd.

H. Kühne. Bemerkung zu der Abhandlung „Vereinfachte Lösung der Eulerschen Aufgabe: $x^3 + y^3 + z^3 + v^3 = 0$ in (3) **2**, 280". Arch. der Math. u. Phys. (3) **4**, 180.

Verf. bringt die Schweringsche Lösung (vergl. das vorangehende Referat) in eine solche Form, daß die Parameter in derselben ganz unabhängig sind:

$$x = 3(p^2 + pq + q^2)pr - 9r^4,\ y = -3(p^2 + pq + q^2)qr + 9r^4,$$
$$z = -9pr^3 + (p^2 + pq + q^2)^2,\ v = 9qr^3 - (p^2 + pq + q^2)^2.$$

Lnd.

A. A. Werebrüssow. Über die Gleichung $x^3 + y^3 = Az^3$. Moskau Math. Samml. **23**, 761-763 (Russisch).

Bestimmung der Form, welche der Koeffizient A besitzen muß, damit die genannte Gleichung in ganzen Zahlen lösbar sei. Si.

W. C. Stanham. Question 14945. Ed. Times (2) 2, 38, 48, 73.

Die Gleichung $x^3 - y^3 = 17z^3$ in ganzen Zahlen zu lösen. — An der ersten Stelle gibt Cunningham ein Verfahren zur Auffindung von Lösungen, an der zweiten Stelle regt Biddle die Lösung von $x^3+y^3=17z^3$ in positiven ganzen Zahlen an. Diese Lösung wird von Cunningham an der dritten Stelle auf Formeln von Desboves, Prestet, Euler, Ed. Lucas zurückgeführt. Als kleinste ermittelte Zahlen werden mitgeteilt:

$$x = 104940, \; y = 11663, \; z = 40831.$$

Lp.

G. Arnoux. Arithmétique graphique. — Correspondance entre les espaces arithmétiques et les équations arithmétiques (congruences). Assoc. Franç. Ajaccio (1901) 30, 31-50.

Bezüglich der „graphischen Arithmetik" des Verf. vergleiche man F. d. M. 25, 337-338, 1894. Gegenwärtig soll gezeigt werden, daß der Zusammenhang zwischen den arithmetischen Räumen und den arithmetischen Gleichungen viel tiefer begründet ist, indem er sich auf alle Grade der Gleichungen und auf alle Moduln erstreckt. Zu diesem Zwecke gibt der Verf. die praktischen Verfahrungsarten an, mit denen man Tabellen (arithmetische Räume) aufstellen kann, die alle Lösungen der verschiedenen Kongruenzen eines und desselben, im übrigen beliebigen Grades in bezug auf einen gegebenen, im übrigen ebenfalls beliebigen Modul enthalten. Er gibt Beispiele zur Lösung der Gleichung dritten Grades bezüglich des Moduls 4, einer trinomischen Gleichung siebenten Grades, einer trinomischen Gleichung vierten Grades nach den Moduln 12 und 13. Lp.

G. Arnoux. Solution des équations arithmétiques du troisième degré de module premier impair. Assoc. Franç. Ajaccio (1901) 30, 51-73.

In der vorstehend besprochenen Abhandlung sind die Fächer eines arithmetischen Raumes ermittelt worden, in welche die reellen Lösungen der ihnen entsprechenden Gleichungen einzustellen sind. Die gegenwärtige Arbeit ist den imaginären Lösungen dieser Gleichungen gewidmet und der Auffindung von Mitteln, sie durch lineare oder andere Funktionen von Ausdrücken, wie z. B. $\sqrt{3}$, was nach dem Modul 7 imaginär ist, darzustellen. Ferner werden zahlreiche Beispiele der Arten gegeben, nach welchen man somit die leeren Fächer der in der ersten Mitteilung betrachteten arithmetischen Räume ausfüllen kann. Lp.

G. Candido. Sul teorema di Fermat. Batt. G. 40, 223-224.

Verf. beweist den Fermatschen Satz folgendermaßen: Aus der Identität:

$$a^p + b^p = (a+b)^p - \frac{p}{1} ab(a+b)^{p-2}$$
$$+ \cdots + (-1)^r \frac{p(p-2r+1)\cdots(p-r-1)}{1\cdot 2\cdots r} a^r b^r (a+b)^{p-2r} + \cdots$$

folgt für $b = -1$, wenn p eine Primzahl bezeichnet,

$$a^p - a = (a-1)^p - (a-1) + pM,$$

was durch Induktion in bekannter Weise zur Kongruenz $a^p - a \equiv 0 \pmod{p}$ führt. Verf. beweist dann noch einige andere bekannte Sätze mit Hülfe der obigen Identität. Lnd.

C. Störmer. Une application d'un théorème de Tchebycheff. Christiania. Archiv for Mathem. og Naturvid. 24, No. 5.

Es wird ein merkwürdiger Satz von Tschebyscheff über den größten Primzahldivisor des Produktes

$$(1+2^2)(1+4^2)(1+6^2)\ldots(1+4n^2)$$

verwertet, um folgenden Satz zu beweisen:

Wenn $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ganze positive Zahlen sind, so kann das Produkt

$$\pm i(i\pm 1)^{a_1}(i\pm 2)^{a_2}(i\pm 3)^{a_3}\ldots(i\pm n)^{a_n}$$

wo $i=\sqrt{-1}$ ist, niemals reell oder rein imaginär sein, wenn n größer als 3 ist.

Um dieses Resultat zu erhalten, wird zuerst der Satz bewiesen: Wenn $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ positive ganze Zahlen und $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ solche ganzen Zahlen sind, daß $|x_1| < |x_2| < |x_3| < \cdots < |x_n|$, wenn ferner das Produkt $(x_1+i)^{a_1}\cdot(x_2+i)^{a_2}\ldots(x_n+i)^{a_n}$ reell oder rein imaginär ist, so ist jeder Primzahldivisor des Produktes

$$(1+x_1^2)(1+x_2^2)\ldots(1+x_n^2)$$

kleiner als $|x_n| + |x_{n-1}| + 1$.

Daraus folgt, daß jeder Primzahldivisor des Produkts

$$(1+1^2)(1+2^2)\ldots(1+n^2)$$

kleiner als $2n$ sein muß, wenn $i(i\pm 1)^{a_1}\cdot(i\pm 2)^{a_2}\ldots(i\pm n)^{a_n}$ reell oder rein imaginär sein soll.

Indem nun der Verf. den Markoffschen Beweis für den obengenannten Satz von Tschebyscheff weiter verfolgt und die Untersuchungen von Ch. de la Vallée Poussin über die Primzahlen verwertet, gelangt er zur folgenden Verschärfung des Tschebyscheffschen Satzes:

Es sei μ_n der größte Primzahldivisor des Produktes

$$(1+1^2)(1+2^2)(1+3^2)\ldots(1+n^2)$$

und es sei k eine beliebige positive Zahl >1; wenn ν dann ein Wert von n ist derart, daß

$$\mu_\nu > k^3 \cdot e^{3k+6}$$

ist, so ist $\mu_n > kn$ für jeden Wert $n > \nu$.

Daraus folgt für $k = 2$, daß $\mu_n > 2n$ für $\mu_n > 651019$, und es ist hinreichend, $n > 815$ zu wählen, um diese Forderung zu erfüllen. Für Werte $n < 815$ findet man leicht, daß $n = 3$ der einzige Wert ist, für welchen $\mu_n < 2n$. Der erst zitierte Satz folgt direkt aus dieser Tatsache. Gbg.

J. P. Gram. Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Kjöb. Overs. 1902, 3-16.

In dieser wichtigen kleinen Note sind wohl zum ersten Male einige der Wurzeln der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$ berechnet. In einer früheren Note von 1895 hat der Verf. schon gezeigt, daß die kleinsten Wurzeln von $\xi(t) = 0$ annäherungsweise

$$\alpha_1 = 14{,}135, \ \alpha_2 = 20{,}82, \ \alpha_3 = 25{,}1$$

sein müßten. Aber obgleich die Koeffizienten der Reihen, durch welche $\zeta(s)$ und $\xi(t)$ dargestellt werden, mit 16 richtigen Dezimalen berechnet waren, reichte dieses doch nicht hin, um eine genauere Bestimmung der Wurzeln zu erhalten. Der Verf. hat daher eine noch genauere Bestimmung der Koeffizienten unternommen, aber auch diese Bestimmung hat kein besseres Resultat herbeigeführt. Der Verf. hat jetzt die Werte von t in der Gleichung $\zeta(\frac{1}{2} + ti) = 0$ direkt berechnet, und es hat sich gezeigt, daß diese Berechnung ohne besondere Schwierigkeiten durchgeführt werden kann. Als Ausgangspunkt hat der Verf. die bekannte Formel

$$\zeta(s) = \lim_{n=\infty} \left[\sum_1^n n^{-s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} \right]$$

benutzt, welche gilt, wenn der reelle Teil von s positiv ist. Der Verf. setzt $\zeta(\frac{1}{2} + ti) = C(t) + iS(t)$ und berechnet die Werte von t, die auf einmal $C(t)$ und $S(t)$ verschwinden lassen. Die Werte der Wurzeln sind mit sechs Dezimalen berechnet, und es sind die ersten zehn derselben bestimmt, z. B.:

$$\alpha_1 = 14{,}134725, \ \alpha_2 = 21{,}022040 \ \text{usw.}$$

Die Reihe der α ist sehr unregelmäßig. Der Verf. hat noch gezeigt, daß die Gleichungen $C(t) = 0$ und $S(t) = 0$ noch andere Wurzeln besitzen, die nicht auf einmal beide Gleichungen befriedigen. Werden diese Wurzeln bezw. β und γ genannt, so kann gezeigt werden: Die β und γ folgen einander wechselweise. Für die ersten 15 Wurzeln α wird gezeigt, daß sie durch die Werte von γ geschieden werden, aber nicht durch die Werte von β.

Der Verf. hat gezeigt, daß die ersten 15 Wurzeln von $\xi(t) = 0$ reell sind, dagegen ist es ihm nicht geglückt, zu beweisen, daß alle Wurzeln von $\xi(t)$ reell sind. V.

G. Torelli. Sur quelques théorèmes de M. Poincaré sur les idéaux premiers. Palermo Rend. 16, 100-103.

Verf. stellt einige asymptotische Sätze über die Verteilung der Primzahlen einer arithmetischen Progression und der Primideale im Kreisteilungskörper der $p$ten Einheitswurzeln (p Primzahl) zusammen, welche er im Kap. 11 seiner Monographie über das Primzahlproblem (vergl. F. d. M. 32, 206, 1901) bewiesen zu haben glaubt. Jedoch sind seine Beweise unrichtig (vergl. den unheilbaren Fehlschluß l. c., S. 157, Z. 9-10), so daß die Wiedergabe der Sätze ohne Interesse wäre. Lnd.

E. Holmgren. Om primtalens fördeling. Stockh. Öfv. 59, 221-225.

Das Kochsche Theorem über die Differenz zwischen der Anzahl der Primzahlen $F(x)$ unterhalb x und dem Integrallogarithmus: $|F(x) - \mathrm{Li}(x)| < C\sqrt{x}\,(\log x)^2$ (vergl. F. d. M. 31, 201, 1900) ist eine Folge aus den Untersuchungen von Ch. de la Vallée Poussin über die Riemannsche ζ-Funktion. Lp.

M. Bauer. Zur Theorie der arithmetischen Reihen. Math. és Phys. Lapok 10, 313-317.

Neuer elementarer Beweis des Satzes: Wenn $a = p^\alpha$ eine ungerade Primzahlpotenz ist, so enthält die arithmetische Reihe $ax - 1$ unendlich viele Primzahlen. S.

M. Cipolla. La determinazione assintotica dell' n^{imo} numero primo. Napoli Rend. (3) 8, 132-166.

Wie zuerst de la Vallée Poussin (vergl. F. d. M. 30, 193-194, 1899) bewiesen hat, wird die Anzahl der Primzahlen bis x durch den Integrallogarithmus von x mit solcher Genauigkeit dargestellt, daß die mit $\frac{\log^r x}{x}$ multiplizierte Differenz bei jedem Wert von r für $x = \infty$ gegen 0 konvergiert. Daraus folgt, indem man jenen Satz sukzessive auf die Fälle $r = 1, 2, 3, \cdots$ anwendet, eine Reihe von unendlich vielen Relationen, in denen p_n die $n$te Primzahl bezeichnet und ε_n jedesmal eine solche Funktion von n, das $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$ ist:

$$\frac{p_n}{n} = \log n + \log n \cdot \varepsilon_n,$$

$$\frac{p_n}{n} = \log n + \log\log n - 1 + \varepsilon_n,$$

$$\frac{p_n}{n} = \log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2}{\log n} + \frac{\varepsilon_n}{\log n},$$

. . . .

allgemein:

$$\frac{p_n}{n} = \log n + \log\log n - 1 + \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} \frac{f_i(\log\log n)}{i!\,(\log n)^i} + \frac{\varepsilon_n}{\log^r n},$$

wo f_i (log log n) eine ganze ganzzahlige Funktion von log log n bezeichnet. Verf. beschäftigt sich damit, die in der allgemeinen Relation auftretenden Zahlenkoeffizienten zu untersuchen, und leitet aus den Rekursionsformeln eine Reihe von Eigenschaften ab.

Im zweiten Teil will er analoge Sätze über die n-te Primzahl einer gegebenen arithmetischen Progression $My + N$ aufstellen und glaubt die Richtigkeit einer analogen Formelreihe nachgewiesen zu haben. Doch enthält seine Beweisführung (auf S. 159 oben) eine Lücke, welche unter alleiniger Anwendung des (vom Verf. zitierten) de la Vallée Poussinschen Satzes

$$\lim_{x=\infty} \frac{\text{Anzahl der Primzahlen } My + N \leqq x}{\mathrm{Li}(x)} = \frac{1}{\varphi(M)}$$

gar nicht ausgefüllt werden kann, und ein weitergehender Satz über die Verteilung der Primzahlen einer arithmetischen Progression war zurzeit noch nicht bewiesen worden. Lnd.

E. Landau. Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale. J. für Math. **125**, 64-188.

Es sei ein beliebiger algebraischer Zahlkörper $\varkappa$ zugrunde gelegt, und es bezeichne $\zeta_\varkappa(s)$ die analytische Funktion, welche durch die für $\Re(s) > 1$ konvergente Dirichletsche Reihe $\sum_{\mathfrak{n}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^s}$ definiert ist, wo $\mathfrak{n}$ alle Ideale des Körpers durchläuft und $N\mathfrak{n}$ die Norm von $\mathfrak{n}$ bezeichnet. Die wichtigste der bisher bekannten Eigenschaften dieser analytischen Funktion bestand in dem Satze, daß bei Annäherung von rechts $\lim_{s=1} (s-1) \sum_{\mathfrak{n}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^s}$ existiert und von Null verschieden ist. Verf. fügt in der vorliegenden Arbeit eine Reihe analytischer Eigenschaften hinzu, welche auch für die zahlentheoretischen Anwendungen der Funktion nützlich sind. Es seien hier aus Abschnitt 1)-3) folgende Sätze angeführt: 1. Wenn k der Grad des Körpers $\varkappa$ ist, so ist $\zeta_\varkappa(s)$ über die Gerade $\Re(s) = 1$ hinaus mindestens bis zur Geraden $\Re(s) = 1 - \frac{1}{k}$ hin fortsetzbar und ist in der Halbebene $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ eine eindeutige analytische Funktion mit dem Pol erster Ordnung $s = 1$ als einziger singulärer Stelle. 2. Auf der Geraden $\Re(s) = 1$ hat diese Funktion keine Nullstelle, und es bleibt, wenn t positiv unendlich wird, das Produkt $|\zeta_\varkappa(1 + ti)| \log^7 t$ oberhalb einer positiven Schranke gelegen. 3. Das nach wachsenden Normen geordnete,

über alle Primideale des Körpers erstreckte Produkt $\prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}}$ konvergiert für $\Re(s) = 1$ (exkl. $s=1$) und hat auch dort den Wert $\zeta_x(s)$.

Hierauf folgen einige allgemeinere Betrachtungen über Dirichletsche Reihen. Im folgenden vierten Abschnitt dehnt Verf., einer von Poincaré in einer älteren Arbeit (vergl. F. d. M. **24**, 171-172, 1892) gegebenen Anregung folgend, die Tschebyschefschen Sätze über die Verteilung der Primzahlen auf den Fall eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers aus. Es handelt sich hier um Sätze von der Art des folgenden: $\pi(x)$ bezeichne die Anzahl der Primideale des Körpers, deren Norm $\leqq x$ ist; dann ist

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} \leqq 1, \limsup_{x=\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} \geqq 1.$$

Dies ist auch ohne Anwendung der Dirichletschen Reihen leicht beweisbar. Abschnitt 5) behandelt die Analoga zu den klassischen Dirichlet-Mertensschen Problemen; es zeigt sich, daß gewisse in den asymptotischen Gesetzen der Idealtheorie auftretende Konstanten durch die ζ_x-Funktion mit speziellen Argumenten ähnlich ausdrückbar sind wie in der elementaren Zahlentheorie durch die Riemannsche Zetafunktion. Der sechste Abschnitt enthält einen neuen Beweis der „Kroneckerschen Grenzformel“, und der siebente beschäftigt sich damit, die gegenseitige Abhängigkeit einiger neueren Sätze über die Verteilung der Primzahlen zu untersuchen. Lnd.

G. Pick. Geometrisches zur Zahlenlehre. Sonderabdr. naturw.-medizin. Verein f. Böhmen „Lotos“ 1899 Nr. 8, 9 S. 8°.

Es sei ein Gitter durch zwei Systeme äquidistanter Parallelen in der Ebene gebildet. Es möge i, bezw. u die Anzahl der Gitterpunkte bezeichnen, welche im Innern, bezw. auf dem Umfang eines Gitterpolygons liegen, d. h. eines Polygons, dessen Ecken Gitterpunkte sind; wenn $2i+u-2$ die Punktzahl des Polygons heißt, so ist leicht zu zeigen, daß die Punktzahl eines aus zwei Bestandteilen zusammengesetzten Polygons gleich der Summe der Punktzahlen der Bestandteile ist. Wenn die Einheit des Flächeninhalts die Hälfte einer einzelnen parallelogrammatischen Masche des Gitters ist, so gilt, wie Verf. nachweist, für jedes Gitterpolygon der Satz, daß sein Inhalt gleich seiner Punktzahl ist. Mit Hülfe dieses Satzes folgert Verf. geometrisch die Existenz des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen, ebenso einige bekannte Sätze über Annäherung reeller Zahlen durch rationale Brüche. Lnd.

H. Minkowski. Über periodische Approximationen algebraischer Zahlen. Acta Math. **26**, 333-352.

Der Verf. stellt sich die Frage nach denjenigen algebraischen Zahlen,

welche analoge periodische Approximationen besitzen, wie sie die reellen algebraischen Zahlen zweiten Grades vermöge der Periodizität ihrer Entwicklungen in gewöhnliche Kettenbrüche aufweisen. In einer früheren Arbeit (Gött. Nachr. 1899; s. F. d. M. **30**, 195, 1899) hatte er folgendes Kriterium für algebraische Zahlen n-ten Grades aufgestellt: Es gibt zu jeder reellen Zahl $r \geqq 1$ eine Substitution

$$(S) \qquad x_h = s_h^{(1)} y_1 + s_h^{(2)} y_2 + \cdots + s_h^{(n)} y_n$$

mit ganzzahligen Koeffizienten, deren absolute Beträge, durch r dividiert, eine gewisse von r unabhängige Grenze nicht überschreiten, und mit einer von Null verschiedenen Determinante, welche absolut kleiner als $n!$ ist; geht durch diese Substitution die mit der algebraischen Zahl α gebildete Linearform

$$\xi = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \cdots + \alpha^{n-1} x_n$$

in

$$\xi = \varrho_1 y_1 + \varrho_2 y_2 + \cdots + \varrho_n y_n$$

über, so kommt für die Verhältnisse $\varrho_1 : \varrho_2 : \ldots : \varrho_n$ von vornherein nur eine endliche Zahl verschiedener und von r unabhängiger Wertsysteme in Betracht, und wenn $l = 1$ oder $= 2$ gesetzt wird, je nachdem die algebraische Zahl α reell oder komplex ist, so liegen die absoluten Beträge von $\varrho_1 r^{\frac{n-l}{l}}$, $\varrho_2 r^{\frac{n-l}{l}}$, $\ldots$, $\varrho_n r^{\frac{n-l}{l}}$ unter einer gewissen von r unabhängigen Grenze. Bildet man für eine Reihe unbegrenzt wachsender Zahlen r eine Kette von Substitutionen $S_1, S_2, S_3, \ldots$, so wird dieselbe periodisch genannt, wenn die daraus abgeleitete Reihe von Substitutionen:

$$Q_1 = S_1^{-1} S_2, \quad Q_2 = S_2^{-1} S_3, \quad Q_3 = S_3^{-1} S_4, \ \ldots$$

von einer gewissen Stelle ab periodisch wird, so daß $Q_j = Q_{j+p}$ ist, und es wird die Frage gestellt und beantwortet, wann für eine algebraische Zahl α periodische Substitutionsketten existieren.

Es ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung, daß es im Körper von α eine Einheit ϑ von einem Betrage < 1 gibt, für welche die konjugierten Zahlen in den konjugierten Körpern (abgesehen von ϑ selbst und von der Zahl ϑ^0 in dem Körper der konjugiert imaginären Zahl α^0, falls α komplex ist) sämtlich unter einander gleichen Betrag haben.

Es gibt nun sechs Fälle, in denen diese Bedingung erfüllt ist:

1. wenn α reell und $n = 2$ ist,
2. wenn α reell und $n = 3$ ist und der Körper von α zwei komplexe konjugierte Körper besitzt,
3. wenn α komplex und $n = 3$ ist,
4. wenn α komplex und $n = 4$ ist und der Körper von α lauter komplexe konjugierte Körper besitzt,
5. wenn α komplex und $n = 4$ ist und der Körper von α einen reellen Unterkörper zweiten Grades hat,
6. wenn α komplex und $n = 6$ ist und der Körper von α einen reellen Unterkörper dritten Grades besitzt, dessen zwei konjugierte Körper komplex sind,

und diese sechs Fälle sind die einzigen, in welchen eine Einheit ϑ der angegebenen Art existiert und die Substitutionenkette somit periodisch wird.

Für den Fall einer komplexen kubischen Irrationalität wird schließlich die Kette der Substitutionen $S_1, S_2, S_3, \dots$ wirklich hergestellt, wodurch man für diese Zahlen zu einem völlig analogen Kriterium gelangt, wie es Lagrange für die reellen quadratischen Irrationalitäten in der Periodizität der Kettenbruchentwicklung nachgewiesen hat. Lsg.

D. Hilbert. Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper. Acta Math. 26, 99-132.

Dies ist ein wenig veränderter Abdruck einer früheren Arbeit des Verf. (vergl. F. d. M. 29, 172, 1898). Hinzugefügt ist u. a. ein Schlußabschnitt (§ 16), in dem Verf. vermutungsweise eine Reihe von Sätzen über unverzweigte relativ-Abelsche Zahlkörper ausspricht, d. h. solche, deren Relativdiskriminante gleich 1 ist. Er stellt den vollständigen Beweis dieser Sätze und ihre gehörige Verallgemeinerung auf den Fall einer beliebigen Relativdiskriminante als das Endziel der rein arithmetischen Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper hin. Lnd.

L. Sapolsky. Über die Theorie der relativ-Abelschen kubischen Zahlkörper. Diss. Göttingen. 481 S. (35 Tabellen) 8°.

Die Verfasserin dieser umfangreichen Arbeit spezialisiert im ersten Teil die Hilbertsche Theorie des Kummerschen Zahlkörpers $K(\zeta, \vartheta)$ vom Grade $l(l-1)$, welcher entsteht, indem zum Körper $K(\zeta)$ der l-ten Einheitswurzeln (l ungerade Primzahl) eine l-te Wurzel $\vartheta = \sqrt[l]{\mu}$ aus einer ganzen Zahl von $K(\zeta)$ adjungiert wird. Hier wird die allgemeine Theorie für den Fall $l = 3$ durchgeführt; es wird also untersucht, wie die Primideale des quadratischen Körpers

$$K\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) = K(\sqrt{-3})$$

im Körper $K(\sqrt{-3}, \vartheta)$ zerfallen, wo $\vartheta = \sqrt[3]{\mu}$ eine bestimmt ausgewählte Kubikwurzel aus einer ganzen Zahl von $K(\sqrt{-3})$ bedeutet, und es werden die Diskriminanten des Körpers sechsten Grades und seiner Unterkörper berechnet. Falls der Zahl μ gewisse Eigenschaften zukommen, sind jene Körper sechsten Grades die einfachsten Zahlkörper niedrigsten Grades, aus deren Zahlen die Wurzeln der reinen, resp. Galoisschen Abelschen allgemeinen kubischen Gleichungen rational zusammengesetzt werden können; diese Zahlkörper sind also Spezialfälle der Kummerschen Zahlkörper.

Im zweiten Teil untersucht Verf. diejenigen Zahlkörper zwölften Grades, aus deren Zahlen die Wurzeln der nicht-Galoisschen allgemeinen

kubischen Gleichungen rational gebildet werden können; sie analysiert mit der größten Genauigkeit den Körper $K(\sqrt[3]{m}, \zeta, \vartheta)$, wo m eine ganze rationale Zahl ist, $\zeta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ und $\vartheta^3 = \mu$ eine ganze Zahl des Körpers $K(\sqrt[3]{m}, \zeta)$. Zum Schluß folgen 35 ausführliche Tabellen, in welchen die Resultate der Arbeit übersichtlich zusammengestellt werden.

Lnd.

D. Mirimanoff. Racines cubiques de nombres entiers et multiplication complexe dans les fonctions elliptiques. Math. Ann. 56, 115-128.

Kronecker hat (vergl. F. d. M. **26**, 117-118, 1895) vermutet, daß die Abelschen Gleichungen im Bereiche eines quadratischen imaginären Körpers durch die Transformationsgleichungen elliptischer Funktionen mit singulären Moduln erschöpft werden. Nach Hilbert (vergl. Deutsche Math. Ver. **6**, 94) scheint es möglich, dies unter Benutzung der Weberschen Untersuchungen und der Hilbertschen Theorie der relativ Abelschen Körper zu beweisen. Die einfachsten jener Abelschen Gleichungen sind die reinen kubischen $x^3 - n = 0$, betrachtet im Körper der dritten Einheitswurzeln. Verf. beschäftigt sich damit, die rationalen Ausdrücke der Wurzeln dieser Gleichungen, d. h. der Kubikwurzeln aus rationalen Zahlen, durch die Wurzeln der Transformationsgleichungen explizite aufzustellen.

Lnd.

Ph. Furtwängler. Über das Reziprozitätsgesetz der l-ten Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet. Gött. Abh. (1902) **2**, 3-82.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen hatte die Preisaufgabe gestellt, für einen beliebigen Zahlkörper das Reziprozitätsgesetz der l-ten Potenzreste zu entwickeln, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet. Es handelte sich also darum, die allgemeine Formel des Reziprozitätsgesetzes unter passenden Einschränkungen vollständig auszuführen und zu beweisen. Die vorliegende Arbeit erhielt den Preis. Sie beruht auf den Methoden, welche Hilbert (vergl. F. d. M. **29**, 169 bis 172, 1898) in der Theorie des relativ-quadratischen Körpers angewendet hatte; auch in der Disposition des Stoffes schließt sich Verf. an jene Arbeit an. Nach den einleitenden Definitionen und vorbereitenden Sätzen macht er die spezielle Annahme, daß die Klassenzahl h des Grundkörpers nicht durch l teilbar ist. Der ausführlichen Entwicklung des Reziprozitätsgesetzes und der Ergänzungssätze läßt Verf. einige Zahlenbeispiele folgen, welche sich auf kubische Restsymbole für einen speziellen Körper vierten Grades beziehen.

Lnd.

C. STÖRMER. Nogle geometriske satser fra den moderne zalteori. Christiania Vidensk. Forhandl. 1902, No. 2.

[Einige geometrische Sätze aus der modernen Zahlentheorie.] Von Betrachtungen über gewisse vielfache Integrale u. dergl., die in der Theorie der Einheiten eines algebraischen Zahlkörpers auftreten, werden einige geometrische Sätze über Punkttransformationen von der Form

$$c_{11}\, x'_1 + c_{12}\, x'_2 + \cdots + c_{1,n}\, x'_n = F(c_{1,1}\, x_1 + c_{1,2}\, x_2 + \cdots + c_{1,n}\, x_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_{n,1}\, x'_1 + c_{n,2}\, x'_2 + \cdots + c_{n,n}\, x'_n = F(c_{n,1}\, x_1 + c_{n,2}\, x_2 + \cdots + c_{n,n}\, x_n)$$

gegeben, von welchen der Satz über die Konformität der Abbildung durch Funktionen von komplexen Veränderlichen als ein Spezialfall angesehen werden kann. Gbg.

H. S. VANDIVER. A problem connected with Mersenne's numbers. Amer. Math. Monthly 9, 34-36.

Der Quotient $2^n - 2$ durch n soll keine ganze Zahl sein, wenn n keine Primzahl ist; für $n = 31 \cdot 11$ ergibt sich die Unrichtigkeit. Lp.

Weitere Literatur.

P. J. BOS. De theorema's van Euler en Fermat. Vriend der Wisk. 17, 1-5.

G. LORIA. Carattere di divisibilità per un numero intero. Il Boll. di Mat. 1, 3-13; Mathesis (3) 2, 33-39.

J. W. NICHOLSON. The expression of the nth power of a number in terms of the nth powers of other numbers n being any integer; and the deduction of some interesting properties of prime numbers. Amer. Math. Monthly 9, 187-193, 211-213.

A. PICKLER. Über die Auflösung der Gleichung $\varphi(x) = n$, wenn $\varphi(m)$ die Anzahl derjenigen Zahlen bezeichnet, welche relativ prim zu m und kleiner als m sind. Pr. Wien. 17 S. 8° (1901).

SALKIN. Sur l'équation indéterminée $ax + by = c$. Mathesis (3) 2, 107-109.

P. L. TSCHEBYSCHEFF. Elemente der Zahlentheorie (Theorie der Kongruenzen). Deutsch von H. Schapira. Neue, wohlfeile [Titel]-Ausgabe. Berlin: Mayer & Müller. XVII, 314 u. 32 S. gr. 8°.

H. S. VANDIVER. Applications of a theorem regarding circulants. Amer. Math. Monthly 9, 96-98.

W. WELLS. Factoring. Boston: Heath. 30 S. 16mo (Heath's Mathematical Monographs, No. 7).

B. Theorie der Formen.

L. J. Hewes. Note on irregular determinants. American M. S. Bull. (2) 9, 141-142.

Die beiden negativen Determinanten — 468 und — 931 sind von Gauß bei der Aufzählung der Determinanten unterhalb 1000 ausgelassen, wie Perott im J. für Math. **95**, 236 (1883) zuerst gefunden hat. Die zugehörigen Zahlenberechnungen nach dem Vorbilde von Cayley werden in der vorliegenden Note tabellarisch gegeben. Lp.

M. Stouff. Remarques sur quelques propositions dues à M. Hermite. Ann. de l'Éc. Norm. **19**, 89-118.

Verf. gibt neue Beweise für zwei Hermitesche Sätze. Der eine (J. für Math. **40**) besagt, daß in einer reduzierten definiten quadratischen Form mit beliebigen reellen Koeffizienten das Produkt der Koeffizienten der Quadrate der Unbekannten kleiner ist als die Determinante der Form mal einem Zahlenkoeffizienten, der nur von der Anzahl der Unbekannten abhängt. Der andere (J. für Math. **47**) bezieht sich auf die Reduktion der indefiniten quadratischen Formen mit ganzzahligen Koeffizienten. Lnd.

A. S. Werebrüssow. Transformation quadratischer Formen in Potenzen. Moskau Math. Samml. **22**, 581-588 (Russisch).

Der Verf. betrachtet die Aufgabe, eine quadratische Form

$$AX^2 + 2BXY + CY^2$$

in eine Potenz einer anderen Form von derselben Determinante, aber von anderer Klasse mit Hülfe einer nicht-linearen Substitution

$$X = \sum_k (n)_k \alpha_k x^{n-k} y^k, \quad Y = \sum_k (n)_k \beta_k x^{n-k} y^k$$

zu transformieren, und zeigt, daß unter gewissen Bedingungen die Transformationskoeffizienten ganze Zahlen sind. Si.

J. Hurwitz. Über die Reduktion der binären quadratischen Formen mit komplexen Koeffizienten und Variabeln. Acta Math. **25**, 231-290.

In seiner Dissertation (vergl. F. d. M. **26**, 235-236, 1895) hat Verf. eine besondere Art der Kettenbruch-Entwicklung komplexer Größen behandelt. In der vorliegenden Habilitationsschrift, die bisher nicht gedruckt war, verwendet er diese Art der Kettenbruchentwicklung für die Reduktion der quadratischen Formen mit komplexen Koeffizienten und Variabeln in ähnlicher Weise, wie die Kettenbruchentwicklungen reeller Größen für die Reduktion der reellen quadratischen Formen positiver Deter-

minante benutzt werden. Verf. schickt im ersten Abschnitt das Erforderliche aus der Dissertation voraus; im zweiten Abschnitt erledigt er vollständig mit Hülfe jener Kettenbruchentwicklungen die zwei (von Dirichlet auf anderem Wege gelösten) Probleme: 1. Zu untersuchen, ob zwei gegebene Formen von gleicher Determinante äquivalent sind. 2. Alle Substitutionen zu finden, welche eine Form in eine andere ihr äquivalente überführen. Lnd.

V. Zemplén. Ein Grundgesetz der Theorie der algebraischen ganzen Formen. Math. és Phys. Lapok **10**, 1-6 (Ungarisch).

V. Zemplén. Die Teilbarkeit in algebraischen Genusgebieten. Ibid. 7-27.

Beide Abhandlungen erläutern die Hurwitzsche Bearbeitung der Dedekindschen Idealtheorie und zeigen, wie es möglich ist, die im Bereiche der ganzen Zahlen bestehenden Grundgesetze auf die Gesamtheit der algebraischen Zahlen zu übertragen. S.

M. Lerch. Sur la formule fondamentale de Dirichlet qui sert à déterminer le nombre des classes de formes quadratiques binaires définies. C. R. **135**, 1314-1315.

Verf. hatte bei einer früheren Gelegenheit (vergl. F. d. M. **28**, 193 bis 194, 1897) aus der Kroneckerschen Grenzformel eine Folgerung gezogen, für welche er auch einen direkten Beweis in Aussicht gestellt hatte; diesen gibt er hier an. Lnd.

J. W. L. Glaisher. Formulae derived from Gauss's sums, with application to the series connected with the number of classes of binary forms. Quart. J. **33**, 289-330.

Verf. bringt die bekannte Summenformel

$$\left(\frac{1}{P}\right)e^{\frac{2h\pi i}{P}}+\left(\frac{2}{p}\right)e^{\frac{4h\pi i}{P}}+\cdots+\left(\frac{P-1}{P}\right)e^{\frac{2(P-1)h\pi i}{P}}=\left(\frac{h}{P}\right)i^{\frac{1}{4}(P-1)^2}\sqrt{P}$$

(wo P eine ungerade quadratfreie Zahl und h eine beliebige Zahl bezeichnet) auf mannigfache Gestalten, bei denen im Nenner des Exponenten $4P$ oder $8P$ statt P steht; er benutzt dann diese Relationen im Anschluß an die bekannten Vorbilder zur Summation der unendlichen Reihe $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}$. Lnd.

D. N. Lehmer. Errors in Legendre's tables of linear divisors. American M. S. Bull. (2) **8**, 401-402.

Ein Verzeichnis zahlreicher Fehler in den Legendreschen Tafeln linearer Teiler der quadratischen Form x^2-ay^2; die meisten dieser

Fehler sind unverbessert in die „Theorie der Kongruenzen" von Tschebyscheff und in ihre Übersetzung von Schapira (1889) übergegangen.

Lp.

A. Markoff. Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies. Math. Ann. 56, 233-251.

Verf. behandelt für ternäre quadratische Formen ein Problem, welches er früher (vergl. F. d. M. **11**, 147, 1879; **12**, 143-144, 1880) für binäre quadratische Formen gelöst hatte; allerdings gelingt es ihm nicht, es für den vorliegenden Fall in derselben Vollkommenheit zu erledigen. Er vermutet, daß die gefundenen Sätze auch hier die Anfangsglieder einer Kette von Relationen bilden.

Verf. beweist folgendes. 1. Die (genaue) obere Grenze der Minima aller indefiniten Formen

$$f = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy$$

derselben Determinante D ist gleich dem Minimum $\sqrt[3]{\frac{4}{3}|D|}$ der Formen, welche zu $\varphi_0 = -\sqrt[3]{\frac{4}{3}D}(x^2 + xy + y^2 - 2z^2)$ äquivalent sind. (Dies war dem Verf., wie er angibt, schon vor 20 Jahren von Korkine mitgeteilt worden.)

2. Für die Formen, welche nicht zu φ_0 äquivalent sind, ist jene Grenze gleich dem Minimum $\sqrt[3]{\frac{4}{5}|D|}$ der Formen, welche zu

$$\varphi_1 = \sqrt[3]{\frac{4}{5}D}(x^2 + xy - y^2 - 2z^2)$$

äquivalent sind.

3. Für die weder zu φ_0 noch zu φ_1 äquivalenten Formen ist sie gleich dem Minimum $\sqrt[3]{\frac{1}{3}|D|}$ der Formen, welche zu

$$\varphi_2 = -\sqrt[3]{\frac{1}{3}D}(x^2 + y^2 - 3z^2)$$

äquivalent sind.

Es ist leicht zu erkennen, in welcher Richtung die vom Verf. vermutete Fortsetzung dieser Satzreihe liegt; vorläufig kann er nur beweisen: jede Form, die weder zu φ_0, noch zu φ_1 oder φ_2 äquivalent ist, kann dem absoluten Betrage nach für ein passend gewähltes Wertsystem x, y, z ($x^2 + y^2 + z^2 > 0$) kleiner als $\sqrt[3]{\frac{1}{3}|D|}$ gemacht werden. Lnd.

A. A. Markow. Über drei unbestimmte ternäre quadratische Formen. Pétersb. Bull. (5) 16, No. 2, 109-119 (Russisch).

Von den drei ternären quadratischen Formen:

$$x^2 + xy + y^2 - 2z^2,\quad x^2 + xy - y^2 - 2z^2,\quad x^2 + y^2 - 3z^2$$

kann die erste zur Darstellung jeder beliebigen, nicht durch 3 teilbaren

ungeraden Zahl c dienen. Dabei existiert wenigstens eine Lösung der Gleichung $x^2+xy+y^2-2z^2=c$, die den Ungleichungen genügt:

$$0 \leqq z \leqq \tfrac{1}{2}(x+\tfrac{1}{2}y),\quad x \geqq y \geqq 0,\quad x+\tfrac{1}{2}y \leqq \sqrt{2c}.$$

Die Gleichung $x^2+xy+y^2-2z^2=-c$ hat wenigstens eine Lösung, welche den Ungleichungen $x \geqq y \geqq 0$, $x+\frac{1}{2}y \leqq z \leqq \sqrt{\frac{3}{2}c}$ genügt. Der Verf. bemerkt, daß diese Form die geraden Zahlen der Form $16n+6$ und $9n-3$ nicht darstellen kann. Die zweite Form kann jede beliebige ungerade, nicht durch 5 teilbare Zahl darstellen, und für die Lösung (x, y, z) kann man gewisse Ungleichungen aufstellen (die Form stellt nicht die geraden Zahlen der Form $15n+5$, $25n\pm10$ dar). Die dritte Form kann jede gerade nicht durch 3 und 4 teilbare Zahl darstellen. Si.

A. A. Markow. Über unbestimmte quadratische quaternäre Formen. Pétersb. Bull. (5) **16**, No. 3, 97-108 (Russisch).

Beweis des Satzes: Mit Ausnahme der Formen, welche einer der beiden Formen angehören:

$$\pm\sqrt[4]{\tfrac{4}{7}|D|}\left\{\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+\left(y-\frac{t}{2}\right)^2+\left(z-\frac{t}{2}\right)^2-\frac{7}{4}\cdot t^2\right\}$$

und

$$\pm\sqrt[4]{\tfrac{4}{9}|D|}\,\{x^2+xy+y^2-2(z^2+zt+t^2)\}$$

mit minimalen Zahlenwerten $\sqrt[4]{\frac{4}{7}|D|}$, resp. $\sqrt[4]{\frac{4}{9}|D|}$ kann jede unbestimmte quadratische quaternäre Form dem absoluten Betrage nach kleinere Zahlenwerte bekommen als $\sqrt[4]{\frac{4}{9}|D|}$, wo $|D|$ den absoluten Betrag der Determinante der betreffenden Form bedeutet. Si.

Kapitel 3.

Kettenbrüche.

E. Netto. Über Näherungswerte und Kettenbrüche. J. für Math. **125**, 34-63.

Sowohl durch den Titel als durch den Inhalt knüpft diese Arbeit an die von Vahlen an (F. d. M. **26**, 230, 1895). Verf. lehrt zunächst die einem gegebenen echten Bruche β zugehörige Fareysche Reihe in eigenartiger Weise aufstellen, ihre Glieder danach numerieren und in Serien teilen, um dann zu beweisen, daß alle möglichen Kettenbruchentwicklungen von β keine andern Näherungsbrüche als die in der Reihe enthaltenen erzeugen können, und daß sich aus der Art, wie dabei diese Reihe durchlaufen wird, Gesetzmäßigkeiten über die Anzahl der entsprechenden Entwicklungen erschließen lassen. R. M.

Auric. Essai sur la théorie des fractions continues. Journ. de Math. (5) 8, 387-431.

Die gewöhnliche Kettenbruch-Entwicklung beruht auf der wiederholten Anwendung der Gleichung $a_i = A_i + \frac{1}{a_{i+1}}$, worin a_i eine reelle positive Zahl, A_i die darunter liegende größte ganze Zahl bedeutet. Verf. versteht nun unter a_i eine beliebige reelle oder komplexe Zahl, unter A_i die ihr am nächsten liegende komplexe ganze Zahl und ändert außerdem das Zeichen des Restes $a_i = A_i - \frac{1}{a_{i+1}}$. Er arbeitet nun eine Theorie dieser Kettenbrüche aus und gelangt dabei u. a. auch zu der allgemeinsten, alle Kettenbruchrelationen umfassenden Formel, die schon Kronecker in den Berl. Monatsber. von 1878 mitgeteilt hat. Nach den allgemeinen Formeln ergibt sich, daß das Gesetz der Periodizität der Kettenbrüche für die Wurzeln quadratischer Gleichungen auch in diesem Gebiete gilt. R. M.

Auric. Sur la généralisation des fractions continues. C. R. 135, 950-952.

Verf. betrachtet $k+1$ nach abnehmendem Modul geordnete Größen $a_0, a_1, \ldots, a_k$ und setzt $a_i = \lambda_{k+i} a_{k+i} + (-1)^k a_{k+i+1}$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$, wo λ_{k+i} das größte Ganze von $\frac{a_i}{a_{k+i}}$. Er erhält so ein Analogon des Lagrangeschen Theorems über quadratische Formen. Die Folge der λ ist einfach oder gemischt periodisch, sodaß die Methode des Verf. zu entscheiden gestattet, ob ein gegebener Vektor $a_0, a_1, \ldots, a_k$ Lösung eines Systems quadratischer Formen in $k+1$ Veränderlichen mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Wbg.

R. E. Moritz. Über Kontinuanten und gewisse ihrer Anwendungen im zahlentheoretischen Gebiete. Diss. Straßburg. 36 S. 8°.

Unter Kontinuante oder Kettenbruchdeterminante versteht man bekanntlich einen Ausdruck von folgender Gestalt:

$$\begin{vmatrix} a_r & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & a_{r+1} & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -1 & a_{r+2} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & a_{t-1} & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & a_t \end{vmatrix},$$

den Verf. mit $p(a_r, a_{r+1}, \ldots, a_t)$ oder auch kurz mit $p_{r,t}$ bezeichnet. Es besteht die leicht zu beweisende Identität:

$$\frac{p_{r,t}}{p_{r+1,t}} = a_r + \cfrac{1}{a_{r+1} + \cdots + \cfrac{1}{a_{t-1} + \cfrac{1}{a_t}}},$$

welche einen Zusammenhang zwischen den Kontinuanten und den Kettenbrüchen darstellt. Verf. beweist zunächst: jeder Quotient von der Form $\frac{p_{r,n}}{p_{s,m}}$, wo r, n, s, m ganze positive Zahlen sind, läßt sich als Produkt von Kettenbrüchen darstellen. Hiervon macht er Anwendungen auf die Theorie der periodischen Kettenbrüche und gelangt durch weitere Spezialisierungen zu Sätzen von der Art des folgenden: Jede nichtquadratische ganze oder gebrochene rationale Zahl kann als Quotient zweier symmetrischen Hauptformkontinuanten ausgedrückt werden, von denen die Elemente der einen durch Weglassung des Anfangs- und Endelements der anderen hervorgehen. Lnd.

T. Hayashi. Expressions de $\operatorname{tg}^n \alpha$ et $\cot^n \alpha$ sous forme de continuants. Nouv. Ann. (4) **2**, 496-499.

Der Verf. stellt $\operatorname{tg}^n \alpha$ und $\cot^n \alpha$ in Form von Kettenbruchdeterminanten (Kontinuanten) dar und gewinnt dadurch analoge Formeln wie Studnička für $\cos n\alpha$ und $\frac{\sin n\alpha}{\sin \alpha}$. Jhk.

G. Frattini. Di un certo algoritmo per lo sviluppo della radice quadrata di un numero intero in frazione continua. Periodico di Mat. (2) **4**, 31-35.

Der fragliche Algorithmus ist schon in der Note des Verf. gegeben: „Intorno alla radice quadrata di un numero intero“ (F. d. M. **32**, 178, 1901). In der vorliegenden Note wird jener Algorithmus von neuem erläutert und bewiesen. Lp.

H. Padé. Recherches nouvelles sur la distribution des fractions approchées d'une fonction. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **19**, 153-189.

Wer den bisherigen Arbeiten des Verf. gefolgt ist, wird mit Vergnügen Kenntnis nehmen von dieser neuen Veröffentlichung, in der die schon wiederholt (F. d. M. 1892, 1899) angezeigten Darlegungen über die Systeme angenäherter rationaler Funktionen und über ihre Abbildung in den ganzzahligen Punkten der Ebene auf eine direkte und an Einfachheit kaum noch etwas zu wünschen übrig lassende Weise abgeleitet werden; außerdem werden sie durch ein umfassendes numerisches Beispiel, das sich auf den Bruch $\frac{1+x-2x^3+x^5+x^6}{1-2x^3+x^4+x^6}$ bezieht, sowie

durch die zugehörige instruktive Figur erläutert. Dasselbe Beispiel wird dann auch herangezogen, um die Rekursionsformeln zu illustrieren, welche die verschiedenen Annäherungen an denselben Quotienten mit einander verknüpfen und am deutlichsten durch den Begriff des zugehörigen holoiden Kettenbruchs erfaßt werden.

Abgesehen aber von dieser Neubearbeitung früherer Resultate, enthält die vorliegende Arbeit noch einen dritten Teil, der ein neues Theorem bringt über den Zusammenhang der betrachteten angenäherten Funktionen und des holoiden Kettenbruchs mit der kanonischen Kettenbruchentwicklung einer nach fallenden Potenzen geordneten Reihe; das Vorkommen von anormalen Näherungsbrüchen dort zieht das Auftreten von nicht linearen Teilnennern hier nach sich, und der Grad dieses Nenners läßt sich wiederum durch die Verteilung der repräsentierenden Punkte abzählen. Zum Schluß führt der Verf. die schon F. d. M. **32**, 214, 1901 angezeigte Bemerkung über die Stieltjesschen Untersuchungen weiter aus und kennzeichnet seinen Standpunkt über den Weg, auf welchem weitere Fortschritte in diesem Gebiete zu hoffen seien. R. M.

R. de Montessus de Ballore. Sur les fractions continues algébriques. S. M. F. Bull. **30**, 28-36.

Wenn eine eine Funktion darstellende gewöhnliche Potenzreihe lauter normale Näherungsbrüche im Padéschen Tableau ergibt, so beweist der Verf. den bemerkenswerten Satz, daß jeder aus einer horizontalen Zeile des Tableaus abgeleitete holoide Kettenbruch dieselbe Funktion darstellt, daß ferner die Konvergenz desselben, über die Konvergenz der Reihe hinausreichend, mit steigendem Range der Zeile eine beliebige Anzahl von Polstellen einschließt, und daß nur eine wesentlich singuläre Stelle der Funktion eine Grenze für den Konvergenzradius bestimmt.

R. M.

R. de Montessus de Ballore. Sur les fractions continues algébriques. C. R. **134**, 1489-1491.

Laguerre hat die Funktion $z = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}$ für ein beliebiges ω in einen Kettenbruch entwickelt; dieser Entwicklung entspricht der aus den Näherungsbrüchen der ersten Diagonale des Padéschen Tableaus abgeleitete holoide Kettenbruch; Verf. stellt die Konvergenz beider Darstellungen in der komplexen Ebene fest. R. M.

Vierter Abschnitt.

Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

H. SCHUBERT. Niedere Analysis. I. Teil: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen. Leipzig: G. I. Göschen. V u. 181 S. 8° (Sammlung Schubert V).

Über das Ziel dieses Buches spricht sich der Verf. in der Vorrede folgendermaßen aus: „Unter dem Namen „Niedere Analysis“, ursprünglich ein Gegensatz zu der höheren Analysis, welche die Differentialrechnung und Integralrechnung umfaßt oder gar voraussetzt, pflegt man verschiedene Gebiete zusammenzufassen, welche auf höheren Lehranstalten nur teilweise, auf Universitäten selten gelehrt werden. . . . . . Bei der Abfassung dieses ersten Teiles habe ich vorzugsweise die Primaner höherer Lehranstalten im Auge gehabt, welche in die hier behandelten Gebiete sicher und schnell eingeführt werden wollen . . . .“ Der Inhalt ist im Titel angedeutet. Die Darstellung ist, wie stets bei Schubert, geschickt und mit zahlreichen Beispielen ausgestattet. Ot.

— — -

G. LANDSBERG. Über eine Permutationsaufgabe. Arch. der Math. u. Phys. (3) 3, 152-154.

Die Anzahl der Permutationen von n Elementen, unter denen sich α_1 gleiche Elemente einer, α_2 Elemente einer zweiten, ..., α_ν Elemente einer ν-ten Art befinden, ist $n!/\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_\nu!$. Die Zahl der Kreispermutationen geht aus dieser für den von Gauß (Disqu. arithm. 41) behandelten einfachen Fall, daß n eine Primzahl ist, durch Division mit n hervor. Bei Aufhebung aller Einschränkungen für die Zahlen $n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ gestaltet sich die Bestimmung der Anzahl der Kreispermutationen schwieriger. Sie wurde zuerst auf sehr umständliche Art durch E. Jablonski (Journ. de Liouv. (4) 8, 331-349) geleistet und von diesem durch die Formel

$$P = \frac{1}{n} \sum_{\delta} \varphi(\delta)\, \psi(\delta)$$

dargestellt, worin δ alle gemeinschaftlichen Teiler von $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ durchläuft, $\varphi(\delta)$ die Anzahl der Zahlen bedeutet, die zu δ teilerfremd und nicht größer als δ sind, und die Zahl $\psi(\delta)$ durch die Gleichung

$$\psi(\delta) = \frac{\left(\frac{n}{\delta}\right)!}{\left(\frac{\alpha_1}{\delta}\right)!\left(\frac{\alpha_2}{\delta}\right)!\cdots\left(\frac{\alpha_\nu}{\delta}\right)!}$$

erklärt ist. Der Verf. der vorliegenden Arbeit, dem die Jablonskischen Untersuchungen unbekannt gewesen sind, gibt eine neue, sehr einfache Herleitung der Formel für die Permutationszahl P. Ot.

Th. Muir. Note on selected combinations. Edinb. Proc. **24**, 102-104.

Bekanntlich ist die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur Klasse r mit Wiederholung $= C_{n-r+1,\,r}$, sie hat also die Form einer „Kombinationszahl". Die Mitteilung enthält die Beweise für zwei Sätze über solche speziellen Kombinationen ohne Wiederholung, deren Anzahl sich ebenfalls durch eine Kombinationszahl ausdrücken läßt. Der erste dieser Sätze wird für den Fall $k = 1$ vermittelst Induktion bewiesen und lautet in verallgemeinerter Form: Werden aus den sämtlichen $C_{n,r}$ Kombinationen von n Elementen zur Klasse r diejenigen ausgesondert, in denen kein Element mit einem der k unmittelbar folgenden Elemente vereinigt auftritt, so ist die Anzahl dieser Kombinationen $C^k_{n,r} = C_{n-k(r+1),\,r}$.

Ot.

S. Pincherle. Alcune formule di analisi combinatoria. Batt. G. **40**, 180-183.

Um einen neuen Beweis der Formel

$$n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(n-2)^n + \cdots = n!$$

zu liefern, geht der Verf. von einer rationalen Funktion p-ten Grades $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aus, setzt $\theta^h F = F(x_1 + h, x_2 + h, \ldots, x_n + h)$, $\varDelta F = \theta F - F$, $\varDelta^m F = \varDelta\varDelta^{m-1} F$, sodaß

$$\varDelta^m F = \theta^m F - m\,\theta^{m-1} F + \binom{m}{2}\theta^{m-2} F - \cdots + (-1)^m F.$$

wird, und wählt sodann $F = x_1 x_2 \ldots x_n$. Da jetzt $\varDelta^n F = n!$ ist, so ergibt die Entwicklung von $\varDelta^m F$ für $m = n$:

$$(x_1 + n)(x_2 + n)\cdots(x_n + n) - n(x_1 + n - 1)\cdots(x_n + n - 1)$$
$$+\binom{n}{2}(x_1 + n - 2)\cdots(x_n + n - 2) - \cdots + (-1)^n x_1 x_2 \cdots x_n = n!,$$

eine Gleichung, die für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ in

$$(x+n)^n - n(x+n-1)^n + \binom{n}{2}(x+n-2)^n - \cdots + (-1)^n x^n = n!$$

übergeht und für $x = 0$ die zu beweisende Formel liefert.

Für $m > n$ wird $\Delta^m F = 0$. Die entsprechende Entwicklung führt nach ähnlichen Spezialisierungen der Veränderlichen zu neuen kombinatorischen Beziehungen, von denen die einfachste hier angeführt werden möge:

$$m^{m-1} - m(m-1)^{m-1} + \binom{m}{2}(m-2)^{m-1} - \cdots + (-1)^{m-1} m = 0.$$

Ot.

W. Ahrens. Mathematische Schachfragen. Sep.-Abdr. Deutsche Schachzeitung 1901, 1902, S. 124ff., 155ff., 196ff. 15 S. 8°.

In dem dreibändigen Werke „Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs" (Petersburg, 1862-63) hat der Schachtheoretiker Major von Jaenisch die Methoden der Mathematik auf Fragen des Schachspiels angewendet, dabei aber vielfach einen zu komplizierten Apparat mathematischer Formeln aufgeboten. Der Verf. versucht daher, jenes seit langer Zeit vergriffene und äußerst selten gewordene Werk dem nicht mathematisch gebildeten Schachpublikum näher zu bringen. Er behandelt in der vorliegenden Abhandlung diejenigen beiden Fragen, mit denen sich Jaenisch im ersten Bande beschäftigt: 1. In wieviel Zügen mindestens kommt eine Figur von einem bestimmten Ausgangsfelde zu einem bestimmten Endfelde? 2. Auf wieviel verschiedene Arten ist dieser Übergang mittels der in Frage 1 bestimmten Minimalzahl von Zügen möglich? Die Beantwortung dieser Fragen erfolgt mit Hülfe sehr einfacher Methoden und — bis auf einige zahlentheoretische Überlegungen — ohne Anwendung algebraischer Formeln. Besonders leicht gestaltet sich die Lösung für die Figuren von großer Tragweite („pièces à longue portée"), nämlich Turm, Läufer und Königin, schwieriger für König und Springer. Ot.

F. Fitting. Weiterer Beitrag zur verallgemeinerten Rösselsprungaufgabe. Arch. der Math. u. Phys. (3) 3, 136-151.

In einer früheren Abhandlung (Zeitschr. für Math. u. Phys. **45**, 137 bis 160; F. d. M. **31**, 218, 1900) hatte sich der Verf. mit folgender Aufgabe beschäftigt: „Man zeichne n Punkte und bilde durch Fortschreiten von einem dieser Punkte zu allen übrigen, wobei keiner doppelt berührt werden darf, ‚Wege' mit der Einschränkung, daß eine Reihe von ‚Wegelementen', d. h. Sprüngen zwischen gewissen Punkten, verboten sein soll. Wieviel solche Wege gibt es?" Zum Ausgangspunkt der Betrachtung war dort der Fall genommen worden, wo verbotene Sprünge nicht vorhanden sind und deshalb $n!$ verschiedene Wege gezählt werden. Das

Ziel war, durch sukzessives Ausschließen gewisser „Elementenpaare“ daraus allmählich die verwickelteren Fälle abzuleiten.

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst die früher hergeleiteten Rekursionsformeln ergänzt und spezialisiert, wobei die Büschel „gleichartiger“ Geraden (vgl. a. a. O.) besondere Beachtung finden. Hier ergibt sich u. a. der interessante allgemeine Satz, daß die Wegezahl irgend eines Komplexes, dessen sämtliche Geraden in irgend einer Weise zu Gruppen gleichartiger Geraden geordnet sind, eine Funktion seiner Punktezahl und der Anzahl gleichartiger Geraden ist, die in den verschiedenen Gruppen vorkommen. Ein zweiter Abschnitt beschäftigt sich mit Anwendungen auf die sog. Hamiltonschen Rundreisen sowie auf die Frage nach der Anzahl der Rösselsprünge auf dem 64-feldrigen Schachbrett, ohne jedoch bei diesem letzten Problem, das den Ausgang der ganzen Untersuchung gebildet hat, zu einer einfachen Lösung zu gelangen. Ot.

J. Petersen. Les 36 officiers. Annuaire des math. 413-424.

„Tarry hat sich mit dieser Frage beschäftigt und sie tastend zu lösen versucht. Das Ergebnis der Versuche Tarrys ist die Unmöglichkeit der verlangten Anordnung. Die Frage ist also insofern beantwortet; aber diese Lösung befriedigt nicht unter dem logischen Gesichtspunkte, weil sie nicht zeigt, warum die Aufgabe unmöglich wird, während die entsprechende Aufgabe für andere Zahlen, z. B. für 16, lösbar ist. Deshalb habe ich eine andere Methode versucht.“ Die Schlußweise benutzt die Betrachtungen aus einer früheren Arbeit des Verf.: „Die Theorie der regulären Graphs“ (Acta Math. **15**, 193-290; F. d. M. **23**, 115, 1891). Lp.

F. Fitting. Ein Anordnungsproblem. Pr. Gymn. M.-Gladbach. 15 S. 8°.

Das Problem lautet: „Gegeben sind zwei Gruppen von je n Elementen, welche einander so zugeordnet sind, daß zu jedem Elemente der einen Gruppe eines der zweiten gehört. Auf wievielfache Weise lassen sich jene Elemente so anordnen, daß weder Elemente gleicher Gruppen, noch die zugeordneten Elemente zusammentreten?“ Bei der Aufgabe lassen sich zwei Fälle unterscheiden. Denkt man sich nämlich die $2n$ Elemente den gestellten Bedingungen gemäß aneinander gereiht, so darf entweder das letzte Element wieder neben das erste treten, wodurch eine Anordnung der Elemente im Kreise entsteht, oder die Reihe endigt in zwei zugeordneten Elementen, kann also nicht zum Kreise geschlossen werden. Für den ersten Fall ergeben sich außer der ohne weiteres ersichtlichen Beziehung

$$R_{(n,0)} = \frac{n}{2}[(n-1)!]^2$$

die Rekursionsformeln

$$R_{(n,i)} = R_{(n,i+1)} + S_{(n,i)},\quad S_{(n,i)} = 2(n-1)R_{(n-1,i)} + i\,S_{(n-1,i-1)},$$

die das Problem lösen. Hierbei bezeichnet $R_{(n,i)}$ die Anzahl sämtlicher Anordnungen der $2n$ Elemente, bei denen i Paare zugeordneter Elemente nicht neben einander stehen, $S_{(n,i)}$ die Anzahl derjenigen unter diesen $R_{(n,i)}$ Anordnungen, in denen die Elemente eines der $n-i$ übrigen Paare verbunden sind. — Der zweite Fall läßt sich auf den ersten leicht zurückführen. Ot.

H. M. TAYLOR. A problem of arrangements. Messenger (2) 32, 60-63.

„Die Anzahl der verschiedenen Arten zu finden, nach denen eine Gesellschaft von n Ehepaaren um einen Tisch gesetzt werden kann, falls die Männer und die Frauen abwechseln und kein Mann neben seiner Ehefrau sitzt.“ Die Lösung hängt von einer Funktion φ ab, für welche die Rekursionsformel gilt:

$$\varphi(n+2) - n\cdot\varphi(n+1) - n\cdot\varphi(n) - \varphi(n-1) = 0,$$

mit den Bedingungen $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 0$, $\varphi(3) = 0$. Die gesuchte Zahl ist

$$(n-1)!\ \{\varphi(n+1) - \varphi(n)\}.$$

Eine Tabelle der Zahlen bis $n = 10$ ist zugefügt. Lp.

R. TUCKER, A. CUNNINGHAM, H. M. TAYLOR. Solution of question 6845. Ed. Times (2) 1, 72-74.

Die von R. Tucker gestellte Aufgabe lautet: Zu finden, 1. auf wieviel verschiedene Arten eine Gesellschaft von m Damen und m Herren, unter denen p verheiratete Paare sind, so angeordnet werden kann, daß sie an einem runden Tische unter den folgenden Bedingungen bunte Reihe bilden: α) der Wirt (einer der m Herren) behält immer seinen Platz, β) jede Dame sitzt zur Linken des Herrn, der sie zu Tische führt, γ) ein Ehemann darf seine Gattin nicht zu Tische führen; 2. die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ehepaar bei Tische neben einander sitzt. Lp.

V. MACHADO. Curiosas propriedades dos numeros reveladas pelo estudo dos quadratos magicos. Lisboa Jorn. (2) 6.

Der Verf. gibt zuerst eine Übersicht über die Geschichte der magischen Quadrate, und dann beschäftigt er sich mit der Konstruktion der doppelt magischen Quadrate. Tx. (Lp.)

P. A. MACMAHON. Magic squares and other problems upon a chessboard. Nature 65, 447-452.

Eine Vorlesung vor der Royal Institution über die Eigenschaften und die Aufstellung magischer Quadrate der verschiedenen Gattungen. Lp.

C. Planck. Magic squares of the fifth order. Nature 65, 509.

In der Vorlesung über magische Quadrate (vergl. das vorstehende Referat) hatte MacMahon angegeben, daß nach Rouse Ball (Recreations) die Zahl der magischen Quadrate von der Ordnung 5 über 60000 wäre. In der vorliegenden Note berechnet der Verf. die bloße Anzahl der geränderten Quadrate fünfter Ordnung, d. h. derjenigen, bei denen die neun inneren Quadrate für sich ein magisches Quadrat liefern, auf $602 \times 288 \times 8$, wenn Umkehrungen und Spiegelungen als verschieden gerechnet werden, auf $602 \times 288 = 173376$, wenn dieselben nicht als solche gezählt werden. Daher sei 60000 als untere Grenze viel zu niedrig gegriffen.

Lp.

J. Willis. Magic squares. Nature 66, 78.

Der Verf. findet eine Auslassung bei Planck, wodurch sich die Gesamtzahl auf 603×288 erhöht. Das gesuchte Minimum schätzt er auf mehr als eine halbe Million ein.

Lp.

W. Ahrens. Zur relativen Bewertung von Turnierpartien. Sep. Abdr. Wiener Schachzeitung 1901. 14 S. 8°.

Bei der Bewertung der Partien auf Schachturnieren hat man bisher stets das „Quantitätsprinzip“ befolgt, nach welchem alle Partien desselben Turniers gleich bewertet und die Preise nach den Zahlen der Gewinnpartien, gewöhnlich unter Einrechnung der Remispartien als halber Gewinnpartien, verteilt werden. Diesem Verfahren gegenüber erhebt das „Qualitätsprinzip“ mit seinem extremsten Vertreter J. Pierce („The play of the defeated player is often superior to that of the winner“) die Forderung, die einzelnen Partien ihrem naturgemäß sehr verschiedenen Werte nach in Rechnung zu stellen. Der Verf. kritisiert mehrere von dieser Seite gemachten Verbesserungsvorschläge und gelangt zu dem Ergebnis, daß sie teils zu Willkürlichkeiten führen können, teils das Quantitätsprinzip nur scheinbar beseitigen. „Man kann den Turnierveranstaltern daher nur den wohlgemeinten Rat geben, bei dem alten Modus zu bleiben und sich und die Turnierteilnehmer damit zu trösten, daß die Unzuträglichkeiten und Ungerechtigkeiten, welches dieses wie jedes Verfahren mit sich bringen wird, doch im allgemeinen nicht immer dieselben, vielmehr die verschiedenen Teilnehmer ziemlich gleichmäßig treffen werden . . .“

Ot.

C. Moreau. Solution d'un problème de probabilités. Arch. der Math. u. Phys. (3) 4, 184-189.

Zwei Spieler A und B mit den bezüglichen Vermögen a und b spielen mehrere Partien um den jedesmaligen Einsatz 1. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß B vor der r-ten Partie sein ganzes Vermögen verliert, wenn die Wahrscheinlichkeiten, zu gewinnen, bezw. p q sind?

Diese im Interm. des Math. 1894 und 1898 gestellte Frage ist eine Verallgemeinerung des von Rouché behandelten speziellen Problems (vergl. u. a. Bertrand, Calcul des Probabilités, chap. VI). Die Lösung des Verf., deren Wiedergabe hier untunlich ist, schließt sich unverkennbar an die von Rouché benutzte elegante Methode an. Ot.

A. Schuster. Address to the astronomy and cosmical physics section of the British Association. Brit. Ass. Rep. 1902, 512-521.

Von dieser Einführungsrede kann man sagen, sie habe das folgende Thema behandelt: Wenn zwei Ereignisse gleichzeitig eintreffen, oder eines dem anderen innerhalb eines kurzen Zeitraums folgt, gibt dies uns irgend einen Grund zur Annahme, daß diese beiden Ereignisse mit einander verbunden sind, indem beide aus derselben Ursache herrühren, oder die Ursache von einander sind? Der besondere Fall, der erörtert wird, ist der, bei welchem eine der beiden Reihen von Ereignissen, zwischen denen eine Beziehung aufzustellen ist, eine begrenzte Periode hat, und die Erforschung der Wahrscheinlichkeit einer gleichen Periode in der anderen Reihe gefordert wird. Neben diesem speziellen Gegenstande verdienen einige Bemerkungen über die Beziehung zwischen Beobachtungen und der Erörterung der Ergebnisse der Beobachtungen Beachtung. Gbs. (Lp.)

H. MacColl. Solution of questions 14751, 14405, 14665, 15064. Ed. Times (2) 2, 29-30, 42-44, 60-61, 99-100.

14751. Die Wahrscheinlichkeit, A sei richtig, ist a; die Wahrscheinlichkeit, B sei richtig, ist b; die Wahrscheinlichkeit, A sei richtig, wenn B als richtig angenommen wird, ist k-mal so groß wie die Wahrscheinlichkeit, B sei falsch, wenn A falsch ist. Dann ist die Abhängigkeit des A von B $(1-a)(k-kb-a)/(1-a-kb)$ mit Ausnahme des zu erörternden Falles, wenn sowohl Zähler wie Nenner dieses Bruchs verschwinden. 14405. Den Sinn der Aussage zu ermitteln: Wenn es x ist, daß A und B y sind, so ist es y, daß A und B x sind; eines der drei Wörter wahr, gewiß, wahrscheinlich wird willkürlich genommen und für x gesetzt, dann wird eines derselben drei Wörter genommen und für y gesetzt. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß die so verständlich gemachte Aussage eine formale Gewißheit wird? 14665. Jeder Buchstabe bedeutet eine Angabe und a' die Leugnung von a; zu zeigen, daß $(ax=ay)(a'x=a'z)$ und $a(x=y)+a'(x=z)$ gleichbedeutend sind, wenn a eine Konstante ist (x, y, z unbeschränkt), aber nicht notwendig, wenn a eine Variable ist. [Eine Angabe ist eine Konstante, wenn sie entweder sicher oder unmöglich ist; eine Variable, wenn sie weder sicher, noch unmöglich ist.] 15064. Es möge φ die alternative Angabe $xyza'+xyb'+xy'z'+y'z'a'$ bedeuten. Die

Aussage $\varepsilon:\varphi$ (die zusichert, daß φ gewiß ist, d. h. notwendig aus unseren Daten folgt) in der Form auszudrücken

$$(M:z:N)(P:y:Q)(R:x:S)(T:\eta),$$

in der die Zeichen näher definierte Bedeutungen haben. Lp.

H. MacColl. Questions 14807, 14871, 14375. Ed. Times (2) **1**, 76, 81-82, 111-113.

14807. Wenn $2-x-y$, $3y-4x-6$, $y+2x-7$ drei negative Zahlen sind, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß y negativ ist ($\frac{2}{35}$). 14871. Wenn x und y beliebig zwischen 0 und 1 angenommen werden, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß $2x+y-3a$ negativ ist, wenn die Konstante a zwischen 0 und ∞ liegt. 14375. Drei Größen werden beliebig zwischen k und $-k$ angenommen. Zu zeigen, daß $\frac{3}{8}$ = Wahrscheinlichkeit, daß ihre Summe positiv ist; unter der Annahme, daß ihr Produkt positiv ist, = Wahrscheinlichkeit, daß ihr Produkt positiv ist, unter der Annahme, daß ihre Summe positiv ist. Zu zeigen, daß $-\frac{1}{8}$ = Abhängigkeit des ersten Ereignisses von dem zweiten = Abhängigkeit des zweiten Ereignisses von dem ersten. Lp.

E. Lampe. Über eine Frage aus der Theorie der geometrischen Mittelwerte. Berl. Math. Ges. Ber. **1**, 9-11.

Daß der Mittelwert von unendlich vielen Größen von der Art abhängt, wie der Übergang ins Unendliche vollzogen wird, zeigt die Note an der Frage nach dem Mittelwerte der Krümmungsradien aller Normalschnitte in einem Punkte einer positiv gekrümmten Oberfläche. Je nach der Wahl der unabhängigen Variable erhält man das Gaußsche Krümmungsmaß, die mittlere Krümmung, das geometrische Mittel aus beiden usw. Lp.

Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte nebst ihren Lösungen von L. Orchard, R. Chartres, T. C. Simmons, A. Whitworth, J. O'Regan befinden sich in Ed. Times (2) **1**, 65, (14813), 66 (14741); (2) **2**, 40 (14537), 42 (14405) 46-47 (7903), 72 (14966), 77 (12174), 80-81 (7791), 81-82 (15040).

K. Schwering. Geometrische Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zs. f. math. u. naturw. Unt. **33**, 136.

Fünf Aufgaben aus der elementaren Geometrie. Lp.

E. Czuber. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. Erste Hälfte. Leipzig: B. G. Teubner. 304 S. 8° (Teubners Sammlung IX, 1).

Referat mit dem über die zweite Hälfte zusammen im nächsten Jahrgange.

P. A. Nekrassow. Neue Grundlagen der Lehre über die Wahrscheinlichkeiten der Summen und der mittleren Werte. Moskau Math. Samml. **23**, 40-462 (Russisch).

Fortsetzung und Schluß (Kap. 14-17) der in F. d. M. **32**, 220 besprochenen Arbeit. Kap. 14 erklärt die Bedeutung einiger Lagrangeschen Reihen für die Untersuchung der paradoxalen und der angrenzenden nicht-paradoxalen Fälle erster Art und gibt Anwendungen gewisser „Hauptwege“ in derselben Untersuchung. Daraus erhellt die Wichtigkeit der Lehre über die Konvergenzbereiche der Lagrangeschen Reihe für die Untersuchung der betreffenden Fragen nach der Methode des Verf. Deshalb wird Kap. 15 der Anwendung der in der früheren Arbeit des Verf. (Mosk. Math. Samml. **12**) enthaltenen Methoden und Resultate auf das Studium der Konvergenzbereiche der betreffenden Lagrangeschen Reihen gewidmet. Kap. 16 und 17 bilden einen Nachtrag zu der Arbeit. Der Verf. untersucht hier die (nach seiner Terminologie paradoxalen und angrenzenden nicht-paradoxalen der zweiten Klasse angehörenden) Fälle, welche er anfangs durch die gemachten Voraussetzungen eliminierte (F. d. M. **32**, 222), jetzt aber, angeregt durch die Arbeiten von A. M. Liapunoff (F. d. M. **32**, 230), auch in Betrachtung zieht. Zu diesem Zwecke müssen gewisse Abänderungen in den genannten Voraussetzungen vorgenommen werden. Den Schluß des 17. Kapitels bilden kritische Äußerungen über die genannten Arbeiten von Liapunoff und die Vergleichung seiner Resultate mit denen des Verfassers. Si.

P. A. Nekrassow. Philosophie und Logik der Lehre über die Massenerscheinungen der menschlichen Tätigkeit. Moskau Math. Samml. **23**, 463-604 (Russisch).

Der Abschluß seiner umfangreichen Arbeit über die Wahrscheinlichkeiten der Massenerscheinungen veranlaßte den Verf., seine allgemeinen Ansichten zu erläutern. In der Abhandlung, deren Titel wir oben gegeben haben, bezweckt er eine Revision der Grundlagen der sozialen Physik von Quetelet. Er bekämpft den positivistischen Standpunkt und verteidigt die Freiheit des Willens, den Vitalismus etc. Doch hat seine Darstellung eigentlich nichts mit der Mathematik gemein und ist vielmehr als ein Bekenntnis der Weltanschauung des Verf., keineswegs aber als mathematischer Beitrag zu den philosophischen Lehren über die Grundlagen der Erkenntnis zu betrachten. Si.

J. J. BIELANKIN. Wahrscheinlichkeit der wiederholten Ereignisse. Kiew. Univ. No. 2, 1-73 (Bericht Kiew Ges. 1900, Russisch).

Beweis des Satzes, daß die Wahrscheinlichkeit des m_1-, resp. m_2-, ..., m_k-maligen Auftretens der Ereignisse $E_1, \dots, E_n$ bei n Versuchen der Koeffizient von $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_k^{m_k}$ in

$$\Pi (p_{i,1} x_1 + p_{i,2} x_2 + \cdots + p_{i,k} x_k)$$

ist. Si.

W. GOSIEWSKI. Zur Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wiad. mat. 6, 76-88 (Polnisch).

Bezeichnet man mit: $p(a)$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses a; $p(a_1, a_2, \dots, a_n)$ die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit von $a_1, a_2, \dots, a_n$; $p_a(b)$ die Wahrscheinlichkeit von b unter der Voraussetzung, daß a verwirklicht sei; $p_{a_1, a_2, \dots, a_i}(a_{i+1})$ die Wahrscheinlichkeit von a_{i+1} unter der Voraussetzung des Eintreffens von $a_1, a_2, \dots, a_i$; $p(a_1$ oder a_2 oder $a_3, \dots)$ die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens mindestens des einen von den Ereignissen $a_1, a_2, a_3, \dots$, dann ist:

$$p(a_1, a_2, \dots, a_n) = p(a_1) p_{a_1}(a_2) \dots p_{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}}(a_n);$$

$$p(a_1 \text{ oder } a_2 \text{ oder } a_3 \dots) = \sum_i p(a_i) - \sum_{ij} p(a_i, a_j) + \sum_{ijk} p(a_i, a_j, a_k) - \cdots + (-1)^{n-1} p(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

$$p_a(x) = \frac{p(x) p_x(a)}{\sum_x p(x) p(a)},$$

wo x die eventuelle Ursache x des Ereignisses a bedeutet. Du.

W. GOSIEWSKI. Über das Gesetz der großen Zahlen. Wiad. mat. 6, 89-97.

Ein neuer Beweis dieses Gesetzes. Sind $a_1, a_2, \dots, a_n$ n gegenseitig sich ausschließende Ereignisse, ist u_{is} die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von a_i im s-ten Versuche, so ist bekanntlich $\sum_{i=1}^{n} u_{is}$ die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines von den a_i in demselben Versuche, $v_s = 1 - \sum_{i=1}^{n} u_{is}$ die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit. Wir bilden das Produkt $\prod_s (v_s v + \sum_i u_{is} u_i)$, $s = 1, 2, \dots, m$, v und u_i sind Unbestimmte; nach den Potenzen dieser Unbestimmten entwickelt, nimmt dieses Produkt folgende Form an:

$$\prod_s (v_s v + \sum_i u_{is} u_i) = \sum_{(x)} \varphi_{(x)} v^y \prod_i u_i^{x_i},$$

wo $y = m - \sum_i x_i$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x)$ und die Summation sich auf sämtliche ganze und nichtnegative Werte der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erstreckt, welche der Ungleichung $\frac{1}{n} \sum_i x_i \leqq 1$ genügen. In dem engeren, durch die Ungleichung

$$\sum_i \frac{(x_i - \alpha_i)^2}{\beta_i^2} \leqq 1$$

definierten Bereiche, für welchen $\sum_i \alpha_i + \sqrt{\sum \beta_i^2} \leqq m$, ist $P = \sum_{(x)} \varphi_{(x)}$ der Ausdruck der Wahrscheinlichkeit, daß in m Versuchen $(1, 2, \ldots, m)$ das Ereignis a_i x_i-mal eintreffen wird. Durch geeignete Umformung dieses Ausdruckes gelangt man zu folgenden Ungleichungen:

$$P > 1 - \tfrac{1}{4} \sum_i \frac{1}{\lambda_i^2},$$

$$\left(\frac{x_i}{m} - \frac{1}{m} \sum_s u_{is}\right)^2 < \frac{\varepsilon_i^2 \lambda_i^2}{m}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\sum_i \varepsilon_i^2 \leqq 1,$$

wo λ_i eine positive (durch $\beta_i = \lambda_i \sqrt{m}$ definierte) Zahl ist. Durch diese Ungleichungen ist das Gesetz der großen Zahlen (für eine genügend große Zahl m) dargestellt. Dn.

P. Mansion. Démonstration du théorème de Jacques Bernoulli. Sur une intégrale considérée en calcul des probabilités. Brux. S. sc. 26 B, 191-214.

J. Neuberg. Rapport. Ibid. A, 67-68.

Die Wahrscheinlichkeit, von der in dem Bernoullischen Theorem die Rede ist, übertrifft

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2} dt - \frac{s}{\sqrt{2\pi\mu p q}}, \quad T = l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}},$$

wo l die Abweichung, p und q die einfachen Wahrscheinlichkeiten des betrachteten Ereignisses und seines Gegenteiles bezeichnen, μ die Anzahl der Proben. Der Beweis ist mühsam und ohne Eleganz. Der Verf. beweist dann die Ungleichung

$$\int_{p-l}^{p+l} z^m (1-z)^n dz : \int_0^1 z^m (1-z^n) dz > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2} dt - \frac{7}{\mu p q},$$

wo $m = \mu p$, $n = \mu q$. Mn. (Lp.)

Ed. Goedseels. Sur l'application de la méthode de Cauchy aux moindres carrés. Brux. S. sc. 26 B, 148-156.

Der Verf. zeigt den Nutzen, den die Cauchysche Methode in manchen Fällen zur Vereinfachung der Methode der kleinsten Quadrate bringen kann. Mn. (Lp.)

H. E. Timerding. Die Bernoullische Wertetheorie. Zs. für Math. u. Phys. 47, 321-354.

Die sehr verdienstvolle Abhandlung gibt eine umfangreiche Kritik der von Daniel Bernoulli begründeten und von Laplace ausgebauten Theorie der mathematischen Hoffnung, die als „Wertetheorie" auf vielen Gebieten der Nationalökonomie (Walras, Jevons, Menger) Anwendung gefunden hat.

Der Begriff der mathematischen Hoffnung im engeren Sinne, von dem die ganze Wahrscheinlichkeitslehre ihren Ausgang genommen hat, stellt einen Durchschnittswert dar, der sich erst bei sehr häufiger Wiederholung desselben gewinnbringenden Ereignisses ergibt, und hat daher eine praktische Bedeutung nur dann, wenn sich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses in gewissem Sinne aus statistischen Erhebungen empirisch festlegen läßt, wie z. B. im Versicherungswesen. Etwas ganz anderes ist es, wenn gefragt wird, ob für eine bestimmte Person nach Maßgabe ihrer besonderen Verhältnisse die eine oder andere Möglichkeit eines Gewinnes die günstigere ist. Bernoulli ging bei dieser Frage nach der „moralischen Hoffnung" von dem Gedanken aus, daß eine bestimmte Ausgabe oder Einnahme von jemandem um so weniger empfunden wird, je mehr er besitzt, und gelangte so zu dem Ansatze

$$dv = k\frac{dx}{x},$$

wobei dv der Wert ist, den eine kleine Geldsumme dx für eine Person mit dem Vermögen x besitzt. Der Ansatz gilt übrigens nur für sehr kleine Gewinne und Verluste und ist bei beträchtlichen Vermögensänderungen durch die Integralgleichung

$$v = \int_x^{x+z} k\frac{d\zeta}{\zeta} = k \log\frac{x+z}{x}$$

zu ersetzen. Genau dieselbe Gleichung ergibt sich, wie der Verf. zeigt, wenn man für den subjektiven Wert einer bestimmten Einnahme zunächst nur die Voraussetzung einführt, daß er durch den Betrag des Vermögens vor und nach dieser Einnahme gegeben wird, ihn also in der allgemeinen Form

$$v = f(x+z, x)$$

annimmt. Ist ferner w die Wahrscheinlichkeit eines ungewissen Gewinnes z, so ist die moralische Hoffnung durch den Ausdruck $k \log\left(\frac{x+z}{x}\right)^w$ ge-

geben, und der Gewinn z ist demnach einem Gewinne z', dem die Wahrscheinlichkeit w' zukommt, vorzuziehen, wenn

$$\left(\frac{x+z}{x}\right)^{w} > \left(\frac{x+z'}{x}\right)^{w'}$$

ist. Nach diesen Prinzipien und mit Hülfe einiger ganz elementarer Formeln leitet der Verf. folgende Sätze her, die Laplace unter Zuhülfenahme eines sehr verwickelten Apparates bewiesen hat:

1. Der Vorteil eines möglichen Gewinnes wiegt niemals den Nachteil eines gleich großen und gleich wahrscheinlichen Verlustes auf.

2. Jedes reine Glücksspiel zwischen zwei Spielern ist, wenn es nach den Regeln der Billigkeit geordnet ist, für beide Spieler nachteilig, indem ihr möglicher Gewinn ihren möglichen Verlust niemals aufwiegt.

3. Jedes Spiel, nach welchen Regeln es auch geordnet sein mag, ist wenigstens für einen Spieler nachteilig.

4. Unter allen möglichen Gewinnen, welche denselben objektiven Wert besitzen, ist immer dem subjektiven Werte nach der sicherste den anderen vorzuziehen, obwohl sein Betrag am kleinsten ist, und ebenso ist unter allen möglichen Verlusten von demselben objektiven Werte derjenige am ehesten zu ertragen, dessen Betrag am geringsten ist, wenn auch seine Wahrscheinlichkeit die größte ist.

5. Eine Versicherung ist um so mehr angebracht, je weniger wahrscheinlich, aber auch je empfindlicher der versicherte Verlust für die betreffende Person sein würde.

6. Will ein Kaufmann eine bestimmte Menge Waren über See schicken, so ist es für ihn vorteilhafter, diese Waren auf zwei gleich seetüchtige Schiffe zu verteilen, als sie einem einzigen Schiffe anzuvertrauen.

Gegen den Bernoullischen Ansatz erhebt sich der Einwand, daß er nur das in Betracht kommende Vermögen, nicht aber das Einkommen berücksichtigt. Diese Überlegung führt zu einer neuen Wertefunktion, mit deren Hülfe sich der Wert einer Vermögensänderung angeben läßt. Aus den allgemeinen, sehr einfachen Eigenschaften dieser Funktion lassen sich, wie vermittelst einer sehr eleganten Analyse gezeigt wird, die Laplaceschen Sätze ableiten. Es scheinen also zur Begründung dieser allgemein gültigen Sätze nur solche Voraussetzungen herangezogen zu sein, deren Richtigkeit unmittelbar einleuchtet. Hier taucht aber ein neues Bedenken auf. Es handelt sich nämlich um die Berechtigung, von dem subjektiven Werte einer Geldsumme zu reden, der sich nur nach der Höhe des Einkommens richten soll, während in Wirklichkeit für das Werteverhältnis die mannigfachsten Umstände maßgebend sind. Die Verfolgung dieses Gedankens führt den Verf. auf die moderne Einkommensteuergesetzgebung und die zur Bemessung der progressiven Einkommensteuer benutzten Formeln, deren nicht geringe Zahl gegen Schluß der Abhandlung durch einige neue, der Thermodynamik entnommene, vermehrt wird. Ot.

W. H. Keesom. Reductie van waarnemingsvergelijkingen, die meer dan eene gemeten grootheid bevatten. Amst. Ak. Versl. **11**, 14-18.

„In den meisten Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Methode der kleinsten Quadrate wird die Reduktion von Beobachtungsgleichungen mit nur einer beobachteten Größe behandelt. Derartige Gleichungen treten bei geodätischen Beobachtungen auf. In der Astronomie begegnet man Gleichungen zwischen einer Größe, z. B. der Rektaszension oder Deklination eines Sterns, und der Zeit; in solchen Beziehungen kann dann die Zeit, die mit soviel größerer Genauigkeit gemessen werden kann, als gegeben betrachtet werden, sodaß diese Gleichungen derselben Behandlungsweise fähig sind. Bei physikalischen Beobachtungen jedoch erhält man Beobachtungsgleichungen zwischen verschiedenen Größen, von denen jede als mit einem gewissen zufälligen Fehler behaftet angesehen werden muß. Dies ist z. B. der Fall, wenn man bei verschiedenen Volumina und Temperaturen den Druck eines Gases oder einer Flüssigkeit gemessen hat und nun aus den Beobachtungen diejenige Beziehung ableiten will, welche mit der größten Wahrscheinlichkeit das Verhalten der untersuchten Substanz darstellt."

Die unbekannten Größen, deren wahrscheinlichste Werte ermittelt werden sollen, seien $X, Y, Z, \dots$, und es bestehe die Beziehung

$$F(L, M, N, \dots; X, Y, Z, \dots) = 0,$$

wobei $L, M, N, \dots$ mehrfach gemessen sind. Es werden ferner mit $X_0, Y_0, Z_0, \dots$ eine Reihe von Näherungswerten der Unbekannten, mit $x, y, z, \dots$ die anzubringenden Korrekturen und mit $L_k, M_k, N_k, \dots$ eine Reihe zu einander gehörender Beobachtungen bezeichnet, deren mittlere Fehler $m_{l_k}, m_{m_k}, m_{n_k}, \dots$ sind. Es ergibt sich alsdann das einfache Resultat, daß aus den auf die lineare Form reduzierten Beobachtungsgleichungen

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_k x + \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_k y + \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)_k z + \dots + F_k = 0$$

die Normalgleichungen auf dieselbe Weise abgeleitet werden, als wenn die Größen F_k unmittelbar den Beobachtungen entnommen sind, wobei jenen Beobachtungsgleichungen die reziproken Werte der Größen

$$\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_k^2 m_{l_k}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial M}\right)_k^2 m_{m_k}^2 + \dots$$

als Gewichte beizulegen sind. Der Index k deutet an, daß in den Funktionswerten $L = L_k$, $M = M_k, \dots$; $X = X_0$, $Y = Y_0, \dots$ gesetzt werden soll. Ot.

G. Fr. Lipps. Die Theorie der Kollektivgegenstände. Mit 6 Figuren im Text. Separatabdruck aus „Wundt, Philosophische Studien." XVII. Band. Leipzig: Wilh. Engelmann. IV u. 217 S. gr. 8°.

Die Schrift ist im vorigen Jahrgange S. 235 bereits angezeigt worden. In der Einleitung dieser Sonderausgabe bemerkt der Verf.:

„Die folgenden Untersuchungen wurden durch die Kollektivmaßlehre Fechners und durch die Contributions to the mathematical theory of evolution, die Pearson in den Phil. Trans. veröffentlicht hat, angeregt. Sie gründen sich jedoch weder auf das Werk Fechners, noch auf die Forschungen Pearsons, sondern geben eine neue Theorie der Kollektivgegenstände, zu der mich die Erkenntnis führte, daß die von Fechner und von Pearson ausgebildeten Methoden zwar weit über den von Quetelet vertretenen Standpunkt hinausführen, aber doch ihrem Wesen nach mit Mängeln behaftet sind, die auch bei der Anwendung der zuerst von Bruns empfohlenen und für Kollektivgegenstände nutzbar gemachten Methoden zur Darstellung willkürlich gegebener Funktionen nicht überwunden werden können. Als wesentliche Stütze habe ich bloß das Theorem Jakob Bernoullis in der ursprünglichen Form, welche die Ars conjectandi gibt, und die Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae von Gauß zu nennen. Die Bedeutung des Bernoullischen Theorems erhellt aus den Erörterungen über die Methoden der Wahrscheinlichkeitsbestimmung. Bezüglich des Zusammenhanges der im zweiten Kapitel entwickelten Methode der Mittelwerte mit dem von Gauß in der erwähnten Abhandlung aufgestellten Prinzip des mittleren Fehlers verweise ich auf II, § 5.“ Lp.

T. D. A. Cockerell, K. Pearson. The inheritance of mental characters. Nature **65**, 245-246, 367, 391.

Cockerell wirft die Frage auf, ob man bei den von Pearson behandelten Problemen nicht drei Klassen von Faktoren unterscheiden müsse: 1. Vererbung, 2. Umgebung, 3. Seele. Um die Berechtigung dieser Fragestellung drehen sich die brieflichen Äußerungen. Lp.

A. Lee, M. A. Lewenz, K. Pearson. On the correlation of the mental and physical characters in man. Part II. Lond. R. S. Proc. **71**, 106-114.

Aus statistischen Daten wird mit Hülfe der von Pearson ausgebildeten Analysis nachgewiesen, daß bestimmte Beziehungen zwischen körperlichen und geistigen Eigenschaften beim Menschen nicht nachweisbar sind. Insbesondere stellt sich die Intelligenz als von der Schädelbildung unabhängig heraus. Br.

K. Pearson. On the mathematical theory of errors of judgment with special reference to the personal equation. Lond. Phil. Trans. **198** (A), 235-299.

Verf. hat mit mehreren Beobachtern zwei Reihen von Beobachtungen angestellt, deren Fehler nach den bisherigen Anschauungen als zufällig gelten müssen. Das eine Mal handelt es sich um die Halbierung einer

Strecke, das andere Mal um eine Aug- und Ohrmethode, bei der es darauf ankam, die Stelle eines wandernden Lichtstreifens im Augenblick eines Glockensignals zu fixieren. Es ergaben sich persönliche Fehler (von übrigens sehr geringem Betrag), die mit der Zeit für mehrere Beobachter in ähnlicher Weise variierten. Hieraus folgt, daß die persönlichen Fehler zweier Beobachter nicht von einander unabhängig waren. Die Sicherheit der persönlichen Schätzung nahm mit der Größe des persönlichen Fehlers nicht ab, sondern zu. Die Verteilung der einzelnen Schätzungen auf einen Beobachter folgt nur schlecht der Fehlerkurve, besser der vom Verf. aufgestellten unsymmetrischen Fehlerkurve. Das vorhandene Beobachtungsmaterial wird nach allen Seiten hin sehr eingehend diskutiert. Br.

I. K. A. WERTHEIM SALOMONSON. Een nieuwe prikkelingswet (III). Amst. Ak. Versl. **10**, 610-618.

Die Beziehung zwischen dem Reize R, der auf ein peripheres Neuron einwirkt, und seinem Effekt E_1 lautet, wie in einer früheren Mitteilung nachgewiesen:

$$E_1 = a_1 - c_1 e^{-b_1 R},$$

wo a_1, b_1, c_1 Konstanten sind. Der von E_1 ausgehende, auf ein zweites Neuron wirkende Reiz ϱ führt zu einer weiteren Gleichung

$$E_2 = a_2 - c_2 e^{-b_2 \varrho},$$

die auf die Form

$$E_2 = a_2 - \beta e^{-b_1 R}$$

gebracht werden kann. Durch die Wiederholung desselben Schlusses kann die Allgemeingültigkeit des Gesetzes für momentane Reize nachgewiesen werden.

Im weiteren Verlaufe der Untersuchung wird ein Vergleich mit dem Weber-Fechnerschen Gesetz angestellt und der Ausdruck für die Unterschiedsschwelle (Fechner) hergeleitet. Ot.

I. K. A. WERTHEIM SALOMONSON. Over het effect als tijdfunctie. Amst. Ak. Versl. **10**, 769-779.

Indem man den Effekt eines physiologischen Reizes als die Folge einer Umsetzung chemischen Stoffes betrachtet, kann man mit Guldberg und Waage die Schnelligkeit dieser Umwandlung als proportional dem umsetzbaren Stoff W annehmen und demgemäß

$$-\frac{dW}{dt} = \alpha W$$

setzen. Ist der Stoff lebendes Protoplasma und seine Menge P, so muß, wie weiterhin gezeigt wird,

$$W = P + \beta \int P dt + f(t)$$

angenommen werden, eine Beziehung, deren Substitution in die Ausgangsrelation zu der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + (\alpha + \beta) \frac{dP}{dt} + \alpha \beta P = \alpha f'(t) + f''(t)$$

führt. Das unmittelbar sich ergebende Integral dieser Gleichung wird durch einschränkende Bedingungen über den physiologischen Reiz spezialisiert und gedeutet. Ot.

J. W. LANGELAAN. Het entropie principe in de physiologie. Amst. Ak. Versl. **10**, 849-855.

Wirkt auf das Empfangsorgan eines Reflexapparates ein kontinuierlicher Reiz ein, so bewirkt dieser Reiz eine Veränderung der Variable, die den Zustand des betreffenden chemischen Systems bestimmt. In Analogie des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie wird die für jene Veränderung maßgebende Gleichung

$$\Delta F(E) \leqq K \frac{\Delta \varphi(R)}{\varphi(R)}$$

aufgestellt und als Entropieprinzip der Physiologie bezeichnet. Dabei ist unter $F(E)$ die Menge der transformierten Energie und unter R die in physikalischem Maße gemessene Größe des Reizes zu verstehen. Wie die Untersuchung u. a. zeigt, ist das Weber-Fechnersche psychophysische Gesetz ein sehr spezieller Fall des Entropieprinzips. Ot.

J.-J. DESCHAMPS. Principes de la biologie rationnelle. Soc. Philom. Bull. (9) **4**, 127-178.

Der Inhalt der interessanten Abhandlung wird in genügender Weise durch die Kapitelüberschriften gekennzeichnet:

I. Allgemeines über die exakten Wissenschaften. 1. Definition einer exakten Wissenschaft. 2. Methode der exakten Wissenschaften.

II. Anwendung der exakten Wissenschaften auf die Biologie. 1. Die Beobachtung in der Biologie. 2. Biologische Statik und Kinematik. 3. Biologische Dynamik. 4. Möglichkeit und Vorteile der Anwendung der mathematischen Methode auf die Biologie.

III. Lösung einiger biologischer Probleme. 1. Probleme der biologischen Kinematik. 2. Probleme der biologischen Dynamik.

IV. Experimentelle Bestätigungen.

V. Schluß. Ot.

E. Oekinghaus. Die mathematische Statistik in allgemeinerer Entwickelung und Ausdehnung auf die formale Bevölkerungstheorie. Monatsh. f. Math. 13, 294-350.

Die analytischen Formeln für die Mortalitätskurve, mit denen die Statistik in der Regel operiert, haben den Nachteil, daß sie der rechnerischen Behandlung große Schwierigkeiten entgegensetzen. Schon die einfachste brauchbare Formel, die Makehamsche Funktion

$$y = ck^x g^{r^x},$$

führt zu unübersichtlichen Integrationen. Der Verf. benutzt daher als Sterbekurven und — für die Bevölkerungsstatistik — Sterbeflächen trigonometrische Reihen. Er zeigt mit großer Weitschweifigkeit, daß die wichtigsten Begriffe der formalen Statistik, wie die mittlere und wahrscheinliche Lebensdauer, die Haupt- und Nebengesamtheiten der Lebenden und Gestorbenen usw., sich aus seinen hypothetischen Ansätzen leicht ergeben und, unter Zugrundelegung empirischer Daten, mit genügender Annäherung ermittelt werden können. Auf Einzelheiten an dieser Stelle einzugehen, verbietet der Umfang der Formeln. Die Vorschläge des Verf. verdienen die Beachtung der theoretischen Statistik: für die praktische Lebensversicherungsmathematik scheinen sie, nach dem letzten Abschnitte der Arbeit zu schließen, belanglos. Ot.

E. Czuber. Die neuen englischen Sterblichkeitsmessungen. Eine vergleichende Studie. Sep.-Abdr. Mitt. des Verb. österr. und ung. Versicherungs-Techniker. 18 S. 4°.

Es existieren drei umfangreiche Sterblichkeitsuntersuchungen, die auf Grund der Erfahrungen englischer Lebensversicherungsgesellschaften angestellt worden sind. Das Ergebnis der ersten, die „Tafel der 17 englischen Gesellschaften“, wird noch heute, namentlich in dem internationalen Rückversicherungsgeschäft, vielfach benutzt. Die etwa 25 Jahre jüngere „Tafel der 20 englischen Gesellschaften“ hat eine weit geringere Verbreitung gefunden. Der neuesten Zeit entstammt die umfangreichste Untersuchung, zu der 60 englische Gesellschaften das Material geliefert haben, und deren vorläufiges Ergebnis in Form ausgeglichener Tafeln die Veranlassung zu der vorliegenden Studie gewesen ist. Der Verf. beabsichtigt, einen Überblick über die ganze große Arbeit und eine vergleichende Betrachtung der Hauptergebnisse unter einander mit den Resultaten älterer Sterblichkeitsuntersuchungen zu geben. Es wird genügen, hier die Überschriften der einzelnen Kapitel anzuführen: 1. Gliederung der Beobachtungen. 2. Umfang des Beobachtungsmaterials. 3. Aufzeichnung und Bearbeitung der Beobachtungen. 4. Vergleichende Betrachtung der Resultate. 5. Versicherungswerte, aus den neuen Erfahrungen abgeleitet. — 22 Tabellen sind dem Texte eingefügt. Ot.

B. Oster. **Über die Herleitung der Formeln für Lebensversicherungsprämien.** Arch. der Math. u. Phys. (3) 4, 44-49.

Die Beziehungen, welche zwischen den Leibrenten- und Kapitalversicherungsprämien für aufeinanderfolgende Alter bestehen, werden aus dem Wesen der in Betracht kommenden Versicherungsart entwickelt und sodann, nach den Methoden der Differenzen- und Differentialgleichungen, zur Darstellung der Prämienformeln benutzt. Dieses analytische Verfahren ist, obwohl weniger elementar, so doch natürlicher als die in den Lehrbüchern übliche synthetische Methode. Als Beispiele sind gewählt die Einmalprämien für eine sofort beginnende lebenslängliche Leibrente bei jährlicher oder kontinuierlicher Rentenzahlung, sowie für die einfache Kapitalversicherung auf den Todesfall mit Zahlung der Versicherungssumme am Ende des Sterbejahres oder sofort nach dem Tode. Ot.

C. L. Landré. **Vergleichung von Mittelwerten.** Assekuranz-Jahrbuch 24 (II. Teil), 81-90.

Um aus den speziellen Werten $f(x)=\alpha, f(x+1)=\beta$ durch Interpolation den Wert $f\left(x+\frac{p}{q}\right)$, wo $p<q$, zu finden, hat man als die einfachsten Ansätze nach Analogie des arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittels

$$m_a=\frac{(q-p)\alpha+p\beta}{q},\quad m_g=\sqrt{\alpha^{q-p}\beta^p},\quad \frac{1}{m_h}=\frac{1}{q}\left(\frac{q-p}{\alpha}+\frac{p}{\beta}\right)$$

zu bilden. Zunächst ist nun $m_a>m_g>m_h$. Ferner lehrt eine einfache Betrachtung, daß die Differenz zwischen dem arithmetischen und dem harmonischen Wert für den Fall $\frac{p}{q}=\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$ den Maximalbetrag $(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2$ erreicht, und daß alsdann $m_a=\alpha-\sqrt{\alpha\beta}+\beta$, $m_h=\sqrt{\alpha\beta}$ wird. Die entsprechende Untersuchung für den geometrischen Interpolationswert kann wegen der dabei auftretenden transzendenten Gleichungen nicht durchgeführt werden.

Verf. macht eine Anwendung auf die Interpolation bei Leibrententarifen. Ot.

I. M. Vaz Dias. **Annähernde Berechnung bei Änderung des Zinsfußes.** Assekuranz-Jahrbuch 24 (II. Teil), 17-30.

Wenn eine Lebensversicherungsgesellschaft ihren Berechnungen einen neuen Zinsfuß zugrunde legen will, so ist sie genötigt, neue Grundtabellen anzufertigen. Das gleiche Verfahren würde in Einzelfällen zu umständlich sein, und man muß zu Näherungsmethoden seine Zuflucht nehmen. Handelt es sich z. B. darum, eine mit dem Zinsfaktor r be-

rechnete postnumerando zahlbare Leibrente eines x-Jährigen, deren Wert bekanntlich

$$\frac{1}{l_x}\left(\frac{l_{x+1}}{r}+\frac{l_{x+2}}{r^2}+\frac{l_{x+3}}{r^3}+\cdots\right)$$

ist, in eine solche mit dem Zinsfaktor t umzurechnen, so ergibt sich sofort, daß der gesuchte Wert in Form einer in geometrischer Progression mit dem Quotienten $\frac{t}{r}$ steigenden Rente dargestellt werden kann. Diese Überlegung führt zu einer Näherungsformel, deren Brauchbarkeit an einigen Beispielen dargetan wird. Ein ähnliches Verfahren läßt sich auf die Jahresprämien für Rentenversicherung sowie auf Prämien für Kapitalversicherung auf den Todesfall anwenden. Ot.

J. Curie. La représentation proportionnelle dans les élections municipales. Assoc. Franç. Ajaccio (1901) 30, 1032-1036.

Ein dem französischen Abgeordnetenhause vorgelegter Gesetzentwurf enthielt gewisse Fehler, die Hagenbach-Bischoff in Basel schon 1890 als solche nachgewiesen hatte. Dies gibt dem Verf. Anlaß, die zu befolgenden Regeln genauer zu entwickeln. Lp.

P. J. E. Goedseels. Théorie des erreurs d'observation. Louvain: Peeters; Paris: Gauthier-Villars. XIII u. 184 S.

Dieses Buch liefert eine eigenartige Darstellung der Methode von Mayer, der Methode von Cauchy und der Methode der kleinsten Quadrate, indem die Wahrscheinlichkeitsrechnung fast gar nicht herbeigezogen wird. Wir haben schon die vortrefflichen Abänderungen besprochen, die der Verf. in die Mayersche und die Cauchysche Methode eingeführt hat (F. d. M. **31**, 233, 1900; **32**, 231, 1901). Bezüglich der Methode der kleinsten Quadrate, die hier unter sehr verschiedenen Formen entwickelt wird, können wir in der Kürze nicht angeben, worin die Darstellung des Verf. von derjenigen seiner Vorgänger abweicht.

Mn. (Lp.)

Weitere Literatur.

L. Brusotti. Dimostrazione di un teorema di calcolo combinatorio. Periodico di Mat. (2) **5**, 191-192.

G. M. Testi. Sulle combinazioni con repetizione di m elementi n ad n. Livorno: Giusti. 4 S. 8°.

A. Badoureau. Récréation mathématique. Une réussite. Revue scientifique (4) **17**, 650-652.

E. Fourrey. Récréations arithmétiques. Paris: Nony.

S. I. Jones. Mathematical puzzles. A collection of the most amusing properties of numbers, and many of the most difficult mathematical problems, with their answers. Denton, Tex.: News Point. 76 S. 16mo.

J. Vinot. Récréations mathématiques; questions curieuses et utiles, extraites des auteurs anciens et modernes. 5e édition. Paris: Larousse. VIII u. 215 S. 8°.

P. S. Marquis de Laplace. Philosophical essay on probabilities. Translated from the sixth French edition by Frederick Wilson Truscott and Frederick Lincoln Emery. New York: Wiley and Sons. London: Chapman and Hall. IV u. 196 S. [Nature **66**, 652.]

E. Czuber. Probabilités et moyennes géométriques. Ouvrage traduit de l'allemand par H. Schuermans. Préface de Ch. Lagrange. Paris: Hermann. 250 S. 8°.

E. Hegemann. Übungsbuch für die Anwendung der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate auf die praktische Geometrie. 2. verb. u. erweit. Aufl. Berlin: P. Parey. VI u. 169 S. gr. 8°.

A. Liapunoff. Neue Form des Theorems über die Grenze der Wahrscheinlichkeit. St. Pétersb. Mém. (8) **12**, No. 5, 24 S.

E. Gerhardt. Die theoretische und praktische Bedeutung der arithmetischen Mittelsumme. Diss. Tübingen. 20 S. 8° (1901).

Geuer. Die Genauigkeit geometrischer Zeichnungen, behandelt nach dem Gaußschen Ausgleichungsverfahren, wonach die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird. Pr. Durlach. 39 S. u. 4 Taf. 4°.

Miss F. E. Cave-Browne-Cave and K. Pearson. On the correlation between the barometric height at stations on the eastern side of the Atlantic. Lond. R. S. Proc. **70**, 465-470.

Thiemeyer. Die Mathematik in ihrer Anwendung auf das Versicherungswesen. Papenburg: 23 S. 4°.

H. Laurent. Petit traité d'économie politique mathématique, rédigé conformément aux préceptes de l'école de Lausanne. Paris: Schmid. 64 S. 8°.

F. von Engeström. Lifförsäkring. Del I och II. Beräkning af premier och matematiska värden; försäkringsvilkor och premier. Stockholm. 124 u. 158 S.

E. G. Rachmilowitsch. Kurzes Lehrbuch der Statistik. Dritte Auflage. Odessa. 252 S. (Russisch).

R. Armbruster. Des questions de survie. De la valeur légale et scientifique des présomptions (Thèse). Lyon: Storck. 192 S. 8°.

Ém. Bouvier. La méthode mathématique en économie politique. Paris: Larose. 145 S. 8° (1901).

B. Danielewicz. Ein universelles System der Bezeichnungen in der Versicherungstechnik. Wiad. mat. 6, 98-112 (Polnisch).

A. Hunter. Net premiums and reserves on joint life policies, based on the American table of mortality graduated by the Makeham formula etc. New York: The Actuarial Society of America. 102 S. 4°.

A. Schlimbach. Politische Arithmetik, insbesondere Zinseszins-, Sparkassen-, Renten-, Anleihe-, Kurs- und Rentabilitätsrechnung nebst Faktorenzusammenstellung. Frankfurt. 400 S. 8°.

C. M. Walsh. The measurement of exchange value. New York: The Macmillan Company. XIV u. 500 S. 8° (1901).

W. Ahrens. Mathematische Spiele. Encykl. d. math. Wiss. **1**, 1080-1093.

V. Pareto. Anwendungen der Mathematik auf Nationalökonomie. Encykl. d. math. Wiss. **1**, 1094-1120.

Fünfter Abschnitt.

Reihen.

Kapitel 1.

Allgemeines.

O. Staude. Die Hauptepochen der Entwicklung der neueren Mathematik. Deutsche Math.-Ver. 11, 280-292.

Erste Epoche: Euler verwertet die Descartessche Koordinatenmethode und die Leibnizsche Differential- und Integralrechnung; nach ihm machen die in ähnlicher Weise wirkenden Männer, wie Monge, Lagrange, Laplace, Legendre, Paris gegen Ende des 18. und Anfang des 19. Jahrhunderts zum Mittelpunkt mathematischer Wissenschaft und ihrer Lehre (auch durch Gründung der polytechnischen Schule und des Journal de l'école polytechnique).

Zweite Epoche: Gauß führt durch die imaginären Größen ein neues Prinzip ein, durch das im 19. Jahrhundert die Differential- und Integralrechnung zur Funktionenlehre fortentwickelt wird; er löst damit namentlich die Aufgaben der Kreisteilung und der konformen Abbildung. — In Frankreich benutzt Cauchy die imaginären Größen für die Analysis und schafft in den Determinanten ein Hülfsmittel für die formale Algebra.

Nachdem Crelle 1826 das Journal für reine und angewandte Mathematik gegründet hatte, übernimmt Deutschland die führende Stelle. Der Norweger Abel zeichnet durch seine in den ersten Bänden des Journals veröffentlichten Arbeiten über die Unauflösbarkeit der Gleichungen höherer Grade und über die später nach ihm benannten Abelschen Integrale der Algebra und Analysis die Bahn ihrer Weiterentwicklung vor. Galois führt in der Algebra Abels Gedanken weiter, Jacobi entwickelt gleichzeitig mit Abel die elliptischen Funktionen, vervollkommnet die Determinanten und begründet die Lehre der Differentialgleichungen. Jacobi und Dirichlet heben die akademischen Vorlesungen auf eine höhere Stufe.

Möbius begründet die Theorie der geometrischen Verwandtschaften, Steiner ein neues System der synthetischen Geometrie (das von Sturm,

Cremona, Reye weiter entwickelt wird), Plücker gestaltet den Descartesschen Koordinatenbegriff um (seine Ideen werden fortgesetzt von Salmon und Cayley, die außerdem auch Cauchys Methoden der formalen Algebra ausbilden).

Dritte (kritische) Epoche von der Mitte bis Ende des 19. Jahrhunderts. In der synthetischen Geometrie ist v. Staudt, in der analytischen Hesse tätig, in der Arithmetik und Algebra stehen an erster Stelle Kummer und Kronecker. Durch Hermite wird die Lösung des Problems von der Quadratur des Kreises angebahnt, durch Lindemann vollendet.

Hermite, Kronecker und Brioschi lösen die Gleichung fünften Grades, Klein vervollkommnet die Lösung.

Riemann und Weierstraß lösen das von Abel und Jacobi formulierte Umkehrungsproblem der Abelschen Integrale; Clebsch verwertet die Resultate für die Geometrie, er und Klein geben die Anregung zu einer organischen Verbindung von Geometrie und Funktionentheorie. Weierstraß' Arbeiten über die Abelschen Funktionen und die Elementarteiler der Determinanten bezeichnen die höchste Vollendung der dritten Epoche.

Auch nach seinem Tode (19. Februar 1897) tritt in Deutschland die Mathematik und ihre Lehre nicht zurück, das beweist der von Hilbert über mathematische Probleme auf dem internationalen Mathematikerkongreß gehaltene Vortrag, Cantors Geschichte der Mathematik und die von Klein angeregte Encyklopädie der Mathematik. (Vergl. hierzu den Artikel von Felix Müller in Deutsche Math. Ver. **13**, 247 bis 253, 1904.) Wz.

A. Capelli. Istituzioni di analisi algebrica. Terza edizione con aggiunte delle Lezioni di algebra complementare ad uso degli aspiranti alla licenza universitaria in scienze fisiche e matematiche. Napoli: Pellerano. XIX u. 714 S. 4°.

Diese Auflage unterscheidet sich von den beiden früheren (siehe: F. d. M. **26**, 105, 1895; **29**, 66, 1898) besonders durch die Hineinziehung der Theorie der natürlichen, negativen und gebrochenen Zahlen. Diese Theorie entwickelt der Verf. auf Grund der von ihm in einigen seiner neueren Arbeiten (Sull' ordine di precedènza fra le operazioni fondamentali dell' aritmetica, Napoli Rend. (3) **6**, 138-151; Batt. G. **39**, 2-23; F. d. M. **31**, 167, 1900, **32**, 216, 1901; Le iperaritmetiche e l'indirizzo combinatorio dell' arimetica ordinaria, Congr. intern. des math. [Paris 1900] 407-418, F. d. M. **32**, 173, 1901; Sulla genesi combinatoria dell' aritmetica, Il concetto di valore e l'introduzione nell' aritmetica dei numeri negativi e frazionari, Batt. G. **39**, 81-102, 240-256; F. d. M. **32**, 174, 1901) ausgesprochenen Ideen. Weitere Zusätze betreffen die Stetigkeit und Derivierbarkeit der Funktionen reeller Variabeln und die Elemente der Theorie der elliptischen Funktionen. Vi.

E. Borel. Leçons sur les séries à termes positifs professées au Collège de France. Recueillies et rédigées par R. d'Adhémar. Paris: Gauthier-Villars. VI u. 95 S. 8° (Nouvelles Leçons sur la théorie des fonctions).

Auf den engen Zusammenhang der Reihen positiver Glieder mit der Art des Wachsens der Funktionen leiten die beiden ersten Kapitel des Buches hin, in denen die Konvergenz und Divergenz der Reihen und Integrale auf Grund der Bertrandschen Kriterien behandelt wird. Das dritte Kapitel ist dem irregulären und regulären Wachsen der Funktionen gewidmet. Als Beispiel für das erstere wird eine Funktion $g(x)$ in der Weise gebildet, daß abwechselnd aus

$$e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \text{ und } e^{e^x} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

Gruppen von Gliedern genommen werden:

$g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n_1} x^{n_1} + b_{n_1+1} x^{n_1+1} + b_{n_2} x^{n_2} + a_{n_2+1} x^{n_2+1} \cdots$, und es zeigt sich, daß $g(x)$ für eine unendliche Anzahl von Werten der Veränderlichen x mit der Funktion e^x, für eine unendliche Menge anderer Werte mit der Funktion e^{e^x} vergleichbar ist.

Um die Ordnungen des Unendlichen zu definieren, wird für das Unendlichkleine eine Grundgröße x gewählt und durch Vergleichung mit ihr die Ordnung einer anderen unendlich kleinen Größe y erklärt. Ist μ eine positive Zahl von der Beschaffenheit, daß y/x^{μ} eine Grenze besitzt, wenn x gegen Null konvergiert, so ist μ die Ordnung von y.

Ebenso wird für das Unendlichgroße eine Grundgröße x gewählt und der Grad anderer Größen durch Vergleichung mit x bestimmt. Ist $y = x^p$, $x^p \times x^q$, so ist y vom Grade p, bezüglich $p + q$; ist y vom Grade p in x, z vom Grade q in y, $y = x^p$, $z = y^q$, so ist $z = x^{pq}$ vom Grade pq. Ist $y = x^p$, so ist der Grad von $x = y^{\frac{1}{p}}$ gleich $\frac{1}{p}$. Der Grad von e^x wird durch ω bezeichnet, dann ist $e^x x^n$ vom Grade $\omega + n$, $x^n e^x$ vom Grade $n + \omega$ und, wenn n endlich und größer als Null ist, $\omega + n = n + \omega$. Ist $y = e^x$, $z = e^y$, so ist $z = \varphi_2(x) = e^{e^x}$ vom Grade ω^2, und $\varphi_m(x)$ vom Grade ω^m. Der Grad von $\log x$ ist $\frac{1}{\omega}$ oder ω^{-1}, derjenige von $\log_m x$ ist ω^{-m}. Hieraus folgt $\omega^{\alpha} + \omega^{\beta} = \omega^{\alpha+\beta}$. Ist $y = x^n$, $z = e^y$, so ist $z = e^{x^n}$ vom Grade ωn; ist dagegen $y = e^x$, $z = y^n$, so ist z vom Grade $n\omega$, und es ist $\omega n \neq n\omega$, d. h. die Multiplikation der Grade ist im allgemeinen nicht kommutativ, wohl aber assoziativ: $a(bc) = abc$.

Ist $f(x)$ vom Grade a, $\varphi(x)$ vom Grade b, so ist $F(x) = f(x)\varphi(x)$ vom Grade $A = a + b$. Ist $x = \varphi(y)$ und φ vom Grade α, so ist der Grad von $F[\varphi(y)] = f[\varphi(y)]g[\varphi(y)]$ gleich $A\alpha = a\alpha + b\alpha$ oder $(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha$; dabei ist $m(p+q) \neq mp + mq$. Ist $\omega^2 n \omega^{-4}$ der Grad von $y = G(x)$, so ist der Grad der inversen Funktion: $x = F(y)$ gleich $\omega^4 \frac{1}{n} \omega^{-2}$, d. h. man erhält den Grad der inversen Funktion, in-

dem man von jeder Komponente den umgekehrten Wert nimmt und die Reihenfolge der Komponenten umkehrt.

Unter Benutzung des Zeichens (μ) läßt sich eine umfassende Definition des Grades des Unendlichgroßen geben. Es sei $F(x/b)$ eine wachsende Funktion vom Grade $i = ab + cde + fg$; eine Funktion $\varphi(x)$ sei so beschaffen, daß, wenn ε eine beliebig kleine Größe bedeutet,

$$\lim_{x=\infty}\left[\frac{\varphi(x)}{F(x/b-\varepsilon)}\right] = \infty, \quad \lim_{x=\infty}\left[\frac{\varphi(x)}{F(x/b+\varepsilon)}\right] = 0$$

ist, dann ist $j = a(b) + cde + fg$ der Grad von $\varphi(x)$.

Die einfachen Funktionen haben einen Grad der Größe wie i oder j. Funktionen von regulärem Wachsen heißen diejenigen, welche mit diesen einfachen Funktionen verglichen werden können.

Im 5. Kapitel über die Potenzreihen einer Veränderlichen werden die von Poincaré, Hadamard, le Roy behandelten Aufgaben besprochen: Welches ist der Grad der Funktion, wenn der Grad ihrer Koeffizienten bekannt ist? und: Kann aus dem Grad der Größe der Potenzreihe der Grad ihrer Koeffizienten abgeleitet werden? Weiter wird hingewiesen auf das von Cesàro und Appell untersuchte Wachsen der Funktionen $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, wenn x sich dem singulären Punkte $+1$ nähert (a_0, a_1, a_2 sind positiv und kleiner als 1 angenommen), und auf die Hadamardschen Operationen D und $\mathfrak{D}$. Man setze $f(x) = D^0 f(x)$,

$$\int_a^x f(x)\,dx = D^{-1} f(x), \quad \int_a^x [D^{-1} f(x)]\,dx = D^{-2} f(x);$$

für ein negatives α ist nach der Definition von Riemann

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-z)^{-\alpha-1} f(z)\,dz.$$

Setzt man für ein positives α $D^\alpha f(x) = \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}$, so ist für beliebige $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ $D^{\alpha+\beta} = D^{\alpha'+\beta'}$, wenn $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ ist, und es ist D^α für positive und negative α definiert.

Die Operation $\mathfrak{D}$ erhält Hadamard, indem er $x = e^y$ setzt und das Symbol D bildet, indem er $f(x)$ als Funktion von y betrachtet; dadurch findet er $\mathfrak{D}^\alpha x^m = m^\alpha x^m$. Für $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ ergeben sich die Entwicklungen

$$x^\alpha D^\alpha f(x) = \Sigma a_m \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} x^m, \quad \mathfrak{D}^\alpha f(x) = \Sigma a_m m^\alpha . x^m,$$

welche beide gleichzeitig absolut konvergent sind.

Das 4. Kapitel handelt von Doppelreihen und vielfachen Integralen, das 6. von Reihen mit zwei Veränderlichen.

Eine Potenzreihe $F(z)$ ist von der Ordnung ϱ, wenn, für ein beliebig kleines ε und ein hinreichend großes $r = |z|$, $|F(z)| < e^{r^{\varrho+\varepsilon}}$ ist. Als totale Ordnung der Funktion $f(x,y) = \sum\limits_0^\infty \sum\limits_0^\infty A_{mn} x^m y^n$ wird die Ordnung der Funktion $f(z,z)$ definiert; für sie werden Sätze aufgestellt, in denen aus der Ordnung von $f(x, y_0)$, bezüglich $f(x_0, y)$ und $f(x,y_0)$ Schlüsse für die Ordnung von $f(x, y)$, bezüglich für die totale Ordnung von $f(x,y)$ gezogen werden.

Mit einem Hinweis auf die assoziierten Konvergenzradien und die séries syntagmatiques schließt das interessante Buch. Wz.

M. Godefroy. **Théorie élémentaire des séries (limites; séries à termes constants; séries à termes variables; fonction exponentielle; fonctions circulaires; fonction gamma). Avec une préface de L. Sauvage.** Paris: Gauthier-Villars. VIII u. 266 S. 8°.

Das erste Kapitel enthält die Definitionen der Grenze, Stetigkeit und Ableitung.

Im zweiten Kapitel werden für die Reihen mit konstanten Gliedern die Konvergenzkriterien Kummers, Cauchys, Raabes und Gauß' abgeleitet, die alternierenden, absolut konvergenten Reihen und Doppelreihen, als Anwendung die Lambertsche und die Clausensche Reihe und zum Schluß die Multiplikation von zwei konvergenten Reihen behandelt.

Im dritten Kapitel wird für die Reihen mit veränderlichen Gliedern die Stetigkeit und gleichmäßige Konvergenz besprochen, für die Potenzreihen der Dirichletsche Beweis des Abelschen Satzes gegeben und verschiedene Anwendungen hinzugefügt, so die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung $d^2y/dx^2 + f(x)dy/dx + yg(x) = 0$, die binomische Reihe, die Legendreschen Polynome, die hypergeometrische, die Taylorsche und Maclaurinsche Reihe, die Entwicklung einer Funktion einer Veränderlichen, des Verhältnisses zweier Potenzreihen in eine Potenzreihe, endlich die Entwicklung eines rationalen Bruches in eine rekurrente Reihe.

Im vierten Kapitel behandelt der Verf. die Exponentialfunktion e^x und im Anschluß daran die Hermiteschen Polynome, die Besselschen Funktionen, die Bernoullischen Zahlen und Polynome, die Funktion a^x, die Logarithmen und die Eulersche Konstante; endlich beweist er die Transzendenz der Zahl e.

Im fünften Kapitel werden $\sin x$ und $\cos x$ durch ihre Reihen definiert und daraus ihre wichtigsten Eigenschaften, das Additionstheorem und ihre Periodizität hergeleitet ($\frac{1}{2}\pi$ wird erklärt als der zwischen 0 und 2 liegende Wert von x, für den $\cos x$ verschwindet). Daran schließt sich das Multiplikationstheorem und die Darstellung von $\sin x$ und $\cos x$ durch unendliche Produkte, die Entwicklung von $\log \frac{\sin x}{x}$, $\log \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ $x \operatorname{cotg} x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{cosec} x$ und $\sec x$ in Potenzreihen und die Entwicklung von $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{cosec} x$ und $\sec x$ in Reihen von einfachen Brüchen,

die trigonometrischen Reihen, die stetige, nicht differenzierbare Funktion von Weierstraß, die Definition von $\arccos x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arc\,tg} x$ und ihre Entwicklung in eine Potenzreihe. Den Schluß bildet die Lehre von den hyperbolischen Funktionen und ihren Umkehrungen.

Im sechsten Kapitel wird die Gammafunktion mittels des Weierstraßschen Ausdrucks $Fc(x) = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^x$ definiert, dann $\log \Gamma(1+x)$, $\Gamma(1+x)$ in Potenzreihen entwickelt, zum Zwecke der numerischen Berechnung mit der Reihe für $\log \Gamma(1+x)$ die Legendresche Umformung vorgenommen, die Formeln

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{m}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{m-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{-mx+\frac{1}{2}}\, \Gamma(mx),$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}, \quad \Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{\theta}{12x}}$$

$$(0 < \theta < 1)$$

und für die Binetsche Funktion

$$\varpi(x) = \log \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(x)}{x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}}$$

die Gudermannsche, Binetsche und Stirlingsche Entwicklung abgeleitet. Im Anschluß an die Funktionalgleichung $F(x+1) - xF(x) = A$, worin A konstant ist, werden, wenn $S(x)$ die Summe der konvergenten Reihe $\frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \cdots$ bezeichnet, die Prymschen Funktionen $P(x) = \frac{1}{e} S(x)$, $Q(x) = \Gamma(x) - P(x)$ eingeführt und zuletzt die Funktionen

$$\Phi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \quad \Psi(x) = \frac{d}{dx}\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

erklärt, $\Phi(x+1)$, $\Psi(x+1)$ in Potenzreihen und in Reihen von einfachen Brüchen entwickelt, $\Phi(x)$ in endlicher, für die numerische Berechnung geeigneter Form ausgedrückt für rationale Werte von x, die nicht gleich einer negativen ganzen Zahl sind, und die Gleichung $\Phi(x) = 0$ studiert.

Das Buch setzt bei dem Leser nur geringe Kenntnisse, hauptsächlich die Prinzipien der Differentialrechnung voraus, das Imaginäre wird nicht berücksichtigt, die Darstellung ist gut, die Entwicklung der behandelten Probleme ist bis zur Gegenwart durchgeführt. Ein dem Werke hinzugefügtes Namen- und Sachregister, interessante Beispiele und sehr zahlreiche Literaturnachweise erhöhen den Wert des Buches, das gewiß allseitige Anerkennung finden wird. Wz.

E. W. Hobson. **Non uniform convergence, and the integration of series.** London M. S. Proc. 34, 245-259.

Wenn die Glieder einer unendlichen Reihe in einem gegebenen, als Bereich der Veränderlichen genommenen Intervall stetige Funktionen einer reellen Veränderlichen sind und die Reihe in jedem Punkte des Intervalls konvergiert, so konvergiert die Reihe nicht gleichmäßig in einem Punkte, in welchem die Summe der Reihe unstetig ist; dagegen ist in der nicht gleichmäßigen Konvergenz in der Umgebung des Punktes nicht notwendig die Unstetigkeit der Summe in diesem Punkte enthalten. Für den Fall, daß die Summe der Reihe in dem ganzen Intervall stetig ist, ist die allgemeinste Verteilung der Punkte nicht gleichmäßiger Konvergenz durch Osgood angegeben worden. Er hat gezeigt, daß die Punkte, in denen der Grad der nicht gleichmäßigen Konvergenz eine willkürlich fixierte positive Zahl übersteigt, eine geschlossene, in dem gegebenen Intervall nicht dichte Menge bilden, und daß die Punkte gleichmäßiger Konvergenz eine überall dichte Menge bilden.

Die Summe einer solchen Reihe ist nach Baire höchstens eine punktweis-unstetige Funktion, d. h. in einem beliebigen Subintervall können Punkte gefunden werden, in denen die Funktion stetig ist. Die Verteilung der Punkte nicht-gleichmäßiger Konvergenz, die für die Integration der Reihe wichtig ist, ist von Baire nicht betrachtet. Im Anschluß an Baire wird gezeigt, daß die allgemeinste Verteilung der Punkte nicht gleichmäßiger Konvergenz dieselbe ist, wie in dem speziellen, von Osgood behandelten Falle, in welchem die Summe der Reihe im Konvergenzbereich überall stetig ist; für den Baireschen Satz wird ein einfacherer Beweis gegeben.

Wenn die Summe überall stetig ist, so besteht nach Osgood eine hinreichende Bedingung dafür, daß das Integral der Summe durch die Summe der Integrale der Glieder der Reihe darstellbar ist, darin, daß es im Integrationsintervall keine Punkte gibt, in denen der Grad nicht-gleichmäßiger Konvergenz unendlich groß ist. Ist die Summe der Reihe eine punktweis-unstetige Funktion, so ist ihre Integrierbarkeit unsicher. Unter der Voraussetzung der Integrierbarkeit der Summe wird gezeigt, daß das Integral die Summe der Integrale ist, wenn eine der Osgoodschen Bedingung entsprechende Bedingung erfüllt ist, umgekehrt daß der Grad nicht-gleichmäßiger Konvergenz überall kleiner als eine fest fixierte endliche Zahl ist. Wz.

A. Pringsheim. **Über Konvergenz-Kriterien für Reihen mit komplexen Gliedern.** Arch. der Math. u. Phys. (3) 4, 1-19.

I. Bezeichnet man mit ΣD_ν^{-1}, ΣC_ν^{-1} eine als divergent, bezw. konvergent erkannte Reihe mit positiven Gliedern, so kann man für die Reihe $\Sigma a_\nu = \Sigma(\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ die Kriterien erster Art ohne weiteres auf die Form bringen:

$$\underline{\lim}_{\nu=\infty} D_\nu^2 |a_\nu|^2 > 0 : \text{Divergenz},$$

$$\overline{\lim}_{\nu=\infty} C_\nu^2 |a_\nu|^2 < \infty : \text{Konvergenz}.$$

Macht man die Einschränkungen:

$$\text{(1)} \qquad \underline{\lim}_{\nu=\infty} \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}} > 0, \qquad \overline{\lim}_{\nu=\infty} \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}^2} < 0,$$

so ergeben sich die Kriterien zweiter Art in der Form:

$$\overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} \lambda_\nu \equiv \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} \left(D_\nu \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - \frac{D_{\nu+1}^2}{D_\nu}\right) \begin{cases} < 0 : \text{Divergenz}, \\ > 0 : \text{Konvergenz}. \end{cases}$$

Die Einschränkungen (1) sind erfüllt, wenn $D_\nu = \nu$ oder auch $D_\nu = \nu L_k(\nu)$, $L_k(\nu) = \nu \log_1 \nu \log_2 \nu \ldots \log_k \nu$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ gesetzt wird; dann erhält man diejenigen Kriterien, welche dem Raabeschen Kriterium und der Skala der Bertrandschen Kriterien für Reihen mit positiven Gliedern entsprechen, nämlich:

$$\text{a):} \quad \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} \lambda_\nu \equiv \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} \left(\nu \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - \frac{(\nu+1)^2}{\nu}\right) \begin{cases} < 0 : \text{Divergenz}, \\ > 0 : \text{Konvergenz}. \end{cases}$$

$$\text{b):} \quad \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} \lambda_\nu^{(k)} \equiv \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} \left(L_k(\nu) \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - \frac{(L_k(\nu+1))^2}{L_k(\nu)}\right) \begin{cases} < 0 : \text{Divergenz}, \\ > 0 : \text{Konvergenz}. \end{cases}$$

Diese Kriterien können in die folgende, für den praktischen Gebrauch bequemere Form gebracht werden:

$$\text{A):} \quad \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} \frac{\nu}{2} \left(\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - 1\right) \begin{cases} < 1 : \text{Divergenz}, \\ > 1 : \text{Konvergenz}. \end{cases}$$

$$\text{B):} \quad \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} \frac{\log_k \nu}{2 L_{k-1}(\nu)} \left((L_{k-1}(\nu))^2 \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - (L_{k-1}(\nu+1))^2\right) \begin{cases} < 1 : \text{Divergenz}, \\ > 1 : \text{Konvergenz}. \end{cases}$$

II. Sind die a_ν komplexe Zahlen von der Beschaffenheit, daß zum mindesten für $\nu \geqq n$:

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{k}{\nu} + \frac{r_\nu}{\nu^2},$$

wo $|r_\nu| < g$ für jedes ν, so ist die Reihe $\Sigma a_\nu x^\nu$ absolut konvergent für $|x| < 1$ und, falls $\Re(k) > 1$, auch noch für $|x| = 1$. Ist

$$0 < \Re(k) \leqq 1,$$

so konvergiert die Reihe $\Sigma a_\nu x$ noch bedingt für $|x| = 1$ ausnahmslos.

Für $|x| > 1$ ist $\Sigma a_\nu x^\nu$ in jedem Falle divergent (g bedeutet eine positive Zahl, $\Re(x)$ den reellen Teil von x).

Es folgt hieraus, daß die hypergeometrische Reihe für $|x| = 1$ noch absolut konvergiert, wenn $\Re(c - a - b) > 1$; daß sie für $|x| = 1$, mit Ausnahme $x = 1$. selbst, noch bedingt konvergiert, wenn

$$0 < \Re(c - a - b) \leqq 1;$$

daß sie endlich in dem Falle $\Re(c - a - b) \leqq 0$ für $|x| = 1$ ausnahmslos divergiert. Wz.

E. Fabry. Sur les rayons de convergence d'une série double. C. R. **184**, 1190-1192.

Für eine Reihe $\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a_{pq}\, x^p y^q$ kann man, wie Lemaire (Darboux Bull. (2) **20**, 286-292; F. d. M. **27**, 201, 1896) gezeigt hat, Systeme von assoziierten Konvergenzradien erhalten. Ist λ die größte Grenze von $\sqrt[p+q]{|a_{pq}|\, k^q}$, wenn $p + q$ unendlich wird, so hat man die Konvergenzradien $X = \frac{1}{\lambda}$, $Y = \frac{k}{\lambda}$. Fabry zeigt, daß die verschiedenen Systeme, welche man bei veränderlichem k erhält, durch sehr einfache Gesetze mit einander verbunden sind.

Es möge z. B. $p:(p+q)$ zwischen $\alpha - \varepsilon$ und $\alpha + \varepsilon$ bleiben, während $0 < \alpha < 1$ ist und ε gegen Null konvergiert, wenn $p + q$ unendlich wird; wenn dann λ die größte Grenze von $\sqrt[p+q]{|a_{pq}|}$ ist, so hat man für jedes System X, Y die Gleichung:

$$\alpha \log X + (1 - \alpha) \log Y + \log \lambda \leqq 0.$$

Läßt man α zwischen 0 und 1 variieren, so hat man eine Reihe von Geraden, deren Enveloppe die Systeme assoziierter Konvergenzradien liefert. Die Enveloppe kann Kurven und Teile von Geraden enthalten. Im letzteren Falle gibt es unendlich viele Systeme, die durch eine Relation von der Form $X^\alpha Y^{1-\alpha} = C$, wo X zwischen zwei bestimmten Grenzen variiert, mit einander verbunden sind.

Wenn die Reihe Konvergenzradien hat, die durch die Relation

$$X^\alpha Y^{1-\alpha} = C, \text{ wo } X' < X < X''$$

ist, mit einander verbunden sind, so sei X_1, Y_1 eines dieser Systeme. Wenn dann der Punkt $x = X_1 e^{\omega i}$, $y = Y_1 e^{\omega' i}$ nicht singulär ist, so ist der zum Argument ω, ω' gehörige Punkt für keines der Systeme singulär. Die auf den Konvergenzkreisen gelegenen Punkte haben demnach dieselben Argumente.

Wenn $X = X'$ konstant bleibt für $Y < Y'$, so gibt es einen, für ein beliebiges y singulären Punkt $x = X' e^{\omega i}$. Wenn $\sqrt[p+q]{|a_{pq}|}$ gegen Null konvergiert (mit Ausnahme solcher Folgen, in denen $q:(p+q)$ gegen Null konvergiert), so bleibt X bei beliebigem Y konstant. Wenn

dies nicht stattfindet, so kann X gegen Null konvergieren; dann kann man drei Fälle unterscheiden:

1. Wenn $Y = Y'$ von einem Werte von X an konstant bleibt, so gibt es einen für ein beliebiges x singulären Punkt $y = Y' e^{\omega i}$.

2. Sobald X gegen Null konvergiert, wenn Y gegen eine endliche Grenze Y' konvergiert, so gibt es einen singulären Punkt

$$x = 0, \quad y = Y' e^{\omega i};$$

aber $x = 0$, y ist nicht singulär, wenn $|y| < Y'$ ist.

3. Wenn Y unendlich wächst, sobald X gegen Null konvergiert, so ist $x = 0$, y niemals singulär, wenn y endlich ist; aber der Punkt $x = 0$, $y = \infty$ ist singulär. Wz.

F. J. Studnička. **Eine neue Bedingung der Konvergenz unendlicher Reihen.** Prag. Ber. 1902, No 2, 4 S.

Der Verf. geht von dem Gaußschen Satze aus, daß eine unendliche Reihe von Zahlengrößen $u_1, u_2, u_3, \ldots$ in inf. konvergent ist, falls der Quotient zweier Nachbarglieder in der Form

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^x + a n^{x-1} + b n^{x-2} + \cdots}{n^x + A n^{x-1} + B n^{x-2} + \cdots},$$

wo x ganzzahlig und positiv ist, auftritt, und die Koeffizienten der Bedingung $A - a > 1$ Genüge leisten.

Der Beweis, daß dies allgemein bei der unendlichen Reihe

$$\frac{1}{v_1}, \frac{1}{v_2}, \frac{1}{v_3}, \ldots \text{ in inf.}$$

stattfindet, falls die hier vorkommenden Nenner eine arithmetische Reihe von mindestens der zweiten Ordnung vorstellen, und einige Anwendungen bilden den Inhalt der Arbeit. Sda.

Fl. Cajori. **The application of the fundamental laws of algebra to the multiplication of infinite series.** American M. S. Bull. (2) 8, 231-236.

„Verf. hat Beispiele gegeben, bei denen eine absolut konvergente Reihe als das Resultat der Multiplikation zweier bedingt konvergenten Reihen erhalten wird, oder auch einer bedingt konvergenten Reihe mit einer divergenten (vgl. F. d. M. **32**, 258, 1901). Er hat auch ein Beispiel zweier divergenten Reihen gegeben, deren Produkt absolut konvergent ist (Science **14**, 395, 1901). Pringsheim hat diesen Gegenstand aus einem allgemeinen Gesichtspunkte behandelt und hat durch ganz einfache Methoden gezeigt, daß die fragliche Eigenschaft für gewisse Klassen von Reihen typisch ist. In der gegenwärtigen Abhandlung soll eine Klasse von Reihen mit reellen Gliedern aufgestellt werden, welche die besprochene Eigenschaft besitzt, aber von der von Pringsheim angegebenen Klasse verschieden zu sein scheint. Demnächst werden wir die Gültigkeit

der Grundgesetze der Algebra bei der Multiplikation unendlicher Reihen betrachten. Hiernach werden wir vermittelst unserer auf diese Gesetze bezüglichen Schlüsse eine andere Methode eröffnen, die ähnliche Reihen liefert, deren Produkt absolut konvergent ist. Zuletzt werden wir einen Abelschen Satz über die Multiplikation von Reihen verallgemeinern."

Lp.

L. D. Ames. Evaluation of slowly convergent series. Annals of Math. (2) 8, 185-192.

Der konvergenten Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ wird die Form

$$S = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2^2}(u_1 + u_2) + \frac{1}{2^3}(u_1 + 2u_2 + u_3) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2^k}\left[u_1 + \binom{k-1}{1} u_2 + \binom{k-1}{2} u_3 + \cdots + u_k\right] + R_k,$$

$$R_k = \frac{1}{2^k}\left[\left(u_1 + \binom{k}{1} u_2 + \binom{k}{2} u_3 + \cdots + u_{k+1}\right)\right.$$
$$\left. + \left(u_2 + \binom{k}{1} u_3 + \binom{k}{2} u_4 + \cdots + u_{k+2}\right) + \cdots\right]$$

gegeben und gezeigt, daß $\lim R_k = 0$ für $k = \infty$ ist.

Beispiele:

I. $S(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots$; für $x = 50^\circ$ ergibt sich

$$S = \tfrac{1}{2}\cdot 0{,}7660 + \tfrac{1}{4}\cdot 0{,}2736 - \tfrac{1}{8}\cdot 0{,}0521 + \cdots$$
$$+ \tfrac{1}{128}\cdot 0{,}0446 + \cdots = 0{,}4364,$$

während $S(x) = \frac{1}{2}x = 0{,}43633$ ist.

II. $$S = 1/\log 2 - 1/\log 3 + 1/\log 4 - \cdots = 0{,}9239\ldots,$$

das Resultat ist genau bis zur dritten Dezimalstelle.

III. $$S(x) = P_0(\mu) - \frac{1}{2}P_2(\mu)\,x$$
$$+ \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}P_4(\mu)\,x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}P_6(\mu)\,x^3 + \cdots$$

für x gleich oder nahezu gleich 1 und einen beliebigen Wert von μ.

IV. $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = 0{,}785398163,$$

richtig für neun Dezimalstellen.

V. Für $p = 1{,}001$ ist, $$S = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots,$$
$$= 0{,}693309 + R,\ R < 0{,}000003.$$

VI. Für $p = 1{,}001$ ist $S = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$

$$= \frac{2^p}{2^p - 1}\left(1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots\right) = 1000{,}563 + R,\ R < 0{,}004.$$

VII. $S = 1 + \frac{5 \cdot 7}{8 \cdot 10} + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} + \cdots$

$$= 6\left[1 - \frac{5}{6} + \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 8} - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{6 \cdot 8 \cdot 10} + \cdots\right] = 3{,}341 + R,\ R < 0{,}006.$$

VIII. $S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots$

$$= \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} + \cdots$$

Wenn eine Funktion $f(x)$ für $x \geqq 1$ stetige Ableitungen der $(k+1)$-ten Ordnungen hat und die Ableitungen gerader Ordnung positiv, diejenigen ungerader Ordnung negativ sind und $f(u) = v_n = (-1)^{n+1} u_n > 0$ ist, so ist $|R_k| < |u_1|/2^k$. Wz.

G. G. Stokes. On the discontinuity of arbitrary constants that appear as multipliers of semi-convergent series. (A letter to the Editor). Acta Math. **26**, 393-398.

Das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{n^2}{x^2} = y$$

kann in der Form

$$(1)\ y = Ax^n\left(1 + \frac{x^2}{2(2+2n)} + \cdots\right) + Bx^{-n}\left(1 + \frac{x^2}{2(2-2n)} + \cdots\right)$$

oder

$$(2)\quad y = Cx^{-\frac{1}{2}} e^x \left(1 + \frac{1^2 - (2n)^2}{8x} + \cdots\right)$$
$$+ Dx^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\left(1 - \frac{1^2 - (2n)^2}{8x} + \cdots\right)$$

geschrieben werden. Wird $x = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ für $0 < r < \infty$, $-\pi < \theta < \pi$ gesetzt, so ist die Reihe (1) beständig konvergent und definiert die Funktion y vollständig in dem angegebenen Bereich, ist aber für große Werte von r nicht zur numerischen Berechnung geeignet, da sie für solche Werte schnell divergiert. Dagegen ist die Reihe (2) beständig divergent, konvergiert aber schnell für große Werte von r.

Der Verf. gibt an, wie man dies Paradoxon erklären kann. Wz.

E. Maillet. Sur les séries divergentes et les équations différentielles. C. R. 134, 975-977.

I. Ist $\sum\limits_0^\infty \theta_n(x-x_0)^n (\theta_0 \neq 0)$ eine formelle Lösung (mit dem Konvergenzradius Null) einer rationalen Differentialgleichung

$$\sum A y^{i_0} y'^{i_1} \cdots y^{(k)i_k} = 0,$$

deren Koeffizienten A ganze Polynome in x sind, so ist immer für ein hinreichend großes n $|\theta_n| \leqq \mu_1 n^{(P''+N''+1)n}$, worin μ_1 endlich ist, P'' und N'' die größten Werte der Größen

$$i_0 + i_1 + \cdots + i_k, \text{ bezügl. } i_1 + 2i_2 + \cdots + ki_k$$

sind.

II. Le Roy hat gezeigt, daß man versuchen kann, als Summe einer divergenten Reihe $\sum\limits_0^\infty a_n z^n$ das Integral

$$f_p(z) = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^{1/p}} x^{\frac{1}{p}-1} F(zx)\, dx, \quad F(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n z^n}{\Gamma(pn+1)},$$

wobei $F(z)$ eine beliebige konvergente Reihe ist, nehmen kann, wenn dies Integral und das Integral

$$\frac{1}{p}\int_0^\infty |e^{-x^{1/p}} x^{\frac{1}{p}-1} F(zx)|\, dx$$

existieren.

Dies wendet der Verf. auf eine ganze Funktion an:

$$F(z) = e^{a_0 z^d}\varphi(z),$$

wo $\varphi(z)$ eine ganze Funktion ist, deren Ordnung $< d$ ist. Dann ergibt sich: Es ist notwendig, daß $dp \geqq 1$ ist. Das Integral $f(z)$ existiert in der ganzen Ebene, ausgenommen $p = \frac{1}{d}$. Sein einziger kritischer Punkt in endlicher Entfernung ist der Nullpunkt; es besitzt wahrscheinlich im allgemeinen unendlich viele Werte, wenigstens wenn p nicht rational ist.

Für $dp = 1$, $a_0 = \varrho_0 e^{i\alpha_0}$ existiert $f(z)$ in der ganzen Ebene, mit Ausnahme des Teils der von dem Nullpunkt gezogenen Geraden, die mit Ox den Winkel $2lp\pi - \alpha_0 p$ bilden, zwischen den Punkten

$$e^{2lp\pi i}\left(\frac{1}{a_0}\right)^p$$

und ∞. Die Integrationswege müssen passend gewählt werden (man kann die vom Nullpunkt gezogenen Geraden nehmen).

Die entsprechenden divergenten Reihen und diejenigen, welche man daraus durch Addition, Subtraktion nnd Multiplikation der Integrale $f(z)$ herleitet, sind summierbar (im Borelschen Sinne). Wz.

A. TRESSE. Sur la formule de Taylor et la formule du binome. Revue de Math. spéc. 18, 57-58.

Als „Ableitung" oder „erste Ableitung" $f'(x)$ einer ganzen Funktion $f(x)$ wird der Koeffizient von h in der nach Potenzen von h fortschreitenden Entwicklung von $f(x+h)$ und als „Ableitung p-ter Ordnung" $f^{(p)}(x)$ von $f(x)$ wird die Ableitung der Ableitung $(p-1)$-ter Ordnung definiert. Entwickelt man $f(x+h+k)$ zuerst nach Potenzen von h und sodann nach Potenzen von $h+k$, und vergleicht man in beiden Entwicklungen die Koeffizienten von $h^{p-1}k$, so erhält man eine Formel, mit deren Hülfe sich die Koeffizienten der Reihe für $f(x+h)$ durch die Ableitungen von $f(x)$ ausdrücken lassen. Das Ergebnis ist die bekannte Taylorsche Formel. Aus dieser folgt für $f(x)=x^m$ die Newtonsche Binomialformel. Zch.

G. ASCOLI. Sopra un modo semplice di generazione della serie di Taylor. Periodico di Mat. (2) 5, 139-142.

Das Verfahren beruht im wesentlichen auf der Bildung der Differenzenfolgen unter Benutzung des Mittelwertsatzes, steht also den ältesten Methoden, die sich der Differenzenreihen bedienten, nicht fern. Lp.

F. BEKE. Das Restglied der Taylorschen Reihe. Math. és phys. Lapok 10, 337-339 (Ungarisch).

Erörterungen über den Wert von θ in der allgemeinen Form des Restes R_n:

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}(x_0+\theta h)$$

je nach der Wahl der Zahl p. S.

J.-N. HATZIDAKIS, H. BURKHARDT. A propos de la formule de Taylor. Ens. math. 4, 58-59.

Bemerkungen zu einer Arbeit von R. Suppantschitsch (Ens. math. 3, No. 5), der einige Einwendungen gegen den von Hatzidakis (Ens. math. 2, 447) gegebenen Beweis der Taylorschen Formel gemacht und selbst einen direkteren, aber nicht einwandsfreien Beweis geliefert hatte. Wbg.

M. PETROWITSCH. Beitrag zur Theorie der Reihen. Belgrad Ak. 63, 73-114 (Serbisch).

Berechnung von unteren Grenzen für die Moduln der Werte, bei denen eine gegebene Taylorsche Reihe verschwindet, wenn das Gesetz der Koeffizienten gegeben wird, nebst Anwendungen. Lp.

J. J. Shegalkin. Taylorsche Reihe für die impliciten Funktionen. Moskau Math. Samml. 23, 740-760 (Russisch).

Verf. gibt erstens einige Hülfsformeln (wie die Darstellung der n-ten Ableitung von $\varphi(f(x))$ nach x, u. a.) und beweist dann die Entwicklung von $\Phi(x, y)$, wo y eine Funktion von x ist, definiert durch die Gleichung $F(x, y) = 0$:

$$\Phi(x, y) = \sum_{m=0}^{m=\infty} U_m \frac{(x - x_0)^m}{m!}, \text{ wo}$$

$$U_m = \left[D_\xi^m \left(\sum_0^m {}_k \frac{1}{k!} D_t^k \left\{ \Phi(\xi, u)\, \xi t - F(\xi, u) \right\}^k F'_u(\xi, u)\, u'_t \right) \right]_{\left(\substack{\xi = x_0 \\ t = 0}\right)}$$

Hier ist u eine Funktion von t, definiert durch die Gleichung

$$F(x_0, u) = t.$$

Weitere Umformungen und spezielle Fälle. Si.

O. Niccoletti. Sulla formola di Taylor. Annali di Mat. (3) 8, 83-96.

Ist $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Funktion der n reellen Veränderlichen, welche für $a_i \leqq x_i \leqq b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nebst ihren Ableitungen endlich und stetig ist, so gilt:

$$f(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \sum_0^{m_1} {}_{\mu_1} \cdots \sum_0^{m_n} {}_{\mu_n} \frac{1}{\mu_1! \mu_2! \ldots \mu_n!} \left\{ \frac{\partial^{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n} f}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \ldots \partial x_n^{\mu_n}} \right\}_{(a)}$$
$$\times (b_1 - a_1)^{\mu_1} (b_2 - a_2)^{\mu_2} \cdots (b_n - a_n)^{\mu_n} + R_{m_1 m_2 \ldots m_n},$$

wo

$$R_{m_1 m_2 \ldots m_n} = \sum {}_{i_1} \frac{1}{m_{i_1}!} \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} (b_{i_1} - x_{i_1})^{m_{i_1}} \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1}+1} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1}+1}} \right\}_{x_{i_1} b_{i_2} \ldots b_{i_n}} d x_{i_1}$$
$$- \sum_{(i_1 i_2)} \frac{1}{m_{i_1}!\, m_{i_2}!} \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \int_{a_{i_2}}^{b_{i_2}} (b_{i_1} - x_{i_1})^{m_{i_1}} (b_{i_2} - x_{i_2})^{m_{i_2}}$$
$$\times \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1} + m_{i_2} + 2} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1}+1} \partial x_{i_2}^{m_{i_2}+1}} \right\}_{x_{i_1} x_{i_2} b_{i_3} \ldots b_{i_n}} d x_{i_1} d x_{i_2} + \cdots$$
$$+ (-1)^{k-1} \sum_{(i_1 \ldots i_k)} \frac{1}{m_{i_1}! \ldots m_{i_k}!} \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \cdots \int_{a_{i_k}}^{b_{i_k}} (b_{i_1} - x_{i_1})^{m_{i_1}} \ldots (b_{i_k} - x_{i_k})^{m_{i_k}}$$
$$\times \left\{ \frac{\partial^{m_{i_1} + m_{i_2} + \cdots + m_{i_k} + k} f}{\partial x_{i_1}^{m_{i_1}+1} \ldots \partial x_{i_k}^{m_{i_k}+1}} \right\}_{x_{i_1} \ldots x_{i_k};\, b_{i_k+1} \ldots b_{i_n}} d x_{i_1} \cdots d x_{i_k} + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} \frac{1}{m_1!\, m_2! \ldots m_n!} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \prod_1^n {}_i (b_i - x_i)^{m_i}$$

$$\times\left(\frac{\partial^{\sum\limits_1^n m_i+1} f}{\partial x_1^{m_1+1}\ldots\partial x_n^{m_n+1}}\right)_{(x_1\ldots x_n)} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n.$$

Hierin bedeutet das Zeichen $\sum\limits_{(i_1,\ldots,i_k)}$, daß die Summe sich über alle Kombinationen k-ter Klasse der Zeiger $1, 2, \ldots, n$ erstreckt und $(i_{k-1}, \ldots, i_n)$ die zu $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ komplementare Kombination der $(n-k)$-ten Klasse.

Durch diese Formel ist die Differenz zwischen dem Wert der Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ im Punkte $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ und der Summe der ersten $(m_1+1)(m_2+1)\ldots(m_n+1)$ Glieder der Taylorschen Entwicklung (wo $\mu_i \leqq m_i$) als Summe von $2^n - 1$ Integralen dargestellt.

Sind die Zeiger $1, 2, \ldots, n$ verteilt in k Gruppen von bezüglich $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ Elementen:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu_1};\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu_2};\ \ldots;\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu_k}\ (\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_k=n)$$

und setzt man

$$\begin{aligned}
x_{\alpha_i} &= a_{\alpha_i} + (b_{\alpha_i} - a_{\alpha_i})t_1 \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu_1),\\
x_{\beta_j} &= a_{\beta_j} + (b_{\beta_j} - a_{\beta_j})t_2 \quad (j = 1, 2, \ldots, \nu_2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{\lambda_s} &= a_{\lambda_s} + (b_{\lambda_s} - a_{\lambda_s})t_k \quad (s = 1, 2, \ldots, \nu_k),
\end{aligned}$$

so geht die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in eine Funktion $F(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ der k reellen Veränderlichen $t_1, t_2, \ldots, t_k$ über, welche für die Werte der $t_1, \ldots, t_k$ zwischen 0 und 1 (mit Einschluß der Grenzen) den Bedingungen der Stetigkeit und Differenzierbarkeit genügt. Daher ergibt sich:

$$\begin{aligned}
F(1, 1, \ldots, 1) &= f(b_1, b_2, \ldots, b_n)\\
&= \sum \frac{1}{\mu_1!\ldots\mu_n!}\left\{\frac{\partial^{\mu_1+\cdots+\mu_n} f}{\partial x_1^{\mu_1}\ldots\partial x_n^{\mu_n}}\right\}_{(a)}(b_1-a_1)^{\mu_1}\cdots(b_n-a_n)^{\mu_n}\\
&\qquad + \bar{R}_{p_1, p_2, \ldots, p_k},
\end{aligned}$$

wo die Summe über alle positiven Werte (oder Null) der $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ zu erstrecken ist, für welche

$$\mu_{\alpha_1} + \mu_{\alpha_2} + \cdots + \mu_{\alpha_{\nu_1}} \leqq p_1;\ \mu_{\beta_1} + \mu_{\beta_2} + \cdots + \mu_{\beta_{\nu_2}} \leqq p_2, \ldots,$$
$$\mu_{\lambda_1} + \mu_{\lambda_2} + \cdots + \mu_{\lambda_{\nu_k}} \leqq p_k$$

ist und der Rest die Form hat:

$$\begin{aligned}
R_{p_1, p_2, \ldots, p_k} &= \sum_1^k{}^{i_1} \frac{1}{p_{i_1}!}(1-t_{i_1})^{p_{i_1}} \frac{\partial^{p_{i_1}+1} F(1, \ldots, 1, t_{i_1}, 1, \ldots, 1)}{\partial t_{i_1}^{p_{i_1}+1}}\\
&\quad - \sum_{(i_1, i_2)} \frac{1}{p_{i_1}!\,p_{i_2}!}\int_0^1\!\!\int_0^1 (1-t_{i_1})^{p_{i_1}}(1-t_{i_2})^{p_{i_2}}\\
&\qquad\times \frac{\partial^{p_{i_1}+p_{i_2}+2} F(1, \ldots, 1, t_{i_1}, t_{i_2}, 1, \ldots, 1)}{\partial t_{i_1}^{p_{i_1}+1}\,\partial t_{i_2}^{p_{i_2}+1}}\, dt_{i_1}\, dt_{i_2}
\end{aligned}$$

$$+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{p_1!\ldots p_k!}\int_0^1\cdots\int_0^1(1-t_1)^{p_1}\cdots(1-t_k)^{p_k}$$
$$\times\frac{\partial^{p_1+\cdots+p_k+k}F(t_1,t_2,\ldots,t_k)}{\partial t_1^{p_1+1}\ldots\partial t_k^{p_k+1}}dt_1\,dt_2\ldots dt_k.$$

Wz.

A. C. DIXON. On Bürmann's theorem. London M. S. Proc. 34, 151-153.

Seien $F(x)$ und $f(x)$ zwei analytische Funktionen der komplexen Variable x im Innern und am Rande eines einfach zusammenhängenden Bereichs C, so daß $|f(x)|$ gleich einer Konstante k am Rande von C. Seien ferner $a_1, a_2, \ldots$ die Stellen innerhalb C, wo $f(x)$ verschwindet, und $b_1, b_2, \ldots$ diejenigen, wo $f(x)$ einen Wert c hat von der Art, daß $|c| < k$. Alsdann beweist der Verf. die folgende Entwicklung:

$$\sum_r F(b_r)=\sum_r F(a_r)+c\sum\frac{F'(a_r)}{f_r(a_r)}+\cdots+\frac{c^n}{n!}\sum\frac{d^{n-1}}{da_r^{n-1}}\frac{F'(a_r)}{[f_r(a_r)]^n}+\cdots,$$

wobei $f(x)=(x-a_r)f_r(x)$ gesetzt ist. Für den Fall $r=1$ ist es die von Bürmann aufgestellte Formel. Jhk.

W. J. JOHNSON. Question 14758. Ed. Times (2) 1, 83-84.

Die gewöhnliche Entwicklung von $F(z)$ nach der Lagrangeschen Reihe, wo $z=x+\lambda\varphi(z)$, ist das Resultat für $y=0$ in $\sigma\cdot F(x)$, wo σ der Operator:

$$\sigma=\varDelta^\lambda D^{-1}[\varphi(x)]^y D$$

ist, $D\equiv d/dx$, $\varDelta\equiv E^F$, $E\equiv e^{d/dx}$, $F\equiv e^{d/dy}$.

Ist $\psi(u)$ eine beliebige Funktion von u, wo u eine Funktion von x, so gilt:

$$\sigma[\psi(u)]=\psi[\sigma\cdot u],\quad \sigma\cdot(u+v)=\sigma\cdot u+\sigma\cdot v.$$

Lp.

N. W. BUGAJEW. Über eine der Lagrangeschen analoge Reihe. Moskau Math. Samml. 22, 574-576 (Russisch).

Es sei z die durch die Gleichung $\varphi(a,x)+\psi(z,x)=0$ definierte Funktion von x und $F(x)\equiv\varphi(a,x)+\psi(a,x)$. Dann gilt die Reihe:

$$f(z,x)-f(a,x)=\frac{1}{\varphi'}F\cdot f'+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{\varphi'}\frac{d}{da}\left(\frac{1}{\varphi'}F^2f'\right)$$
$$+\frac{1}{3!}\frac{1}{\varphi'}\cdot\frac{d}{da}\left[\frac{1}{\varphi'}\frac{d}{da}\left(\frac{F^3f'}{\varphi'}\right)\right]+\cdots$$

Si.

F. SIBIRANI. Un teorema della teoria delle serie di potenze. Teixeira J. 15, 79-84.

Der Verf. zeigt die Bildung einer Reihe $\Sigma a_n x^n$, welche eine Funktion darstellt, die im Innern eines Kreises von bestimmbarem Radius nicht existiert und eine endliche Anzahl von Polen auf der Peripherie haben kann. Tx. (Lp.)

K. JAHRAUS. Das Verhalten der Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise. Pr. Gymn. Ludwigshafen a. Rh. 56 S. 8°.

§ 1. Wir nennen eine Potenzreihe $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ in einem Punkte $x = r$ ihres Konvergenzkreises konvergent, bezw. divergent, wenn die Reihe $a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_n r^n + \cdots$ mindestens bei dieser dem Wachsen des Index entsprechenden Anordnung der Glieder konvergiert, bezw. divergiert.

Die notwendige und hinreichende Bedingung unbedingter Konvergenz auf dem Konvergenzkreise ist die absolute Konvergenz; es muß also

$$\sum_0^\infty{}^\nu |a_\nu x^\nu|_{x=1} = \sum_0^\infty{}^\nu |a_\nu|$$

konvergieren (dabei ist der Einheitskreis als Konvergenzkreis angenommen).

Ist $u_\nu = p_\nu + iq_\nu$, wo die Folge der p_ν und die der q_ν mit wachsendem ν beständig abnimmt und für $\nu = \infty$ den Grenzwert 0 hat, so konvergiert $\sum_0^\infty u_\nu x^\nu$ sicher für alle $|x| = 1$, eventuell ausgenommen $x = 1$.

Divergiert $\Sigma u_\nu x^\nu$ auch nur in einem Punkte des Konvergenzkreises, so kann in den übrigen Punkten desselben niemals unbedingte Konvergenz bestehen.

Für die hypergeometrische Reihe, von der wir annehmen, daß sie nicht abbricht, gelten folgende Sätze:

1. die Koeffizienten wachsen unbegrenzt, falls $\alpha + \beta - \gamma - 1 > 0$;
2. sie nähern sich einer bestimmten endlichen Grenze, falls $\alpha + \beta - \gamma - 1 = 0$;
3. sie nehmen unbegrenzt ab, falls $\alpha + \beta - \gamma - 1 < 0$;
4. die Summe der Reihe ist für $x = 1$ unendlich groß, falls $\alpha + \beta - \gamma \geqq 0$;
5. diese Summe ist dagegen endlich, falls $\alpha + \beta - \gamma < 0$.

Hat eine Potenzreihe $\Sigma u_\nu x^\nu$ die Eigenschaft, daß sich der Quotient von zwei aufeinanderfolgenden Gliedern in eine endliche oder unendliche Reihe nach fallenden ganzen Potenzen von n entwickeln läßt:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{g + ih}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots,$$

so hat sie den Konvergenzradius 1, und es gilt:

1. ist $g \geqq 0$, so divergiert die Reihe für alle $|x| = 1$;

2. ist $-1 < g < 0$, so konvergiert dieselbe bedingt für alle $|x| = 1$, ausgenommen $x = 1$;

3. ist $g = -1$ und $h \gtrless 0$, so schwankt die Reihe zwischen endlichen Grenzen;

3a. ist $g = -1$ und $h = 0$, so besteht durchweg Divergenz;

4. ist $g < -1$, so konvergiert die Reihe absolut für alle $|x| = 1$.

Für die binomische Reihe $1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots$, wo $x = a + ib$, $m = k + ik'$ gesetzt wird, gilt für $|x| = 1$:

1. wenn $k \leqq -1$, so divergiert die Binomialreihe;

2. wenn $k > 0$, so konvergiert dieselbe für alle $|x| = 1$;

3. wenn $-1 < k \leqq 0$, so konvergiert dieselbe auf dem ganzen Einheitskreise, die Stelle $x = -1$ ausgenommen.

§ 2. Für die singulären Punkte auf dem Potenzkreise wird auf Grund der Sätze, 1. daß auf dem Konvergenzkreise der Reihe

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu x^\nu$$

mindestens ein singulärer Punkt der dargestellten Funktion liegt, und 2. daß der Konvergenzradius gleich $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}} |a_\nu|^{-1/\nu}$ ist, folgendes bewiesen.

Wenn $\lim\limits_{m=\infty} \frac{a_m}{a_{m+1}} = x_0$, so ist x_0 ein singulärer Punkt auf dem Konvergenzkreise, aber nicht unbedingt der einzige. Aber selbst, wenn x_0 der einzige singuläre Punkt ist, so braucht a_m/a_{m+1} für $m = \infty$ nicht den Grenzwert x_0 zu besitzen.

Wenn die einzige auf dem Konvergenzkreise gelegene Singularität ein einfacher oder mehrfacher Pol ist, dann sind die Koordinaten des Punktes durch $\lim a_m/a_{m+1}$ für $m = \infty$ bestimmt.

Liegen auf dem Konvergenzkreise von $\Sigma a_\nu x^\nu$ nur die singulären Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_p$ und ist x_1 ein μ_1-facher Pol, ..., x_p ein μ_p-facher Pol, so ist $\overline{\lim\limits_{m=\infty}} \sqrt[m]{|D_{m,p}|} < \frac{1}{\varrho^{p+1}}$; dabei ist ϱ der Konvergenzradius und

$$D_{m,p} = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m+p} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m+p+1} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m+p} & a_{m+p+1} & & \cdot & \cdot & a_{m+2p} \end{vmatrix}.$$

Wenn für gewisse Werte P $\overline{\lim} \sqrt[m]{|D_{m,P}|} < \frac{1}{\varrho^{P+1}}$ und wenn p der kleinste dieser Werte ist, so besitzt die Reihe auf dem Konvergenzkreise nur Pole als Singularitäten, und zwar p Pole, jeder Pol nach dem Grade seiner Vielfachheit gezählt. Diese Pole sind die Wurzeln einer Gleichung $1 + A' x + \cdots + A^{(p)} x^p = 0$, die Größen $A', \ldots, A^{(p)}$ sind die Grenz-

werte für $m = \infty$ von $A'_m, \ldots, A_m^{(p)}$, welche sich aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
a_{m+p} &+ A'_m a_{m+p-1} + \cdots + A_m^{(p)} a_m &= 0, \\
a_{m+p+1} &+ A'_m a_{m+p} + \cdots + A_m^{(p)} a_{m+1} &= 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m+2p-1} &+ A'_m a_{m+2p-2} + \cdots + A_m^{(p)} a_{m+p-1} &= 0
\end{aligned}$$

bestimmen.

§ 3. Besitzt die holomorphe Funktion $f(z)$ ihre dem Nullpunkte am nächsten gelegene singuläre Stelle auf dem Einheitskreise, so läßt sie sich in eine Potenzreihe $\sum_0^\infty{}^s c_s z^s$ mit dem Konvergenzradius 1 entwickeln, wo $c_s = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{\zeta^{s+1}} d\zeta$ ist und das Integral in positivem Sinne über einen um den Nullpunkt mit einem Radius $\varrho < 1$ beschriebenen Kreis zu führen ist.

Setzt man $\zeta = \varrho e^{i\theta'}$, $f(\varrho e^{i\theta'}) = u(\varrho\theta') + iv(\varrho\theta')$, $z^s = \varrho^s e^{is\theta}$, so geht $\sum_s c_s z^s$ über in

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\varrho\theta')\,d\theta' + \sum_1^\infty \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{2\pi} u(\varrho\theta')\cos(s\theta')\,d\theta' \cos s\theta \right.$$
$$\left. + \int_0^{2\pi} u(\varrho\theta')\sin(s\theta')\,d\theta' \sin s\theta\right\}$$
$$+ i\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\varrho\theta')\,d\theta' + \sum_1^\infty \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{2\pi} v(\varrho\theta')\cos(s\theta')\,d\theta' \cos(s\theta) \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_0^{2\pi} v(\varrho\theta')\sin(s\theta')\,d\theta' \sin(s\theta)\right\}\right].$$

Versteht man unter der Randfunktion die Funktion auf dem Einheitskreise, so gilt: Dann und nur dann konvergiert die Potenzreihe $\Sigma c_s z^s$ einer Funktion $f(z)$ noch auf dem Konvergenzkreise vom Radius 1, wenn bei dem nicht formal, sondern unter der Berücksichtigung der Singularitäten der Funktion vorgenommenen Übergang auf den Einheitskreis die Koeffizienten der Reihe tatsächlich mit denjenigen der Fourierschen Entwicklung der Randfunktion übereinstimmen, und wenn zweitens diese letztere Reihe konvergiert.

$\Sigma c_s z^s$ konvergiert noch auf dem ganzen Einheitskreise, wenn $f(z)$ dort überall endlich und stetig ist und in den singulären Punkten mit wachsendem θ nur wächst oder abnimmt oder konstant bleibt, d. h. monoton verläuft.

Dieser Satz gilt im allgemeinen nicht mehr, wenn die $f(z)$ auferlegten Bedingungen auch nur in einem einzigen Punkte z' des Einheits-

kreises nicht mehr erfüllt sind; doch bei zwei Arten des Verhaltens von $f(z)$ im Punkte z' bleibt der Satz bestehen. Die erste Art ist dadurch gekennzeichnet, daß $|f(z)|$ in der Umgebung von z' unter einer endlichen Grenze bleibt. Zweitens kann $f(z')$ einen endlichen oder unendlich großen Wert besitzen oder überhaupt nicht definiert sein; aber $f(z)$ muß für Integrationswege im Innern oder auf der Peripherie des Einheitskreises bis an die Stelle z' absolut integrabel sein.

Besitzt die zur Potenzreihe $\Sigma a_\nu x^\nu$ gehörige Funktion $f(x)$ eine in der Umgebung der Konvergenzkreisstellen noch im allgemeinen stetige Derivierte, deren Quadrat höchstens für eine reduktible Menge solcher Stellen von hinlänglich niedrigerer Ordnung als der ersten unendlich wird, so ist $\Sigma a_\nu x^\nu$ noch auf dem Konvergenzkreise absolut konvergent (Pringsheim).

Setzt man $f(e^{\vartheta i}) = \sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu + \beta_\nu i) e^{\nu\vartheta i} = \varphi(1, \vartheta) + i\,\psi(1, \vartheta)$,

so gilt:

Die Reihe $\psi(1, \vartheta) = \sum_1^\infty{}^\nu (\beta_\nu \cos \nu\vartheta + \alpha_\nu \sin \nu\vartheta)$ ist eigentlich divergent, wenn $\varphi(1, \vartheta + a) - \varphi(1, \vartheta - a)$ für $a < \varepsilon$ konstantes Vorzeichen besitzt und für $\lim a = 0$ nicht stärker gegen 0 konvergiert, als $\left(\log_1 \frac{1}{a} \log_2 \frac{1}{a} \cdots \log_k \frac{1}{a}\right)^{-1}$ bei beliebig großem k.

Die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ mit absolut und beim Übergange zur Konvergenzkreis-Peripherie im allgemeinen gleichmäßig integrabler Randfunktion $f(e^{\vartheta i})$ ist eigentlich divergent an allen Sprungstellen von $f(e^{\vartheta i})$.

§ 4. Konvergiert eine Potenzreihe für irgend eine Stelle X des Konvergenzkreises, so konvergiert sie gleichmäßig für alle x auf dem nach X gezogenen Radius mit Einschluß von X, d. h. ihre Summe ist eine stetige Funktion für diese Werte der Variable (Abel).

Konvergiert die Reihe $\Sigma c_\nu x^\nu$ für irgend einen Peripheriepunkt X ihres Konvergenzkreises, so konvergiert sie gleichmäßig für alle Stellen x im Innern und auf der Begrenzung jedes $x_0 X x_1$, wo x_0, x_1 zwei beliebige Punkte im Innern des Konvergenzkreises bedeuten (Pringsheim).

Ist $\lim_{n=\infty} n \cdot a_n = 0$, so konvergiert $P(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ für jede Stelle X mit dem absoluten Betrage 1, für welche $\lim P(\varrho X)$ für $\varrho = 1$ einen endlichen Wert hat.

Für den Fall der Divergenz von $P(x) = \Sigma a_\nu X^\nu$ in einem Punkte X des Konvergenzkreises, wenn x sich auf dem Radius $\overline{OX}$ dem Punkte X unbeschränkt nähert, gilt:

1. Wenn $\lim s_\nu = \lim (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_\nu X^\nu) = \infty$ für $\nu = \infty$, so ist auch $\lim P(x) = \infty$ für $x = X$.

2. Wenn $\lim |s_\nu|$ für $\nu = \infty$ eine endliche obere Unbestimmtheitsgrenze A hat, so hat $\lim \mathfrak{P}|(x)|$ eine endliche obere Unbestimmtheitsgrenze $A' \leqq A\sqrt{2}$. Wz.

J. C. Kluyver. Over veeltermreeksen. Amst. Ak. Versl. **10**, 530-544, 647-664.

Es sei eine Potenzreihe gegeben, welche innerhalb eines Konvergenzkreises eine analytische Funktion $F(x)$ darstellt; für diese Funktion sollen neue Entwicklungen von der Eigenschaft gefunden werden, daß die ersten n Glieder der neuen Entwicklung nur von den ersten n Gliedern der gegebenen Potenzreihe abhängen. Nach den Untersuchungen von Mittag-Leffler kann man für jede Funktion $F(x)$ unendlich viele Entwicklungen finden, welche diese Eigenschaft besitzen. Der Verf. der vorliegenden Abhandlung sucht eine einfache Ableitung dieser „Polynomreihen" zu gewinnen und wendet sie nachher auf einige Beispiele an: $\log(1-x)$ und $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$. Hierbei führt er den neuen Begriff des „Konvergenzgrades" ein, eine zwischen 0 und 1 gelegenen Zahl, die in jedem Punkte die Schnelligkeit der Konvergenz mißt. Lp.

S. Pincherle. Sulle serie di fattoriali. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{11}_1$, 139-144.

Es sei $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen, die obere Grenze k von $\log|c_n|/\log n$ eine reelle, endliche oder unendlich große Zahl, $R(a)$ der reelle Bestandteil von a. Schließt man für die komplexen Veränderlichen x und y ganze negative Werte aus und nimmt $R(x) < R(y) - k - 1$, so ist die Reihe

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{y(y+1)\ldots(y+n-1)}$$

absolut konvergent.

Ist y fest angenommen, so ist die Reihe absolut konvergent für alle Werte von x auf der linken Seite der durch den Punkt

$$x = y - k - 1$$

zur imaginären Achse gezogenen Parallele, divergent auf der rechten Seite der durch den Punkt $x = y - k$ gehenden Parallele. Zwischen diesen beiden Parallelen liegt ein „neutraler Streifen"; in ihm kann unter Umständen die Reihe konvergent werden.

Man kann die Reihen von der Form (1) in drei Klassen einteilen. Für die erste ist $\lim \log|c_n|/\log n$ für $n = \infty$ gleich $-\infty$; die Reihen sind absolut konvergent für alle Werte von x und y.

Der zweiten Klasse gehören diejenigen Reihen an, für welche k einen endlichen Wert hat. Legt man y einen festen Wert bei, so gibt es in bezug auf x für sie einen Bereich der (absoluten) Konvergenz, einen Divergenzbereich und einen neutralen Streifen.

Für die dritte Klasse ist $k = +\infty$, die Reihen sind für alle Werte von x und y divergent. Wz.

S. Pincherle. Sulle serie di fattoriali. Rom. Acc. L. Rend. (5) 11_1, 417-426.

Als die Charakteristik einer Folge $c_0, c_1, c_2, \ldots$ wird die obere Grenze k von $\log |c_n| : \log n$ erklärt; die Reihe $\Sigma c_n n^{-\varrho}$ ist absolut konvergent für $R(\varrho) > k + 1$, nicht konvergent für $R(\varrho) > k$. Für die Fakultätenreihe $\Sigma c_n \binom{x}{n}$ werden drei Fälle unterschieden: 1. Entweder ist $k = -\infty$; die Reihe gehört zur ersten Klasse, sie konvergiert absolut und gleichmäßig für alle endlichen Werte von x und stellt in der ganzen Ebene eine ganze Funktion dar.

2. k ist endlich; in diesem Falle konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig für $R(x) > k$ und stellt einen Zweig zu einem Werte $\sigma(x)$ einer analytischen monogenen Funktion dar. Die Reihe reduziert sich auf eine endliche Zahl von Gliedern, wenn $x = 0$ oder gleich einer positiven ganzen Zahl ist, und stellt daher in jedem dieser Punkte eine bestimmte Zahl dar; diese Punkte gehören nicht zum Konvergenzbereich der Reihe, und es kann sehr wohl sein, daß die Werte, welche die Reihe in diesen Punkten annimmt, nicht diejenigen der durch sie in ihrem Konvergenzbereich $R(x) > k$ dargestellten Funktion $\sigma(x)$ sind, auch wenn die Funktion $\sigma(x)$ im Bereich $R(x) \leqq k$ existiert.

3. Wenn $k = +\infty$ ist, so hat die Reihe keinen Konvergenzbereich und stellt daher auch nicht eine analytische Funktion dar; sie hat nur eine Bedeutung, wenn $x = 0$ oder eine ganze positive Zahl ist.

In allen Fällen erhält man, wenn man $x = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ setzt, eine bestimmte Folge $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ durch die Gleichung:

$$b_n = c_0 + n c_1 + \binom{n}{2} c_2 + \cdots + c_n.$$

Umgekehrt ergibt sich für beliebig gegebene $b_0, b_1, b_2, \ldots$ die Folge $c_0, c_1, c_2, \ldots$ nach der Formel

$$c_n = b_n - n b_{n-1} + \binom{n}{2} b_{n-2} - \cdots + (-1)^n b_0 \quad \text{oder} \quad c_n = \Delta^n b_0.$$

Es werde nun eine für alle $R(x) \geqq 0$ reguläre Funktion und die Folge $\Delta^n f(0)$ gebildet; wenn dann diese Folge eine Charakteristik k hat, die nicht $+\infty$ ist, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n f(0) \binom{x}{n}$ absolut und gleichmäßig für $R(x) > k$; wenn dann die Differenz

$$f(x) - \Sigma \Delta^n f(0) \binom{x}{n}$$

identisch Null ist, so ergibt sich: Die notwendige Bedingung dafür, daß eine Funktion $f(x)$ in eine Fakultätenreihe entwickelbar sei, besteht darin, daß die Charakteristik von $\Delta^n f(0)$ nicht $+\infty$ ist.

Die Reihe $\sigma_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{x}{n}$ stellt die Null für alle $R(x) > 0$

dar; ebenso $\sigma_r(x) = (-1)^r \binom{x}{r} \sigma_0(x-r)$ für $R(x) > r$ und $b_0\sigma_0(x) + b_1\sigma_1(x) + \dots + b_{m-1}\sigma_{m-1}(x)$ für $R(x) > m-1$.

Mittels der Koeffizienten der Fakultätenreihe $s(x) = \sum_0^\infty c_n \binom{x}{n}$ wird eine Potenzreihe $\varphi(t)$ von t^{-1} so gebildet, daß zu $t^{-(n+1)}$ derselbe Koeffizient gehört wie zu $\binom{x}{n}$. Hat die Folge c_n eine Zahl k zur Charakteristik, die nicht $+\infty$ ist, so wird $\varphi(t)$ außerhalb eines Kreises um $t=0$ konvergieren, dessen Radius im allgemeinen gleich Eins ist. Dann „läßt die Reihe $\varphi(t)$ die Charakteristik k zu".

Zwischen $s(x)$ und $\varphi(t)$ wird eine Beziehung $s(x) = A(\varphi(t))$ festgesetzt, wo A eine distributive, formal auf jede Potenzreihe von t^{-1} anwendbare Operation bezeichnet, und wobei das Resultat eine Bedeutung hat, wenn k die Charakteristik von c_n ist für $R(x) > k$. Es wird festgesetzt, daß die Operation A das Resultat Null liefert, wenn sie auf eine ganze positive oder die 0-te Potenz von t angewandt wird.

Ist φ' die Ableitung von $\varphi(t)$, so ist für $R(x) > k+1$:

$$A(\varphi') = -x s(x-1) \text{ und } A((1+t)\varphi(t)) = s(x+1).$$

Für eine Reihe $\varphi(t)$, deren Charakteristik $k < -1$ ist, wird die Operation $A(\varphi)$ für $R(x) > 0$ durch

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(1)} \varphi(t)(1+t)^x\,dt$$

dargestellt, wo die Integration über die Peripherie des Kreises von dem Radius 1 und dem Mittelpunkte $t=0$ zu erstrecken ist.

Um für $k \geqq -1$ eine analytische Darstellung der Operation A zu erhalten, seien A, K zwei für die Elemente eines Bereiches C eindeutig definierte Operationen; G sei die Transformierte von K mittels A; wenn φ und $K(\varphi)$ dem Bereiche C angehören, so ist $G^{-1}AK = A$; φ gehöre einem Bereiche C' an, der C enthält; K sei anwendbar auf φ, und $K(\varphi)$ gehöre C an, dann kann $G^{-1}AK = A$ als Definition von A benutzt werden. Für $R(x) > m$ ergibt sich

$$A(\varphi) = \frac{(-1)^m}{2\pi i}\Delta^m x(x-1)\cdot\cdot(x-m+1)$$
$$\times \int_{(1)} D^{-m}\left(\frac{1}{t^m}\varphi(t)\right)(1+t)^{x-m}dt;$$

diese Darstellung stimmt mit der vorher definierten Operation für jede Reihe $\varphi(t)$ überein, die eine endliche Charakteristik k hat; daher läßt für jede solche Reihe die dort definierte Operation A diesen analytischen Ausdruck zu, worin $m-2$ die größte ganze, in k enthaltene Zahl ist, wenn $k \geqq -1$ ist; sie ist 0 für $k < -1$. Wz.

J. C. Kluyver. Sur les séries de factorielles. C. R. 134, 587-588.

Betrachtet man die Entwicklung

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,\lambda_n}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}$$

und setzt voraus, daß der Bereich ihrer absoluten Konvergenz die Halbebene rechts von der imaginären Achse ist, d. h. daß

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right|=1,\ \lim_{n=\infty} n\left\{1-\left|\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right|\right\}=1$$

ist, so besitzt die Funktion $\varphi(z)$ die beiden charakteristischen Eigenschaften:

1. Bedeutet t eine reelle Größe zwischen 0 und 1, so ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\varphi(y)(1-t)^{-y}dy=\sum_{n=0}^{n=\infty}\lambda_n t^n=h(t),$$

und die Funktion $h(t)$ ist im Innern des Kreises $|t|=1$ holomorph.

2. Von der Funktion $h(t)$ kann man zur Funktion $\varphi(z)$ kommen, da

$$\int_0^1 h(t)(1-t)^{z-1}dt=\varphi(z)$$

ist.

Umgekehrt: Jede Funktion, welche zu gleicher Zeit diese beiden Eigenschaften besitzt, ist in eine Reihe von Fakultäten entwickelbar, und diese Reihe ist rechts von der imaginären Achse absolut konvergent.

Funktionen wie $\Gamma(z)$ und $e^{-z}:z$, welche nur die eine oder die andere dieser beiden Eigenschaften haben, können nicht in eine Reihe von Fakultäten entwickelt werden. Wz.

N. Nielsen. Sur les séries de factorielles. C. R. 134, 157-160.

Entwickelt man $\frac{1}{t}\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)$ und $(1+t)^{\mu}$ in Faktoriellenreihen, so erhält man die Reihen von Binet und Schlömilch; durch die Funktion $(1+t^2)^{\mu-\frac{1}{2}}$ wird man zu $Y^{\mu}(x)-Z^{\mu}(x)$ geführt, wo $Y^{\mu}(x)$ die Zylinderfunktion zweiter Art und

$$Z^{\mu}(x)=\frac{2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x\sin\varphi)\,(\cos\varphi)^{2\mu}\,d\varphi,\ \Re(\mu)>-\frac{1}{2}$$

ist.

Hat $\varphi(Z)$ endliche singuläre Punkte außer $Z=0$, so kann $\Omega(x)$ in eine Faktoriellenreihe des Arguments αx nur dann entwickelt werden, wenn α eine reelle Zahl ist.

Ist $\varphi(Z)$ eine erzeugende Funktion, die außer $Z=0$ endliche singuläre Punkte hat, deren Modul nicht größer als Eins ist, so muß α eine rationale Zahl sein.

Der Zähler von α kann nur 1, 2, 3 sein. Wz.

N. NIELSEN. Recherches sur les séries de factorielles. Ann. de l'École Norm. **19**, 409-453.

Im ersten und zweiten Abschnitt werden die bereits in den C. R. **133**, 1273 (vergl. F. d. M. **32**, 269-270, 1901) mitgeteilten Sätze über die Entwicklung einer Funktion in eine Reihe von Fakultäten $\Omega(x) = \Sigma n!\, b_n/x(x+1)\dots(x+n)$ $(n=0 \text{ bis } n=\infty)$ bewiesen. In dem dritten und vierten Abschnitt werden Entwicklungen von $\Omega(x-y)$, der p-ten Ableitung von $\Omega(x)$ in eine Fakultätenreihe, der Binetschen Funktion $\varpi(x) = \log \Gamma(x) - (x-\frac{1}{2})\log x + x - \sqrt{2\pi}$, der Schlömilchschen Reihe

$$S(\nu,x) = \int_0^\infty (1+t)^{-\nu} e^{-tx}\, dt$$

gegeben, im fünften Abschnitt wird die Multiplikation des Arguments einer Fakultätenreihe behandelt. Wz.

P. STÄCKEL. Über die Konvergenz der trigonometrischen Reihen. Arch. der Math. u. Phys. (3) **2**, 240-248.

Unter ausschließlicher Benutzung elementarer Hülfsmittel wird bewiesen, daß die trigonometrische Reihe

$$\tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \cdots$$
$$+ a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots,$$

worin

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos m\xi f(\xi)\, d\xi, \quad a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin m\xi f(\xi)\, d\xi$$

ist, immer konvergent und für alle Werte des Intervalls $(0\dots 2\pi)$ der Funktion $f(x)$ gleich ist. Der Beweis setzt voraus, daß das Intervall $(0\dots 2\pi)$ in eine endliche Anzahl von Teilintervallen

$$(0\dots x_1),\ (x_1\dots x_2),\ \dots,\ (x_{s-1}\dots 2\pi)$$

zerlegt werden kann, so daß in jedem Teilintervall $f(x)$ stetig ist, und daß für jeden Punkt eines solchen Intervalles der Quotient

$$[f(x+h)-f(x)] : h$$

für $h=0$ einen bestimmten endlichen Grenzwert hat; dabei darf der

Grenzprozeß für positive und der für negative Werte von h verschiedene Resultate ergeben, so daß für die Kurve $y = f(x)$ „Ecken“ zulässig sind. Wz.

L. Fejér. Sur la différentiation de la série de Fourier. C. R. 134, 762-765.

Wird die Reihe $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ differenziert, wo

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx$$

ist, und die einer Funktion $f(x)$ entspricht, welche eine stetige Ableitung $f'(x)$ besitzt, so ist die sich ergebende Reihe $\Sigma(nb_n \cos nx - na_n \sin nx)$ immer einfach unbestimmt (ausgenommen sind die Endwerte 0 und 2π) und hat als Summe $f'(x)$.

Dabei hat der Cesàrosche Ausdruck „einfach unbestimmt“ die folgende Bedeutung: Die Reihe $\sum^{n} u_n$ ist einfach unbestimmt und hat zur Summe U, wenn die Grenze

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n} = U$$

existiert, wobei $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$ ist. Wz.

L. Fejér. Untersuchungen aus dem Gebiete der Fourierschen Reihen. Math. és. phys. Lapok 10, 49-68, 97-123 (Ungarisch).

Eine Bearbeitung der früheren Untersuchungen des Verf. über die Fourierschen Reihen. Wir führen daraus den folgenden Satz an: Ist $f(x)$ zwischen 0 und 2π eine endliche integrierbare Funktion mit der zu ihr gehörenden Fourierschen Reihe

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n(\alpha - x)\,d\alpha\right];$$

ist ferner $f(x)$ an der Stelle x kontinuierlich oder diskontinuierlich von der ersten Ordnung, so ist die Reihe $s_0(x)$, $s_1(x), \ldots, s_n(x), \ldots$, wo

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos k(\alpha - x)\,dx\right],$$

nicht immer konvergent, aber die Reihe

$$s_0(x),\ \tfrac{1}{2}[s_0(x) + s_1(x)], \ldots, \frac{1}{n}[s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_{n-1}(x)]$$

ist immer konvergent, und der Grenzwert ist $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$. Wir erwähnen auch die Bestimmung einer Funktion $f(x)$, die den Wert a oder b hat, je nachdem x rational oder irrational ist. S.

H. Lebesgue. Un théorème sur les séries trigonométriques. C. R. **134**, 585-587.

Eine Funktion $f(\varphi)$ kann, wie Cantor gezeigt hat, nur auf eine Art in eine trigonometrische Reihe entwickelt werden:

$$f(\varphi)=a_0+\Sigma(a_n \cos n\varphi+b_n \sin n\varphi);$$

wenn $f(\varphi)$ den Dirichletschen Bedingungen genügt, so sind die Koeffizienten durch die bekannten Fourierschen Integrale bestimmt. Dini, Ascoli, P. du Bois-Reymond haben bewiesen: Wenn $f(\varphi)$ endlich (bornée) und integrierbar ist, so sind die Koeffizienten die Fourierschen Integrale. Unter Benutzung der von ihm C. R. **132**, 1025-1028, 1901, gegebenen Definition des Integrals behandelt Lebesgue den allgemeineren Fall, in welchem $f(\varphi)$ endlich ist; er zeigt: Wenn eine gegebene Funktion eine trigonometrische Entwicklung zuläßt, so ist es die Fouriersche. Wz.

Fr. London. Über eine besondere Art konvergenter Punktfolgen. Deutsche Math.-Ver. **11**, 274-280.

Eine unendliche Folge in derselben Ebene befindlicher Punkte heißt konvergent, wenn ein Punkt P derart existiert, daß in jeden, wenn auch noch so kleinen, den Punkt P umschließenden Bereich die Punkte der Folge schließlich eindringen und darin verbleiben; der Punkt P ist der Konvergenzpunkt oder Grenzpunkt der Punktfolge. Man kann eine approximative, aber beliebig genaue Konstruktion des Grenzpunktes angeben.

Soll z. B. der Bogen $\overline{AB}$ in drei gleiche Teile geteilt werden, so sei A_1 der Halbierungspunkt von $\overline{AB}$, A_2 der von $\overline{AA_1}$, A_3 der von $\overline{A_1A_2}$, A_4 der von $\overline{A_2A_3}$, usw. Die Folge $A, A_1, A_2, A_3, \ldots$ hat den Punkt P, für welchen $\overline{AP}=\frac{1}{3}\overline{AB}$ ist, zum Grenzpunkt; P läßt sich allein mit dem Zirkel unter Benutzung weniger Punkte der Folge sehr scharf konstruieren.

Sind die Punkte eines rationalen Trägers durch eine projektive Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ mit zwei reellen Doppelpunkten in Beziehung gesetzt, und konstruiert man zu einem beliebigen Punkte P_0 in bezug auf $\mathfrak{B}$ den entsprechenden P_1, zu P_1 den entsprechenden P_2, zu diesem den entsprechenden P_3 usw., so gelangt man zu einer Punktfolge $P_0, P_1, P_2, \ldots$, welche als die zum Anfangspunkt gehörige Iterationsfolge von $\mathfrak{B}$ bezeichnet wird, und welche einen der beiden Doppelpunkte von $\mathfrak{B}$ zum Konvergenzpunkt hat, und zwar stets denselben, wie auch P_0 gewählt ist. Die Iterationsfolgen der inversen Projektivität $\mathfrak{B}^{-1}$ haben den andern Doppelpunkt zum Konvergenzpunkt. Man kann angenähert, aber

mit jeder beliebigen Genauigkeit die Doppelpunkte einer Projektivität unter alleiniger Verwendung des Lineals konstruieren und hierauf jede Konstruktion zweiten Grades zurückführen. Ist P_0, P_1 ein beliebiges Paar homologer Punkte von $\mathfrak{P}$, und setzt man auf dem Träger eine Parameterverteilung fest, bei welcher dem Punkte P_0 der Parameter 0, dem Punkte P_1 der Parameter ∞ zugeordnet ist, so ist derjenige der beiden Doppelpunkte der Konvergenzpunkt, welcher den absolut größeren Parameter erhält. — Sind die Doppelpunkte der Projektivität nicht reell, so konvergiert die Iterationsfolge nicht.

Sind die Punkte einer Ebene durch eine Kollineation $\mathfrak{P}$, welche drei reelle Doppelpunkte hat, in Beziehung gesetzt, so hat auch hier im allgemeinen jede Iterationsfolge von $\mathfrak{P}$, mit welchem Punkte sie auch beginnt, denselben der drei Doppelpunkte zum Konvergenzpunkt. Denkt man durch irgend ein Paar in bezug auf $\mathfrak{P}$ sich entsprechender Punkte P_0, P_1 den Kegelschnitt K gelegt, welcher die drei Doppelpunkte enthält, und nimmt man auf K eine Parameterverteilung vor, bei welcher P_0 der Parameter 0, P_1 der Parameter ∞ beigelegt wird, so ist derjenige der drei Doppelpunkte der Konvergenzpunkt, welcher bei einer Parameterverteilung der angegebenen Art den absolut größten Parameter erhält. Der Doppelpunkt mit dem absolut kleinsten Parameter ist der Konvergenzpunkt der inversen Kollineation. — Geht man von einer beliebigen Geraden aus, konstruiert zu ihr in bezug auf $\mathfrak{P}$ die entsprechende und so fort, so erhält man eine „Iterationsgeradenfolge von $\mathfrak{P}$“. Ist P_0, P_1, P_2, ... eine Iterationspunktfolge von $\mathfrak{P}$, so bildet, wenn $P_{i-1} P_i = g_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ gesetzt wird, $g_1, g_2, g_3, \ldots$ eine Iterationsgeradenfolge. Jede Iterationsgeradenfolge einer ebenen Kollineation mit drei reellen Doppelpunkten konvergiert zu derjenigen Doppelgeraden, welche den Konvergenzpunkt mit dem mittleren Doppelpunkt verbindet.

Sind nicht alle drei Doppelpunkte reell, so konvergieren die Iterationspunktfolgen entweder in der direkten oder in der inversen Richtung zu demselben Doppelpunkt.

Es lassen sich alle Konstruktionen dritten Grades, da sie auf die Bestimmung der drei Doppelpunkte einer Kollineation zurückführbar sind, allein mit dem Lineal angenähert ausführen, und zwar so, daß der Fehler beliebig klein wird.

Da zu einem System von drei Doppelpunkten eine zweifache lineare Mannigfaltigkeit von Kollineationen gehört, so kann man diejenigen wählen, die sich „in eingeschriebener Dreieckslage“ befinden, bei denen sich der zu einem Punkte P_0 entsprechende Punkt P_1 auf der harmonischen Polare von P_0 in bezug auf das Doppelpunktdreieck befindet. Wz.

J. WEEDER. Over interpolatie gegrond op eene gestelde minimum voorwaarde. Amst. Ak. Versl. **11**, 434-444.

Über die Interpolation, als begründet durch eine gegebene Minimumseigenschaft. Lp.

G. Pesci. Sopra uno degli errori prodotti dalla interpolazione semplice. Periodico di Mat. (2) 5, 35-41.

Bei der gewöhnlichen Art der Benutzung der Proportionaltafeln zur Bestimmung des Wertes einer Funktion aus einer Tabelle in kleinen springenden Intervallen entsteht durch den Umstand ein Fehler, daß die Zahlen der Tabelle selbst durch die Abkürzung auf die gewählte Anzahl der Stellen ungenau sind. Für die Größe dieses Fehlers wird eine obere Grenze bestimmt, und diese Bestimmung wird mit der Schlußweise bei anderen Autoren verglichen. Lp.

Weitere Literatur.

F. Giudice. Teoremi relativi alla convergenza e divergenza delle serie numeriche. Mat. pure ed appl. 2, 53-61.

E. Holst. Om höiere arithmetiske raekker samt nogle af de almindeligst forekommende konvergerende raekker, med inledende saetninger om den hele funktion. Christiania: 55 S. 8°.

E. Lindelöf. Quelques applications d'une formule sommatoire générale. Acta Soc. Fenn. 31. 79 S. 4°.

H. B. Lübsen. Ausführliches Lehrbuch der Analysis zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens bearbeitet. Zehnte verbesserte Auflage. Leipzig: F. Brandstetter. IV u. 203 S. gr. 8°.

H. Schubert. Niedere Analysis. Teil I: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen. Leipzig: Göschen. VII u. 181 S. 8° (Sammlung Schubert, No. V).

Referat oben S. 228.

Kapitel 2.

Besondere Reihen.

C. Reuschle. Die periodisch-unendlichen natürlichen Brüche und periodisch-unendliche Nullreihen. Math. naturw. Mitt. (2) 4, 2-13.

C. Reuschle. Genetische Herleitung und neue transfinite Grenzwertausdrücke der Eulerschen Konstanten. Math. naturw. Mitt. (2) 4, 13-16.

C. Reuschle. Die allwertigen Ausdrücke $\frac{0}{0}$ etc. Math. naturw. Mitt. (2) 4, 17-29.

I. Bedeuten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ ganze positive oder negative Zahlen, n, ω positive ganze Zahlen, λ eine beliebige Zahl, so wird

$$\left(\frac{1}{1}\right)^{\lambda}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda}+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^{\lambda}=S_{\lambda n},$$

$$\overline{\alpha\frac{x}{1}+\beta\frac{x^2}{2}+\gamma\frac{x^3}{3}}+\overline{\alpha\frac{x^4}{4}+\beta\frac{x^5}{5}+\gamma\frac{x^6}{6}}+\cdots$$
$$+\overline{\alpha\frac{x^{3\omega-2}}{3\omega-2}+\beta\frac{x^{3\omega-1}}{3\omega-1}+\gamma\frac{x^{3\omega}}{3\omega}}=[\alpha\beta\gamma]_x$$

gesetzt und analog $[\alpha\beta]_x$, $[\alpha\beta\gamma\delta]_x$ erklärt. Für $\omega=\infty$ werden die eckigen Klammern durch runde ersetzt:

$$\overline{\alpha\frac{x}{1}+\beta\frac{x^2}{2}+\gamma\frac{x^3}{3}}+\overline{\alpha\frac{x^4}{4}+\beta\frac{x^5}{5}+\gamma\frac{x^6}{6}}+\cdots=(\alpha\beta\gamma)_x,$$

der Zeiger 1 auch fortgelassen: $(\alpha\beta)=(\alpha\beta)_1$, $(\alpha\beta\gamma)=(\alpha\beta\gamma)_1$.

Eine Zahl von der Form $(\alpha\beta\gamma\ldots\varkappa)$ heißt ein periodisch-unendlicher natürlicher Bruch. Für ihn ist z. B.

$$(\alpha\beta)_x=(\overline{\alpha\beta}\;\overline{\alpha\beta})_x=(\overline{\alpha\beta}\;\overline{\alpha\beta}\;\overline{\alpha\beta})_x;\;(\alpha\beta)_{-x}=(-\alpha\beta)_x=-(\alpha-\beta)_x;$$
$$(\alpha\beta)_x+(abc)_x=(\alpha+a\;\;\beta+b\;\;\alpha+c\;\;\beta+a\;\;\alpha+b\;\;\beta+c)_x$$
$$=(\overline{\alpha\beta}\;\overline{\alpha\beta}\;\overline{\alpha\beta})_x+(\overline{abc}\;\overline{abc})_x.$$

Setzt man $[\alpha]=\alpha\,[1]=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\omega}=S_{1\omega}=[1]$, so ist

$$S_{1\omega}=[003],\;S_{13\omega}=[111],\;S_{13\omega}-S_{1\omega}=[11\;-\;2];$$
$$S_{13\bar\omega}-S_{1\bar\omega}=\lim_{\omega=\infty}(S_{13\omega}-S_{1\omega})=(11-2);$$

die zum periodisch-unendlichen natürlichen Bruch $(11-2)$ gehörige Potenzreihe

$$(11-2)_x=\int_0^x\frac{1+2x}{1+x+x^2}\,dx=l(1+x+x^2)=l\frac{1-x^3}{1-x}$$

$S_{13\bar\omega}-S_{1\bar\omega}=l3=1{,}098612$; $S_{1m\bar\omega}-S_{1\bar\omega}=lm$; ferner:

Ein periodisch-unendlicher natürlicher Bruch ist endlich oder nicht endlich, je nachdem die Summe seiner Periodenziffern gleich 0 oder ungleich 0 ist.

Der natürliche Logarithmus einer positiven ganzen Zahl m läßt sich als periodisch-unendlicher natürlicher Bruch mit m-ziffriger Periode darstellen: die $m-1$ ersten Ziffern sind 1, die letzte $-(m-1)$.

Periodisch-unendlich natürliche Brüche mit dem Wert 0 werden als (periodisch-unendliche) Nullreihen bezeichnet; z. B.

$$0=(1\;-11\;-5\;1\;-113);\;0=(11\;-5\;11\;-5\;1\;14).$$

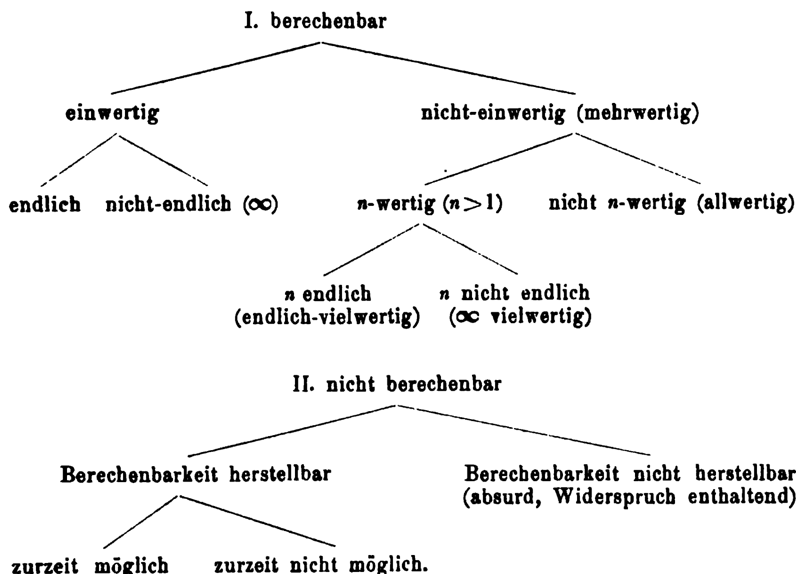
II. Die Differenz $S_{1m\bar\omega}-l(m\varpi)$ ist von m unabhängig, sie ist gleich $S_{1\bar\omega}-l(\varpi)$ und wird als Eulersche Konstante (0,577216) $\sigma_1=\sigma$ bezeichnet; es ist

$$\sigma = 2S_{1\tilde{\omega}} - S_{1\tilde{\omega}^2} = 3S_{1\tilde{\omega}^2} - 2S_{1\tilde{\omega}^3} = \tfrac{1}{2}(4S_{1\tilde{\omega}^3} - 2S_{1\tilde{\omega}^4}), \ldots .$$

III. Sind alle (nicht alle) Koeffizienten einer Gleichung mit einer Unbekannten gleich 0, so ist die allgemeine Wurzel der Gleichung **allwertig** (nicht allwertig), d. h. sie wird durch jeden (nicht jeden) Wert der Unbekannten befriedigt.

Für $ax = b$ erhält man, wenn a und b endliche Zahlen sind, folgende Zusammenstellung: einen endlichen Punkt $x = \frac{b}{a}$, wenn $a \gtrless 0$, $b \gtrless 0$ ist; den Nullpunkt $x = 0$, wenn $a \gtrless 0$, $b = 0$ ist; den unendlich fernen Punkt $x = \infty$, wenn $a = 0$, $b \gtrless 0$ ist; jeden Punkt der x-Achse $x = \frac{0}{0}$, wenn $a = 0$, $b = 0$ ist.

Logische Klassifikation der Werte eines mathematischen Ausdrucks:



Die verschiedenen allwertigen Ausdrücke aus $\frac{0}{0}$ hergeleitet:

$$\left.\frac{a}{b}\right)_{\substack{a=0\\b=0}} = \frac{0}{0} = \left.a \cdot \frac{1}{b}\right)_{\substack{a=0\\b=0}} = 0 \cdot \infty = \left.\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}\right)_{\substack{a=0\\b=0}}$$

$$= \frac{\infty}{\infty} = \left.\frac{a+\lambda}{b} - \frac{\lambda}{b}\right)_{\substack{a=0\\b=0}} = \infty - \infty,$$

$$\left.\frac{a}{b}\right)_{\substack{a=0\\b=0}} = \lambda \left.\frac{\log\frac{a}{b}}{\log\lambda}\right)_{\substack{a=0\\b=0}} = \begin{cases} (\lambda = 0) = 0 \left.\dfrac{\log\frac{a}{b}}{\log a}\right)_{\substack{a=0\\b=0}} = 0^0 \\[2ex] (\lambda = 1) = 1 \left.\dfrac{\log\frac{a}{b}}{\log 1}\right)_{\substack{a=0\\b=0}} = 1^\infty \\[2ex] (\lambda = \infty) = \infty \left.\dfrac{\log\frac{a}{b}}{\log \infty}\right)_{\substack{a=0\\b=0}} = \infty^0. \end{cases}$$

Als Beispiel für den stetig erreichten Wert eines allwertigen Ausdrucks wird die Funktion (Kurve) $y = (x^2 + 2x) : x$ behandelt, für $x = 0$ ist $y = 0 : 0$, d. h. allwertig (die Benennung unbestimmt verwirft der Verf.), also die Gerade $x = 0$ ist der eine Bestandteil der Kurve, der andere (Haupt-)Bestandteil ist die Gerade $y = x + 2$. Für die Funktion

$$y = (x^2 + 2x) : x$$

ist „der stetig erreichte Wert von y für $x = 0$“, der durch $y]_{x=0}$ bezeichnet wird, gleich 2. — Diese Kurve wird auch als Spezialfall (Grenzfall $\varepsilon = 0$) der Kurve $y = (x^2 + 2x) : (x - \varepsilon)$ betrachtet.

Ähnliches gilt für die Funktion $y = f(x)$, welche für $x = a$ eine allwertige Form annimmt; die Funktion ist dann für $x = a$ allwertig, d. h. die Gerade $x - a = 0$ gehört als Bestandteil zur Kurve $y = f(x)$, der andere (Haupt-)Bestandteil der Kurve schneidet die Gerade im Punkt (a, b), wo b der stetig erreichte Wert des betreffenden allwertigen Ausdrucks ist. Der Punkt (a, b) ist ein singulärer Punkt der Kurve, für ihn muß $\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx}$ ebenfalls allwertig werden; der allwertige Ausdruck für $\frac{dy}{dx}$ hat dann zwei stetig erreichte Werte, die sich aus der Gleichung $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0$ ergeben, worin $\varphi(x, y) = 0$ die implizite Form der Gleichung der Kurve ist; von diesen beiden Werten entspricht der eine $\tau = 90^0$ der Geraden $x - a = 0$, der andere gibt die Richtung für den Hauptbestandteil der Kurve im Punkt (a, b).

Setzt man im Differenzenquotienten

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ohne weiteres $\Delta x = 0$, läßt man den Punkt $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ etwa sprungweise mit (x, y) zusammenfallen, so wird $\operatorname{tg}\sigma$ und damit σ allwertig (jede Gerade durch den Punkt (x, y) kann als Verbindungslinie der zwei in (x, y) zusammengefallenen Punkte betrachtet werden). Läßt man aber den Punkt $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ stetig auf einer stetigen Kurve $y = f(x)$ dem Punkt (x, y) sich nähern, so erhält man

$$\operatorname{tg}\sigma]_{\Delta x=0} = \operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\Bigg]_{\Delta x=0} = f'(x)$$

für den Differentialquotienten als stetig erreichten Wert des Differenzenquotienten; dabei müssen Δx und Δy vollkommen in Null übergehen.

Durch den Allwertigkeitsbegriff wird auch der Begriff der hebbaren Unstetigkeit überflüssig, dasselbe gilt für die sprungweisen Unstetigkeiten.

Wz.

G. Gallucci. La funzione aritmetica $E\left(\frac{xA}{B}\right)$ e la teoria euclidea delle proporzioni fra grandezze. Batt. G. **40**, 26-30.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Kommensurabilität der Größen A, B besteht darin, daß die Werte der arithmetischen Funktion $E\left(\frac{xA}{B}\right)$ für $x = 0, 1, 2, \ldots$ eine arithmetische Reihe k-ter Ordnung bilden ($k \geqq 1$).

Wenn vier Größen A, B, C, D der Bedingung $E\left(\frac{xA}{B}\right) = E\left(\frac{xC}{D}\right)$ genügen, so sind die auf einander folgenden Quotienten, welche sich beim Verfahren zur Bestimmung des größten gemeinsamen Maßes der Zahlen A und B ergeben, bezüglich gleich denjenigen, die sich bei demselben Verfahren für C und D ergeben, und umgekehrt. Wz.

A. Durand. Sur un théorème relatif à des moyennes. Darb. Bull. (2) **26**, 181-183.

G. Darboux. Note relative à l'article précédent. Darb. Bull. (2) **26**, 183-184.

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n positive Zahlen, die nicht alle einander gleich sind, S_n^p die Summe der Produkte von je p dieser Größen,

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

ihre Anzahl; nennt man den Ausdruck $M_p = \sqrt[p]{S_n^p / C_n^p}$ das p-te Mittel, so ist (M_1 das arithmetische, M_n das geometrische Mittel und)

$$M_1 > M_2 > M_3 > \cdots > M_p > M_{p+1} > \cdots > M_n.$$

Bezeichnen L, K, H die Summe der Produkte von je $p-2$, $p-1$, p der Größen a mit Ausschluß von a_1 und a_2, so ist $K^2 - HL > 0$.

Eine Gleichung n-ten Grades, welche n positive Wurzeln hat, kann in der Form

$$x^n - \frac{n}{1} a_1 x^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} a_2^2 x^{n-2} + \cdots$$
$$+ (-1)^p C_n^p (a_p)^p x^{n-p} + \cdots + (-1)^n (a_n)^n = 0$$

geschrieben werden. Sollen alle ihre Wurzeln reell und positiv sein, so muß $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > 0$ sein.

Hierzu bemerkt Darboux: Wenn die Gleichung

$$x^n - \frac{n}{1} M_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} M_2^2 x^{n-2} y^2 - \cdots + (-1)^n M_n^n = 0$$

lauter reelle positive, von einander verschiedene Wurzeln hat, so gilt dies auch von den Gleichungen

$$x^2 - 2 M_1 xy + M_2^2 y^2 = 0,\ M_{k-1}^{k-1} x^2 - 2 M_k^k xy + M_{k+1}^{k+1} y^2 = 0;$$

daher ist

$M_1^2 - M_2^2 > 0,\ M_2^4 - M_1 M_3^3 > 0, \ldots, M_k^{2k} - M_{k-1}^{k-1} M_{k+1}^{k+1} > 0$, daher

$$M_2 < M_1,\ M_3^3 < \frac{M_2^4}{M_1} < M_2^3,$$

daher $M_3 < M_2, \ldots, M_{k-1} < M_k$. Wz.

O. Niccoletti. Un esempio di limite. Batt. G. **40**, 247-254.

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n reelle positive Größen,

$$x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq \cdots \geqq x_n > 0,$$

$q_1, q_2, \ldots, q_n$ ihre elementar-symmetrischen Funktionen:

$$q_k = \Sigma x_1 x_2 \ldots x_k \quad (k = 1, 2, \ldots n);\ n_k = \binom{n}{k},$$

und es werde gesetzt

$$x_1' = \frac{1}{n_1} \Sigma x_1,\ x_1' x_2' = \frac{1}{n_2} \Sigma x_1 x_2, \ldots, x_1' x_2' \ldots x_k' = \frac{1}{n_k} \Sigma x_1 x_2 \ldots x_k, \ldots,$$
$$x_1' x_2' \ldots x_n' = x_1 x_2 \ldots x_n;$$

$$x_1'' = \frac{1}{n_1} \Sigma x_1',\ x_1'' x_2'' = \frac{1}{n_2} \Sigma x_1' x_2',\ x_1'' x_2'' \ldots x_k'' = \frac{1}{n_k} \Sigma x_1' x_2' \ldots x_k', \ldots,$$
$$x_1'' x_2'' \ldots x_n'' = x_1' x_2' \ldots x_n';$$

$$x_1^{(\varrho)} = \frac{1}{n_1} \Sigma x_1^{(\varrho-1)},\ x_1^{(\varrho)} x_2^{(\varrho)} = \frac{1}{n_2} \Sigma x_1^{(\varrho-1)} x_2^{(\varrho-1)}, \ldots,$$
$$x_1^{(\varrho)} x_2^{(\varrho)} \ldots x_k^{(\varrho)} = \frac{1}{n_k} \Sigma x_1^{(\varrho-1)} x_2^{(\varrho-1)} \ldots x_k^{(\varrho-1)}, \ldots,$$
$$x_1^{(\varrho)} x_2^{(\varrho)} \ldots x_n^{(\varrho)} = x_1^{(\varrho-1)} x_2^{(\varrho-1)} \ldots x_n^{(\varrho-1)}.$$

Läßt man ϱ unendlich groß werden, so nähern sich die n Größen $x_i^{(\varrho)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ derselben Grenze, nämlich dem arithmetischen Wert der n-ten Wurzel aus dem Produkt $x_1 x_2 \ldots x_n$. Wz.

E. Beke. Ein Mittelwert. Math. és phys. Lapok 10, 310-313 (Ungarisch).

Der Grenzwert der positiven Zahlen $a, a_1, a_2, \dots, b, b_1, b_2, \dots$, wo $a > b$ und

$$a_i = \sqrt{a_{i-1}\, b_{i-1}},\quad b_i = \tfrac{1}{2}(a_i + b_{i-1}),$$

ist

$$L(ab) = \frac{\sqrt{b(a-b)}}{\arccos\sqrt{b/a}}.$$

S.

P. Cattaneo. Sulle progressioni aritmetiche e geometriche d'ordine superiore. Periodico di Mat. (2) 4, 181-192.

In diesem Artikel werden die Haupteigenschaften der arithmetischen und der geometrischen Reihen höherer Ordnungen so entwickelt, daß die große Analogie der beiden Theorien hervortritt. Lp.

Vl. Janku. Wie läßt sich die Summe einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung durch Auflösung von Gleichungen ersten Grades ermitteln? Časopis 31, 82-89 (Böhmisch).

Für Anfänger berechnete Darstellung. Sda.

A. Tagiuri. Estratto di una lettera al Direttore. Periodico di Mat. (2) 4, 208.

Erkennt die Priorität von M. d'Ocagne in einigen Punkten bezüglich der Abhandlungen über gewisse Folgen von Zahlen an (vergl. F. d. M. 31, 285, 1900 und 32, 195, 1901). Lp.

P. A. MacMahon. The sums of powers of the binomial coefficients. Quart. J. 33, 274-288.

Verf. wendet einen von ihm gefundenen Satz (London R. S. Phil. Trans. 1894, 111; F. d. M. 25, 258-259) auf die Herleitung bekannter und einiger neuen Theoreme über Binomialkoeffizienten an und gibt eine allgemeine Methode für die Behandlung solcher Fragen. Wbg.

G. B. Mathews. Question 14733. Ed. Times (2) 1, 40.

Für die Formel

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1} a(x+b)^{n-1} + \binom{n}{2} a(a-2b)(x+2b)^{n-2} + \cdots + \binom{n}{s} a(a-sb)^{s-1}(x+sb)^{n-s} + \cdots$$

wird mit Hülfe der Reihe für e^x ein kurzer und einfacher Beweis von F. W. Hill und A. M. Nesbitt gegeben. Lp.

Aletrop. Question 14876. Ed. Times (2) **1**, 80-81.

Beweis für die Formel

$$1+\binom{a}{1}\binom{b}{1}=\binom{a}{2}\binom{b}{2}+\binom{a}{3}\binom{b}{3}+\cdots=\binom{a+b}{b}.$$

Lp.

F. Morley. On the series $1+\left(\frac{p}{1}\right)^3+\left(\frac{p(p+1)}{1\cdot 2}\right)^3+\cdots$. London M. S. Proc. **34**, 397-402.

Ist p eine reelle oder komplexe Zahl, für welche $|p|<\frac{2}{3}$ ist, so gilt die Formel:

$$1+\left(\frac{p}{1}\right)^3+\left\{\frac{p(p+1)}{1\cdot 2}\right\}^3+\cdots=\cos\frac{p\pi}{2}\,\frac{\Gamma\left(1-\frac{3p}{2}\right)}{\Gamma^3\left(1-\frac{p}{2}\right)}.$$

Aus ihr folgt, wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^m = s_m$ gesetzt wird, daß

$$\frac{1}{2^3}+\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3^3}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4^3}+\cdots=\frac{1}{3}\,\frac{24}{2^5}\,s_4=\frac{s_4}{4}=\frac{\pi^4}{360}$$

ist. Wz.

L. Grossmann. Neue Beziehungen aus dem Gebiete der Binomialkoeffizienten. Arch. der Math. u. Phys. (3) **8**, 14-15.

Die drei Formeln

$$\frac{P_k}{Q_k}=\sum_{n=0}^{P-Q}\frac{(P-k+\lambda-n)_\lambda}{(Q-k+\lambda)_\lambda}(n+k-\lambda-1)_n\frac{(P-Q)_n}{(P-k)_n},$$

$$\frac{P_k}{Q_k}=\sum_{n=0}^{Q-P}(-1)^n\frac{(Q+\lambda-n)_\lambda}{(P-\lambda)_\lambda}(k+\lambda)_n\frac{(Q-P)_n}{Q_n}\qquad (Q>P),$$

$$\frac{P_k}{Q_k}=\sum_{n=0}^{k}\frac{(Q+\lambda-n)_\lambda}{(Q-k+\lambda)_\lambda}(n+P-Q-\lambda-1)_n\frac{k_n}{Q_n}\qquad (P\gtrless Q),$$

in denen über positive Werte von n zu summieren ist, gelten für alle positiven und negativen ganzzahligen Werte von P, Q, k und λ. Wz.

F. GRUBER. Die Bestimmung der Potenzsummen der aufeinander folgenden Zahlen. Math. és phys. Lapok 10, 145-156 (Ungarisch).

Nach einer Methode, welche bekannte elementare Mittel benutzt und unter anderem derjenigen nahe steht, welche in dem Lehrbuche der Elementarmathematik von Baltzer gelehrt wird, dann aber auch die Schlüsse benutzt, welche in Sturms Cours d'analyse zur Ableitung dienen, werden die bekannten Beziehungen entwickelt und unter anderem auch auf die Betrachtung der Bernoullischen Zahlen angewandt. S.

J. J. BARNIVILLE. Questions 14666, 14130, 14151, 14442, 14755, 14855, 14693, 14831, 14059, 14878, 14097. Ed. Times (2) 1, 44-45, 53-54, 54-55, 100-101, 113-114, 114-115; (2) 2, 28-29, 56, 69-70, 82-83, 102.

Wie im letzten Jahrgange der F. d. M. S. 280 angegeben ist, hat Barniville eine große Anzahl spezieller Reihen nach einem gewissen übereinstimmenden Verfahren gebildet, das er in den vorliegenden Aufgaben weiter fortsetzt. Zunächst wird eine rekurrente Bildung einer Zahlenfolge angegeben, z. B. 14666: $u_n + u_{n+3} = 3u_{n+1} + 3u_{n+2}$, 14130: $u_{n-1} + u_{n+1} = 6u_n$, 14442: $u_{n-1} + u_{n+1} = 10u_n$, 14755: $u_{n-1} + u_{n+1} = 3u_n$, 14855: $u_{n-1} + u_{n+1} = 7u_n$ usw. Danach werden aus den gewonnenen Zahlen neue Zahlen gebildet, die reziproken Werte der letzteren als Glieder einer Reihe gewählt, und endlich wird die Summe der Reihe bestimmt. An den Beweisen der angegebenen Resultate haben sich beteiligt: A. M. Nesbitt, Sanjána, H. W. Curjel. Wegen der großen Menge der Ergebnisse, von denen in F. d. M. 32, 280, 1901, einige Beispiele abgedruckt sind, müssen wir auf die einzelnen Artikel selbst verweisen. Lp.

H. BATEMAN. Question 14943. Ed. Times (2) 1, 98-100.

Ist $u_n = \frac{1}{(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)^2} + \frac{1}{[2\cdot 3\cdot 4\cdots (n+1)]^2} + \cdots,$

so gilt die Beziehung:

$$u_n - \frac{2(2n-3)}{(n-1)^3}u_{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2}\cdot\frac{1}{[(n-1)!]^2} = 0.$$

Ferner ergibt sich:

$$u_2 = \frac{1}{3}\pi^2 - 3,\ u_3 = \frac{1}{4}\pi^2 - \frac{39}{16},\ u_4 = \frac{5}{54}\pi^2 - \frac{197}{216}.$$

Lp.

J. W. L. GLAISHER. On a method of increasing the convergence of certain series for π, π^2 &c. Quart. J. 34, 87-96.

Unter Benutzung von Identitäten wie:

$$\frac{1}{n+1+i}+\frac{1}{n+1-i}+\frac{1}{n-1+i}+\frac{1}{n-1-i}=\frac{4n^3}{n^4+4},$$

$$-\frac{1}{n+1+i}-\frac{1}{n+1-i}+\frac{1}{n-1+i}+\frac{1}{n-1-i}=\frac{4(n^2-2)}{n^4+4}$$

werden aus den Reihen $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots$, $\log 2 = \Sigma(-1)^{n-1}\,1/n$, $\pi^2/8 = \Sigma\,1/m^2$, wo m ungerade ist, $\pi^2/6 = \Sigma 1/n^2$ schneller konvergierende hergeleitet:

$$\frac{\pi}{4} = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}\cdot\frac{4}{m(m^4+4)} \qquad (m \text{ ungerade}),$$

$$\log 2 - \tfrac{1}{2} = \Sigma(-1)^{n-1}\frac{1}{n(4n^4+1)},$$

$$\frac{\pi^2}{16} = \Sigma\frac{m^2+2}{m^2(m^4+4)}, \quad \frac{\pi^2}{6} - 1 = \Sigma\frac{2n^2+1}{n^2(4n^4+1)}.$$

Bedeutet λ eine beliebige Zahl, so ergibt sich:

$$\frac{\pi}{4} = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}\frac{(\lambda-1)m^2+(\lambda+1)^2}{m\{(m^2+\lambda-1)^2+4\lambda\}},$$

$$\log 2 - \frac{1}{\lambda+1} = \Sigma(-1)^{n-1}\frac{4(\lambda-1)n^2+(\lambda+1)^2}{n\{(4n^2+\lambda-1)^2+4\lambda\}},$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \Sigma\frac{(3\lambda-1)m^2+(\lambda+1)^2}{m^2\{(m^2+\lambda-1)^2+4\lambda\}},$$

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{2}{\lambda+1} = \Sigma\frac{4(3\lambda-1)n^2+(\lambda+1)^2}{n^2\{(4n^2+\lambda-1)^2+4\lambda\}},$$

woraus für $\lambda = 1$ und $\lambda = \frac{1}{3}$ unter andern die Gleichungen

$$\frac{\pi^2}{128} = \Sigma\frac{1}{m^2\{(3m^2-2)^2+12\}}, \quad \frac{\pi^2}{24} - \frac{3}{8} = \Sigma\frac{1}{n^2\{(6n^2-1)^2+3\}}$$

folgen. Eine große Anzahl von schnell konvergierenden Entwicklungen, z. B.:

$$\Sigma\frac{m^5-2(\lambda+1)m^3+(1-2\lambda-3\lambda^2)m}{\{(m^2+\lambda-1)^2+4\lambda\}^2} = -\frac{1}{4\lambda},$$

$$\Sigma\frac{32n^5-16(\lambda+1)n^3+2(1-2\lambda-3\lambda^2)n}{\{(4n^2+\lambda-1)^2+4\lambda\}^2} = \frac{1-\lambda}{4(1+\lambda)^2},$$

wird für einen beliebigen Wert von λ aufgestellt und daraus für $\lambda = 1$, $\lambda = \frac{1}{3}$ speziellere abgeleitet. Wz.

J. W. L. Glaisher. On series for $k\pi/n$ and $k\pi/\sqrt{n}$ whose terms are the reciprocals of the natural numbers. Messenger (2) **32**, 12-30.

In Eulers Introductio in analysin, Buch I, Kapitel 10, sind aus den unendlichen Reihen für die trigonometrischen und die cyklometrischen Funktionen zahlreiche besondere Reihen für π und die Potenzen von π hergeleitet. Ohne auf diese Quelle hinzuweisen, folgert der Verf. aus der Reihe für arc tg x und aus den Partialbruchzerlegungen für

$$\frac{\pi}{n}\operatorname{cotg}\frac{m\pi}{n} \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{n}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{n},$$

die ebenfalls bei Euler benutzt sind, eine große Zahl spezieller Reihen, die er dann nach gewissen Gesichtspunkten zusammenstellt. Die Abhandlung hängt mit mehreren früher veröffentlichten Arbeiten des Verf. eng zusammen, so besonders mit den beiden, über welche in F. d. M. **32**, 284-285, 1901, berichtet ist. Wegen der großen Menge von neuen zerstreuten Einzelheiten, die neben manchen alten bekannten Formeln in dem Aufsatze gegeben sind, muß Ref. auf das Original verweisen. Lp.

A. Emch. Some applications of the theory of assemblages. Math. Gazette **2**, 173-175.

Darstellung von $1/e$ und $1/\pi$ durch Ausdrücke von der Form:

$$\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_1 n_2}+\frac{1}{n_1 n_2 n_3}-\cdots.$$

Beweis, daß die Ecken eines eingeschriebenen Polygons von unendlich vielen gleich langen Seiten ein abzählbares System von überall dichten Punkten bilden. Lp.

M. Lazzarini. Espressione di $\sqrt{3}$ sotto forma di prodotto infinito. Periodico di Mat. (2) **4**, 196-197.

Aus der Darstellung von $\sin x$ oder von $\cos x$ als unendliches Produkt kann man für $x=\frac{1}{4}\pi$ und $x=\frac{1}{6}\pi$ mit Hülfe des Wallisschen Produktes für $\frac{1}{2}\pi$ unendliche Produkte für $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ erhalten, von denen das erstere in Eulers Introductio, das letztere in Sterns „Algebraischer Analysis" (1860, S. 374 u. 375) steht. In der Meinung, daß $\sqrt{3}$ noch nicht als unendliches Produkt dargestellt sei, entwickelt der Verf. die Formel und benutzt sie zur Darstellung von

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Lp.

E. Hernández Pérez. Series notables. Revista trim. de Mat. 2, 162-166.

Der Verf. findet die Reihe

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}+\cdots;$$

aus ihr leitet er eine ähnliche Entwicklung für $1/x^2$ und $1/x^3$ ab und danach einige Zahlenreihen zur Bestimmung von $1/\pi$, $1/\pi^2$, $1/\pi^3$.

Tx. (Lp.)

E. Estanave. Sur les coefficients des développements en série de tang x, séc x et d'autres fonctions. S. M. F. Bull. 30, 220-226.

Die Größen A werden als Entwicklungskoeffizienten von tang x und sec x erklärt:

$$\operatorname{tang} x = A_1\frac{x}{1!}+A_3\frac{x^3}{3!}+A_5\frac{x^5}{5!}+\cdots+A_{2p-1}\frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!}+\cdots,$$

$$\sec x = A_0+A_2\frac{x^2}{2!}+A_4\frac{x^4}{4!}+\cdots+A_{2p}\frac{x^{2p}}{(2p)!}+\cdots,$$

die Größen D durch die Gleichung $D_n=A_{n+1}-2A_n$; dann ist $A_2=1$, $A_6=61$, $A_{10}=50521,\ldots$, oder $A_2, A_6, A_{10}, A_{14},\ldots$ schließen mit derselben Ziffer (1); $A_3, A_7, A_{11}, A_{15},\ldots$ mit 2; $A_4, A_8, A_{12}, A_{16},\ldots$ mit 5; $A_5, A_9, A_{13}, A_{17},\ldots$ mit 6. Ebenso ist die letzte Ziffer von $D_2, D_6, D_{10},\ldots$ gleich 0, von $D_3, D_7, D_{11},\ldots$ gleich 1, von $D_4, D_8, D_{12},\ldots$ gleich 6.

Die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen können durch die A_λ ausgedrückt werden:

$$B_p=\frac{2p}{2^{2p}(2^{2p}-1)}A_{2p-1},\quad E_p=A_{2p};$$

die Größen A_λ sind ganze Zahlen, können auch direkt mittels der alternierenden Permutationen definiert werden und treten häufig in den Entwicklungen von Funktionen, z. B.

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=A_0+A_1\frac{x}{1!}+A_2\frac{x^2}{2!}+A_3\frac{x^3}{3!}+\cdots,$$

auf; es ist deshalb richtig, daß man ihnen vor den Zahlen B, E, D den Vorzug gibt.

Wz.

E. W. Barnes. On the value of the Fourier series $\sum\limits_{s=-\infty}^{\infty}{}' (-1)\, e^{si\theta}/s^{n+1}$. Messenger (2) 32, 108-110.

Die Note führt den Nachweis, daß, wenn $-\pi<\theta<\pi$,

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty}{}'\frac{(-1)^s e^{si\theta}}{s^{n+1}}=-\frac{(2\pi i)^{n+1}}{(n+1)!}S'_{n+1}\left(\frac{\theta}{2\pi}+\frac{1}{2}\right)$$

ist, wo $S_n(a)$ die n-te Bernoullische Funktion von a bezeichnet, d. h.

das einzige Polynom, das der Differenzengleichung $f(a+1)-f(a)=a^n$ mit der Nebenbedingung $S_n(0)=0$ genügt. Lp.

J. Wasteels. Quelques propriétés des nombres de Fibonacci. Mathesis (3) **2**, 60-63.

Man nehme $u_0=0$, $u_1=1$, $u_{n+2}=u_n+u_{n+1}$; jede Zahl x, für welche $5x^2+4$ oder $5x^2-4$ ein Quadrat ist, gehört der Fibonaccischen Reihe $u_0, u_1, u_2, \dots$ an. Mn. (Lp.)

J. R. Sutton. A series related to Bernoulli's numbers. Nature **66**, 492.

Der Verf. setzt

$$\frac{r}{r+1}=\frac{D_1}{r+1}+\frac{D_2}{2!}+\frac{rD_3}{3!}+\frac{r(r-1)D_4}{4!}+\frac{r(r-1)(r-2)D_5}{5!}+\cdots;$$

dann ist, wenn $B_1, B_2, B_3, \dots$ die Bernoullischen Zahlen bedeuten:

$$D_r=1,\ D_{r-1}=\tfrac{1}{2}=3B_1,\ D_{r-3}=-\tfrac{1}{6}=5B_2,\ D_{r-5}=\tfrac{1}{6}=7B_3,\dots,$$
$$D_{r-p}=(-1)^{\frac{1}{2}(p+1)}(p+2)B_{\frac{1}{2}(p+1)},\ D_{r-2}=D_{r-4}\ D_{r-6}=\cdots=0.$$

Lp.

Weitere Literatur.

J. Burn and E. H. Brown. Elements of finite differences, also solutions to questions set for part I of the examinations of the Institute of Actuaries. London. 8°.

A. Gawrilowitsch. Über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen. Belgrad Ak. **68**, 131-142 (Serbisch).

G. Ingrami. Complementi di matematica ad uso dei licei. Bologna: Cuppini. 119 S. 8°.

J. E. Mayer. Das mathematische Pensum des Primaners. Ein Hülfsbuch für den Primaner humanistischer und realistischer Gymnasien. (In 10-12 Heften.) Heft I: Progressionen, Zinseszins und Rentenrechnung. Heft II: Kettenbrüche, Teilbruchreihen, diophantische Gleichungen, Stereometrie. Freiburg i. B.: Lorenz. 52 u. 53 S. 8°.

Sechster Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

Kapitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

Éd. Goursat. Cours d'analyse mathématique. Tome I. Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en séries. Applications géométriques. Paris: Gauthier-Villars. VI u. 620 S. gr. 8°.

Die zwölf Kapitel des Werkes, das den „Cours de la Faculté des Sciences de Paris" des Verf. bildet, sind betitelt: I. Ableitungen und Differentiale. II. Implizite Funktionen. Funktionaldeterminanten. Vertauschung von Variabeln. III. Taylorsche Formel. Elementare Anwendungen. Maxima und Minima. IV. Bestimmte Integrale. V. Unbestimmte Integrale. VI. Doppelintegrale. VII. Vielfache Integrale. Integration der totalen Differentiale. VIII. Reihenentwicklungen. IX. Potenzreihen. Trigonometrische Reihen. X. Ebene Kurven. XI. Raumkurven. XII. Oberflächen.

Wir haben diese Übersicht vorangeschickt, um gleich erkennen zu lassen, daß dieses neue Lehrbuch der Infinitesimalrechnung sich zwar im ganzen der Anordnung bedient, die in französischen Werken hergebracht ist, daß aber auch manche Abweichungen vorkommen, wie man dies von einem so hervorragenden Forscher wie Goursat zu erwarten berechtigt ist. Außer der elementaren Theorie der Differentialgleichungen werden alle Gebiete behandelt, welche bei den Funktionen reeller Variabeln in Betracht kommen. Daß aber der Standpunkt, der von Anfang an festgehalten ist, nicht derjenige einer elementaren Auffassung niedriger Stufe ist, geht daraus hervor, daß der Begriff der „Ableitung" als von den „Classes de mathématiques spéciales" her bekannt vorausgesetzt wird, daß daher nur der Begriff des Differentials zur Erörterung kommt. Ebenso wird der Begriff der irrationalen Zahlen nicht entwickelt.

Dagegen ist durchweg eine große Mühe auf die Schärfe der Definitionen aller weiteren Begriffe verwandt, und auf dieser Seite liegt ein

großes Verdienst des Buches. Da die Anwendungen zurücktreten, indem immer nur wenige passende Beispiele zur Erläuterung herbeigezogen werden, so bleibt der größte Teil des Raumes für die entwickelnde Darstellung, die sich in ihrer Klarheit und Eleganz an die alten bewährten Muster der französischen Literatur anschließt. Einzelne Partien, die für das erste Studium minder wichtig sind, hat der Verf. durch kleineren Druck kenntlich gemacht. Die Übungsbeispiele sind an das Ende jedes Kapitels verwiesen. Auch diese Übungsaufgaben machen meistenteils höhere Anforderungen als die der gewöhnlichen Sammlungen. Sie sind unter anderem den Prüfungsaufgaben entlehnt, oder auch aus wissenschaftlichen Abhandlungen entnommen. Mit dieser allgemeinen Charakterisierung des ausgezeichneten Lehrbuchs müssen wir uns hier begnügen, da ein Eingehen auf viele bemerkenswerte Eigentümlichkeiten zu weit führen würde. Lp.

M. A. Tichomandritzky. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung (mit Übungsbeispielen). Bd. II, Heft 1. Charkow. 192 S. 8° (Russisch).

Dieses erste Heft des zweiten Bandes des Lehrbuchs enthält sieben Kapitel. Es handelt über die Integration der Differentialgleichungen: 1. Integration der vollständigen Differentiale. 2. Entstehung der Differentialgleichungen, deren Integrale, Existenzbeweise. 3. Methode der Separation der Veränderlichen. 4. Methode des Integrabilitätsfaktors. 5. Differentialgleichungen erster Ordnung und höheren Grades. 6. Singuläre Lösungen. 7. Integration der Differentialgleichungen höherer Ordnungen. Si.

E. Pascal. Lezioni di calcolo infinitesimale. Parte I. Calcolo differenziale. Parte II. Calcolo integrale. 2ª Edizione completamente riveduta. Milano: Ulrico Hoepli, 1902 & 1903. XII u. 311, VIII u. 329 S. 12mo.

In der bekannten hübschen Ausstattung und zu dem billigen Preise der Manuali Hoepli erschienen, geben die beiden Bände, die in erster Auflage 1895 veröffentlicht worden sind, den Inhalt der Vorträge, welche der Verf. für die Studenten hält, die sich nachher technischen Studien widmen wollen. Für diejenigen unter ihnen, die sich später dem Studium der Mathematik zuwenden, hat er als Ergänzung die „Note critiche di calcolo infinitesimale“ (Milano, 1895) herausgegeben. Obgleich also der vorliegende erste Lehrgang dem Plane nach die schärferen Begriffsbestimmungen ausschließt, welche durch die exakte Betrachtung der neueren Schule in die Infinitesimalrechnung eingeführt sind, findet man doch in dem Werke des kenntnisreichen italienischen Mathematikers an vielen Stellen eine genauere Behandlungsweise, als man nach der eigenen Ankündigung in der Vorrede erwarten sollte, und als sie in den einführenden Werken gleicher Richtung sonst üblich ist. Gleich das einleitende Kapitel über reelle Funktionen reeller Variabeln ist dem Geiste der modernen

Funktionentheorie gemäß geschrieben. Und in dem darauf folgenden Kapitel über die Ableitungen einer Funktion stößt man auf manche Bemerkungen, welche den Anfänger auf später zu erörternde Dinge hinweisen. So heben wir nur die Sätze über die Bildung der Ableitungen von unendlichen Reihen hervor, die häufig beiseite gelassen werden, und deren Unkenntnis bei Anfängern so leicht zu Fehlschlüssen verleitet. Ebenso sind in dem zweiten Bande die beiden ersten Kapitel über die bestimmten und die unbestimmten Integrale und über die Integrabilität der Funktionen auf die Höhe der funktionentheoretischen Anschauungen gerückt. Recht vollständig sind auch die Anwendungen behandelt, besonders in der Differentialrechnung. Die Theorie der Differentialgleichungen, welche in dem zweiten Bande nahezu hundert Seiten einnimmt, enthält alles, was in einem Anhange zur Integralrechnung gegeben werden kann. Wie in seinen übrigen Lehrbüchern, hat der geschickte Verf. es auch in diesem Werke verstanden, einen umfangreichen Stoff in knapper Form, aber völlig verständlich für seine Leser darzustellen. Die Notwendigkeit einer zweiten Auflage zeigt, daß diese Gestalt der Veröffentlichung einem wirklichen Bedürfnisse entgegengekommen ist. Lp.

V. Snyder and J. I. Hutchinson. Differential and integral calculus. New York, Cincinnati, Chicago: American Book Company. XVI u. 320 S. gr. 8°.

Das vorliegende Lehrbuch gehört zu der Reihe von Lehrbüchern, die in F. d. M. **29** (1898) angezeigt sind (vergl. S. 229, 230, 480). Während in der damals erschienenen Sammlung der Differential- und der Integralrechnung je ein Band eingeräumt war, hat sich unter den in Betracht kommenden amerikanischen Lehranstalten, an denen die Infinitesimalrechnung in minder großem Umfange gelehrt wird, der Wunsch nach einem kürzeren Buche geltend gemacht, und daher hat sich der eine der Verf. des früheren Lehrbuches der Differentialrechnung, V. Snyder, mit Hutchinson zusammengetan, um jetzt die ganze Infinitesimalrechnung in einem einzigen Bande, also etwa auf der Hälfte des früher beanspruchten Raumes zu behandeln. Die Vorzüge der aus der Praxis des Unterrichts hervorgegangenen Bücher findet man auch in dieser neuen Schrift wieder. „Die elementaren Bücher dieser Reihe sind dazu bestimmt, den Geist der anderen Bücher in die Sekundarschulen zu verpflanzen. Dadurch wird die Arbeit von den Schulen aufwärts bis durch die Universität stetig und harmonisch und frei von dem jähen Übergange, den der Student so oft erfährt, wenn er den Wechsel von seiner vorbereitenden Mathematik zu der in den Kollegien durchmacht." Lp.

A. Lodge. Differential calculus for beginners. London: George Bell and Son. XXV u. 278 S. [Nature **67**, 123-124.]

Das Gebiet, über welches sich dieses Buch erstreckt, umfaßt einen ziemlich vollständigen ersten Lehrgang in der Differentialrechnung be-

züglich der Funktionen einer Variable und eine elementarer gehaltene Behandlung der Funktionen zweier Variabeln nebst einigen vortrefflichen Abschnitten über die Anwendungen der Differentialrechnung auf das Zeichnen von Kurven in rechtwinkligen und in Polarkoordinaten, auf Maxima und Minima sowie auf die angenäherte Lösung von Gleichungen. Die Aufgabe der Integration ist nicht systematisch angegriffen, obgleich einige der wichtigeren Integrale gelegentlich betrachtet sind. Erläuterungen aus anderen Gebieten als dem der Geometrie sind auch benutzt, obschon nicht besonders häufig. Die Beispiele, teils durchgeführt, teils nicht bearbeitet, sind leicht und interessant und durchaus frei von Künsteleien. Die Darstellung ist im ganzen einfach und klar; doch würde sie nach Ansicht des Ref. noch lichtvoller sein, wenn der Gebrauch der Differentiale verschoben worden wäre, bis eine befriedigendere Behandlung von ihnen gegeben werden konnte, als nach dem Plane des Buches möglich war. So lautet der erste Satz des ersten Kapitels folgendermaßen: „Die Differentialrechnung behandelt zunächst die relativen Zunahmen von aufeinander bezogenen Größen, wenn solche Zunahmen unendlich klein sind. . . . Diese kleinen Zunahmen heißen Differentiale.“ Selbst wenn die Bemerkungen über die Ordnungen der unendlichkleinen Größen und die Erläuterungen ihres Gebrauches in Betracht gezogen werden, scheinen die Definitionen der Ableitung und des Differentials zu schwankend zu sein. Auf S. 176 ist der Ausdruck „bedingt konvergent“ in einem ganz ungewöhnlichen Sinne gebraucht. Überhaupt ist die Behandlung der Reihen trotz mancher interessanten Punkte nicht sehr streng. Zum Schluß möge erwähnt werden, daß dem Buche eine Einleitung aus der Feder von Sir Oliver Lodge vorangeht. Gbs. (Lp.)

R. Fricke. Hauptsätze der Differential- und Integral-Rechnung, als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen zusammengestellt. Dritte umgearbeitete Auflage. Mit 74 in den Text gedruckten Figuren. Braunschweig: Friedr. Vieweg u. Sohn. XV u. 218 S. gr. 8°.

Die dritte Auflage des ausgezeichneten Buches unterscheidet sich von den früheren dadurch, daß die drei Hefte in einen Band zusammengefaßt sind. Auch hat der Verf. eine Reihe von Abänderungen und Ergänzungen vorgenommen. Möchte das Werk immer neue Freunde unter Lehrenden und Lernenden finden! G. K.

J. Perry. Höhere Analysis für Ingenieure. Autorisierte deutsche Bearbeitung von R. Fricke und Fr. Süchting. Mit 106 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. VIII u. 423 S. gr. 8°.

Das Studium dieses Buches ist wegen der vielen schönen Beispiele aus Physik und Technik auch dem Studierenden der Mathematik zu empfehlen. Besonders der Anfänger wird sich freuen, hier zu sehen,

wieviel mit den neu erworbenen Begriffen geleistet werden kann. (Im übrigen vergleiche man die Anzeige des englischen Originals „The calculus for engineers and physicists" durch unseren geschätzten Mitarbeiter G. A. Gibson in F. d. M. **28**, 241, 1897. Eine russische Übersetzung des Werkes in zwei Bänden ist ebenfalls schon erschienen. Lp.)

G. K.

Fr. Junker. Höhere Analysis. Zweiter Teil: Integralrechnung. Mit 89 Figuren im Text. Zweite verbesserte Auflage. Leipzig: G. J. Göschen. 208 S. 16mo (Sammlung Göschen, No. 88, 1901).

Fr. Junker. Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung. Mit 42 Figuren im Text. Leipzig: G. J. Göschen. 119 S. 16mo (Sammlung Göschen, No. 146).

Fr. Junker. Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. Mit 50 Figuren im Text. Leipzig: G. J. Göschen. 130 S. 16mo (Sammlung Göschen, No. 147).

Das erste Büchelchen ist in F. d. M. **30**, 263, 1899 angezeigt worden, und wir haben damals sowohl die Brauchbarkeit der Schrift anerkannt, als auch auf die vielen Ungenauigkeiten hingewiesen, die wir einem Mangel an Sorgfalt bei der letzten Durchsicht zuschrieben. Der geringe Preis der einzelnen Bände der Sammlung Göschen verschafft ihnen eine weite Verbreitung, und daher ist das Bedürfnis einer zweiten Auflage nach so kurzer Frist erklärlich. Leider können wir nicht finden, daß die von uns angemerkten Fehler ausgemerzt sind. Wie wenig sorgfältig die Durchsicht gewesen ist, möge ein Beispiel zeigen. Die Kurve $9ay^2 = x(x-3a)^2$ wird auf S. 135 untersucht. Der Bogen zwischen dem Nullpunkte und dem Punkte $x=3a$ soll nach Angabe des Resultates im Punkte $\xi = \frac{4}{5}a$, $\eta = -\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ den Schwerpunkt haben. Dabei ist das Maximum von y in diesem Intervalle $x = 0 \dots 3a$ der Wert $y = \frac{2}{3}a$. Die Unrichtigkeit beider Resultate ist ohne Rechnung sofort erkennbar. Die richtigen Werte sind $\xi = \frac{7}{5}a$ und $\eta = \frac{1}{4}a\sqrt{3}$ (positiv; der negative Wert ist dadurch entstanden, daß für die positiven Ordinaten $3y\sqrt{a} = \sqrt{x}\,(x-3a)$ statt $\sqrt{x}\,(3a-x)$ gesetzt ist). Die unbewiesene und unrichtige Behauptung, daß der Schwerpunkt des Sektors einer beliebigen Kurve immer auf demjenigen Radiusvektor liege, der die Fläche des Sektors hälftet, ist S. 139 wiederholt, ebenso in der Aufgabensammlung zur Integralrechnung (S. 99) und hat hier (S. 103) zu einer falschen Bestimmung des Schwerpunktes bei der Fläche der Archimedischen Spirale geführt.

Die beiden neuen Bändchen sollen als Aufgabensammlungen unabhängig auch von solchen Lesern benutzt werden können, welche die Differential- und Integralrechnung des Verf. nicht besitzen. Sie teilen die Vorzüge und die Schwächen dieser älteren Schriften. Die Aufgaben sind mannigfaltig und interessant; die Korrektheit ist auch bei ihnen nicht immer vorhanden. S. 108 der Aufgaben zur Differentialrechnung liest man in gesperrtem Satz: Die gleichseitige Hyperbel ist die Um-

hüllungslinie einer Geraden, welche von den Schenkeln eines Winkels Dreiecke von konstantem Inhalte abschneidet. Gleich dahinter S. 109 wird angegeben, daß die auf bekannte Weise als Umhüllungslinie gefundene Parabel $\sqrt{x/a} + \sqrt{y/b} = 1$ die Achsen in den Punkten $x = 2a$ und $y = 2b$ berührt. In dem Resultate der folgenden Aufgabe ist a und b vertauscht.

Bei der Aufgabe, die Maxima und Minima von $y = \sin x \cos(x - a)$ zu finden, wird bloß $x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}a$ als Lösung für ein Maximum gegeben, während $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}(4n + 1)\pi$, $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}(4n + 3)\pi$ die Maxima, bezw. die Minima liefert. Bei dem Bogen der Archimedischen Spirale unter den Aufgaben zur Integralrechnung ist nicht darauf geachtet, daß die gegebene Formel an der unteren Grenze des Integrals verschwindet. S. 58 desselben Bändchens sind aus Polarkoordinaten Probekoordinaten geworden. Der Flächeninhalt der Kurve $y^2 = x^3 - x^2$ ist $\frac{2}{15}(x - 1)^{3/2}(2 + 3x)$, nicht aber $\frac{2}{15}(x - 1)^{1/2}(x - 2)$, wie S. 61 steht. Die Unrichtigkeit des gegebenen Resultates leuchtet sofort ein, wenn man für x einen Wert zwischen 1 und 2 setzt. Diese wenigen Proben dürften genügen, um unser obiges Urteil über mangelnde Korrektheit zu begründen. Wir würden diese Dinge nicht erwähnt haben, wenn bei der großen Verbreitung der Göschenschen Sammlung nicht Nachteile für die Studierenden aus der Benutzung dieser Schriften erwüchsen.

Lp.

A. W. Wassilieff. Einführung in die Analysis (Vorlesungen). Heft I. Kasan. 129 S. 8° (Russisch).

Das erste Heft enthält die Lehre von den ganzen Zahlen, die Theorie der Kongruenzen und Potenzreste, eine historische Übersicht über die Entwicklung der Zahlenlehre und Übungen aus der Zahlentheorie.

Si.

W. Hobson. On the infinite and the infinitesimal in mathematical analysis. London M. S. Proc. 1902, 23 S. 8°.

Die bei Niederlegung des Vorsitzes gehaltene Rede handelt von dem Einfluß, den der Begriff des Unendlichen auf die Entwicklung der Mathematik ausgeübt hat. Es werden dabei auch die Cantorschen Theorien besprochen.

G. K.

E. V. Huntington. A complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitude. American M. S. Trans. 3, 264-279.

Verf. stellt sechs Postulate auf, die dem Aufbau der Theorie der stetigen Größen zugrunde gelegt werden können. Er zeigt, daß dieses System von Postulaten die folgenden Bedingungen erfüllt, weshalb er es ein vollständiges nennt. Die Postulate sind 1. verträglich, 2. ausreichend, 3. unabhängig (d. h. keins folgt aus den übrigen). Die Arbeit

berührt sich stark mit derjenigen Hölders (Leipz. Ber. **53**, 1-64; F. d. M. **32**, 79, 1901), dem der Verf., wie er selbst sagt, viele Anregungen verdankt. Er gibt am Anfang eine Übersicht über die Literatur des Gegenstandes. G. K.

E. V. Huntington. Complete sets of postulates for the theories of positive integral and of positive rational numbers. American M. S. Trans. **3**, 280-284.

Durch Modifikation des für die stetigen Größen angegebenen vollständigen Systems von Postulaten ergeben sich zwei gleichberechtigte für den Inbegriff der ganzen Zahlen. In ähnlicher Weise wird ein vollständiges System von Postulaten erhalten, welches die positiven rationalen Zahlen charakterisiert. G. K.

Weitere Literatur.

E. W. Bass. Elements of differential calculus. Second edition revised. New York: Wiley. VIII u. 356 S. 12mo.

A. J. M. Chefcoeur. Cours d'analyse. Calcul différentiel et calcul intégral. Méthode simple. Anvers. 336 S. 8°.

W. H. Echols. An elementary text-book on the differential and integral calculus. New York: Holt. X u. 480 S. 8°.

H. B. Lübsen. Ausführliches Lehrbuch der Analysis zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens bearbeitet. 10. verbesserte Auflage. Leipzig: Brandstetter. IV u. 203 S. 8°.

J. W. Mellor. Higher mathematics, for students of chemistry and physics, with special reference to practical work. London and New York: Longmans. 566 S. 8°.

E. Rouché et L. Lévy. Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs. Vol. II: Calcul intégral (intégrales indéfinies et définies; séries de Fourier; fonctions elliptiques; équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles; calcul des variations). Paris: Gauthier-Villars. XI u. 848 S. 8°.

P. E. Smith. Elementary calculus: a text-book for the use of students in general science. New York: American Book Co. II u. 89 S. 12mo.

H. Sonnet. Premiers éléments du calcul infinitésimal, à l'usage des jeunes gens qui se destinent à la carrière d'ingénieur. Paris: Hachette. III u. 360 S. 8°.

N. S. Stoliaroff. Sammlung von Übungen aus der höheren Mathematik. Heft 1: Beispiele der Differentiation von Funktionen (Aufgaben und Lösungen). Kiew. 8°. 112 S. (Russisch).

O. Niccoletti. Sopra un teorema della teoria dei limiti. Periodico di Mat. (2) **5**, 58-59.

Kapitel 2.

Differentialrechnung (Differentiale, Funktionen von Differentialen. Maxima und Minima.)

J. Perry. Symbol for partial differentiation. Nature **66**, 53, 271-272, 520.

Th. Muir. Symbol for partial differentiation. Nature **66**, 271, 520.

A. B. Basset. Symbol for partial differentiation. Nature **66**, 577.

Perry schreibt $\left(\frac{du}{dx}\right)_y$, um auszudrücken, daß bei der Differentiation der Funktion u von x und y nach der Variable x die Variable y konstant bleibt. Wenn daher k eine gewisse Wärmekapazität bezeichnet, so haben $\left(\frac{dk}{dt}\right)_v$ oder $\left(\frac{dk}{dt}\right)_p$ oder $\left(\frac{dk}{dt}\right)_\varphi$ einen bestimmten Sinn, der durch das Symbol $\left(\frac{\partial k}{\partial t}\right)$ nicht wiedergegeben wird. Auf die Anfrage, wie dies mit Hülfe des Symbols ∂ ausdrückbar sei, macht Muir Mitteilung über die Art, wie er sich helfe, besonders bei höheren Ableitungen. Seine Bezeichnung wird aber wegen zu großer Schwierigkeiten für den Druck als nicht annehmbar befunden. Lp.

F. Engel. Die höheren Differentialquotienten. Deutsche Math.-Ver. **11**, 187-188.

Ankündigung der folgenden Arbeit. Hervorhebung der Beziehungen zu Study. G. K.

F. Engel. Die höheren Differentialquotienten. Leipz. Ber. **54**, 17-51.

Es handelt sich um das schwierige Problem, für die Elemente zweiter und höherer Ordnung eine ähnliche analytische Darstellung zu finden, wie sie für die Elemente erster Ordnung durch Clebschs Konnexkoordinaten geliefert wird. Theoretisch hatte der Verf. diese z. B. für die Theorie der algebraischen Differentialgleichungen so wichtige (von F. Klein gestellte) Aufgabe schon früher erledigt (Leipz. Ber. **45**, 468 bis 476; F. d. M. **25**, 645, 1893). Hier gibt er eine auch für die Praxis brauchbare Lösung.

Eine allgemeine Definition für die Elemente beliebig hoher Ordnung in der projektiven Ebene gewinnt der Verf. durch schrittweises Vorgehen, und zwar nach einem Prinzip, das er folgendermaßen ausspricht:

1. Wir nennen zwei unendlich benachbarte Elemente n-ter Ordnung vereinigt liegend, wenn die Elemente $(n-1)$-ter Ordnung, denen sie angehören, entweder identisch sind oder vereinigt liegen.

2. Hat man ein Element n-ter Ordnung und ein zweites, ihm unendlich benachbartes und mit ihm vereinigt liegendes, so ist dadurch stets ein Element $(n+1)$-ter Ordnung bestimmt, das jenem Elemente n-ter Ordnung angehört, und umgekehrt erhält man auf diese Weise alle einem Elemente n-ter Ordnung angehörigen Elemente $(n+1)$-ter Ordnung.

Da die Elemente erster Ordnung in befriedigender Weise definiert sind (Punkt und hindurchgehende Gerade) und auch der Begriff der vereinigten Lage für sie feststeht, so kann man sukzessiv zur Definition der Elemente beliebig hoher Ordnung aufsteigen. Man erkennt leicht, daß die so definierten Elemente n-ter Ordnung die gewöhnlichen Elemente $(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ umfassen und eine im Cantorschen Sinne abgeschlossene Mannigfaltigkeit bilden, welche bei allen projektiven Transformationen invariant bleibt. Um die zu Anfang bezeichnete Aufgabe zu lösen, muß man solche Koordinaten für ein Element n-ter Ordnung finden, die eine eindeutige und ausnahmlose Darstellung aller Mitglieder jener abgeschlossenen Mannigfaltigkeit erlauben.

Sind x, y rechtwinklige Koordinaten, so wird jedes Element erster Ordnung, dessen Punkt im Endlichen liegt (was sich durch proj. Transf. bewirken läßt), dargestellt durch x, y und zwei Verhältnisgrößen p und q, welche die Gerade des Elements $p(X-x)+q(Y-y)=0$ festlegen. Die Bedingung für die vereinigte Lage zweier unendlich benachbarten Elemente ist $pdx+qdy=0$. Unter den ∞^1 Elementen $(x+dx,\ y+dy,\ p+dp,\ q+dq)$, die diese Bedingung erfüllen, gibt es eins, welches mit (x, y, p, q) den Punkt, ein anderes, welches mit ihm die Gerade gemein hat. Versucht man jene ∞^1 Elemente durch zwei Verhältnisgrößen σ und τ darzustellen, derart, daß das erstgenannte Element durch $\tau=0$, das letztgenannte durch $\sigma=0$ charakterisiert ist, so wird man auf folgende Proportion geführt:

$$\tau q : \tau p : \sigma = dx : -dy : (pdq - qdp).$$

Da $dx, dy, pdq-qdp$ nicht gleichzeitig verschwinden können, so lange die Elemente (x, y, p, q), $(x+dx,\ y+dy,\ p+dp,\ q+dq)$ verschieden sind, so ist $\sigma:\tau$ bestimmt. Umgekehrt bestimmt jedes Wertsystem σ, τ $(\neq 0, 0)$ ein einziges zu (x, y, p, q) gehöriges Element zweiter Ordnung. Stellt man nun noch den Punkt und die Gerade von (x, y, p, q) durch homogene Koordinaten dar, so ergeben sich als Koordinaten eines Elements zweiter Ordnung die acht Größen

$$x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3, \sigma, \tau,$$

$$(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0;\ x_1, x_2, x_3 \neq 0, 0, 0;$$
$$u_1, u_2, u_3 \neq 0, 0, 0;\ \sigma, \tau \neq 0, 0)$$

die man, unter λ, μ, ν beliebige nicht verschwindende Zahlen verstanden, bezüglich mit $\lambda, \lambda, \lambda, \mu, \mu, \mu, \mu^3\nu, \lambda^3\nu$ multiplizieren darf. Dieselben Koordinaten hat auch Study (allerdings auf anderem Wege) gefunden (Die Elemente zweiter Ordnung in der ebenen projektiven Geometrie,

Leipz. Ber. **53**, 338-403; F. d. M. **32**, 533, 1901). y' und y'' drücken sich folgendermaßen durch die neuen Elementkoordinaten aus:

$$y' = -\frac{u_1}{u_2}, \quad y'' = \frac{\sigma x_3^3}{\tau u_2^3}.$$

Ein Element dritter Ordnung in der Ebene wird in befriedigender Weise charakterisiert durch die acht Koordinaten seines Elements zweiter Ordnung und zehn Größen ϱ und ϱ_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$, zwischen denen die Relation $\varrho_{11} + \varrho_{22} + \varrho_{33} = 0$ besteht.

Auch für die Elemente zweiter Ordnung des Raumes erledigt der Verf. seine Aufgabe vollständig, und zwar geht er wieder von einer geometrischen Definition des Elements zweiter Ordnung aus, die die gewöhnlichen Elemente (x, y, z, p, q, r, s, t) umfaßt, sie aber zu einer abgeschlossenen Mannigfaltigkeit ergänzt. Die Schwierigkeiten der analytischen Durchführung werden durch Anwendung der symbolischen Rechnung überwunden. G. K.

S. Pincherle. Sulle derivate ad indice qualunque. Bologna Mem. (5) **9**, 745-758.

Während die bisherigen Untersuchungen über Ableitungen von beliebigem Index, unter denen die von Liouville, Riemann, Tardy und Holmgren besonders hervorragen, wegen der Willkürlichkeit des Ausgangspunktes etwas zu wünschen übrig lassen, nimmt Verf. in der vorliegenden Arbeit die Frage vom Standpunkt des Operationskalkuls in Angriff, indem er sich auf analytische Funktionen beschränkt. Die Frage lautet also: Welches ist die natürlichste Art, die Operation D^s für einen beliebigen Wert des Index s zu definieren, und zwar für die analytischen Funktionen oder für die monogenen Zweige regulärer analytischer Funktionen, die in der Ebene der komplexen Variable x in einem Mittag-Lefflerschen Stern mit der Ecke $x = 0$ gegeben sind?

Um die Antwort zu finden, werden zunächst die Grundeigenschaften von D^m (m ganz, positiv) zusammengestellt, nämlich: 1. D ist eindeutig bestimmt für jede analytische Funktion; 2. D ist eine distributive Operation; 3. D genügt der Gleichung: $D(x\varphi) = xD\varphi + \varphi$, woraus sich die rekurrente Definition von D^m ergibt: $D^m = DD^{m-1}$.

Diese Eigenschaften werden nun zu erweitern gesucht; zunächst wird ein negativer ganzer Index angenommen, und um dann D^s für jeden beliebigen Index s zu definieren, wird folgende Aufgabe gestellt: Es soll für den ganzen Bereich einer analytischen Funktion oder einen Teil C desselben eine Operation A_s mit folgenden Eigenschaften definiert werden: a) sie soll für jeden reellen oder komplexen Wert von s und für jede Funktion des Bereichs C definiert sein; b) sie soll distributiv sein: $A_s(\varphi + \psi) = A_s(\varphi) + A_s(\psi)$; c) sie soll der Gleichung

$$DA_{s-1} = A_s$$

genügen; d) sie soll auch die Gleichung befriedigen:

$$A_s(x\varphi) = xA_s(\varphi) + s\,A_{s-1}$$

und e) sich für ein ganzzahliges $s = m$ auf D^m reduzieren. Diese Operation wird alsdann als Differentiation zum Index s bezeichnet.

Wie diese Bestimmung durchgeführt wird, muß in der Abhandlung nachgelesen werden. Es mag hier nur eine der Hauptformeln (XIII) wiedergegeben werden, zu der der Verf. gelangt:

$$x^s D^s(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} \frac{x^n}{\Gamma(1-s+n)} D^n \varphi.$$

Wird $s = -m$ angenommen (m positiv ganz), so folgt hieraus die verallgemeinerte Bernoullische Formel:

$$D^{-m}\varphi = \frac{x^m}{(m-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!\,(m+n)} D^n \varphi.$$

Gz.

K. Žorawski. Eine Bemerkung über Ableitungen unendlich hoher Ordnung. Krak. Abh. **41**, 212-215 (Polnisch).

Vgl. F. d. M. **32**, S. 294.

R. E. Moritz. Generalization of the differentiation process. American J. **24**, 257-302.

Sind a und b zwei beliebige Begriffe, und wird auf a (Operand) durch irgend einen Prozeß, der symbolisch durch das Zeichen ⊃ angedeutet wird, b (Operator) angewandt, so daß c das Ergebnis des Prozesses ist, dann schreibt Verf.

$$a \supset b = c.$$

Wird dagegen a als Operator, b als Operand angesehen, so ist zu schreiben:

$$b \subset a = c,$$

wo das Symbol ⊂ eine neue Operation bedeutet. Zu jedem kombinatorischen Prozeß gehören im allgemeinen zwei inverse Prozesse, die mit den Symbolen ∪ und ∩ bezeichnet und erster, bezw. zweiter inverser Prozeß von ⊃ genannt werden, so daß:

$$c \cup b = a, \quad c \cap a = b.$$

Irgend einer dieser Prozesse ⊃, ⊂, ∪, ∩ kann als der direkte Prozeß angesehen werden usf. In der vorliegenden Abhandlung wird angenommen, daß der ursprüngliche direkte Prozeß einwertig ist.

Von derartigen symbolischen Betrachtungen ausgehend, gelangt Verf. zu einem Prozeß, den er als „Quotientiation" bezeichnet, und der eine Verallgemeinerung der Differentiation darstellt. Der Inhalt der Abhandlung ergibt sich aus folgender Übersicht: 1. Notation and definitions. 2. Preleminary theorems. 3. Limiting processes allied to differentiation. 4. Quotiential coefficients. 5. Quotientiation not depending on differen-

tiation. 6. Parallelisms between quotiential and differential processes. 7. Functions of two independent variables. 8. Functions of three or more independent variables. 9. Successive quotientiation. 10. Syzygies connecting differential and quotiential processes. 11. The process $\mathfrak{Z}_3$ in the ordinary algebra. 12. The limiting process denoted by $\frac{ry}{rx}$. 13. De Morgan's extension of algebraic processes. 14. General extension of the differentiation process. 15. General ratientiation formulae.

Gz.

E. Moritz. Quotientiation, an extension of the differentiation process. Nebraska Acad. Proceed. 1901. S. 112-117.

Ist eine Funktion $y = f(x)$ gegeben, so ergibt der Differentiationsprozeß

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Analog definiert Verf. eine neue Rechenoperation, die Quotientiation, durch folgenden Grenzübergang:

$$\frac{qy}{qx} = \lim_{k=1} \left\{ \log_k \frac{f(kx)}{f(x)} \right\}.$$

Im übrigen vergleiche man das vorstehende Referat. Sk.

G. K. Susloff. Partielle geometrische Ableitungen der Vektorfunktion zweier Argumente. Kiew Univ. No. 2 (Bericht Kiew Ges. 1900) 93-100 (Russisch).

Beweis der Formel

$$\frac{\partial}{\partial u}\{V_v \cos(V_v K)\} - \frac{\partial}{\partial v}\{V_u \cos(V_u K)\}$$
$$= V_v K_u \cos(V_v K_u) - V_u K_v \cos(V_u K_v)$$

(V_u, V_v, K_u, K_v sind partielle Ableitungen der Vektoren V und K nach den Veränderlichen u und v). Deren Anwendung zum Beweise der Formeln von Darboux-Combescure (Darboux: Théorie des surfaces I § 40). Si.

W. Stegemann, E. Rath, W. Fuhrmann. Lösung einer Aufgabe. Arch. der Math. und Phys. (3) 3, 83-84.

Beantwortung einer von Fuhrmann gestellten Aufgabe über den kürzesten Abstand zweier windschiefen Geraden. Jhk.

E. Piccioli. Sulla minima distanza di due iperspazi. Periodico di Mat. (2) **5**, 41-42.

Der Satz, daß zwischen zwei windschiefen Geraden das gemeinschaftliche Lot die kürzeste Verbindungslinie ist, wird auf die beiden dualen Räume S_k und S_{n-k-1} des Raumes von n Dimensionen S_n ausgedehnt.
Lp.

Th. Meyer. Über die größten und kleinsten durch einen Punkt gehenden Sehnen einer Kurve zweiter Ordnung. Zs. f. math. u. naturw. Unt. **33**, 377-379.

In der Note „Über eine Potenzbeziehung bei den Kurven zweiter Ordnung" (Zs. f. Math. u. Phys. **38**, 253-256; F. d. M. **25**, 1116, 1893) hat der Verf. einen Satz veröffentlicht, der aussagt, daß durch einen Punkt P in der Ebene einer Kurve zweiter Ordnung vier größte und kleinste Sehnen gehen, und der zugleich eine Konstruktion dieser Sehnen enthält. Hierdurch wird die Lösung der im vorigen Jahrgange von Heymann, Diem und Pfaff behandelten Aufgabe in eleganterer Weise erledigt (vergl. F. d. M. **32**, 110 u. 589, 1901). Lp.

J. R. Harris. Question 6754. Ed. Times (2) **1**, 36-38.

Wenn das harmonische Mittel der Segmente einer Sehne (ohne Rücksicht auf das Vorzeichen) durch einen festen Punkt O innerhalb einer Ellipse ein Maximum oder ein Minimum ist, so ist die Sehne Tangente eines der beiden konfokalen, durch O gehenden Kegelschnitte. Beweise dieses Satzes von W. H. Jackson und K. J. Sanjána, nebst Bestimmung desjenigen konfokalen Kegelschnittes, der das Maximum gibt.
Lp.

Kapitel 3.

Integralrechnung.

E. J. Nanson. On a symbolic process of integration. Messenger (2) **31**, 137-140.

Durch symbolische Schreibweise der Leibnizschen Formel für die Differentiation eines Produktes und durch die Umkehrung der so erhaltenen Formel gelangt der Verf. zu einer Relation, welche beim Integrieren das Verfahren der partiellen Integration ersetzen kann. Man vergleiche einen verwandten Gedanken bei W. W. Johnson, F. d. M. **18**, 296, 1886. Lp.

G. SCOTT. Elementary integrals obtained by calculation and not by inference. Ed. Times (2) 2, 89.

Der Verf. benutzt das Verfahren der partiellen Integration zur Herleitung einiger einfachen Integrale. Beispielsweise

$$\int \sin x dx = x \sin x - \tfrac{1}{2} x^2 \cos x - \frac{x^3}{3!} \sin x + \int \frac{x^3}{3!} \cos x dx \text{ etc.}$$

$$= \sin x \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) + \cos x \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)$$

$$= \sin x \cdot \sin x + \cos x (\cos x - 1) = 1 - \cos x.$$

Lp.

E. DA RIN. Sull' integrazione indefinita delle funzioni inverse. Periodico di Mat. (2) 5, 137-139.

Beweis des Satzes: Wenn das unbestimmte Integral einer Funktion $f(x)$, die mit ihrer Umkehrung in einem gegebenen Körper Γ enthalten ist, durch Funktionen desselben Körpers ausdrückbar ist, so gehört auch das Integral der Umkehrung der Funktion demselben Körper an. Lp.

A. GULDBERG. Über die Maxima und Minima der Integrale, die eine kontinuierliche Gruppe gestatten. Christiania. Vidensk. Selsk. Skrifter I. Math.-naturv. Klasse, 1902, No. 7, 10 S.

Ist ein Integral $J = \int f(x, y, y') dx$ invariant bei einer kontinuierlichen Gruppe G, so gestattet die Lagrangesche Differentialgleichung zweiter Ordnung $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ die Gruppe G. Es werden hier die verschiedenen Fälle untersucht, je nachdem das gegebene Integral die verschiedenen Gruppen der Ebene gestattet. Gbg.

H. F. BAKER. Further application of matrix notation to integration problems. Lond. M. S. Proc. 34, 347-360.

Kapitel 4.

Bestimmte Integrale.

V. STRAZZERI. I teoremi del valor medio negli integrali definiti e le loro principali applicazioni. Periodico di Mat. (2) 4, 209-246.

Mit der vorliegenden Arbeit will der Verf. die bekannteren der sogenannten Mittelwertsätze bezüglich der bestimmten Integrale von reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen den Lesern des Periodico näher

führen. Hierbei bemüht er sich zunächst, die Bedingungen zu beleuchten, die zu ihrer Gültigkeit erforderlich sind. Sodann zeigt er den Gebrauch der Mittelwertsätze bei der numerischen Auswertung eines bestimmten Integrals, wenn die zu integrierende Funktion das Produkt zweier Funktionen ist und der eine Faktor durch einen passenden Wert innerhalb der Integrationsgrenzen ersetzt wird. Endlich werden die Relationen zwischen den Mittelwerten aufgestellt, die in den Transformationsformeln auftreten, welche der analytische Ausdruck jener Sätze sind; auch werden die gefundenen Formeln auf den Fall bestimmter Integrale komplexer Funktionen ausgedehnt. Es folgen Beweise verschiedener Sätze, die auf den vorangehenden Entwickelungen beruhen, besonders auch Betrachtungen über die Taylorsche Formel und die Maclaurinsche Summenformel, für welche ein neuer Restausdruck in Vorschlag gebracht wird.

Lp.

H. Brunn. Neue Mittelwertsätze über bestimmte Integrale. Münch. Ber. **32**, 91-112.

Auf Grund einer geometrischen Repräsentation, ähnlich der von C. Neumann für den zweiten Mittelwertsatz benutzten (Über die nach Kugel- und Zylinderfunktionen fortschr. Entwicklungen, Leipzig, 1881), erhält Verf. neue Mittelwertsätze für bestimmte Integrale, die überall da von Bedeutung sein werden, wo es sich um abteilungsweise monotone Funktionen handelt.

G. K.

G. A. Gibson. The second integral theorem of mean value: a geometrical proof. Edinb. M. S. Proc. **20**, 1-5.

Der Satz wird in der Form betrachtet:

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^\xi \psi(x)\,dx \qquad (a<\xi<b),$$

wo $\varphi(x)$ eine positive abnehmende Funktion ist. Bei Annahme der Bezeichnung

$$F(x)=\varphi(a)\int_a^x \psi(x)\,dx,\; f(x)=\int_a^x \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$$

wird das Verhalten der die Funktionen $F(x)$ und $\varphi(x)$ darstellenden Kurven unter der besonderen Berücksichtigung ihrer möglichen Schnittpunkte erörtert. Diese Erörterung ist tatsächlich eine geometrische Darlegung des aus den Abelschen Ungleichungen fließenden Beweises.

Gbs. (Lp.)

E. Bortolotti. Alcuni teoremi che possono tener luogo di quello della media, per funzioni le cui derivate non sono atte alla integrazione definita. Rom. Acc. L. Rend. (5) **11**$_2$, 118-124.

Das Hauptergebnis der Arbeit ist folgender Satz: $f(x)$ sei in dem

Intervall $(x_0 \ldots x)$ monoton, endlich und derivierbar und $\varphi(x)$, $\psi(x)$ integrierbar (im Riemannschen Sinne). K sei der Inbegriff derjenigen Punkte von $(x_0 \ldots x)$, die nach Ausscheidung einer diskreten Punktmenge übrig bleiben. Es werde ferner angenommen, daß in jedem Teilintervall $(x' \ldots x'')$, $x_0 \leqq x' < x'' \leqq x$, die untere Grenze der Werte, welche φ in den Punkten von K annimmt, nicht größer ist als die untere Grenze der Werte von $|f'(x)|$ in denselben Punkten, während die obere Grenze der Werte von $|f'(x)|$ nicht größer ist als die obere Grenze der Werte von ψ. Alsdann hat man

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx \leqq |f(x) - f(x_0)| \leqq \int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx.$$

Der Satz hat natürlich nur für solche Funktionen f ein Interesse, welche eine nicht-integrierbare Derivierte haben. G. K.

H. S. Carslaw. Note on the inequality theorem that $mx^{m-1}(x-1) > x^m - 1 > m(x-1)$, unless when $0 < m < 1$, when $mx^{m-1}(x-1) < x^m - 1 < m(x-1)$, where x is any positive quantity other than unity. Edinb. M. S. Proc. **20**, 29-30.

Die Ungleichung wird aus dem Mittelwertsatze in seiner Anwendung auf das Integral $\int_1^x x^{m-1}\,dx$ hergeleitet. Gbs. (Lp.)

H. Lebesgue. Intégrale, longueur, aire. Annali di Mat. (3) 7, 231-359; auch sep. Thèse. Milan: Rebeschini. 129 S. 4°.

Legt man die Riemannsche Definition des bestimmten Integrals zugrunde, so gibt es, wie Volterra gezeigt hat, nicht-integrable Derivierte. Das Fundamentalproblem der Integralrechnung, eine Funktion zu finden, deren Derivierte man kennt, läßt sich also durch Integration im Riemannschen Sinne nicht immer lösen. Durch eine Verfeinerung der alten Erklärung des Integrals als eines Flächeninhalts ist es dem Verf. gelungen, einen Integralbegriff zu bilden, der diesen Übelstand beseitigt (wenigstens für den Fall, daß die Derivierte zwischen endlichen Grenzen liegt). Existiert das Riemannsche Integral, so fällt das Lebesguesche mit ihm zusammen.

Die Grundlage der ganzen Arbeit ist mengentheoretisch. Es wird ein neuer Maßbegriff für Punktmengen eingeführt.

Hat man auf einer Geraden eine ganz im Endlichen gelegene Punktmenge E, so ist es auf unendlich viele Weisen möglich, ihre Punkte in eine endliche oder abzählbar unendliche Menge von Intervallen einzuschließen, die nicht übereinander greifen. Man bilde die Summen der Längen dieser Intervalle. Die untere Grenze aller derartigen Summen nennt Lebesgue das äußere Maß (mesure extérieure) von E und bezeichnet es mit $m_e(E)$. Betrachtet man auf einer Strecke von der

Länge l, die alle Punkte von E enthält, die nicht zu E gehörigen Punkte, so hat man eine Menge E_1. Die von der Wahl der Strecke unabhängige Zahl $l - m_e(E_1)$ heißt das innere Maß (mesure intérieure) von E und wird mit $m_i(E)$ bezeichnet. Es ist offenbar immer $m_e \geqq m_i$. Im Falle der Gleichheit heißt die Punktmenge E meßbar und

$$m(E) = m_e(E) = m_i(E)$$

ihr Maß.

Hat man in der Ebene eine ganz im Endlichen gelegene Punktmenge, so lassen sich ihre Punkte auf unendlich viele Arten in eine (endliche oder abzählbare unendliche) Menge von Dreiecken einschließen, und es ergibt sich alsdann, ganz ähnlich wie oben, ein äußeres und ein inneres Maß für die Punktmenge. Im Falle der Gleichheit beider heißt die Menge meßbar und der gemeinsame Wert ihr Maß. Diese Definition der meßbaren Mengen läßt sich leicht auf einen Raum von beliebig vielen Dimensionen ausdehnen.

Das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ wird nun in folgender Weise erklärt: Man denke sich in jedem Punkt des Kurvenbogens $y = f(x)$, $a \leqq x \leqq b$, die Ordinate gezeichnet und betrachte den Inbegriff E aller Punkte, die auf diesen Ordinaten liegen, d. h. die Punkte

$$x = a + \vartheta(b - a),\ y = \vartheta_1 f(x) \qquad (0 \leqq \vartheta,\ \vartheta_1 \leqq 1).$$

Ist E eine meßbare Menge, so gilt dasselbe von der Menge E_1 aller Punkte von E mit positiver Ordinate, sowie von der Menge E_2 aller Punkte von E mit negativer Ordinate; es existieren also die Zahlen $m(E_1)$, $m(E_2)$, und Lebesgue setzt nun

$$\int_a^b f(x)\,dx = m(E_1) - m(E_2).$$

$f(x)$ nennt er eine summierbare Funktion (fonction sommable). Er entwickelt eine Reihe von Eigenschaften dieser Integrale. Der neue Integralbegriff läßt sich leicht auf Funktionen von mehreren Veränderlichen ausdehnen.

Bei der Definition der Begriffe „Bogenlänge“ und „Inhalt einer krummen Fläche“ wird eine möglichst vollkommene Analogie angestrebt. Die Länge einer Kurve C ist der unterste Häufungswert der Längen gleichmäßig nach C konvergierender polygonaler Linien, der Inhalt einer Fläche F der unterste Häufungswert der Inhalte gleichmäßig nach F konvergierender polyedraler Flächen. Es wird untersucht, wie weit der neue Integralbegriff die Darstellung dieser Größen ermöglicht.

In den letzten Kapiteln werden gewisse Modifikationen erörtert, welche infolge der neuen Definitionen in Sätzen der Flächentheorie eintreten. Nennt man z. B. eine Fläche abwickelbar, wenn sie sich derart auf die Ebene abbilden läßt, daß die Längen erhalten bleiben, so existieren, wie gezeigt wird, abwickelbare Flächen, die kein Geraden-

stück enthalten. Andererseits gibt es gewundene Kurven, die in jedem Punkt eine Schmiegungsebene haben, und deren Tangenten trotzdem eine nicht abwickelbare Fläche bilden. Flächen und Kurven sind dabei immer durch Funktionen dargestellt, die eine gewisse Zahl von Ableitungen besitzen. G. K.

O. Stolz. Zur Erklärung der Bogenlänge und des Inhaltes einer krummen Fläche. American M. S. Trans. 3, 23-37.

Ist $y = f(x)$ in (a, b) reell und eindeutig (x und y denke man als rechtwinklige Koordinaten), so wird der durch

$$A \equiv (a, f(a)),\ B \equiv (b, f(b))$$

begrenzte Bogen am natürlichsten als Grenzwert einbeschriebener polygonaler Linien gemessen. Man zerlege ($a = a_0$, $b = a_n$) in die Teilintervalle $(a_0, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{n-1}, a_n)$ und nenne A_i den zu $x = a_i$ gehörigen Kurvenpunkt ($A_0 = A$, $A_n = B$). Gibt es eine Zahl L von solcher Beschaffenheit, daß jedem $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl δ entspricht derart, daß $|L - \sum_1^n \overline{A_{r-1} A_r}| < \varepsilon$ ist, sofern nur die Teilintervalle sämtlich kleiner als δ sind, so wird dem Bogen AB die Zahl L als sein Maß zugeordnet. Hat $f(x)$ überall eine Ableitung $f'(x)$, die in (a, b) endlich und integrierbar ist, so erfüllt das Integral

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

die an L gestellte Forderung. Benutzt man für den Bogen AB die analytische Darstellung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqq t \leqq \beta$, so hat man unter gewissen Bedingungen $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\, dt$. Verf. behandelt einige Fälle, in denen diese Gleichung zutrifft. Sein Beweis stützt sich auf folgende Bemerkung. $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ sei in dem Bereich

$$\alpha \leqq x_1 \leqq \beta, \alpha \leqq x_2 \leqq \beta, \dots, \alpha \leqq x_k \leqq \beta$$

endlich. Man zerlege (α, β) durch Einschaltung von

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1}$$

zwischen $\alpha = \alpha_0$ und $\beta = \alpha_n$ in die Teilintervalle $\delta_r = \alpha_r - \alpha_{r-1}$ und verstehe unter f_r irgend einen Wert zwischen der unteren und oberen Grenze von f in dem Teilbereich

$$(1) \qquad \alpha_{r-1} \leqq x_1 \leqq \alpha_r, \alpha_{r-1} \leqq x_2 \leqq \alpha_r, \dots, \alpha_{r-1} \leqq x_k \leqq \alpha_r.$$

Hat dann $\sum_r f_r \delta_r$ bei unendlicher Verkleinerung der δ einen Grenzwert J, so ist die Funktion $f(t, t, \dots, t)$ in (α, β) integrierbar, und man hat

$$J = \int_a^b f(t, t, \ldots, t)\, dt.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von J ist $\lim (g_r - k_r)\,\delta_r = 0$, wobei g_r und k_r die obere, bezw. die untere Grenze von f in dem Teilbereich (1) bedeuten. Eine Verallgemeinerung der obigen Bemerkung spielt bei der Behandlung der Oberflächen eine Rolle. Die Oberflächen werden als Grenzwerte von Summen einbeschriebener Dreiecke gemessen. G. K.

O. Stolz. Nachtrag zum Artikel: „Zur Erklärung der Bogenlänge usw.“ (S. 23f. dieses Bandes). American M. S. Trans. 3, 302-304.

Verf. vergleicht seine Darstellung der Lehre von der Rektifikation der Kurven mit derjenigen Jordans (Cours d'Analyse, 2e éd. t. I, Nr. 105 bis 111). G. K.

L. Heffter. Zur Theorie der reellen Kurvenintegrale. Gött. Nachr. 1902, 115-140.

Der Begriff des Kurvenintegrals wird hier etwas modifiziert, wodurch die Beweise verschiedener wichtiger Sätze erleichtert werden, z. B. des Cauchyschen Integralsatzes $\int (f dx + g dy) = 0$ (Zurückführung auf den Fall eines rechteckigen Integrationsweges). Besonders interessant sind die Betrachtungen über die Bedingung $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$, deren Zustandekommen bei sukzessiver Einführung der Voraussetzungen über f und g verfolgt wird.

Des Verf. Definition für das Kurvenintegral läßt sich folgendermaßen wiedergeben: Der Integrationsweg werde dargestellt durch $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $a \leqq t \leqq b$ mit der Voraussetzung, daß φ, ψ in (a, b), einschließlich der Grenzen, stetig und von beschränkter Schwankung sind. Der Integrationsweg soll also ein stetiger, rektifizierbarer Kurvenbogen sein. Die Funktion $f(x, y)$ sei für einen Bereich B erklärt, dem C angehört. Man zerlege nun $(a = t_0,\ b = t_n)$ in die Teilintervalle

$$(1) \qquad (t_0, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_{n-1}, t_n)$$

und bilde die Summen

$$(2) \qquad \sum_1^n (x_k - x_{k-1})\, f(\xi_k, \eta_k), \quad \sum_1^n (y_k - y_{k-1})\, f(\xi_k, \eta_k),$$

wo $x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$ ist und (ξ_k, η_k) irgend ein Punkt von B in dem Rechteck mit den Ecken (x_{k-1}, y_{k-1}), (x_k, y_k), dessen Seiten parallel zu den Axen sind. Wenn dann die Summen (2) bei unendlicher Verkleinerung der Intervalle (1) bestimmten Grenzwerten zustreben,

so werden diese mit $(C)\int f dx$ bezw. $(C)\int f dy$ bezeichnet. Solche Grenzwerte sind z. B. vorhanden, wenn f in allen Punkten von C stetig ist.

Das Neue an dieser Definition ist, daß der Bereich B nicht bloß aus den Punkten von C zu bestehen braucht. Betrachtet man f nur in dem Bereich C, läßt man also B auf C zusammenschrumpfen, so bekommt man die alte Definition des Kurvenintegrals. G. K.

W. F. Osgood. Problems in infinite series and definite integrals; with a statement of certain sufficient conditions which are fundamental in the theory of definite integrals. Annals of Math. (2) 3, 129-146.

Es werden gewisse Analogien zwischen Sätzen über unendliche Reihen und Sätzen über bestimmte Integrale hervorgehoben. Insbesondere wird das Integral

$$J=\int_g^\infty f(x,\alpha)\,dx$$

betrachtet unter der Voraussetzung, daß f in dem durch

$$g\leqq x,\quad a\leqq\alpha\leqq b$$

definierten Bereich S stetig ist. Das Integral heißt in (a,b) „gleichmäßig konvergent", wenn jedem $\varepsilon>0$ ein $G>g$ derart entspricht, daß für alle Werte α in (a,b)

$$\left|\int_G^x f(x,\alpha)\,dx\right|<\varepsilon\qquad(x>G)$$

ist. Es gilt nun u. a. folgendes:

Wenn J in (a,b) gleichmäßig konvergent ist, so stellt es daselbst eine stetige Funktion $\varphi(\alpha)$ dar; ferner ist

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\varphi(\alpha)\,d\alpha=\int_g^x dx\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}f(x,\alpha)\,dx\qquad(a\leqq\alpha_0<\alpha_1\leqq b)$$

(Analogon des Satzes von der gliedweisen Integration der Reihen). Ist $\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ in S stetig und das Integral

$$\int_g^\infty\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx$$

in (a,b) gleichmäßig konvergent (während J nur konvergent zu sein braucht), so hat man

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}=\int_g^\infty\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx.$$

(Analogon des Satzes von der gliedweisen Differentiation der Reihen.)

Am Schluß der Arbeit ist eine Anzahl von Übungsaufgaben über unendliche Reihen und Produkte, sowie über bestimmte Integrale zusammengestellt. G. K.

L. Fuchs. Über Grenzen, innerhalb deren gewisse bestimmte Integrale vorgeschriebene Vorzeichen behalten. Berl. Ber. 1902, 4-10.

Verf. stellt sich folgende Aufgabe: Ist $F(u, u', \ldots, u^{(n)})$ eine quadratische Form der unbestimmten Funktion u und ihrer n ersten Ableitungen mit Koeffizienten, die gegebene reelle Funktionen der reellen Veränderlichen x sind; wird ferner angenommen, daß u ebenfalls reell ist und nebst ihren Ableitungen in der Nähe von $x = a$ sich regulär verhält, so soll ein Intervall (a, b) angegeben werden derart, daß das Vorzeichen des Integrals

$$\int_a^x F(u, u', \ldots, u^{(n)})\, dx$$

für jede beliebige der bezeichneten Funktionen u beständig dasselbe bleibt, solange x dem Intervall (a, b) angehört. G. K.

L. Fuchs. Über Grenzen, innerhalb deren gewisse bestimmte Integrale vorgeschriebene Vorzeichen behalten. J. für Math. **124**, 278-291.

Eingehende Behandlung der obigen Aufgabe. G. K.

O. Kellogg. Zur Theorie der Integralgleichung $A(s, t) - \mathbf{A}(s, t) = \mu \int_0^1 A(s, r)\, \mathbf{A}(r, t)\, dr$. Gött. Nachr. 1902, 165-175.

Die Vergleichung der Neumannschen Lösung der obigen Integralgleichung

$$\mathbf{A}(s, t) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \mu + \mathbf{A}_2 \mu^2 + \cdots,$$

wo

$$\mathbf{A}_h(s, t) = (-1)^h \int_{0\,(h)}^1 A(s, s_1)\, A(s_1, s_2) \ldots A(s_{h-1}, s_h)\, A(s_h, t)\, ds_1 \ldots ds_h,$$

$$\mathbf{A}_0(s, t) = A(s, t),$$

mit der Fredholmschen Lösung

$$\mathbf{A}(s, t) = \frac{\Gamma_0 + \Gamma_1 \mu + \Gamma_2 \mu^2 + \cdots}{1 + d_1 \mu + d_2 \mu^2 + \cdots}$$

(Zähler und Nenner ganze transzendente Funktionen), wobei

$$d_h = \frac{1}{h!} \int_{\substack{0 \\ (h)}}^{1} \begin{vmatrix} A(s_1, s_1) \dots A(s_1, s_h) \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ A(s_h, s_1) \dots A(s_h, s_h) \end{vmatrix} ds_1 \dots ds_h,$$

$$\Gamma_h = \frac{1}{h!} \int_{\substack{0 \\ (h)}}^{1} \begin{vmatrix} A(s_1, s_1) \dots A(s_1, s_h)\, A(s_1, t) \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ A(s_h, s_1) \dots A(s_h, s_h)\, A(s_h, t) \\ A(s, s_1) \dots A(s, s_h)\, A(s, t) \end{vmatrix} ds_1 \dots ds_h$$

ist, liefert

$$\Gamma_h = \mathbf{A}_h + \mathbf{A}_{h-1} d_1 + \mathbf{A}_{h-2} d_2 + \cdots + \mathbf{A}_0 d_h \quad (h = 1, 2, \dots).$$

Diese Formel wird direkt verifiziert, womit ein neuer Beweis der Fredholmschen Formel erbracht ist. G. K.

C. Störmer. Om nogle bestemte integraler. Christiania. Vidensk.-Selsk. Forhandl. 1902, No. 6, 9 S.

Der Cauchysche Residuensatz wird verwertet, um den folgenden Integralsatz zu beweisen: Wenn $a, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ solche reellen Zahlen sind, daß

$$a > |\varphi_1| + \cdots + |\varphi_n| + |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_m|,$$

so ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin \varphi_1 x}{x} \cdot \frac{\sin \varphi_2 x}{x} \cdots \frac{\sin \varphi_n x}{x} \cdot \cos \alpha_1 x \cdots \cos \alpha_m x \cdot \frac{\sin a x}{x} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdots \varphi_n.$$

Zuletzt werden einige Verallgemeinerungen dieser Formel angeführt. Gbg.

G. H. Hardy. Notes on some points in the integral calculus (continued). Messenger (2) 32, 1-3, 92-97, 159-165, 187-192.

Über die ersten acht Noten vergleiche man F. d. M. 32, 504, 1901. Die Note IX handelt über das Integral $\int^{\infty} \{A - \varphi(\sin^2 x)\} \psi(x)\, dx$, wo $\psi(x)$ eine endliche positive Funktion von x bedeutet, die für $x = \infty$ stetig sich der Null nähert, und wo $\int_0^{\pi} \varphi(\sin^2 x) dx$ als konvergent angenommen ist. Wenn $\int^{\infty} \psi(x)\, dx$ divergiert, so läßt sich immer eine solche Konstante A finden, daß $\int^{\infty} \{A - \varphi(\sin^2 x)\} \psi(x) dx$ konvergiert.

In der Note X bestreitet der Verf. die Richtigkeit der von Stolz („Grundzüge der Differential- und Integralrechnung“ **3**, 144) ausgesprochenen Ansicht: „Die Unterscheidung von absolut und nicht absolut konvergenten uneigentlichen Integralen, welche bei den einfachen Integralen vorzunehmen war, entfällt bei den Doppelintegralen. Es gibt nur absolut konvergente uneigentliche Doppelintegrale. Hierin unterscheiden sich dieselben aber von den Doppelreihen, bei denen neben der absoluten Konvergenz die nicht absolute oder bedingte vorkommt.“ Der Verf. behauptet, daß bezüglich der Doppelreihen und der Doppelintegrale der in jenen Sätzen aufgestellte Unterschied nicht bestehe, und daß der Anschein nur von einer unglücklichen Terminologie herrühre. Er selbst habe in einer Abhandlung (Lond. M. S. Proc. **34**, 16; F. d. M. **32**, 303, 1901) unterschieden zwischen „relativ“, aber „unbedingt“ konvergenten Integralen und „bedingt“ konvergenten, indem der letztere Ausdruck auf diejenigen Fälle beschränkt wird, bei denen besondere Bestimmungen in der Definition des Integrals getroffen werden. Die Note XI erläutert diese Auseinandersetzungen an einzelnen Beispielen. Am Schlusse dieses Artikels wird der folgende Unterschied zwischen den einfachen und den Doppelintegralen mit ∞ als oberer Grenze hervorgehoben. Wenn $\int_0^\infty \varphi(x)\,dx$ konvergiert, so ist $\int_x^\infty \varphi(x)\,dx$ für $x > 1$ eine stetige Funktion von x. Dagegen braucht $\int_x^\infty \int_{-y}^\infty \varphi(x,y)\,dx\,dy$ nicht eine stetige Funktion jeder einzelnen Variable zu sein. In der XII. Note wird die Operation erörtert, welche zu der doppelten Integration die Umkehrung bildet. Hierüber werden einige Festsetzungen gemacht und mehrere bezügliche Sätze bewiesen.

Lp.

G. H. Hardy. On the continuity and discontinuity of definite integrals which contain a continuous parameter. Quart. J. **34**, 28-53.

Es wird eine Anzahl von Theoremen über die Kontinuität von Integralen der Form

$$\int_a^A f(x,\alpha)\,dx, \quad \int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx \quad \text{und} \quad \int_a^A f(x,\alpha)\,\varphi(x)\,dx$$

innerhalb gewisser Bereiche aufgestellt, wenn die Funktionen $f(x)$, resp. $\int \varphi(x)\,dx$ gewisse Stetigkeitsbedingungen erfüllen.

Sh.

G. H. Hardy. On the integral $\int_{-\infty}^\infty \frac{\log(ax^2+2bx+c)^2}{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}\,dx$.

Messenger (2) **32**, 45-50.

Der Wert des im Titel stehenden bestimmten Integrals wird für die vier zu unterscheidenden Fälle ausgerechnet, nämlich je nachdem die Faktoren der beiden in ihm vorkommenden quadratischen Formen reell oder imaginär sind. So ist z. B. für den Fall lauter imaginärer Faktoren im Zähler und im Nenner das Resultat

$$\frac{2\pi}{\sqrt{a\gamma-\beta^2}}\cdot\log\frac{H+2\Delta}{a},$$

wo $H = a\gamma + ca - 2b\beta,\ \Delta = \sqrt{(ac-b^2)(a\gamma-\beta^2)}$.

Lp.

G. H. Hardy. Question 14055. Ed. Times (2) 2, 41-42.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\sin x\sqrt{\sin x}\,dx = \frac{(\pi-4)(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\{\Gamma(\frac{1}{4})\}^2},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\log\sin x\,dx}{\sqrt{\sin x}} = -2^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}\{\Gamma(\tfrac{1}{4})\}^2,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\log(\sec\frac{1}{2}x+\operatorname{tg}\frac{1}{2}x)\,dx}{\sqrt{\sin x}} = 2^{\frac{5}{2}}\sqrt{\pi}\{\Gamma(\tfrac{1}{4})\}^2,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin x(\log\sin x)^2\,dx = (\log 2-1)^2+1-\frac{1}{12}\pi^2.$$

Lp.

J. Cullen. Question 14808. Ed. Times (2) 1, 82-83.

$$a\int_a^{-a}(t^2-a^2)^m\cos tx\,dt = 2^{m+1}\cdot m!\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{m+1}\cos ax.$$

Beweis von Sanjána. Lp.

A. C. Dixon. On the value of $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{m-1}\theta\cos n\theta\,d\theta$. Messenger (2) 31, 158.

Durch Benutzung einer Formel aus der Theorie der hypergeometrischen Reihe ergibt sich

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{m-1}\theta\cos n\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2^m}\frac{\Gamma(m)}{\Gamma\{\frac{1}{2}(m+n+1)\}\,\Gamma\{\frac{1}{2}(m-n+1)\}}.$$

Lp.

E. N. Barisien. Identità di certi integrali definiti. Periodico di Mat. (2) 4, 325-327.

Fortsetzung der Betrachtungen, über welche in F. d. M. **31**, 318, 1900 berichtet ist. Lp.

H. Tomkys. Formula for the perimeter of an ellipse. Nature 65, 536.

Als empirische Formel für den Umfang U einer Ellipse mit den Achsen a und b wird gegeben:

$$U = \pi\left[\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right]^{\frac{1}{\alpha}}, \text{ wo } \alpha = \frac{\log 2}{\log \pi - \log 2}.$$

Lp.

Th. Muir. Formula for the perimeter of an ellipse. Nature 66, 174-175.

Die Formel der vorstehend angezeigten Note liefert für den ersten Näherungsbruch $\frac{3}{2}$ von α, wenn a und b die Halbachsen sind:

$$U = 2\pi\{\tfrac{1}{2}(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}})\}^{\frac{2}{3}},$$

von Muir im Messenger (2) **12**, 149 (F. d. M. **15**, 602, 1883) gegeben. Als eine andere Formel von guter Annäherung wird empfohlen:

$$U = 2r\pi,\; r = \frac{1}{16}(21A - 2G - 3H),$$

wo A das arithmetische, G das geometrische, H das harmonische Mittel aus den Halbachsen der Ellipse bezeichnet. Lp.

A. Bohren. Volumen eines Abschnittes eines Kegelstumpfes. Math. naturw. Mitt. (2) **4**, 72-74.

Als Übungsaufgabe zur Integralrechnung berechnet der Verf. das Volumen des Kegelhufs, den eine Ebene, die durch einen Durchmesser der unteren Grundfläche und durch die zu diesem Durchmesser parallele Tangente der oberen Deckfläche eines Kreiskegels gelegt ist, vom Kegel abtrennt. Da der Verf. die Rechnung für die verallgemeinerte Aufgabe nicht bis zu einer Schlußformel durchführt, so erlaubt sich Ref. darauf aufmerksam zu machen, daß die Lösung ohne Zuhülfenahme der Infinitesimalrechnung leicht nach dem Verfahren durchführbar ist, das er in der Note gezeigt hat: „Sobre la división del volumen y del área curva del cono recto de base circular" (Progreso mat. **5**. 105-110; F. d. M. **26**, 736, 1895). Lp.

A. B. Bohren. Über das Airysche Integral. Bern. Mitt. 1902, 236-239.

Darstellung von $\int_0^\infty \cos \frac{1}{2}\pi(x^3 - mx)\,dx$, welches Integral die Intensität der einzelnen Farben im Regenbogen bestimmt, mit Hülfe von Besselschen Funktionen. Lp.

J. J. Bielankin. Geometrischer Lehrsatz. Kiew. Univ. No. 2 (Bericht Kiew Ges. 1900, Russisch).

Diese auch in Mosk. Math. Samml. **21**, 461-463 abgedruckte Note enthält den Beweis folgenden Lehrsatzes: Wenn in einer geschlossenen Kurve B die den Vektoren einer anderen Kurve A parallelen Sehnen gezogen und jede in gegebenem Verhältnis geteilt ist, so hängt der Inhalt der von den Teilungspunkten beschriebenen Kurve nur vom Inhalt von A und vom Werte des Teilungsverhältnisses ab. Si.

J. J. Bielankin. Verallgemeinerung der Guldinschen Sätze. Kiew Univ. No. 10, 1-10 (Bericht Kiew Ges. 1901, Russisch).

Bewegt sich ein dem Inhalt nach konstantes, der Form nach aber kontinuierlich veränderliches ebenes Flächenstück so, daß seine Ebene zur räumlichen Kurve L in ihrem veränderlichen Punkte A normal bleibt, und die Projektion des Vektors AG (G Schwerpunkt des homogen gedachten Flächenstückes P) auf die Hauptnormale von L in A das konstante Verhältnis m zum Krümmungsradius ϱ von L in A besitzt ($R \cdot \cos(R, n) = m \cdot \varrho$), so wird das von P im Raume „ausgehöhlte" Volumen V gleich $(1 - m)\, P \cdot S$ (wo S die Länge des von A beschriebenen Bogens der Kurve L).

Analoge Betrachtungen über die Verallgemeinerung des zweiten Guldinschen Satzes. Si.

J. P. Dolbnia. Über eine geometrische Anwendung der pseudoelliptischen Integrale. Arbeiten d. phys. Sektion d. Ges. d. Naturf. Moskau **11**, No. 1, 20-23 (Russisch).

Das durch die Kegelfläche $xy - x^2 = z^2$, die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

die Koordinatenebene XOY und gewisse andere, durch OZ hindurchgehende Ebenen begrenzte Volumen wird durch ein pseudoelliptisches Integral ausgedrückt. Anwendung der dazu führenden Transformation auf die geometrische Interpretation einiger elliptischen Integrale erster Art. Si.

H. Kinkelin. Quadraturen. Pr. Ober-Realschule Basel. 30 S. 4°.

Elementare Bestimmung des Inhalts und des statischen Moments einer Klasse von Körpern (der sog. Obelisken) mit Anwendungen auf die näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale und die Ausgleichungsrechnung.

Auf S. 17 und 18 findet sich ein äußerst eleganter Beweis für das sog. Dirichletsche Korollar:

$$\lim_{n=\infty} \int_g^h f(x) \sin nx\, dx = 0,$$

unabhängig von dem Dirichletschen Theorem. G. K.

J. Buchanan. The errors in certain quadrature formulae. London M. S. Proc. 34, 335-345.

Formeln für die näherungsweise Quadratur mit Angabe der Fehlergrenzen. Anwendung auf zwei Beispiele, um die Güte der Formeln zu zeigen. G. K.

C. Marenghi. Sovra una formula del Cauchy. Periodico di Mat. (2) 5, 59-60.

Die Note beschäftigt sich mit der Kroneckerschen Integralformel, welche bei einem geschlossenen Integrationsgebiet c den Überschuß der Anzahl der gemeinschaftlichen Wurzeln von $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$ innerhalb c gibt, für welche die Funktionaldeterminante D positiv ist, über die, für welche D negativ ist. Die in der Kroneckerschen Formel enthaltene Bestimmung kann für den Fall zweier Variabeln als das Ergebnis eines eingehenderen Studiums des Cauchyschen Integrals angesehen werden. Lp.

P. Paci. Generalizzazione di un teorema di Gauss. Palermo Rend. 16, 192-195.

A sei ein fester Punkt im Raume, M ein Punkt auf einer geschlossenen Fläche S, die überall eine bestimmte Tangentialebene hat, und ds ein den Punkt M enthaltendes Element von S. Man setze $AM = r$ und bezeichne mit (rn) den Winkel zwischen MA und der innern Normale von S im Punkte M. Dann hat nach Gauß das Integral

$$(1) \qquad \int \frac{\cos(rn)}{r^2}\, ds,$$

erstreckt über S, den Wert 4π, 2π oder 0, je nachdem A innerhalb von S, auf S oder außerhalb von S liegt.

Dieser Gaußsche Satz wird in der Weise verallgemeinert, daß man statt (1) das Integral

$$(2) \qquad \int \varphi(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \frac{\cos(rn)}{r^2}\, ds$$

betrachtet, wo φ eine stetige Funktion ist und α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche die Richtung MA mit drei rechtwinkligen Axen bildet. Es zeigt sich, daß (2) im Innern von S einen konstanten Wert, außerhalb von S den Wert Null hat. Ist φ von der Form

$$\psi(\cos^2\alpha, \cos^2\beta, \cos^2\gamma),$$

so hat (2) auch auf S einen konstanten Wert. Unter Anwendung dieses Resultats wird für die Oberfläche eines Ellipsoids eine Belegung angegeben, deren Potential auf der ganzen Fläche konstant ist. G. K.

H. MacColl. Question 14853. Ed. Times (2) **1**, 97-98.

Man setze $\int_{y_2}^{y_1} dy \int_{x_2}^{x_1} dx \cdot \varphi(x, y) = y_{12}\, x_{12}$, dann ist

$$y_{12}\, x_{1'} + y_{32}\, x_{31} + y_{10}\, x_{20} = y_{32}\, x_{32} + y_{10}\, x_{10} + y_{30}\, x_{21}.$$

Beweise von Sanjána und dem Fragsteller. Lp.

O. Stolz. Die Zahlen der ebenen Flächen. Deutsche Math. Ver. **11**, 47-48.

Verf. hebt gegenüber einem Bedenken von Schoenflies hervor, daß die Anwendung dreieckiger Flächenelemente bei der Erklärung des eigentlichen Doppelintegrals zum Zwecke der Transformation sich besonders gut eigne, beim Existenzbeweis aber keine größeren Schwierigkeiten hervorrufe als die Anwendung rechteckiger Flächenelemente.

D.

C. Lorenz. Die eigentlichen dreifachen Integrale. Monatsh. f. Math. **13**, 3-118.

Eine gewissenhafte Behandlung der dreifachen Integrale nach einem Verfahren, welches O. Stolz im Falle der Doppelintegrale (in seinen „Grundzügen der Differential- und Integralrechnung“) benutzt hat. Es werden auch bekannte Dinge ausführlich reproduziert. Zum Schluß behandelt Verf. einige geometrische Anwendungen. G. K.

E. L. Bunitzky. Über Reihenentwicklung einiger bestimmten Integrale. Odessa Ges. **20**, 53-55 (Russisch).

Verf. hat die Formel gefunden

$$\int_{a_1}^{a_1+h_1} \cdots \int_{a_n}^{a_n+h_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \prod_1^n \frac{e^{h_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda}} - 1}{\frac{\partial}{\partial x_h}} f.$$

Si.

J. J. Timtschenko. Erweiterung eines Satzes von Parseval aus der Reihentheorie. Odessa Ges. **20**, 26-27.

Verf. gibt die Formel:

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} a_k a_k^{(1)} a_k^{(2)} \dots a_k^{(n)}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(e^{i(x_1+x_2+\cdots+x_n)}) \cdot \prod_1^n f_j(e^{-ix_j})\, dx_1 \cdots dx_n,$$

wo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} a_k x^k, \quad f_j(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} a_k^{(j)} x^k$$

und p eine ganze Zahl $\geqq n$. Si.

T. J. I'A. Bromwich. On a definite integral. Cambr. Proc. **11**, 419-422.

Auswertung des n-fachen Integrals

$$\int_{(n)} V e^{-U} dx_1\, dx_2 \dots dx_n,$$

erstreckt von $-\infty$ bis $+\infty$ für alle n Variabeln. Dabei bedeuten U und V quadratische Formen von $x_1, \dots, x_n$ und einer Konstante x_0. Dasselbe Problem ist von Black (Cambr. Trans. **16**, 219) behandelt worden. Sk.

M. A. Tichomandritzky. Sur la formule de Stokes. Charkow Ges. (2) **7**, No. 6, 284-286.

Verf. gibt einen einfachen und von der Anzahl der Veränderlichen unabhängigen Beweis des bekannten Satzes. Si.

Weitere Literatur.

H. Amstein. Détermination de la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{a^2 \sin^{2p}\theta + b^2 \cos^{2p}\theta}.$$

Bull. Soc. Vaud. (4) **39**, 1-15.

A. Bohren. Über die Fresnelschen Integrale. Bern. 48 S. 8° (1901).

P. Stäckel. Sur l'intégrale de Dirichlet. (Traduction par M. Laugel.) Nouv. Ann. (4) **2**, 57-63.

Vergl. F. d. M. **32**, 301, 1901.

M. Kummer. Darlegung der Weberschen und verwandten Integrale, ihre Theorie und Anwendung. Bern. 63 S. 8°.

Kapitel 5.

Gewöhnliche Differentialgleichungen.

A. R. Forsyth. Theory of differential equations. Part III. Ordinary linear equations. Vol. IV. Cambridge: University Press. XVI + 534 S. 8°.

Der vorliegende Band bildet den dritten Teil des Forsythschen Werkes über die Theorie der Differentialgleichungen, dessen zweiter, aus zwei Bänden bestehender Teil in F. d. M. **31**, 322-324, 1900, ausführlich vom Ref. besprochen worden ist. Verf. behandelt in diesem Bande die Theorie der linearen Differentialgleichungen, beschränkt sich aber, dem verhältnismäßig kleinen Raume entsprechend, lediglich auf die Anwendungen der Funktionentheorie, um eine gleichmäßige Darstellung des Stoffes zu erreichen. So fehlen die formalen Theorien, die ausführlichere Darstellung des Zusammenhanges mit den homogenen Formen, die Diskussion der Differentialinvarianten und -kovarianten (ein Gebiet, auf dem gerade der Verf. selbst schöpferisch tätig gewesen ist), sowie die Anwendung der Gruppentheorie; Verf. verweist für diese Gebiete auf das Schlesingersche Handbuch und auf Picards Traité d'Analyse. — Im ersten Kapitel wird die Existenz eines durch die Anfangsbedingungen eindeutig bestimmten „synektischen“ Integrals in der Umgebung einer nichtsingulären Stelle nach den Methoden von Fuchs und Günther bewiesen und die Begrenzung seines Kontinuitätsbereiches durch die singulären Punkte der Differentialgleichung festgestellt; ferner werden die linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten nach Hermite behandelt und die Fundamentaldeterminante sowie das Fundamentalsystem von Integralen eingeführt. Im zweiten Kapitel wird der allgemeine Charakter eines Fundamentalsystems von Integralen in der Umgebung einer singulären Stelle diskutiert; insbesondere werden die Hamburgerschen Untergruppen recht ausführlich behandelt. Die drei folgenden Kapitel beschäftigen sich mit denjenigen Gleichungen, deren Integrale sich regulär verhalten, und zwar wird im dritten Kapitel die Untersuchung für eine singuläre Stelle durchgeführt (determinierende Gleichung und Funktion; Bedingungen für das Fehlen der Logarithmen; wesentliche und außerwesentliche singuläre Stelle), im vierten Kapitel für alle singulären Stellen (Fuchssche Gleichungen; Normalform; Riemanns P-Funktion und hypergeometrische Differentialgleichung usw.), während Kapitel V die Differentialgleichungen mit algebraischen Integralen behandelt; hier seien besonders die neueren Untersuchungen von Painlevé und Boulanger über die Gleichungen dritter Ordnung hervorgehoben, die ausführlich wiedergegeben sind. Die in Schlesingers Handbuch so gründlich durchgeführte Theorie der Differentialgleichungen mit homogenen Relationen zwischen den Integralen dagegen ist vom Verf. sehr oberflächlich behandelt worden; der auf S. 217 angegebene Satz ist falsch

oder zum mindesten in seiner Allgemeinheit wertlos, da seine Ausnahmefälle die Hauptsache sind (es ist die von Kronecker oft gerügte „schlechte“ Allgemeinheit, mit der man alles aussagen kann). Im sechsten Kapitel werden solche Gleichungen betrachtet, welche nur einige Integrale von regulärem Typus besitzen, und der Einfluß derselben auf die Reduzibilität der Gleichungen gezeigt (Untersuchungen von Frobenius, Lagranges Adjungierte). Kapitel VII beschäftigt sich mit der Bestimmung der Integrale, welche zwar nicht regulär, aber irregulär von besonderem Typus sind, der sogenannten normalen und subnormalen Integrale (determinierender Faktor; Rang; Untersuchungen von Thomé, Hamburger, Poincaré, Cayley und Liapunoff). Kapitel VIII ist den Gleichungen gewidmet, welche nicht zu den vorhergehenden Typen gehören; die Methode der konvergenten unendlichen Determinanten wird benutzt, um die vollständige Lösung einer solchen Gleichung zu erhalten. Kapitel IX behandelt die Theorie der Gleichungen, deren Koeffizienten einfach- oder doppeltperiodische Funktionen sind. Im Kapitel X endlich werden die Gleichungen mit algebraischen Koeffizienten untersucht; es enthält auch einen kurzen (etwas oberflächlichen) Abriß der Poincaréschen Verknüpfung dieser Gleichungen mit den automorphen Funktionen. — Verf. hat wieder, wie in den ersten Bänden, eine Menge originalen Stoffes verarbeitet; es kann ihm aber, wie dort, der Vorwurf nicht erspart werden, daß die Durcharbeitung dieses Stoffes nicht immer vollständig und gleichmäßig genug ist. Lobend hervorzuheben sind wieder die zahlreichen, oft ganz durchgeführten Beispiele, die meist Originalarbeiten entnommen sind, ein allen Verfassern von Lehrbüchern zu empfehlendes Verfahren. Diese Beispiele, die angestrebte Vollständigkeit der Literaturangaben bis zur neuesten Zeit, sowie der Umstand, daß manche neueren, vom Verf. aufgenommenen Untersuchungen in andern Lehrbüchern noch nicht enthalten sind, sichern seinem Werk neben den schon bestehenden die Existenzberechtigung. Wbg.

S. Lie. Über Integralinvarianten und Differentialgleichungen. Christiania, Videnskabs Selsk. Skrift. 1902, No. 1, 73 S. gr. 8°.

Diese aus dem Nachlasse Lies stammende Arbeit ist die Fortsetzung zweier früheren (F. d. M. 28, 105 und 106, 1897) und ist von Guldberg und Störmer herausgegeben und mit erläuternden Anmerkungen versehen worden.

Man denke sich allgemein, daß man die Invarianten $u(x_1, \ldots, x_n)$ einer vorgelegten r-gliedrigen Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$ (in n Variabeln) finden will, und daß man zufälligerweise eine oder mehrere Integralinvarianten dieser r-gliedrigen Gruppe von vornherein kennt. Welchen Vorteil kann man hieraus für die Integration des Gleichungssystems

$$X_1 f = 0, \ldots, X_r f = 0$$

ziehen? Von diesem Problem wird in der vorliegenden Abhandlung ein

spezieller, immerhin aber umfassender und instruktiver Fall erledigt. Im vierfachen Raume $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ liegen zwei vertauschbare infinitesimale Transformationen

$$X_k f = \xi_{k1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{k2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_{k3}\frac{\partial f}{\partial x_3} + \xi_{k4}\frac{\partial f}{\partial x_4} \qquad (k = 1, 2)$$

mit verschiedenen Bahnkurven vor. Man kenne eine zweidimensionale Integralinvariante $\int \psi\, dx_1\, dx_2$, wo ψ von der Form ist:

$$\psi = A\frac{\partial x_3}{\partial x_1} + B\frac{\partial x_3}{\partial x_2} + C\frac{\partial x_4}{\partial x_1} + D\frac{\partial x_4}{\partial x_2}$$
$$+ E\left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_4}{\partial x_2} - \frac{\partial x_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_4}{\partial x_1}\right) + F,$$

deren Koeffizienten $A, B, \ldots, F$ beliebige Funktionen der x_1, x_2, x_3, x_4 sein können. Es soll das Vorhandensein dieser Integralinvariante bei der Integration des vollständigen Systems $X_1 f = 0$, $X_2 f = 0$ so viel wie möglich verwertet werden.

Zunächst wird bewiesen, daß alle diese Probleme in dem Sinne eine natürliche Familie bilden, daß der Inbegriff dieser Probleme bei jeder Koordinatentransformation des Raumes $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ invariant bleibt. In der Tat zeigt eine einfache Rechnung, daß jedes der fünf Argumente von ψ, gebildet in den neuen Variabeln und noch multipliziert mit der Funktionaldeterminante Δ (bez. x_1, x_2), sich linear durch die fünf alten Argumente, multipliziert mit Funktionen der x, ausdrückt. Hierbei, wie auch für das folgende, erweist sich eine geometrische Deutung jener fünf Argumente als nützlich. Durch einen Punkt des vierfachen Raumes $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ gehen ∞^3 Linienelemente

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4,$$

die ihrerseits einen dreidimensionalen ebenen Raum M_3 bilden, für den eben jene Differentiale homogene Punktkoordinaten sind. Dann sind

$$\frac{\partial x_4}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial x_4}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial x_4}{\partial x_3}$$

als Ebenenkoordinaten und $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \frac{\partial x_3}{\partial x_2}, \frac{\partial x_4}{\partial x_1}, \frac{\partial x_4}{\partial x_2}$ als Linienkoordinaten des M_3 zu betrachten; letzteren kann man mit Plücker noch

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_4}{\partial x_2} - \frac{\partial x_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_4}{\partial x_1}$$

als fünfte Linienkoordinate hinzufügen. Diese fünf Linienkoordinaten des M_3 werden also bei jeder Punkttransformation des Raumes $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ projektiv transformiert, wie übrigens a priori einzusehen.

Es wird nunmehr die allgemeinste Transformation

$$x_k' = F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (k = 1, \ldots, 4)$$

gesucht, die sowohl die Form der beiden infinitesimalen Transformationen

$X_1 f$ und $X_2 f$, wie die Form der bekannten Integralinvariante

$$\int \psi \, dx_1 \, dx_2$$

bewahrt. Diese Transformationen bilden eine Gruppe G, und diese Gruppe G beherrscht das oben gestellte Problem der Abhandlung.

Die Gruppe G kann viele wesentlich verschiedene Formen haben, die in kanonischer Gestalt ermittelt werden.

Man führe statt $x_1, \ldots, x_4$ vier neue Variabeln x, y, z_1, z_2 so ein, daß $X_1 f$ und $X_2 f$ die kanonischen Formen $z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1}$, $z_2 \frac{\partial f}{\partial z_2}$ annehmen. Setzt man $\frac{\partial z_1}{\partial x} = p_1$, $\frac{\partial z_1}{\partial y} = q_1$, $\frac{\partial z_2}{\partial x} = p_2$, $\frac{\partial z_2}{\partial y} = q_2$, so nimmt das Integral $\int \psi \, dx_1 \, dx_2$ die Gestalt an:

$$\int \left\{ \frac{A_1 p_1 + B_1 q_1}{z_1} + \frac{A_2 p_2 + B_2 q_2}{z_2} + \frac{C(p_1 q_2 - p_2 q_1)}{z_1 z_2} + D \right\} dx \, dy$$
$$= \int \Psi \, dx \, dy,$$

wo A_1, B_1, A_2, B_2, C, D beliebige Funktionen von x und y sind. Soll nun eine infinitesimale Transformation Uf die Form von $X_1 f$ und $X_2 f$ invariant lassen, so muß Uf mit $X_1 f$ und $X_2 f$ vertauschbar sein. Das führt zu sechs Bedingungsgleichungen, von denen eine aussagt, daß C gegenüber Uf invariant bleibt. Es ist aber weiterhin ein wesentlicher Unterschied, ob C eine Konstante ist, oder eine wirkliche Funktion von x und y.

Überdies soll nunmehr Uf auch die Form des Integrals $\int \Psi \, dx \, dy$ unverändert lassen. In den bezüglichen Bedingungen spielt die Größe $w = CD + A_1 B_2 - A_2 B_1$ eine hervortretende Rolle: die Gleichung $w = 0$ verhält sich bei jeder Punktransformation des Raumes (x, y, z_1, z_2) invariant; was wiederum geometrisch leicht einzusehen ist.

Im Falle, daß C eine Konstante ist, ergibt sich durch einfache Betrachtungen, daß jede der drei Größen:

$$w, \quad \varrho = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y}, \quad \sigma = \frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y}$$

einen gemeinsamen Multiplikator aller transformierten Ausdrücke Uf darstellt.

Eine genauere Untersuchung erfordert der Spezialfall, daß die Konstante C den Wert Null besitzt. In allen Fällen aber läßt sich die Bestimmung von Uf auf gewisse lineare partielle Differentialgleichungen zurückführen.

Endlich wird auch der allgemeinere Fall erledigt, daß C keine Konstante ist. Hier wie oben ist eine beträchtliche Zahl von Unterfällen zu unterscheiden. Abgesehen von wenigen Fällen, gestattet das

Vorhandensein der bekannten Integralinvariante stets, das Integrationsgeschäft wesentlich zu vereinfachen.

Der von Lie eingangs seiner Abhandlung angekündigte zweite Teil, in dem das oben angegebene Problem allgemein behandelt werden sollte, liegt nicht vor. My.

Th. de Donder. Étude sur les invariants intégraux (Second mémoire). Palermo Rend. **16**, 155-179.

Bezüglich der voraufgehenden Abhandlung des Verf. s. F. d. M. **32**, 360, 1901.

Es werden zunächst die einschlägigen Arbeiten von Zorawski, Hurwitz, Lie und Heineck zitiert. An einem Beispiel wird gezeigt, worin sich diese Untersuchungsrichtungen von der Poincaréschen unterscheiden. Liegen die Gleichungen $\frac{\delta x_i}{X_i} = \frac{\delta z_k}{Z_k} = \delta t \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ k = 1, \ldots, n \end{pmatrix}$ vor, wo die X_i und Z_k Funktionen von t, der x und z sind, so betrachten Lie und seine Schüler t als Parameter, nicht als unabhängige Variabeln, und setzen andererseits die z als irgend welche Funktionen der x voraus, was nach sich zieht, daß im Integral $J_n = \int M dx_1 \ldots dx_n$ die Größe M nicht nur die x und z enthält, sondern auch gewisse partielle Ableitungen der z nach den x.

Sodann wendet der Verf. seine Entwicklungen an auf die Invarianz der Form eines Systems von partiellen Differentialgleichungen.

Solcher Formen werden drei betrachtet: die kanonischen Gleichungen, die Gleichungen der Charakteristiken und die infinitesimalen Berührungstransformationen.

Endlich findet eine Anwendung auf die Variationsrechnung statt. Deren Formeln lassen sich mit Hülfe der Integralinvarianten ohne teilweise Integration herleiten; zudem darf eine beliebige Anzahl von Parametern auftreten. Der Begriff der „relativen Invariante“ läßt eine erhebliche Verallgemeinerung zu. Sätze von Poincaré, Lagrange und Riemann lassen sich mit diesen Mitteln einfacher beweisen. My.

A. Guldberg. Sur les paramètres intégraux. C. R. **134**, 81-82.

Die Integralparameter sind eine direkte Erweiterung der Differentialparameter. (Vergl. C. R. **133**, 1282-83; F. d. M. **32**, 312, 1901). Wbg.

L. Fuchs. Über zwei nachgelassene Arbeiten Abels und die sich daran anschließenden Untersuchungen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Acta Math. **26**, 319-332.

Die vorliegende Abhandlung, die letzte, welche aus der Hand des verewigten Verf. stammt, ist historischer Natur; sie berichtet über zwei

Arbeiten Abels und die sich daran anschließenden Untersuchungen von Jacobi und von Fuchs selbst. In zwei nachgelassenen Abhandlungen (t. II, No. VIII und No. IX der von Sylow und Lie besorgten Ausgabe der Abelschen Werke von 1881) hat Abel die Sätze Legendres über Vertauschung von Parameter und Argument bei den elliptischen Integralen dritter Gattung auf lineare Differentialgleichungen ausgedehnt. Diese Arbeiten Abels sind alsdann von Jacobi (J. für Math. **32**, 185) durch eine abweichende Darstellung derselben in ein helles Licht gestellt worden (I). Am Schlusse seiner Abhandlung (l. c. p. 196) sagt Jacobi: „Um das aufgestellte Theorem in ein vollständiges Licht zu setzen, und insbesondere die Anfangsgrenzen der Integrale zu bestimmen und die notwendigen Beschränkungen des Theorems anzugeben, ist es nötig, den Charakter der Lösungen der linearen Differentialgleichungen, deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen der Variablen sind, näher zu ergründen, wofür, wenn man die zweite Ordnung überschreitet, noch wenig von den Mathematikern geschehen ist.“ Nachdem die Resultate der Untersuchungen des Verf. über die Natur dieser Funktionen ihm die Mittel hierzu gewährt hatten, unternahm er es, die Abel-Jacobischen Theoreme zu präzisieren. Es gelang ihm gleichzeitig, auf diese präzisierte Formulierung gestützt, Konsequenzen dieser Theoreme von weittragender Bedeutung zu ziehen. Die Resultate dieser Untersuchungen, deren Wiedergabe die beiden Hauptteile (II u. III) der vorliegenden Arbeit ausfüllt, sind enthalten in J. für Math. **76**, 177ff. und in Berl. Ber. 1892, 1113 (F. d. M. **24**, 287).

Den Schluß IV bildet die Inhaltsangabe der sich an die vorhergehenden Untersuchungen anschließenden Arbeiten von Schlesinger (J. für Math. **116**, 97ff. und Handbuch II_1 (1897), 405ff.) und Hirsch (Math. Ann. **52**, 130ff. und **54**, 202ff.; F. d. M. **30**, 392-393, 1899, und **31**, 338-340, 1900). Wbg.

W. H. Young. On the fundamental theorem of differential equations. London M. S. Proc. **34**, 234-245.

Cauchy zeigte, daß, wenn eine Differentialgleichung $dy/dx = f(x, y)$ und ein Wertepaar a, b gegeben ist, für welches die Funktion f holomorph ist, ein und nur ein holomorphes Integral derselben existiert, welches sich dem Werte b nähert, wenn x sich dem Werte a nähert. Picard und Painlevé bewiesen dann, daß auch kein nichtholomorphes Integral existiert, welches den Anfangsbedingungen genügt; aber ihre Beweise lassen noch einige Fragen offen. Verf. präzisiert diese Fragen, vervollständigt darauf den zweiten Painlevéschen Beweis und erläutert die Richtigkeit des Satzes an dem Beispiel $dy/dz = y^2/(y^2 + z - y)$, welches für eine ganze Reihe von Fällen typisch ist, in denen seine Richtigkeit angefochten wurde. Dabei muß das Hauptgewicht auf eine strenge Fassung des Begriffes der „Annäherung“ gelegt werden, worauf übrigens Picard in seinem Traité d'analyse bereits hingewiesen hat.

Wbg.

F. D'ARCAIS. Sopra una dimostrazione della unicità degli integrali di un sistema di equazioni differenziali di primo ordine. Ven. Ist. Atti 61 ((8) 4), 351-355.

Peano hat 1892 einen Beweis für die Unität der Integrale (welche für einen Wert der unabhängigen Veränderlichen gegebene Werte annehmen) eines in bezug auf die Ableitungen aufgelösten Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung gegeben, indem er nur die Bedingungen von Lipschitz (Nouv. Ann. 1902) als erfüllt voraussetzt. Bei diesem Beweise wird davon Gebrauch gemacht, daß, wenn eine Funktion $u(x)$ in x eine endliche Ableitung $u'(x)$ hat, auch die Funktion $|u(x)|$ in x eine endliche Ableitung $|u(x)|'$ besitzt und immer $|u(x)|' \leqq |u'(x)|$ ist. Nun zieht aber, nach einer Bemerkung von Bianchi, die Existenz von $u(x)$ nicht immer die von $|u(x)|'$ nach sich. Nichtsdestoweniger bleibt, wie Verf. in der vorliegenden Arbeit zeigt, Peanos Beweis bestehen, indem man an Stelle der gewöhnlichen Ableitung die rechte und linke Ableitung einführt. Wbg.

E. MAILLET. Sur les équations différentielles et la théorie des ensembles. S. M. F. Bull. 30, 195-201.

Es wird auf Grund des Cantorschen Satzes über die Nichtabzählbarkeit der Punkte des Kontinuums gezeigt, daß in gewissen Klassen von Funktionen stets solche existieren, die keiner „rationalen Differentialgleichung" genügen. Man hat zu diesem Zweck für die aus der Differentialgleichung hervorgehenden Funktionen und die Funktionen der vorgelegten Klasse eine einheitliche Bestimmung zu treffen, wann zwei Funktionen als verschieden zu betrachten sind, und zu zeigen, daß die Menge der verschiedenen Funktionen der ersten Gruppe abzählbar, die der zweiten aber von der Mächtigkeit des Kontinuums ist. Es wird so eine größere Anzahl von Funktionenklassen speziellerer und allgemeinerer Natur untersucht (vergl. das folgende Referat). D.

E. MAILLET. Sur les équations différentielles et la théorie des ensembles. C. R. 135, 434-435.

Ausdehnung des Cantorschen Satzes: „Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar, die der transzendenten Zahlen besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums", auf die Lösungen von Differentialgleichungen. Folgerung: es gibt unendlich viele konvergente Reihen, selbst mit bestimmten Eigenschaften, welche nicht Lösungen rationaler Differentialgleichungen sind (vergl. das vorangehende Referat). Wbg.

E. Maillet. Sur une catégorie de fonctions transcendantes et les équations différentielles rationnelles. Journ. de Math. (5) 8, 19-57.

Verf. untersucht in der vorliegenden Arbeit, ob nach wachsenden oder fallenden Potenzen der Veränderlichen x geordnete Reihen, deren Exponenten oder Koeffizienten gewissen Bedingungen des Wachsens oder Abnehmens genügen, Lösungen von Differentialgleichungen sein können, welche in y und seinen Ableitungen rational, und deren Koeffizienten ganze Polynome in x oder nach Potenzen von x oder $1/x$ fortschreitende Reihen sind, deren Exponenten oder Koeffizienten gewissen Bedingungen des Wachsens oder Abnehmens genügen. Insbesondere erhält er folgenden allgemeinen Satz: „Die Funktion $\varphi = \frac{\theta_1}{x^{\psi_1}} + \cdots + \frac{\theta_n}{x^{\psi_n}} + \cdots$, wo θ_n beliebig und ψ_n eine wachsende Funktion von n derart ist, daß

$$\psi_{n+1} = \lambda\, \psi_n^{\mu_n}$$

(λ endlich und $\neq 0$, μ_n mit n unbegrenzt wachsend), kann nicht einer in x, y und seinen Ableitungen rationalen Differentialgleichung irgend welcher Ordnung genügen.“ — Ausdehnung dieser Resultate auf Reihen rationaler Brüche und auf Kettenbrüche; Analogie derselben mit den von Liouville und dem Verf. (Journ. de Math. (5) **7**, 419; F. d. M. **32**, 112, 1901) in bezug auf die algebraischen Zahlen und die Wurzeln transzendenter Gleichungen gefundenen Resultate (vergl. C. R. **132** und **133**: F. d. M. **32**, 113, 1901). Wbg.

W. Anissimoff. Note sur l'intégration des équations différentielles au moyen des variables complexes. Math. Ann. 56, 273-276.

Die Differentialgleichung mit reellen Veränderlichen

$$(1)\qquad f(u, v, v', \ldots, v^{(n)}) = 0$$

wird durch die Transformation $x = u + iv$, $y = u - iv$ übergeführt in

$$(2)\qquad F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Aus einem ersten Integral von (2):

$$(3)\qquad \begin{cases} \Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \equiv \varphi(u, v, v', \ldots, v^{(n-1)}) \\ \qquad\qquad + i\,\psi(u, v, v', \ldots, v^{(n-1)}) = \text{const.} \end{cases}$$

erhält man zwei erste Integrale von (1):

$$(4)\qquad \varphi(u, v, v', \ldots, v^{(n-1)}) = \alpha,\quad \psi(u, v, v', \ldots, v^{(n-1)}) = \beta,$$

aus denen sich durch Elimination von $v^{(n-1)}$ ein zweites Integral von (1) ergibt, falls die Gleichungen (4) von einander unabhängig sind. Verf. zeigt, daß mindestens ein derartiges erstes Integral (3) existiert; und weiter, daß für $n = 2m$ stets m, für $n = 2m + 1$ dagegen $m + 1$ erste Integrale von (2) existieren, aus denen man das allgemeine Integral von (1) ohne Quadraturen erhält. Wbg.

W. P. Ermakoff. Über die Bestimmung der kritischen Punkte der Integrale von Differentialgleichungen. Kiew. Univ. No. 9, S. 1-26 (Ber. Kiew. Ges. 1901, Russisch).

Verf. stellt die Methode von Painlevé (S. M. F. Bull. **28**; F. d. M. **31**, 337, 1900) dar und vergleicht sie mit der Methode, welche S. Kowalewsky zur Untersuchung der Differentialgleichungen der Bewegung eines festen Körpers um einen festen Punkt (Acta Math. **12**) benutzt hat. Die letztere kann, wie gezeigt wird, auf die erste gegründet werden. Die Untersuchung der Methode von Painlevé führt zu dem Schluß, sie sei jedesmal anwendbar, wenn die Ordnung der transformierten Gleichung (vergl. F. d. M. **31**, 338) für $\alpha = 0$ sich nicht erniedrigt. Verf. gibt auch seine eigene Methode, welche in der Betrachtung der „linearen Resolvente“ besteht. Die lineare Resolvente wird in folgender Art konstruiert: Die transformierte Gleichung von Painlevé wird nach α differenziert und dann $\alpha = 0$ gesetzt; als neue Unbekannte wird

$$dy/dx = Y$$

eingeführt und in den Koeffizienten y gleich Ax^k gesetzt (A und k sind die bei Painlevé auftretenden Konstanten). Verf. gibt selbst an, seine Methode sei den Resultaten nach mit der von S. Kowalewsky identisch, theoretisch ihr überlegen, weil unendliche Reihen nicht benutzt werden; in der Anwendung sei sie jedoch verwickelter. Si.

L. Schlesinger. Über das Riemannsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Berl. Ber. 1902, 283-291.

L. Schlesinger. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschlusse an das Riemannsche Problem. J. für Math. **124**, 292-319.

In einer früheren Arbeit (J. für Math. **123**, 138-173; F. d. M. **32**, 321-324, 1901) hatte Verf. im Anschluß an das Riemannsche Fragment „Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten“ (Werke, 2. Aufl., 377-390) folgende, von ihm als das „Riemannsche Problem“ bezeichnete Aufgabe gelöst: „In der Ebene der komplexen Variable x seien σ Punkte $a_1, \dots, a_\sigma$ gegeben, die durch Querschnitte $(a_k, \infty) = l_k$ $(k = 1, 2, \dots, \sigma)$ mit dem unendlich fernen Punkte verbunden gedacht werden sollen. Man bestimme ein System $y_1, y_2, \dots, y_n$ monogener Funktionen von x, die in der ganzen Ebene, mit Ausnahme der Punkte $a_1, \dots, a_\sigma, \infty$, eindeutig, endlich und stetig sind, gegebene lineare, homogene, unimodulare Substitutionen $A_1, \dots, A_\sigma$ erfahren, wenn x geschlossene Umläufe vollzieht, die die Schnitte $l_1, \dots, l_\sigma$ einzeln im positiven Sinne überschreiten und in den singulären Punkten $a_1, \dots, a_\sigma, \infty$ nicht unbestimmt werden.“ Die Existenz dieser Funktionssysteme wurde unter der Voraussetzung nachgewiesen, daß für die gegebenen Substitutionen $A_1, \dots, A_\sigma$ und für

$$A_{\sigma+1} = A_1^{-1} A_2^{-1} \dots A_\sigma^{-1}$$

sämtliche Wurzeln der Fundamentalgleichungen den absoluten Betrag Eins besitzen (Konvergenzbedingungen). — In den beiden vorliegenden Arbeiten, deren erstere einen kurzen Auszug aus der zweiten darstellt, werden diese Funktionssysteme in ihrer Abhängigkeit von den singulären Punkten $a_1, \ldots, a_\sigma$ untersucht, unter der Annahme daß diese Punkte als von einander unabhängige Variabeln, die Koeffizienten der Fundamentalsubstitutionen $A_1, \ldots, A_\sigma$ dagegen als von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ unabhängige, fest gegebene Größen betrachtet werden. Zu diesem Zweck wird der Untersuchung ein Fundamentalsystem der angegebenen Art $y_1, \ldots, y_n$ zugrunde gelegt, welches die Minimalzahl von außerwesentlich singulären Stellen aufweist und dessen Determinante $D(x) = |y_k^{(\lambda-1)}|$ für eine reguläre Stelle $x = x_0$ den Wert Eins annimmt; dieses wird ein normiertes Hauptsystem genannt und mit

$$(1) \qquad P\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_\sigma \\ A_1, \ldots, A_\sigma \end{pmatrix} x$$

bezeichnet. Dieses Funktionssystem befriedigt eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung der Fuchsschen Klasse (D) mit den wesentlich singulären Punkten $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$, deren Monodromiegruppe θ aus den Substitutionen A_k $(k = 1, 2, \ldots, \sigma)$ komponiert und daher von den in den Koeffizienten von (D) als Parametern enthaltenen Größen $a_1, \ldots, a_\sigma$ unabhängig ist.

Beschreiben die $a_1, \ldots, a_\sigma$ irgend welche geschlossenen Bahnen, so verwandelt sich das Funktionssystem $y_1, y_2, \ldots, y_n$ in das durch das Schema

$$(2) \qquad P\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_\sigma \\ \bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_\sigma \end{pmatrix} x$$

dargestellte normierte Hauptsystem $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$, welches für alle singulären Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ zu denselben Exponenten gehört wie $y_1, \ldots, y_n$, und wo die Fundamentalsubstitutionen $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_\sigma$, die aus $A_1, \ldots, A_\sigma$ durch die Operation einer gewissen als bekannt anzusehenden Gruppe G hervorgehen, sich auf die ursprüngliche Lage der Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ beziehen und ebenfalls die Konvergenzbedingungen erfüllen, sodaß das System (2) nach dem für die Lösung des Riemannschen Problems gegebenen Verfahren stets hergestellt werden kann und man imstande ist, das analytische Verhalten der $y_1, \ldots, y_n$ als Funktionen der $a_1, \ldots, a_\sigma$ vollständig zu übersehen. — Die $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ befriedigen als Funktionen von x eine Differentialgleichung $(\bar{D})$ der Fuchsschen Klasse, die mit (D) nicht allein die wesentlich singulären Punkte, sondern auch die Monodromiegruppe θ gemein hat; dagegen sind die zu den Schnitten $l_1, \ldots, l_\sigma$ gehörigen Fundamentalsubstitutionen für $(\bar{D})$ andere als für (D). Die Koeffizienten von $(\bar{D})$ gehen aus denen von (D) dadurch hervor, daß man die $a_1, \ldots, a_\sigma$ die betrachteten geschlossenen Bahnen beschreiben läßt. — Wenn für eine Operation von G, die $A_1, \ldots, A_\sigma$ in $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_\sigma$ überführt, ein „Induktor", d. h. eine lineare Substitution B

mit nicht verschwindender Determinante existiert, welche die σ symbolischen Gleichungen $BA_k = \bar{A}_k B$ $(k = 1, 2, \ldots, \sigma)$ befriedigt, so besitzt die Gruppe θ einen Isomorphismus in sich selbst. Dieser Induktor ist, falls er unimodular sein soll und die Gruppe θ irreduktibel ist, eindeutig bestimmt; seine Koeffizienten sind von $x, a_1, \ldots, a_\sigma$ unabhängig. Aus der Existenz solcher Induktoren folgt nun zunächst, daß $y_1, \ldots, y_n$ als Funktionssystem von a_k einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit in a_k eindeutigen Koeffizienten genügt, die rational von x abhängen. Durch die Voraussetzung weiterer Konvergenzbedingungen gelangt man dann, von dem ursprünglichen Riemannschen Problem ausgehend, zu Systemen von Funktionen der $\sigma + 1$ Variabeln

$$a_0, a_1, \ldots, a_\sigma \ (a_0 = x),$$

die in bezug auf jede dieser Variabeln a_k eine lineare homogene Differentialgleichung (D_k) mit in allen $\sigma + 1$ Variabeln eindeutigen Koeffizienten befriedigen, und jedes System läßt sich durch $\sigma + 1$ spezielle Systeme, die Fuchsschen Differentialgleichungen genügen, linear homogen bis zur $(n - 1)$-ten Ableitung mit eindeutigen Koeffizienten darstellen; die wesentlich singulären Stellen von (D_k) sind die Punkte a_μ $(\mu \neq k)$ und ∞, und die Monodromiegruppe θ_k dieser Differentialgleichung ist von den a_μ $(\mu \neq k)$ unabhängig. Solche Funktionssysteme mögen wohl Riemann vorgeschwebt haben, als er die später von ihm selbst als „nicht richtig" bezeichneten, in dem Abdruck des Fragmentes mit kleinerem Druck wiedergegebenen Zeilen (a. a. O. 385, 386) niederschrieb. — Ein Beispiel solcher Funktionssysteme wird durch die Lösungen der Tissot-Pochhammerschen Differentialgleichung geliefert. Gewisse besondere Fälle haben Appell, Picard, Goursat, Horn, Le Vavasseur, Wirtinger behandelt. Wbg.

T. Brodén. Über lineare homogene Differentialgleichungen mit gegebenen Verzweigungsstellen und gegebener Monodromiegruppe. Stockh. Öfv. 59, 5-11.

Es handelt sich um eine Aufgabe, welche als eine Verallgemeinerung des bekannten Riemannschen Problems in der Theorie der linearen Differentialgleichungen bezeichnet werden kann. Es seien σ im Endlichen liegende x-Stellen $e_1, e_2, \ldots, e_\sigma$ gegeben, und andererseits σ lineare homogene Substitutionen in n Veränderlichen $A_1, A_2, \ldots, A_\sigma$. Dann sollen n monogene Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ von x bestimmt werden, welche beim Überschreiten, in positiver Richtung, von σ Schnitten

$$(e_1 \infty), (e_2 \infty), \ldots, (e_\sigma \infty)$$

bez. die Substitutionen $A_1, A_2, \ldots, A_\sigma$ erleiden, sonst aber im Endlichen sich überall wie rationale Funktionen verhalten. Die Frage nach der ausnahmlosen Lösbarkeit dieser sehr umfassenden Aufgabe, wird auf eine viel beschränktere Existenzfrage reduziert, nämlich auf einen gewissen zum Falle $n = 2$ gehörenden Spezialfall. Diese Reduktion wird so ge-

wonnen: Unter der Voraussetzung, daß die in diesem Spezialfalle verlangten Funktionen wirklich existieren, werden mit Hülfe derselben die von Poincaré herrührenden sogenannten ξ-Reihen so modifiziert, daß sie immer konvergieren. Hiernach erledigt sich leicht die allgemeine Existenzfrage. — Die gegenwärtige Schrift ist nur eine vorläufige Mitteilung; die ausführliche Darstellung wird in den Acta Math. erfolgen.

Bdn.

L. Heffter. Zur Theorie der Resultanten zweier linearen homogenen Differentialgleichungen. Arch. der Math. u. Phys. (3) **3**, 124-131.

„Die an zwei algebraische Gleichungen anknüpfende Eliminationstheorie ist von G. von Escherich (Wien. Denkschr. **46**, 1883) auf lineare homogene Differentialgleichungen übertragen worden. Zu der aus zwei solchen zu bildenden Resultante ist später Verf. selbst (J. für Math. **116**, 157 ff., 1896) auf anderem Wege gelangt. Sodann hat er kürzlich (Math. Ann. **54**, 541 ff., 1901) einige Punkte der algebraischen Theorie, nämlich die Bedingungen für die Existenz eines gemeinsamen Teilers von bestimmtem Grade und die Aufstellung dieses Teilers in Determinantengestalt, in möglichst einfacher Form abgeleitet. Gerade diese Behandlung läßt sich nun auch bei linearen Differentialgleichungen durchführen. Sie liefert bei zwei linearen homogenen Differentialgleichungen die Bedingungen für die Existenz einer bestimmten Anzahl gemeinsamer Integrale in einer anscheinend bisher noch nicht bemerkten Form und sodann die Aufstellung des diese Integrale enthaltenden Differentialausdrucks in Determinantengestalt — alles genau analog den entsprechenden algebraischen Formeln.“ **Wbg.**

R. Fuchs. Über lineare homogene Differentialgleichungen, deren Substitutionsgruppe von einem in den Koeffizienten auftretenden Parameter unabhängig ist. Pr. Bismarck-Gymn. Dt.-Wilmersdorf. 23 S. 4°.

Der Hauptzweck des Verf. in der vorliegenden Arbeit ist, die in den Berl. Ber. veröffentlichten Untersuchungen seines Vaters über die im Titel näher bezeichneten Differentialgleichungen möglichst einfach und elementar darzustellen. Insbesondere wird zunächst die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aufgestellt, daß eine lineare homogene Differentialgleichung eine von dem Parameter unabhängige Substitutionsgruppe besitzt. Sodann wird der Satz abgeleitet: Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung mit eindeutigen Koeffizienten für ein Fundamentalsystem von Integralen eine von dem Parameter unabhängige Substitutionsgruppe besitzt, so genügen diese Integrale, als Funktionen des Parameters aufgefaßt, ebenfalls einer linearen homogenen Differentialgleichung mit eindeutigen Koeffizienten. Endlich wird die Umkehrung dieses Satzes für den Fall bewiesen, daß die beiden in Rede stehenden linearen homogenen Differentialgleichungen von der zweiten Ordnung sind.

Wbg.

S. Epsteen. Proof that the group of an irreducible linear differential equation is transitive. American M. S. Bull. (2) 8, 239-241.

Der Beweis des Satzes, bei welchem die Frobeniussche Definition der Irreduzibilität und die Picardsche lineare homogene Gruppe zugrunde gelegt werden, wird dem Beweise des entsprechenden Theorems in der Algebra, z. B. in Nettos Substitutionentheorie, nachgebildet.

Lp.

S. Epsteen. On integrability by quadratures. American M. S. Bull. (2) 9, 152-154.

Wenn eine lineare Differentialgleichung im Frobeniusschen Sinne reduzibel ist, so transformiert nach einem Theorem von Jordan und Beke (Math. Ann. **45**, 279; F. d. M. **25**, 518, 1894) ihre Rationalitätsgruppe eine gewisse lineare Mannigfaltigkeit der Lösungen (welche die totale n-dimensionale Mannigfaltigkeit nicht umfaßt) in sich selbst. Nach einem Satze von Vessiot (Ann. de l'Éc. Norm. (3) **9**, 197-280; F. d. M. **24**, 283, 1892) besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Integrierbarkeit einer linearen Differentialgleichung durch Quadraturen darin, daß ihre Rationalitätsgruppe integrierbar ist. Der Verf. zeigt, daß der letztere Satz eine Folge des ersteren ist. Lp.

A. Loewy. Über Differentialgleichungen, die mit ihrer adjungierten zu derselben Art gehören. Münch. Ber. 32, 3-14.

„Damit eine lineare Differentialgleichung mit ihrer Adjungierten zu derselben Art gehöre, ist notwendig und hinreichend, daß ihre Rationalitätsgruppe aus lauter Transformationen besteht, welche eine bilineare Form von nicht verschwindender Determinante in sich überführen.“ Diesen G. Fanoschen Satz (vergl. z. B. Math. Ann. **53**, 568ff., 1900) verwertet der Verf. einerseits für die Theorie der assoziierten Differentialgleichungen, andrerseits für die Differentialgleichungen, denen die Produkte der Integrale der vorgelegten Differentialgleichung zu je zweien genügen. — Es seien die folgenden beiden Sätze hervorgehoben: 1. „Die m-te assoziierte Differentialgleichung einer Differentialgleichung $2m$-ter Ordnung, die mit ihrer adjungierten zu derselben Art gehört, wird nach Adjunktion einer Quadratwurzel zum Rationalitätsbereiche reduzibel.“ — Dieser Satz ist bereits von R. Fuchs gefunden worden (J. für Math. **121**, 205, 1899); jedoch fehlt bei ihm die Bemerkung; daß die Adjunktion einer Quadratwurzel nötig werden kann, damit die Differentialgleichung reduzibel wird.

2. „Erfüllen die Elemente eines Fundamentalsystems einer irreduziblen Differentialgleichung von ungerader Ordnung keine quadratische homogene Relation mit konstanten Koeffizienten, so ist notwendig und hinreichend, damit dieselbe mit ihrer adjungierten zu derselben Art gehört, daß die Differentialgleichung $\frac{1}{2}n(n+1)$-ter Ordnung, welcher die

Integralprodukte zu je zweien genügen, ein dem Rationalitätsbereiche angehöriges Integral besitzt." Wbg.

A. Loewy. Über die irreduziblen Faktoren eines linearen homogenen Differentialausdruckes. Leipz. Ber. **54**, 1-13.

I. Ist ein linear homogener Differentialausdruck P zerlegbar in RQ, so ist bei geeigneter Wahl des Fundamentalsystems von Integralen von $P=0$ die Rationalitätsgruppe von $P=0$ von der Form

$$\begin{array}{c|c} G_1 & 0 \\ \hline G_{21} & G_2 \end{array};$$

dabei bedeuten G_1 die Gesamtheit der Matrizen der Rationalitätsgruppe von $Q=0$, G_2 diejenige von $R=0$, G_{21} eine Gesamtheit von Matrizen, die soviel Kolonnen wie G_1, soviel Zeilen wie G_2 besitzen. Die Rationalitätsgruppen der Faktoren sind also Bestandteile der Rationalitätsgruppe von $P=0$.

II. Bei allen Zerlegungen eines linearen homogenen Differentialausdruckes in irreduzible Faktoren lassen die Faktoren sich eindeutig so zuordnen, daß die zugeordneten Faktoren, als lineare homogene Differentialgleichungen aufgefaßt, dieselbe Rationalitätsgruppe besitzen. (Verallgemeinerung eines Satzes von Landau: J. für Math. **124**, 115; F. d. M. **32**, 312, 1901). Wbg.

A. Loewy. Sur les groupes de transformations des équations différentielles linéaires. Darb. Bull. (2) **26**, 83-87.

Verf. zeigt, daß sämtliche Differentialgleichungen niedrigster Ordnung mit rationalen Koeffizienten, denen die Integrale der Picardschen Resolvente (vergl. Schlesinger: Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen II_1, S. 60ff.) genügen, wenn man von gewissen Gleichungen (φ) (vergl. a. a. O.) abstrahiert, von derselben Ordnung sind, sodaß Picards Voraussetzung, bei seinen Untersuchungen (Traité d'Analyse III, 531) unter jenen Differentialgleichungen diejenige niedrigster Ordnung zu wählen, überflüssig ist. Wbg.

A. Loewy. Über reduzible lineare homogene Differentialgleichungen. Gött. Nachr. 1902, 42-47.

Voranzeige von Resultaten einer in Math. Ann. **56**, 549-584 erschienenen größeren Arbeit, über die im Jahrgang 1903 eingehend berichtet werden wird. Wbg.

G. Wallenberg. Sur les expressions différentielles linéaires homogènes commutatives. C. R. **134**, 693-696.

Auszug aus einer im Archiv der Math. und Phys. (3) **4**, 252 erschienenen Arbeit, über die im Jahrgang 1903 berichtet werden wird. Wbg.

G. Fubini. Sulle equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali. Rom. Acc. L. Rend. (5) 11_1, 113-116.

Verf. betrachtet eine lineare Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten, welche nicht zur Fuchsschen Klasse gehört, als Grenzfall einer Fuchsschen Differentialgleichung (welche bekanntlich viel leichter zu behandeln ist), indem er in der letzteren mehrere singuläre Punkte in einen zusammenfallen läßt. Wbg.

J. Plemelj. Über lineare Differentialgleichungen mit vertauschbarer Basis der Monodromiegruppe. Monatsh. f. Math. 18, 119-132.

„Der vorliegenden Untersuchung liegt eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung mit algebraischen Koeffizienten unter der Annahme, daß ihre Monodromiegruppe in einer $(2p+1)$-fach zusammenhängenden Riemannschen Fläche durch eine vertauschbare Basis erzeugt wird, zugrunde. Der Fall $p=1$, wo sich die Koeffizienten als eindeutige doppeltperiodische Funktionen eines Argumentes darstellen lassen, wurde schon vielfach behandelt (vergl. Schlesinger: Handbuch der linearen Differentialgleichungen II_2, 403ff.). Setzt man dabei voraus, daß die Integrale in der Umgebung jedes einzelnen Punktes eindeutig sein sollen, dann besteht die Basis der Monodromiegruppe aus jenen zwei Substitutionen, welche die Integrale beim Vermehren des Argumentes um eine Periode erleiden. Die Eindeutigkeit der Integrale hat hier die Vertauschbarkeit dieser Basissubstitutionen zur unmittelbaren Folge. — Im allgemeinen Falle, wo $p>1$ ist, folgt aus der Eindeutigkeit der Integrale in der Umgebung jedes einzelnen Punktes noch keineswegs die Vertauschbarkeit der Substitutionen an den Querschnitten, welche die Riemannsche Fläche einfach zusammenhängend machen. Da jedoch gerade diese Vertauschbarkeit im Falle $p=1$ die eigentliche Quelle der weiteren Resultate ist, wurde hier nicht die Eindeutigkeit der Integrale, sondern die Vertauschbarkeit der Monodromiegruppe vorausgesetzt. Unter dieser Annahme wird den Integralen gleichzeitig für die ganze Riemannsche Fläche eine einfache analytische Form gegeben. Zur Darstellung der Integrale reichen nebst den eindeutigen Funktionen schon die algebraischen Integrale der drei Gattungen hin.“ Den Schluß der Arbeit bilden Spezialisierungen. (Vergl. F. d. M. 32, 330, 1901). Wbg.

L. W. Thomé. Über eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen in der Variationsrechnung. J. für Math. 125, 1-27.

„Das Verfahren, die zweite Variation eines einfachen Integrals mit einer zu ermittelnden Funktion zu untersuchen, welches Jacobi im 17. Bd. d. J. in den Grundzügen gegeben hat, ist bekanntlich von Hesse im 54. Bd. d. J. ausführlich entwickelt worden. An diese Untersuchungen von Jacobi und Hesse knüpft die vorliegende Abhandlung an und

bringt mit denselben die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit analytischen Funktionen als Koeffizienten in Verbindung. Der Ausdruck unter dem Integralzeichen sei $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$, x die unabhängige reelle Variable zwischen den Grenzen a und b, y die unbekannte reelle Funktion von x, $y^{(r)} = d^r y/dx^r$. Die gesuchte Funktion y wird aus der Differentialgleichung, die durch Nullsetzen der ersten Variation des Integrals hervorgeht, durch Integration erhalten; die eingehenden Konstanten seien den Endbedingungen gemäß bestimmt. In einem Streifen in der Konstruktionsebene der komplexen Variable x, der die Strecke auf der Axe des Reellen von a bis b im Innern enthält, sei die gefundene Funktion y eine einwertige und stetige analytische Funktion von x. Dasselbe sei in bezug auf die Funktionen $\frac{\partial f}{\partial y^{(p)}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(p)} \partial y^{(q)}}$ der Fall. Die Jacobische Bedingung sei erfüllt, daß $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}}$ auf der Strecke von a bis b nicht verschwindet. Unter dieser Voraussetzung läßt sich auf Grund einfacher Erwägungen aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit analytischen Funktionen als Koeffizienten von vornherein folgendes erkennen: Es bestehen zu der gefundenen Kurve y immer Scharen unendlich benachbarter Kurven, so daß das vorliegende Integral für die Kurve y ein Maximum, bez. Minimum (gemäß dem Vorzeichen von $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}}$) wird, und zwar haben im allgemeinen die Scharen der Nachbarkurven von y diese Eigenschaft. Dies wird in der ersten Abteilung gezeigt. In der zweiten Abteilung wird nachgewiesen, daß das Entsprechende auch für die isometrischen Aufgaben gilt. In der dritten Abteilung wird das Vorstehende auf Beispiele angewandt." Wbg.

O. Dunkel. Some applications of Green's theorem in one dimension. American M. S. Bull. (2) 8, 288-292.

Der Aufsatz bewegt sich in demselben Gedankenkreise wie die beiden Noten von Bôcher, über welche in F. d. M. **32**, 341 und 398, 1901, berichtet ist. Zunächst wird der allgemeine homogene lineare Differentialausdruck $P(y)$ betrachtet:

$$P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y,$$

danach insbesondere für $n = 2$, $P(y) = \frac{d^2 y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy$. Durch Multiplikation mit

$$K = e^{\int_a^b p\,dx}$$

wird der Ausdruck $K \cdot P(y)$ sich selbst adjungiert, und durch Anwendung der Greenschen Formel gelangt man zu der Gleichung:

$$\int_a^b K[zP(y) - yP(z)]\,dx = K\left[z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right]_a^b.$$

Hieraus wird geschlossen: Wenn eine solche Funktion z von x existiert, daß sie und ihre beiden ersten Ableitungen in dem Intervalle $a \gtreqless x \gtreqless b$ stetig sind und den Relationen $z > 0$, $P(z) \gtreqless 0$ genügen, dann ist $P(y) = 0$ eine nicht oszillatorische Differentialgleichung in dem Intervalle $a \gtreqless x \gtreqless b$. Lp.

R. LEVAVASSEUR. Sur quelques propriétés des n solutions d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants dont l'équation caractéristique a ses racines simples. Toulouse Mém. (10) **2**, 96-107.

Eigenschaften der durch

$$e^{\theta x} = \varphi_1(x) + \theta\varphi_2(x) + \theta^2\varphi_3(x) + \cdots + \theta^{n-1}\varphi_n(x)$$

definierten Funktionen φ_α, worin θ eine Wurzel einer algebraischen Gleichung n-ten Grades ist, die nur einfache Wurzeln besitzt. Wbg.

J. R. BRAJTZEW. Über Fourier-Besselsche Funktionen und deren Anwendung zur Bestimmung der asymptotischen Darstellungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten. Ber. Warschau Polyt. Inst. Kais. Nikolaus II. **1**, 1-64, **2**, 65-120 (Russisch).

Die Arbeit ist 1902 noch nicht abgeschlossen. Bericht erfolgt im folgenden Bande des Jahrbuchs. Si.

A. N. KORKINE. Études des multiplicateurs des équations différentielles du premier ordre. St. Pétersb. IV u. 171 S.

Die Arbeit schließt sich an frühere Untersuchungen des Verf. an (Math. Ann. **48**, 317-364; F. d. M. **27**, 247, 1896). Hier wird die allgemeinere Aufgabe behandelt, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufzustellen, damit die Gleichung (1) $Mdx + Ndy = 0$ den integrierenden Faktor μ in der Form (2) $P\cdot\Pi(y - u_i)^{h_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ gestatte, wo $P, u_1, \ldots, u_l$ Funktionen von x bezeichnen, die Konstanten $h_1, h_2, \ldots, h_l$ und die ganze Zahl l von vornherein gegeben sind. Im ersten Kapitel stellt Verf. einige allgemeine Sätze über die Differentialgleichung (1) und ihre integrierenden Faktoren auf: 1. Haben M, N und μ die Form $e^U\Pi(y - u)^h$ (U eine rationale Funktion von y), so ist $y' = -M/N$ eine rationale Funktion von y, also sind M und N ganze algebraische Polynome in y. 2. Damit das allgemeine Integral von (1) die Form $e^U\Pi(y - u)^m = C$ besitze, ist es notwendig und hinreichend, daß (1) einen in y rationalen integrierenden Faktor gestatte. Hat (1) einen in y algebraischen integrierenden Faktor, so gestattet (1) auch den

Faktor in der Form (2) mit rationalen Exponenten h_i. — Die Funktion P von x, welche in (2) vorkommt, wird weiter schon in M, N einbegriffen gedacht, also werden solche Gleichungen (1) mit

$$M = p_0 y^\sigma + p_1 y^{\sigma-1} + \dots + p_{\sigma-1} y + p_\sigma,$$
$$N = q_0 y^\sigma + q_1 y^{\sigma-1} + \dots + q_{\sigma-1} y + q_\sigma$$

gesucht, welche den integrierenden Faktor in der Form $\Pi (y-u)^k$ gestatten. Die dazu notwendigen und hinreichenden Bedingungen erscheinen in der Form eines Systems von Differentialgleichungen zwischen p_i, q_j und u_k von geringerer Anzahl, als die der Funktionen p, q, u beträgt. Bei geeigneter Auswahl der als bekannt vorausgesetzten Größen wird dieses sehr allgemeine System integrierbar. Da die Ableitungen von p_i in diesen Gleichungen nicht vorkommen und die p_i selbst linear eingehen, ist es im allgemeinen bequem, sie zu eliminieren. Verf. untersucht genau in allen möglichen Fällen die Anzahl der Gleichungen, welche $p_0, p_1, \dots, p_\sigma$ nicht enthalten. Dabei spielen die wirkliche Ordnung τ von M und ϱ von N in y und die Summe $a = \sigma + \sum h$ eine Rolle. Kapitel 2 (66-129) ist der Integration der im ersten Kapitel aufgestellten Differentialgleichungen zwischen q und u gewidmet. Zuerst wird im § 22 der Fall betrachtet, wenn die reellen Teile der h_i positiv sind. Diese Integrale ergeben sich in der Form von längs gewisser Kurven erstreckten Integralen $\int_{u_1}^{u_i} \mu(y)\, N(y)\, dy\ (i = 2, 3, \dots, l)$.

Dann folgt im § 25 der Fall, wenn keines der h_i eine negative ganze Zahl ist und wenigstens ein h den reellen Teil größer als -1 hat. Die Integrale können dann in der Form

$$\int_\infty^{u_1} \Pi_i(y)\, dy + \int_{u_i}^{u_1} \Omega_i(y)\, dy = C_{i-1} \qquad (i = 2, \dots, l)$$

dargestellt werden, wo $\Pi_i(y)$ die Summe derjenigen Glieder der Entwicklung von $\mu(y)\, N(y)$ nach aufsteigenden Potenzen von $y - u_i$ bedeutet, deren reeller Teil größer ist als -1, $\Omega_i(y)$ aber die Summe sämtlicher anderen Glieder. Der Fall $a = 0$ bildet eine Ausnahme (§ 26). Das hier fehlende Integral wird § 30 bestimmt: p_0 wird in der Weise durch $q_1, \dots, q_\sigma$, $u_1, u_2, \dots, u_l$ ausgedrückt, daß die Gleichung $p_0 = 0$ unmittelbar integrierbar wird. Es folgt dann der Fall, wenn die reellen Teile sämtlicher h_i kleiner als -1 sind. Dieser Fall wird (§ 31) auf den ersten durch Transformation zurückgeführt, dann aber auch durch direkte Betrachtung der oben erwähnten Integrale gelöst (§ 33). — Ist einer der Exponenten h, z. B. h_i, eine negative ganze Zahl, so hat der Ausdruck $\dfrac{\partial^{-h_i-1}[(y-u_i)^{-h_i}\mu(y)\, N(y)]}{\partial y^{-h_i-1}}$ konstante Größe für $y = u_i$.

Ist er keine absolute Konstante, so gibt er, konstant gesetzt, eines der gesuchten Integrale (§ 35). Ist er aber eine absolute Konstante, so sind

$h_1, \ldots, h_{i-1}, h_{i+1}, \ldots, h_l$ ganze positive Zahlen und $a = 0$. Die Aufgabe wird unabhängig von dem Satze § 35 gelöst (§ 36). — Kapitel 3 ist der Betrachtung einiger interessanten partikularen Fälle und einigen Verallgemeinerungen gewidmet. Hier werden der Reihe nach betrachtet: der Fall $l = 1$, also $\mu(y) = (y - u)^h$ (§ 39);

$$l = 2, \mu(y) = (y - u_1)^{h_1}(y - u_2)^{h_2},$$

N eine lineare Funktion von y (§ 40); $h_1 + h_2 + 2 = 0$, $\sigma = 1$, Lösung durch Grenzübergang (§ 41); $h_1 + h_2 + 2 = 0$, die Ordnung σ von $N(y)$ in bezug auf y beliebig (§ 42); $h_1 + h_2 + \varrho + 1 = 0$, $\sigma = \varrho$. Lösung durch Grenzübergang. — § 45 u. ff. enthalten Betrachtungen über die Aufgabe bezüglich solcher Gleichungen $M(y)dx + N(y)\,dy = 0$, deren allgemeines Integral die Form hat: $e^V \Pi(y - v)^m = C$, wo V eine rationale Funktion von y, die v Funktionen von x, m und C Konstanten sind. § 46: Der Fall $\Sigma h + \varrho \gtreqless 0$, § 47: $\Sigma h + \varrho < 0$. § 48: Die komplementare Funktion $\psi(x)$ ist linear in x. § 50: V eine ganze rationale Funktion in y. § 52: Der Fall, wenn das allgemeine Integral die Form $Q\,\Pi(y - v)^m = C$ (Q unabhängig von y) hat. § 53: In dem Falle, wenn das allgemeine Integral die Form $\varphi(x, y) = C$ hat, wo φ eine algebraische Funktion in y ist, welche von C nicht abhängt, kann man es auch in der Form $U = c$ darstellen, wo U eine rationale Funktion in y ist. Si.

R. W. H. T. Hudson. The Puiseux diagram and differential equations. Lond. M. S. Proc. **34**, 154-158.

Verf. benutzt das Puiseuxsche Diagramm zur Vorausbestimmung und Interpretation der Sonderfälle, die bei der Reihenentwicklung der Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung auftreten können.
Wbg.

J. H. Maclagan-Wedderburn. On the isoclinal lines of a differential equation of the first order. Edinb. R. S. Proc. **24**, 400-408.

Es handelt sich um den geometrischen, vornehmlich von Lie betonten Gesichtspunkt, nach welchem eine Differentialgleichung jedem Punkte in der Ebene eine gewisse Richtung zuordnet. Für die Integralkurven liefert ein allbekannter physikalischer Versuch ein lehrreiches Beispiel. Die Kurven $p =$ const. heißen isokline Linien. Lp.

A. Wahlgren. Sur les points singuliers des équations différentielles du premier ordre et du second degré. Stock. Ak. Bihang **28**, No. 4, 34 S.

Die reellen Integralkurven der Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ werden für den Fall untersucht, daß F eine rationale Funktion zweiten Grades in bezug auf y ist. Die Erforschung der singulären Punkte

kommt auf die Untersuchung von Differentialgleichungen ersten Grades zurück. Es folgen Sätze bezüglich der Gestalt der Charakteristiken.

Lp.

L. Raffy. Une leçon sur l'équation de Riccati. Nouv. Ann. (4) 2, 529-545.

Im ersten Teile leitet Verf. die bekanntesten Eigenschaften der allgemeinen Riccatischen Differentialgleichung

$$dy/dx + X_0 y^2 + X_1 y + X_2 = 0$$

ab: Integration derselben bei Kenntnis eines, zweier oder dreier Integrale durch zwei, eine oder keine Quadratur; Konstanz des Doppelverhältnisses von vier Integralen. Im zweiten Teile wird die Reduktion auf die kanonische Form $du/d\xi + u^2 = U(\xi)$ durch eine einfache Transformation ausgeführt. Der dritte Teil behandelt die Fälle, in denen die eigentliche Riccatische Gleichung $dy/dx + y^2 = x^m$ Integrale in geschlossener Form besitzt.

Wbg.

V. Jamet. Sur les équations anharmoniques. Assoc. Franç. Ajaccio (1901) 30, 207-228.

„Wir werden mit Autonne (Journ. de Math. (3) 6, 157-214; F. d. M. 31, 351, 1900) anharmonisch jede in bezug auf eine Variable x algebraische Gleichung nennen, deren linke Seite ein ganzes Polynom in x ist und zu Koeffizienten derartige Funktionen einer Variable t hat, daß alle Wurzeln dieser Gleichung Integrale einer und derselben Differentialgleichung von der Form $dx/dt = A + Bx + Cx^2$ sind, wo A, B, C Funktionen von t bezeichnen. Eine solche Differentialgleichung soll eine Riccatische Gleichung heißen. Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, die allgemeinste anharmonische Gleichung zu bilden; daraus leiten wir sofort eine Eigenschaft ihrer Kovarianten ab, die zuerst von Darboux bewiesen ist (Coll. in mem. Chelini, F. d. M. 13, 273, 1881). Danach soll das Studium der anharmonischen Gleichungen vierter Ordnung uns mit Beziehungen zwischen den elliptischen Funktionen und den anharmonischen Gleichungen bekannt machen, Beziehungen, um deren Kenntnis es uns besonders zu tun war.“ Von den Resultaten führen wir folgende an: Man bildet die allgemeinste anharmonische Gleichung vermittels der Anwendung der Substitution

$$x = u\varphi_1(t) + v\psi_1(t), \quad y = u\varphi_2(t) + v\psi_2(t)$$

auf eine in bezug auf x, y homogene algebraische Gleichung mit konstanten Koeffizienten; die Funktionen $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ können willkürlich gewählt werden. Wenn eine anharmonische Form durch diese Substitution aus einer Form f gewonnen ist, so entsteht jede Kovariante dieser anharmonischen Form mittels derselben Substitution aus einer beliebigen der Kovarianten von f. Weitere Ausführungen des funktionen-

theoretischen Teiles der Arbeit sollen in den Annales de la Faculté des sciences de Marseille erscheinen. Lp.

V. Jamet. Sur les équations anharmoniques. Marseille Ann. 12, 1-21.

Nach dem Referate in der Revue semestrielle **11**$_1$, 76, das der Redaktion allein zur Einsicht vorlag, stimmt der Inhalt dieser Abhandlung im wesentlichen mit dem der vorstehend besprochenen Arbeit überein. Wir entnehmen aus dem angezogenen Berichte, daß die Differentialgleichung des vorstehenden Referates auf die Form $dx/dt + x^2 t = \frac{3}{4}\wp t$ gebracht werden kann, die ebenfalls anharmonisch ist, und wo die Funktion $\wp$ Invarianten besitzt, die nur von der ursprünglichen Gleichung abhängen. Als bemerkenswerter Satz wird angeführt: „Jede anharmonische Gleichung ist auf diejenige zurückführbar, die man durch Nullsetzung einer beliebigen binären Form erhält, nachdem man dieselbe der Transformation

$$x = u\,\varphi_1(t) - v\,\varphi_1'(t), \quad y = u\,\varphi_2(t) - v\,\varphi_2'(t)$$

unterworfen hat, wo φ_1, φ_2 zwei unabhängige Integrale der Gleichung $4\varphi''(t) = 3\varphi(t)\wp t$ bezeichnen, unter der Voraussetzung, daß die Invarianten von $\wp t$ nach einem bestimmten Gesetze von den ursprünglichen Koeffizienten abhängen." Dieser Satz steht auch schon am Schlusse der vorstehend besprochenen Abhandlung als Folge der Betrachtungen dieser Arbeit. Lp.

J. Sobotka. Betrachtungen über die graphische Integration von Differentialgleichungen, namentlich von linearen erster Ordnung. Časopis **31**, 10-23, 97-105, 177-188, 265-273 (Böhmisch).

Ausgehend von einer Arbeit, welche Czuber in der Zs. für Math. u. Physik veröffentlicht hat (F. d. M. **30**, 294, 1899), behandelt der Verf. die Differentialgleichung (1) $(Ly + M)y' + Py = Q$, unter L, M, P, Q einwertige Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x verstanden, und zeigt zuerst, daß durch die den einzelnen Punkten einer zu y parallelen Geraden zugehörigen Linienelemente Tangenten einer Parabel gegeben sind, deren Brennpunkt und Direktrix näher bestimmt wird. Verschiebt sich jene Gerade, stets zu y parallel bleibend, so beschreibt der Brennpunkt eine gewisse Kurve, deren sich der Verf. nach Czubers Vorgang, welcher von demselben für den Fall von linearen Differentialgleichungen gegeben wurde, dazu bedient, die Integralkurven von (1) annähernd zu konstruieren. Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der Integralkurven. Geometrische Interpretation der bei der Auflösung der Gleichung (2) $y' + Py = Q$ gebräuchlichen analytischen Methode. Geometrische Eigenschaften der Schar der Integralkurven, welche die Gleichung (2) befriedigen. Geometrischer Ausdruck des integrierenden Faktors nach Lie. Folgerungen aus dem Vergleiche der Gleichungen

$y' + Py = Q$ und $y' + Py = 0$. Graphische Darstellung der Integralkurven. Modifikation eines Mechanismus von Coriolis. Die Untersuchung des Falles $y' + y/x = x/m$, welcher auf das Cartesische Blatt führt, bringt den Verf. auf einige geometrische Eigenschaften dieser Kurve. Sda.

É. PICARD. Sur les périodes des intégrales doubles et sur une classe d'équations différentielles linéaires. C. R. **134**, 69-71.

In Erweiterung eines Satzes über die Perioden Abelscher Integrale betrachtet Verf. ein Doppelintegral zweiter Gattung

$$\iint \frac{Q(x, y, z, \alpha)\, dx\, dy}{f'(z)},$$

welches zu der von einem Parameter α abhängenden algebraischen Oberfläche $f(x, y, z, \alpha) = 0$ gehört, und worin Q ein Polynom in x, y, z und α ist. Die Perioden desselben, welche zweidimensionalen, ganz im Endlichen befindlichen Cykeln entsprechen, genügen als Funktionen von α einer linearen Differentialgleichung. Wbg.

M. BÔCHER. On the real solutions of two homogeneous linear differential equations of the first order. American M. S. Trans. **3**, 196-215.

Das System der beiden homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(1) \qquad y' = Py - Qz, \quad z' = Ry - Sz$$

ist deswegen allgemeiner als die daraus resultierende homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(2) \qquad y'' + py' + qy = 0,$$

weil die Betrachtung der Koeffizienten

$$p = S - P - Q'/Q, \quad q = QR - PS - P' + PQ'/Q$$

voraussetzt, daß P und Q erste Ableitungen besitzen, und, falls p und q stetig sein sollen, daß P' und Q' stetig sind und Q nicht verschwindet, — welche Beschränkungen, wenn man (1) direkt betrachtet, ganz unnötig sind. Es ist nun der Zweck der vorliegenden Arbeit, über das System (1) eine Reihe von Sätzen aufzustellen, welche den bekannten von Sturm im ersten Bande von Liouvilles Journal (1836) über die Gleichung (2) aufgestellten Vergleichungssätzen analog sind. Sturms Theoreme, in einigen Fällen beträchtlich erweitert, folgen als bloße Korollare aus den vom Verf. erhaltenen Sätzen, wie in § 7 gezeigt wird. Überdies hat die vom Verf. angewandte Methode nicht allein den Vorzug der Allgemeinheit, sondern auch den der Einfachheit, ein Vorzug, welcher besonders vom Standpunkt der modernen Strenge aus einleuchtet. Wbg.

Obriot. Sur les équations différentielles du second ordre qui admettent un groupe fini continu de transformations algébriques. C. R. 134, 1288-1291.

Die im Titel bezeichneten Differentialgleichungen lassen sich, wenn die Gruppe zwei Parameter enthält, durch eine Transformation $X = \chi(x)$, $Y = \psi(y, x)$ (ψ algebraisch in y) auf vier Painlevésche Typen (Acta Math. 25) reduzieren. Wbg.

S. Kempiński. Über Integrale der Lösungen der gewöhnlichen linearen, sich selbst adjungierten Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Krakau Anz. 1902, 65-88.

Verf. dehnt in der vorliegenden Arbeit seine früheren Untersuchungen, die sich auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei singulären Punkten beziehen (Krakau. Ber. 37, 112-138; F. d. M. 30, 303-304, 1899), auf solche mit n singulären Punkten aus. Er führt zunächst wieder die Integrale erster, zweiter und dritter Gattung ein und untersucht ihr Verhalten bei beliebigen Umkreisungen der unabhängigen Veränderlichen (§§ 1, 2, 3). Sodann stellt er eine Beziehung zwischen den Integralen zweiter und dritter Gattung auf; diese dient zur Herleitung der Bilinearrelationen, welche zwischen den Periodizitätsmoduln der Integrale erster und zweiter Gattung bestehen (§ 4). Im § 5 werden Reduktionsformeln für die Integrale der Lösungen $Y = r_0(z)\,y + r_1(z)\,y'$ der zu derselben Art gehörenden Differentialgleichungen aufgestellt. § 6 enthält die genaue Feststellung der Anzahl der linear unabhängigen Integrale erster Gattung (dieselbe ist gleich $n - 2$), § 7 die Darstellung der Funktionen Y vermittels der Integrale erster und zweiter Gattung, § 8 endlich die Darstellung des Integrals $\int Y dz$ vermittels der Integrale erster, zweiter und dritter Gattung (vergl. das folgende Referat). Wbg.

S. Kempiński. Über Integrale der Lösungen der gewöhnlichen linearen, sich selbst adjungierten Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Krak. Abh. 42, 45-67 (Polnisch).

Fortsetzung und Verallgemeinerung der Untersuchungen in den Krak. Abh. 37 u. 41 (vergl. F. d. M. 30, 303, 1899; 32, 341, 1901). Die vorgelegte Differentialgleichung besitzt jetzt n singuläre Punkte (in den genannten Arbeiten war $n = 3$); es seien y_1 und y_2 ihre Lösungen. Es werden mittels derselben Integrale erster, zweiter und dritter Gattung gebildet und dann die Beziehungen zwischen den Integralen zweiter und dritter Gattung und die bekannten Relationen zwischen den Periodizitätsmoduln der Integrale erster und zweiter Gattung aufgestellt. Es folgen dann Reduktionsformeln für die Integrale der Lösungen der zu derselben Art (im Fuchsschen Sinne) gehörenden Differentialgleichungen. Auf Grund eines von H. Hirsch (Math. Ann. 54, 202-322; F. d. M. 31, 338, 1900) bewiesenen Satzes wird die Anzahl der Integrale erster Gattung

genau festgestellt. Am Schlusse der Abhandlung wird die Darstellung der Funktionen $Y = r_0(z)\,y + r_1(z)\,y'$ durch Integrale erster und zweiter Gattung und des Integrals $\int Y dz$ durch Integrale erster, zweiter und dritter Gattung gegeben (vergl. das vorangehende Referat). Dn.

A.-S. CHESSIN. Sur l'équation de Bessel avec second membre. C. R. **135**, 678-679.

Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = f(x)$$

mittels der Methode der Variation der Konstanten unter Benutzung gewisser Relationen zwischen den Besselschen Funktionen erster und zweiter Art. Wbg.

W. JACOBSTHAL. Asymptotische Darstellung von Lösungen linearer Differentialgleichungen. Math. Ann. **56**, 129-154.

Die hier angestellte Untersuchung bildet in teilweise anderer Behandlung den Inhalt der Diss. des Verf. „Über die asymptotische Darstellung der Integrale einer gewissen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung" (Straßburg, 1899), über die in F. d. M. **30**, 304-305, 1899 berichtet worden ist. Wbg.

J. H. GRAF. Beitrag zur Auflösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen gewisse bestimmte Integrale genügen. Math. Ann. **56**, 423-444.

Es liege die Differentialgleichung vor

$$(1)\quad \begin{cases} (a_0x+b_0)\dfrac{d^ny}{dx^n} + (a_1x+b_1)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots \\ \qquad\qquad + (a_{n-1}x+b_{n-1})\dfrac{dy}{dx} + (a_nx+b_n)y = 0, \end{cases}$$

und es sei (a_0 kann gleich 1 genommen werden):

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n.$$

Verf. sucht der Differentialgleichung (1) durch ein bestimmtes Integral von der Form $y = \int e^{xt}\frac{h(t)}{f(t)}dt$ zu genügen, wo $h(t)$ eine noch zu bestimmende Funktion von t, ferner die Grenzen konstant und noch aus den Bedingungen zu finden sind. Es ergibt sich zunächst $\operatorname{Log} h(t) = \int \frac{g(t)}{f(t)}dt$. Durch Änderung der Variable x um eine additive Konstante kann man b_0 zum Verschwinden bringen; hat nun

$$f(t) = (t-a_1)(t-a_2)\dots(t-a_n) = \Pi(t-a)$$

lauter verschiedene Wurzeln, so ist

$$\frac{g(t)}{f(t)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{A_\lambda}{t-a_\lambda} = \Sigma\frac{A}{t-a}, \text{ wobei } A = \frac{g(a)}{f'(a)}.$$

Legt man daher von einem Punkte, wo e^{xt} verschwindet, um jeden der n Pole a eine Schleife, so erhält man dadurch n partikulare Integrale der Gleichung (1) von der Form $y = \int e^{xt}\,\Pi(t-a)^{A-1}\,dt$. An drei Beispielen:

(I) $$x\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} - b^2xy = 0,$$

(II) $$x\frac{d^2y}{dx^2} + (2a+1)\frac{dy}{dx} - xy = 0,$$

(III) $$\frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + by = 0$$

wird diese Integration eingehend ausgeführt. Wbg.

N. Madsen. Integration af nogle lineaere Differentialligninger. Nyt. Tidsskr. **18** B, 59-63.

Der Verf. integriert die Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{u}{x}\frac{du}{dx} + bx^{2p-2}u = 0,$$

deren (übrigens im voraus bekannte) Integrale einer Diskussion unterworfen werden. V.

E. Budde. Über eine Gruppe von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen zwei Veränderlichen. Berl. Math. Ges. Ber. 1, 44-47.

Verf. betrachtet Differentialgleichungen von der Gestalt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + L\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + M\frac{dy}{dx} + N = 0 \ (L, M, N \text{ Funktionen von } x \text{ und } y),$$

welche ein erstes Integral von der Form $X\left(\frac{dy}{dx} + p\right) = c$ besitzen (X und p Funktionen von x und y, c Konstante), und gibt Fälle an, in denen man dieselben unter dieser Voraussetzung einmal integrieren kann. Wbg.

J. Thomae. Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung. Leipz. Ber. **54**, 136-138.

Das Integral der Differentialgleichung (Serret, Harnack):

$$x^2 y' y'' + 2y^2 = 0$$

findet Verf. in der Parameterform:

$$\lg y^5 = -\lg(\lambda+1) - 2\lg(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - 2\operatorname{arctg}(\lambda - 1) + \text{Const.}$$
$$\lg x^5 = \lg(\lambda+1) - \tfrac{1}{2}\lg(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - 3\operatorname{arctg}(\lambda - 1) + \text{Const},$$

woraus sich noch $kx^2/y^3 = \lambda^3 - \lambda^2 + 2$ ergibt. Wbg.

P. Painlevé. Sur les transcendantes méromorphes définies par les équations différentielles du second ordre. C. R. **134**, 449-453.

Jede Funktion

$$(1) \qquad z(x) = C + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{1}{(x-a_n)^2} - \frac{1}{a_n^2}\right],$$

wo die a_n der Beschränkung

$$(2) \qquad |a_n - a_i| > \frac{h}{|a_n|^{\frac{1}{3}}}$$

(h eine beliebige positive Größe) unterworfen sind und den Gleichungen

$$(3) \quad \frac{1}{a_n^2} + \sum_i \left[\frac{1}{(a_i - a_n)^2} - \frac{1}{a_i^2}\right] = C, \ \sum_i \frac{1}{(a_i - a_n)^3} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \infty;\ n = 1, 2, \ldots, \infty;\ i \neq n)$$

genügen, befriedigt eine Differentialgleichung von der Form

$$(4) \qquad z'' = 6z^2 + \alpha x + \beta$$

(α, β numerische Konstanten). Umgekehrt ist jede Lösung von (4) durch eine Reihe (1) darstellbar, sodaß die Integration der Gleichung (4) auf die Auflösung eines Systems unendlich vieler Gleichungen (3) zurückkommt. — Analoge Betrachtungen gelten für die Differentialgleichungen $y'' = 2y^3 + xy + \alpha$ und

$$y'' = \frac{y'^2}{y} + e^x(\alpha y^2 + \beta) + e^{2x}\left(\gamma y^3 + \frac{\delta}{y}\right).$$

Wbg.

R. Liouville. Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. C. R. **135**, 392-395. — Sur les transcendantes uniformes définies par les équations différentielles du second ordre. C. R. **135**, 731-732, 952-954.

P. Painlevé. Sur l'irréductibilité des transcendantes uniformes définies par les équations différentielles du second ordre. C. R. **135**, 411-415. — Démonstration de l'irréductibilité absolue de l'équation $y'' = 6y^2 + x$. — Sur les transcendantes uniformes définies par l'équation $y'' = 6y^2 + x$. — Sur l'irréductibilité de l'équation $y'' = 6y^2 + x$. C. R. **135**, 641-647, 757-761, 1020-1025.

Liouville glaubt bewiesen zu haben, daß die Integration der Differentialgleichung (1) $y'' = 6y^2 + x$ sich durch geeignete Transformationen auf diejenige einer linearen Differentialgleichung vierter Ordnung reduzieren läßt. Painlevé zeigt, daß die Schlüsse Liouvilles für eine beliebige Differentialgleichung zweiter Ordnung bestehen bleiben, was zu einem unmöglichen Resultat führen würde. Er findet in der Tat den Fehler darin, daß die effektive Herstellung jener Transformationen Integrationen erfordert, die mit der Integration der vorgelegten Differentialgleichung äquivalent sind, und beweist die absolute Irreduktibilität der Differentialgleichung (1) im Sinne von Drach, derart, daß dieselbe durch keinen formellen Integrationsprozeß reduziert werden kann. Gleichzeitig leitet er einige Eigenschaften der durch die Gleichung (1) definierten Transzendenten ab, die sich aus ihrer Irreduktibilität ergeben, und zeigt, daß die von ihm (S. M. F. Bull. 28, 48, 1900) gegebene Darstellung des Integrals von (1) als Quotient zweier ganzen Funktionen unter allen die einfachste ist. Wbg.

J. Hadamard. Sur une classe d'équations différentielles. S. M. F. Bull. **30**, 208-220.

Verf. untersucht nach dem Vorgange von Painlevé Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(1) \qquad y'' = R(y', x, y) = \frac{P(y', x, y)}{Q(y', x, y)}$$

(P und Q Polynome in y'), deren allgemeines Integral die Form hat:

$$(2) \qquad F(x, y, a, b) = 0,$$

worin F ein Polynom in a und b bedeutet, dessen Koeffizienten ebenso wie die von R beliebige Funktionen von x und y sind. Verf. betrachtet nun die Gleichung (2) für ein festes Wertepaar x, y als eine algebraische Kurve C in den Koordinaten a, b; dem Studium dieser Kurven C, die er „korrelative Integrale" der Gleichung (1) nennt, ist die vorliegende Arbeit gewidmet. — Wie schon Painlevé gezeigt hat, besitzt die Gleichung (1) zwei erste Integrale

$$a = r_1(y', x, y), \quad b = r_2(y', x, y),$$

welche in y' rational sind, sodaß bei dieser Wahl von a, b die Kurven C Unikursalkurven werden. — Die Form der Gleichung (1) hängt hauptsächlich von der Zahl der Rückkehrpunkte der Kurven C ab; besitzen diese keine Rückkehrpunkte, so hat (1) die aus den Untersuchungen von Lie, Liouville und Tresse bekannte Form:

$$y'' = Ay'^3 + By'^2 + Cy' + D.$$

Den Schluß bildet die Betrachtung besonderer Integralkurven. Wbg.

P.-J. SUCHAR. Sur les équations différentielles linéaires de second ordre à coefficients algébriques. Journ. de Math. (5) 8, 119-134.

G. VITALI. Sopra le equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti algebrici. Palermo Rend. **16**, 57-69.

Appell hat am Ende seiner berühmten Abhandlung über die Funktionen mit konstanten Multiplikatoren einige Bemerkungen über die homogenen linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten gemacht, welche zur Fuchsschen Klasse gehören, und deren determinierende Fundamentalgleichungen ganzzahlige Wurzeln besitzen; er teilt sie in drei Gattungen, je nachdem das allgemeine Integral überall endlich ist, Pole oder logarithmische Verzweigungsstellen hat. — Vitali betrachtet zwei Appellsche Gleichungen zweiter Ordnung erster Gattung, welche dieselbe Gruppe besitzen; er bildet die Determinante $y_1 t_2 - y_2 t_1$, wo y_1, y_2, t_1, t_2 Fundamentalintegrale der beiden Gleichungen sind, und setzt ihre Gruppe derart voraus, daß diese Determinante eine spezielle Funktion mit Multiplikatoren oder gleich Null ist. Diese Voraussetzungen führen ihn zu speziellen charakteristischen Typen Appellscher Gleichungen. — Suchar untersucht die Appellschen Gleichungen zweiter Ordnung genauer für den besonderen Fall, daß die zugehörige Riemannsche Fläche hyperelliptisch ist; insbesondere zeigt er, wie die Koeffizienten beschaffen sein müssen, damit diese Gleichungen von der ersten Gattung seien. Den Schluß seiner Arbeit bildet die Anzahlbestimmung der linear unabhängigen Gleichungen erster Gattung, welche dieselbe Gruppe besitzen.

Wbg.

L. K. LACHTIN. Differentialresolvente der allgemeinen algebraischen Gleichung sechster Ordnung. Moskau Math. Samml. **22**, 589-658 (Russ.).

Diese auf S. 115-117 dieses Bandes angezeigte Arbeit handelt ebenso viel von der algebraischen Lösung der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung wie von der Lösung der algebraischen Gleichung. Si.

E. J. WILCZYNSKI. Reciprocal systems of linear differential equations. American M. S. Trans. **3**, 60-70.

In einer früheren Arbeit (American M. S. Trans. **2**, 343-362; F. d. M. **32**, 334-335, 1901) wurden die Lösungen

(1) $y_k = f_k(x), \; z_k = g_k(x) \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$

des Systems

$$(2)\qquad \begin{cases} y''+p_{11}y'+p_{12}z'+q_{11}y+q_{12}z=0, \\ z''+p_{21}y'+p_{22}z'+q_{21}y+q_{22}z=0 \end{cases}$$

als homogene Koordinaten zweier Punkte im Raume P_y und P_z interpretiert; die Gleichungen (1) definierten dann zwei Kurven C_y und C_z, deren Punkte in einer durch den Parameter x vermittelten Korrespondenz standen. Entsprechende (zu demselben Wert von x gehörige) Punkte wurden durch eine Gerade L_{yz} verbunden; alle diese Geraden erzeugten eine nicht abwickelbare Regelfläche S; diese war invariant für alle mit (2) äquivalenten Systeme, die aus (2) durch die allgemeinste weder die Form, noch die Ordnung von (2) ändernde Punkttransformation

$$(3)\qquad x=f(\bar{x}),\ y=\alpha(\bar{x})\bar{y}+\beta(\bar{x})\bar{z},\ z=\gamma(\bar{x})\bar{y}+\delta(\bar{x})\bar{z}$$

hervorgingen. — In der vorliegenden Arbeit wird zunächst die dualistische Interpretation gegeben: y_k und z_k sind die Koordinaten zweier Ebenen p_y und p_z; die Gleichungen (2) definieren dann zwei abwickelbare Oberflächen D_y und D_z; entsprechende Ebenen schneiden sich in einer Geraden L_{yz}, und die Gesamtheit dieser Geraden erzeugt wieder eine nicht abwickelbare Regelfläche S, welche für alle mit (2) äquivalenten Systeme invariant bleibt. Diese beiden Interpretationen werden nun kombiniert: In entsprechenden Punkten zweier Kurven C_y und C_z werden die Tangentialebenen p_y und p_z an die Regelfläche S konstruiert; diese schneiden sich in der Geraden L_{yz}, die P_y und P_z verbindet. Die vier Koordinatenpaare, welche diese Ebenen bestimmen, bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen eines neuen Systems linearer Differentialgleichungen, welches Verf. dem ursprünglichen „adjungiert" nennt; es ist dies eine Verallgemeinerung der Lagrangeschen Adjungierten (§ 1). Im § 2 wird das adjungierte System wirklich aufgestellt; im § 3 werden die wichtigsten Eigenschaften desselben entwickelt: 1. Adjungierte Systeme haben dieselben Seminvarianten und Invarianten; 2. ihre gegenseitige Beziehung ist reziprok; 3. sie sind dann und nur dann äquivalent, wenn ihre integrierende Regelfläche von der zweiten Ordnung ist; 4. beide haben gleichzeitig die semikanonische, bez. kanonische Form. — Den Schluß bildet ein neuer Beweis eines in der früheren Arbeit aufgestellten Satzes sowie der Hinweis, daß die ganze Theorie der nicht abwickelbaren Regelflächen auf der Basis der linearen Differentialgleichungssysteme aufgebaut werden kann. Wbg.

M. Bôcher. On systems of linear differential equations of the first order. American J. 24, 311-318.

Verf. betrachtet das System linearer Differentialgleichungen

$$(1)\qquad \frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}y_j+\beta_i \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

worin die Koeffizienten α und β nicht notwendig analytische Funktionen der reellen Variable x sind, welche in dem Intervalle (I) $a\leqq x\leqq b$

folgende Bedingung erfüllen: (A) Die Funktionen α_{ij} und β_i sollen höchstens eine endliche Anzahl von Diskontinuitäten in (I) besitzen, und die Integrale $\int |\alpha_{ij}|\, dx$, $\int \beta_i\, dx$ sollen, über irgend einen Teil von (I) erstreckt, konvergieren. — Nach Präzisierung des Begriffes „Lösung“ werden die folgenden beiden Sätze bewiesen: 1. Ist ein beliebiges System von Konstanten $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ und ein Punkt c von (I) gegeben, so existiert eine und nur eine Lösung $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ von (1), welche die Anfangsbedingungen $y_i(c) = c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ erfüllt. 2. Sind die positiven Konstanten B, C und ε und eine positive Funktion $\varphi(x)$ gegeben, welche höchstens eine endliche Zahl von Diskontinuitäten in (I) besitzt, und für welche $\int \varphi(x)\, dx$, über irgend einen Teil von (I) erstreckt, konvergiert, so existiert ein positives δ von folgender Beschaffenheit. Wenn

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{ij} y_j + \beta_i,$$

$$(\bar{1}) \qquad \frac{d\bar{y}_i}{dx} = \sum_{j=1}^{j=n} \bar{\alpha}_{ij} \bar{y}_j + \bar{\beta}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

zwei Systeme von Gleichungen sind, deren Koeffizienten die Bedingung (A) erfüllen und außerdem (höchstens mit Ausnahme einer endlichen Zahl von Punkten) die Ungleichungen

$$|\bar{\alpha}_{ij} - \alpha_{ij}| \leqq \delta, \quad |\alpha_{ij}| \leqq \varphi(x), \quad |\bar{\alpha}_{ij}| \leqq \varphi(x),$$

$$|\bar{\beta}_i - \beta_i| \leqq \delta, \quad \left|\int \beta_i\, dx\right| \leqq B, \quad \left|\int \bar{\beta}_i\, dx\right| \leqq B \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

und wenn c ein Punkt von (I) und $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sowie $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ Lösungen von (1) bez. $(\bar{1})$ sind, für welche

$$|\bar{y}_i(c) - y_i(c)| \leqq \delta, \quad |y_i(c)| \leqq C, \quad |\bar{y}_i(c)| \leqq C \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dann ist im Intervall (I) $|\bar{y}_i(x) - y_i(x)| < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Wbg.

O. Dunkel. Regular singular points of a system of homogeneous linear differential equations of the first order. American Acad. Proc. 38, 341-370.

Verf. betrachtet ein System von n Differentialgleichungen der Form

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{j=n} \left(\frac{\mu_{i,j}}{x} + a_{i,j}\right) y_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

worin die $\mu_{i,j}$ Konstanten und die $a_{i,j}$ (nicht notwendig analytische) Funktionen der reellen unabhängigen Veränderlichen x sind, stetig in dem Intervall $0 < x \leqq b$. Ferner wird verlangt, daß $|a_{i,j}|$ (zuweilen auch noch nach Multiplikation mit gewissen Potenzen von $\log x$) bis zum Punkte $x = 0$ integrabel sei. Den diese Bedingungen erfüllenden Punkt $x = 0$ nennt Verf. einen „regulären singulären Punkt“ des Gleichungssystems (1) in Übereinstimmung mit dem Gebrauche dieses Ausdruckes

bei Bôcher in seiner Untersuchung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (American M. S. Trans. **1**, 40-52; F. d. M. **31**, 345-346, 1900; die Arbeit des Verf. ist eine Erweiterung derjenigen Bôchers). Daß diese Terminologie eine legitime Erweiterung der gewöhnlichen ist, wenn die Koeffizienten des Differentialgleichungssystems analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen sind, erhellt aus der Vergleichung der Resultate der vorliegenden Arbeit mit der Thèse von Sauvage „Théorie générale des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes" (Paris, 1895; abgedruckt in Toulouse Ann. **8** u. **9**). Um die Natur der Lösungen von (1) in der Umgebung der regulären singulären Stelle $x = 0$ zu untersuchen, reduziert Verf. zunächst das Gleichungssystem (1) mittels einer linearen Transformation der unabhängigen Veränderlichen mit konstanten Koeffizienten auf eine kanonische Form. Sodann wendet er, wie Bôcher, die Methode der sukzessiven Approximationen an, um ein System von n linear unabhängigen Lösungen des kanonischen Systems in der Umgebung des Punktes $x = 0$ zu entwickeln. Mittels der linearen Transformation kehrt er darauf zu n linear unabhängigen Lösungen des ursprünglichen Systems zurück. Den Schluß bildet eine Anwendung auf den Fall einer einzigen homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung. Wbg.

E. Cartan. **Sur l'intégration des systèmes différentiels complètement intégrables.** C. R. **134**, 1415-1417, 1564-1566.

Verf. versteht unter einem „Integral-Differentialausdruck" (expression différentielle intégrale) eines Systems

$$(1) \qquad \begin{cases} w_1 = a_1\, dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_r = l_1\, dx_1 + \cdots + l_n\, dx_n = 0 \end{cases}$$

einen Ausdruck

$$w = \alpha_1\, dx_1 + \cdots + \alpha_n\, dx_n,$$

der sich in die Form bringen läßt

$$w = A_1\, du_1 + \cdots + A_r\, du_r,$$

wo die $u_1, u_2, \ldots, u_r$ r unabhängige Integrale des Systems bedeuten und die A nur von den u abhängen. Die Betrachtung dieser Ausdrücke sowie der bilinearen Kovarianten der linken Seiten von (1) ist für die Integration dieses Systems von großer Wichtigkeit. Insbesondere gibt es eine allgemeine Integrationsmethode, wenn man ein System von r unabhängigen Integral-Differentialausdrücken kennt; dies ist z. B. der Fall, wenn das System (1) eine transitive Gruppe mit r Parametern zuläßt (vergl. Lie). — In der zweiten Arbeit werden Integrationsmöglichkeiten für den Fall angegeben, daß man nicht r Integral-Differentialausdrücke des Systems (1) kennt. Wbg.

A. Sarminsky. Die Ordnung des Systems der simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen. Warschau Univ. No. 2, 3, 4, 1-74 (Russ.).

Verf. löst auf zwei Weisen durch unmittelbare Betrachtung des gegebenen Systems simultaner Differentialgleichungen die Aufgabe von Jacobi (De investigatione ordinis etc.). Zum Schluß betrachtet er analytische Bedingungen der Erniedrigung der Ordnung. Si.

A. Garbasso. Formules pour l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires et homogènes. Nouv. Ann. (4) 2, 549-552.

Integration des im Titel bezeichneten Differentialgleichungssystems durch die symbolische Methode. Wbg.

H. F. Baker. Further applications of matrix notation to integration problems. London M. S. Proc. 34, 347-360.

Bei meinem Referat über die vorliegende Arbeit beginne ich mit der Besprechung ihres letzten Teiles. Er handelt von dem System linearer Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten:

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = u_{i1}x_1 + u_{i2}x_2 + \cdots + u_{in}x_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Verf. faßt dieses System symbolisch in der einzigen Gleichung:

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = ux$$

zusammen; hierbei repräsentieren x und $\frac{dx}{dt}$ die n Größen x_i, bez. $\frac{dx_i}{dt}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und u die Matrix der n^2 Größen u_{ik}. Das System von Differentialgleichungen wird dann durch ein Verfahren sukzessiver Approximation, das die Integrale auch symbolisch in sehr einfacher Form ergibt, integriert. Hierbei ist dem Verf. eine Arbeit von G. Peano (Torino Atti 22, 437-446, 1887, französische Übersetzung Math. Ann. 32, 450, 1888) unbekannt geblieben. In ihr wird die gleiche Symbolik angewandt (nur benutzt Peano den Begriff der höheren komplexen Zahlen) und das nämliche Resultat erhalten. Wir können daher auf Hamburgers eingehendes Referat in den F. d. M. 19, 308, 1887 verweisen.

Zu der besprochenen Untersuchung wurde Baker in Verallgemeinerung der von ihm eingeschlagenen Methode geführt, um die endlichen Transformationen der adjungierten Gruppe mit kanonischen Parametern zu bestimmen, die zu den r^3 Lieschen Zusammensetzungskonstanten c_{iks} gehört. Setzt man

$$E_{\varrho\sigma} = \sum_{\tau=1}^{\tau=r} c_{\sigma\tau\varrho}\, e_\tau, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r;\ \sigma = 1, 2, \ldots, r),$$

so sind die infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe:

$$-\left(E_{1\sigma}\frac{\partial}{\partial e_1}+E_{2\sigma}\frac{\partial}{\partial e_2}+\cdots+E_{r\sigma}\frac{\partial}{\partial e_r}\right).$$

Sind $e_1', e_2', \ldots, e_r'$ kanonische Parameter, und ist $E_{\varrho\sigma}'$ ebenso aus e' wie $E_{\varrho\sigma}$ aus e gebildet, so ergeben sich die endlichen Gleichungen der adjungierten Gruppe dem Verf. in der analog wie Formel (2) symbolisch zu verstehenden Gleichung:

(3) $$e=\Delta' e^0.$$

Hierbei repräsentiert e^0 die r Variablen $e_1^0, e_2^0, \ldots, e_r^0$; es ist

$$\Delta'=1+\frac{E'}{1}+\frac{E'^2}{2!}+\frac{E'^3}{3!}+\cdots,$$

E' bedeutet die zu den r^2 Größen $E_{\varrho\sigma}'$ gehörige Matrix. Die Formel (3) wird durch die Integration eines simultanen Differentialgleichungssystems (vergl. Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, III, 607), das Verf. symbolisch:

(4) $$\frac{de}{dt}=E'e$$

schreibt, erhalten. Das System (4) ist von der Form (2), hat im besonderen konstante Koeffizienten und ist übrigens auch von Peano a. a. O. in gleicher Form integriert worden.

In den endlichen Gleichungen (3) der adjungierten Gruppe tritt die nämliche Matrix Δ' wie in einer früheren Arbeit des Verf. auf (Lond. M. S. Proc. **34**, 91-127; F. d. M. **32**, 159, 1901). Hierauf läßt sich ein einfacher Beweis des a. a. O. vom Verf. sogenannten Exponentialtheorems gründen. Verf. zerlegt die Transformationen der adjungierten Gruppe in eine Aufeinanderfolge zweier Transformationen der ersten, bez. der zweiten Parametergruppe und leitet hieraus ein Resultat her, das den bekannten Satz von der Invarianz der charakteristischen Gleichung einer r-gliedrigen kontinuierlichen Transformationsgruppe bei der adjungierten Gruppe als speziellen Fall enthält. Ly.

H. Appelroth. Die Normalform eines Systems von algebraischen Differentialgleichungen. Moskau Math. Samml. **23**, 12-23 (Russisch).

Der Verf. setzt zunächst auseinander, wie man ein vorgelegtes System dieser Art auf die sogenannte Jacobi-Weierstraßsche Normalform:

$$\frac{dy_k}{dx}=\frac{G_k(x,s,y_1,\ldots,y_m)}{\frac{\partial}{\partial s}G(x,s,y_1,\ldots,y_m)}\qquad(k=1,\ldots,m)$$

bringt, wo die G_k und G ganze rationale Funktionen ihrer Argumente sind und s eine Wurzel der Gleichung $G=0$ bedeutet. Er führt dann eine neue Veränderliche φ ein durch die Substitution:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \left(\frac{\partial G}{\partial s}\right)^2$$

und fügt die aus $G = 0$ durch Differentiation folgende Gleichung:

$$\frac{ds}{d\varphi} = -\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial s} - \Sigma\, G_k \frac{\partial G}{\partial y_k}$$

zu dem Systeme hinzu, so daß, wenn man für x und s schreibt y_{m+1} und y_{m+2}, ein System von der Form

$$\frac{dy_k}{d\varphi} = H_k(y_1, \ldots, y_{m+2}) \qquad (k = 1, \ldots, m+2)$$

entsteht, wo die H_k ganze Funktionen sind. Setzt man noch $y_k = Y_k/u$, so wird:

$$\frac{1}{u}\frac{dY_k}{d\varphi} - \frac{Y_k}{u^2}\frac{du}{d\varphi} = \frac{\overline{H}_k}{u^\mu},$$

wo $\overline{H}_k$ eine homogene ganze Funktion μ-ten Grades von u und den y_k ist; wenn man nun φ durch eine Veränderliche t ersetzt, wo $d\varphi = u^{\mu-1}dt$, und wenn man außerdem u durch $du/dt = u^\mu$ bestimmt, so kommt:

$$\frac{dY_k}{dt} = Y_k u^{\mu-1} + \overline{H}_k \qquad (k = 1, \ldots, m+2).$$

Man hat also jetzt ein System:

$$\frac{d\zeta_k}{dt} = \varphi_k(\zeta_1, \ldots, \zeta_{m+3}) \qquad (k = 1, \ldots, m+3),$$

wo die φ_k ganz und homogen vom Grade μ sind. Hier kann man noch den Fall $\mu > 2$ stets auf den Fall $\mu = 2$ zurückführen, indem man alle Produkte von der Form $\zeta_1^{r_1}\zeta_2^{r_2}\ldots\zeta_{m+3}^{r_{m+3}}$, wo

$$r_1 + \cdots + r_{m+3} = \mu - 1,$$

als neue Unbekannte $z_1, \ldots, z_\lambda$ hinzufügt. Dann ist nämlich:

$$\frac{d\zeta_k}{dt} = \sum_r^{1\ldots\lambda}\sum_j^{1\ldots m+3} a_{rj}^{(k)} z_r \zeta_j,$$

und in derselben Form sind offenbar auch die dz_i/dt darstellbar. Demnach kann man jedes System von algebraischen gewöhnlichen Differentialgleichungen auf eine solche Normalform bringen, daß die Differentialquotienten der Unbekannten entweder lineare homogene Funktionen der Unbekannten sind oder ganze homogene Funktionen zweiten Grades.

El.

Ch. Riquier. Sur le degré de généralité d'un système différentiel quelconque. Acta Math. **25**, 297-357.

Im Anschlusse und als Ergänzung seiner früheren Arbeiten über Differentialsysteme geht der Verf. besonders auf diejenigen Systeme ein,

die er früher isonome nannte und jetzt als monoische bezeichnet. Ohne sehr ausführlich zu werden, dürfte es nicht leicht möglich sein, einen Überblick über die zahlreichen Theoreme und interessanten Ergebnisse der Arbeit zu liefern. Sh.

Weitere Literatur.

L'irréductibilité des équations différentielles. Le prolongement analytique. Revue générale des sc. **13**, 1157-1158.

S. Epsteen. Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung und die zugehörigen Gruppen. Zürich. 56 S. 8° (1901).

S. Epsteen. An elementary account of the Picard-Vessiot theory. Amer. Math. Monthly **9**, 249-252.

S. Epsteen. Determination of the group of rationality of a linear differential equation. Amer. Math. Monthly **10**, 4-8.

S. Epsteen. Analog of Sylvester's dialytic method of elimination. Amer. Math. Monthly **10**, 63-64.

A. Krug. Die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung. I. Pr. Außig. 115 S. 8° (1901).

W. Kutta. Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen. Diss. München. 19 S. 8° (1901).

Vergl. F. d. M. **32**, 316, 1901.

A. B. Pierce. Sufficient condition that two linear homogeneous differential equations shall have common integrals. Amer. Math. Monthly **10**, 65-68.

B. F. Groat. An introduction to the summation of differences of a function. An elementary exposition of the nature of the algebraic processes replaced by the abbreviations of the infinitesimal calculus. IV + 43 S. Seven lessons in theory of inversions of order and determinants. Minneapolis: Wilson. 32 S. 8°.

V. Volterra. Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari. Mem. Soc. Ital. delle Scienze (3) **12**, 3-68.

Kapitel 6.

Partielle Differentialgleichungen.

E. Pascal. Sopra i sistemi parzialmente integrabili di equazioni ai differenziali totali di primo ordine. Lomb. Ist. Rend. (2) **35**, 244-252.

Bildet man in dem Pfaffschen Systeme:

$$dx_{n-m+1} = \sum_1^{n-m} X_{h,1}\, dx_h, \ldots, dx_n = \sum_1^{n-m} X_{h,m}\, dx_h$$

die Ausdrücke:

$$F_h = \frac{\partial}{\partial x_h} + \sum_{r=1}^{m} X_{h,r} \frac{\partial}{\partial x_{n-m+r}} \quad (h = 1, \ldots, n-m),$$

so ist bekanntlich das System vollständig integrabel, wenn sämtliche Relationen $F_h X_{k,i} - F_k X_{h,i} = 0$ erfüllt sind. Hier wird das System betrachtet unter der Annahme, daß diese Relationen nicht alle erfüllt sind, und die hierbei auftretenden verschiedenen Fälle werden an mehreren Beispielen ausführlich behandelt. Sh.

E. Cartan. Sur l'équivalence des systèmes différentiels. C. R. **135**, 781-783.

Der Verf. bespricht ein neues allgemeines Problem, das sich auf ein System von n Pfaffschen Ausdrücken in n Veränderlichen bezieht, und das als besonderen Fall das allgemeine Äquivalenzproblem umfaßt, d. h. das Problem, festzustellen, ob zwei vorgelegte Systeme von partiellen Differentialgleichungen oder von Pfaffschen Gleichungen durch Transformationen einer Gruppe, von der bloß die Definitionsgleichungen gegeben sind, in einander übergeführt werden können (mit einander äquivalent sind). Er deutet an, wie dieses sein neues Problem auf eine endliche Reihe von Problemen derselben Art zurückgeführt werden kann, derart, daß jedes der auftretenden Systeme von Pfaffschen Ausdrücken eine endliche oder unendliche Gruppe von bekannter Struktur (Zusammensetzung) gestattet. Schließlich folgt ein Satz über die Integration gewisser Involutionssysteme von zwei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in x, y, z. El.

J. Brill. Suggestions towards the formation of a general theory of systems of Pfaffian equations. Quart. J. **32**, 183-208 (1900).

Das Referat über diesen Teil II der Untersuchungen des Verf. ist bedauerlicherweise im Jahrgange 1900 ausgefallen. Die Diskussion der ersten Gruppe von Fällen wird fortgesetzt; dazu kommt die Erörterung bezüglich der Unzulänglichkeit der Bedingungen für die niedrigsten Ordnungen. Lp.

J. Brill. Suggestions towards the formation of a general theory of systems of Pfaffian equations. Quart. J. **34**, 53-73.

Es werden hier im wesentlichen Verbesserungen und Ergänzungen der früheren Abhandlungen (Quart. J. **30**, 221-242; F. d. M. **29**, 301, 1898 und Quart. J. **32**; vergl. das vorstehende Referat) desselben Verf. gegeben. Sh.

J. Brill. On a quasi-geometrical view of the solution of a Pfaffian equation. Quart. J. **33**, 257-271.

Man gewinnt eine klarere Einsicht in die Theorie der Pfaffschen Gleichungen, wenn man die Rechnungen in die Sprache der „Quasi-

Geometrie" übersetzt, das heißt, wenn man die Veränderlichen als Koordinaten eines Punktes in einem mehrfach ausgedehnten Euklidischen Raume auffaßt. So meint der Verf., der die beste Bestätigung in der ihm wohl unbekannten Ausdehnungslehre Graßmanns von 1862 hätte finden können. Es ist recht bedauerlich, daß Graßmanns Untersuchungen, die Engel in so trefflicher Weise auch den Mathematikern zugänglich gemacht hat, die sich mit den Methoden der Ausdehnungslehre nicht befreundet haben, noch immer nicht beachtet werden.

Was die vorliegende Abhandlung im besonderen bringt, ist die geometrische Interpretation der zweiten Methode von Clebsch für die Integration einer einzigen Pfaffschen Gleichung. St.

J. F. Pfaff. Allgemeine Methode, partielle Differentialgleichungen zu integrieren (1815). Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von G. Kowalewski. Leipzig: Engelmann. 84 S. 8vo (Ostwalds Klassiker No. 129).

K. Żorawski. Über die Eigenschaften eines gewissen mehrfachen Integrals, die als Verallgemeinerung zweier Sätze aus der Theorie der Wirbelbewegung betrachtet werden können. Prace mat-fiz. **13**, 107-163 (Polnisch).

In einer früheren Arbeit über die Erhaltung der Wirbelbewegung (Krak. Abh. **39**) wurden vom Verf. solche Bewegungen untersucht, bei welchen Wirbellinien in Wirbellinien übergehen und ein gewisses zweifaches, der Intensität der Wirbelbewegung entsprechendes Integral invariant bleibt. In der vorliegenden Abhandlung wird jene Untersuchung verallgemeinert. Statt der Differentialgleichungen der Wirbelbewegung wird hier ein System von $r < n$ unabhängigen Pfaffschen Gleichungen mit n unabhängigen Variabeln betrachtet. Es wird die Veränderung untersucht, welcher ein gewisses r-faches, der Intensität des Wirbels entsprechendes Integral durch die Transformationen des gegebenen Systems unterliegt, und es werden diejenigen r-fachen Integrale bestimmt, welche bei allen Verrückungen längs der linearen Elemente des Pfaffschen Systems invariant bleiben. Ein Teil dieser Untersuchung gründet sich auf eine allgemeine Formel für die infinitesimalen Transformationen eines Integrals, das auf eine in einem m-dimensionalen Raume liegende r-dimensionale Mannigfaltigkeit erstreckt wird. Dn.

A. C. Dixon. On the reduction of differential expressions to their canonical form. Quart. J. **33**, 341-377; **34**, 75.

Um ein beliebiges System totaler Differentialgleichungen auf seine kanonische Form zu bringen, wird zunächst der einfachste Fall (eine einzige Gleichung) durch eine Methode behandelt, die, so einfach sie ist, den Vorzug hat, auf den allgemeineren Fall:

$$\sum_{k=1}^{m+n} A_k^{(l)}\, dx_k = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, q)$$

angewandt werden zu können. Ein gewisser Unterschied in der Behandlung des Problems in dem Falle, daß zwei Gleichungen vorhanden sind, oder in dem Falle, daß drei oder mehr vorhanden sind, kann auch noch, wie in der zweiten Note gezeigt wird, beseitigt werden. Sh.

E. Cotton. Sur certains systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales. C. R. **134**, 29-31.

Die hier betrachteten Systeme totaler Differentialgleichungen sind Verallgemeinerungen der von Lie betrachteten Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, und es werden Resultate angegeben, die ganz analog den von Vessiot (Toul. Ann. **8**, 1-33; F. d. M. **25**, 547, 1894) für die Lieschen Systeme erhaltenen sind. Sh.

E. Picard. Sur une propriété curieuse d'une classe de surfaces algébriques. C. R. **135**, 217-220.

Bei seinen Untersuchungen über die Integrale totaler Differentiale, die zu algebraischen Flächen gehören, hat Picard bis jetzt noch nicht entscheiden können, ob nicht etwa jedes Integral dieser Art eine algebraisch-logarithmische Kombination ist, das heißt sich in der Form:

$$\sum A_k \log R_k(x, y, z) + P(x, y, z)$$

darstellen läßt, wo P und die R_k rationale Funktionen von x, y und z sind, während die A_k Konstanten bedeuten. Ohne eine Entscheidung treffen zu wollen, beweist Picard eine merkwürdige Eigenschaft der Flächen, bei denen alle Integrale totaler Differentiale sich auf eine algebraisch-logarithmische Kombination reduzieren. Auf jeder algebraischen Fläche mit gewöhnlichen Singularitäten kann man ϱ besondere algebraische irreduzible Kurven ziehen, sodaß es kein Integral eines Differentials dritter Gattung gibt, das als logarithmische Kurven nur diese Kurven oder einen Teil davon hätte, während es andererseits ein Integral gibt, das als logarithmische Kurve eine beliebige $(\varrho+1)$-te Kurve und die Gesamtheit oder einen Teil der ϱ Kurven hat (vergl. F. d. M. **32**, 419, 1901). Die Zahl ϱ hat für alle sich birational entsprechenden Flächen ohne Ausnahmekurven denselben Wert. Nimmt man jetzt auf der Fläche $\varrho+1$ algebraische irreduzible Kurven willkürlich an, so gibt es stets eine rationale Funktion, die auf diesen Kurven mit gewisser Vielfachheit entweder Null oder unendlich wird und keine andere Linie von Null- und Unendlichkeitsstellen besitzt.

Zum Schluß werden große Klassen algebraischer Flächen angegeben, bei denen die Integrale totaler Differentiale sich sämtlich auf algebraisch-logarithmische Kombinationen reduzieren. St.

K. Boehm. Zur Integration partieller Differentialgleichungen. Leipz. Ber. **54**, 63-73.

Ch. Riquier. Über Systeme partieller Differentialgleichungen. Leipz. Ber. **54**, 272-281.

In einer früheren Abhandlung gleichen Titels (F. d. M. **31**, 372) hatte Boehm gewisse Differentialsysteme formal durch Potenzreihen integriert, nichts dagegen über die Konvergenz derselben ausgesprochen; die Beweise für die dort hypothetisch aufgestellten Reihen sollen später veröffentlicht werden. Hier sind kurz die Resultate beider Untersuchungen, soweit sich dieselben auf eine einzige partielle Differentialgleichung beziehen, zusammengestellt.

In der zweiten Note zeigt Riquier, daß in seinen früher veröffentlichten Arbeiten die Boehmschen Ergebnisse schon enthalten sind.

Sh.

P. Burgatti. Sopra un teorema di Levi-Civita riguardante la determinazione di soluzioni particolari di un sistema Hamiltoniano. Rom. Acc. L. Rend. (5) 11_1, 309-314.

T. Levi-Civita hat [Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{10}_1$, 3-9, 35-41; F. d. M. **32**, 721, 1901] einen bemerkenswerten Satz aufgestellt, vermittels dessen man partikulare Lösungen eines Hamiltonschen Systems bestimmen kann, sobald man ein Integral oder eine invariante Relation dieses Systems kennt. Auf diesen Satz bezieht sich die Betrachtung des Verf. in der vorliegenden Arbeit, in der er die Ableitung jenes Satzes an die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen knüpft und ihn etwas erweitert in bezug auf das stationäre Verhalten der Lösungen.

Der allgemeine Satz, der das erwähnte Theorem liefert, läßt sich etwa so aussprechen:

Liegt das vollständig integrable System vor:

$$dx_{m+\nu} = b_{\nu 1} dx_1 + b_{\nu 2} dx_2 + \cdots + b_{\nu m} dx_m \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

($x_1, \ldots, x_m$ unabhängige Variabeln, $x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}$ Funktionen derselben), und enthalten die Koeffizienten desselben nicht die Variable x_s, so liefern die Gleichungen $b_{s1} = 0$, $b_{s2} = 0, \ldots, b_{sn} = 0$, die man durch Nullsetzen der Koeffizienten von dx_s erhält, eine partikulare Lösung des gegebenen Systems.

Gz.

E. Pascal. Introduzione alla teoria invariantiva delle equazioni di tipo generale ai differenziali totali di second' ordine (Memoria I). Annali di Mat. (3) 7, 1-38.

Während in früheren Arbeiten des Verf. totale Differentialgleichungen zweiter Ordnung unter speziellen Voraussetzungen über gewisse zweite Ableitungen behandelt worden sind, werden hier diese Beschränkungen fallen gelassen und wird die Grundlage für eine Theorie derartiger Differentialsysteme gelegt. Zunächst werden die notwendigen und hin-

reichenden Bedingungen für die vollständige Integrabilität erst einer Gleichung, dann eines Gleichungssystems abgeleitet, und dann wird die für die Pfaffschen Systeme so bedeutungsvoll gewordene Liesche Transformationstheorie auf diese Systeme angewandt. Hierdurch konnte eine Reihe wichtiger Eigenschaften erkannt werden, so die über die simultane Invariante einer Differentialform zweiter Ordnung und einer partiellen Differentialgleichung ebenfalls der zweiten Ordnung; ferner über die Ausdehnung des Begriffs des vollständigen Systems auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung und verschiedene andere. Sh.

J. Coulon. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode des caractéristiques. Thèse. Paris: A. Hermann. 122 S. 4°.

Die Arbeit verfolgt den Zweck, die Riemannsche Integrationsmethode auf den Fall beliebig vieler unabhängiger Variabeln auszudehnen. Im ersten Kapitel wird die Charakteristikentheorie für lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung entwickelt und besonders auf die Bedeutung der Fläche mit singulärem Punkte nach der Darbouxschen Bezeichnung hingewiesen. Das zweite Kapitel enthält die Ausdehnung der Volterraschen Methode auf Gleichungen mit variabeln Koeffizienten für das Innere jener Fläche mit singulärem Punkte. Das Problem wird auf die Ermittlung eines gewissen Integrals zurückgeführt, dessen Existenz für eine Klasse von Gleichungen durch die Methode der sukzessiven Approximationen bewiesen wird. Die beiden folgenden Kapitel sind der Integration der Gleichungen mit konstanten Koeffizienten und beliebig vielen Variabeln auf einer geschlossenen Fläche gewidmet. Die Bestimmung der Fundamentallösungen wird auf das Studium einer Gleichung zurückgeführt, die das Analogon der Eulerschen bildet. Die gesuchten Integrale werden durch hypergeometrische und Besselsche Funktionen ausgedrückt. Im fünften Kapitel werden Anwendungen besonders auf die Wellentheorie gegeben. Sh.

G. Lütkemeyer. Über den analytischen Charakter der Integrale von partiellen Differentialgleichungen. Diss. Göttingen. 49 S. 8°.

Von der Potentialgleichung sowie von einfachen Verallgemeinerungen derselben ist es bekannt, daß ihre sämtlichen Integrale analytische Funktionen sind. Es wird die Frage aufgeworfen, ob auch allgemeinere Gleichungen des elliptischen Typus, nämlich $\Delta(u) = F(u)$ und

$$\Delta(u) = F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right),$$

nur analytische Lösungen besitzen. Nach einem Exkurse über die Darstellung analytischer Funktionen durch trigonometrische Reihen wird auf das Schwarz-Picardsche Näherungsverfahren eingegangen. Um die

Eindeutigkeit der Lösungen von $\Delta u = \dot{F}(u)$ zu zeigen, muß das Variationsproblem aufgestellt werden, dessen Lagrangesche Gleichung eben $\Delta u = F(u)$ wird. Als allgemeinster Satz der Untersuchungen ergibt sich: Sämtliche elliptische Differentialgleichungen

$$\Delta u = F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right),$$

die aus einem regulären Variationsproblem entspringen, besitzen nur analytische Lösungen.

Zum Schlusse wird auf den Charakter der hyperbolischen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right)$$

eingegangen und gezeigt, daß diese sich wesentlich von jenen unterscheiden. Sh.

J. Clairin. Sur une classe de transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre. C. R. **134**, 1102-1103.

Es wird ein Theorem aufgestellt, mit dessen Hilfe es möglich ist, in vielen Fällen eine kompliziertere Differentialgleichung auf eine von Monge-Ampère zurückzuführen. Sh.

J. Clairin. Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre. S. M. F. Bull. **30**, 37-40.

Es wird gezeigt, daß außer den linearen partiellen Differentialgleichungen die Gleichungen $r = \varphi(x, y, p, s)$ und

$$s(x + y) = q + \lambda(x, y, r)$$

die einzigen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln sind, die unzählig viele vertauschbare infinitesimale Berührungstransformationen zulassen. Sh.

J. Clairin. Sur une classe de transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre. S. M. F. Bull. **30**, 100-105.

Läßt eine Gleichung $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ zwei infinitesimale Berührungstransformationen zu, die eine Gruppe (g) erzeugen, und bedeuten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die drei Invarianten erster Ordnung von g, so lassen die Gleichungen $x' = \varphi_1(x, y, z, p, q)$, $y' = \varphi_2$, $z' = \varphi_3$ jedem Integrale der obigen Gleichung eine Fläche korrespondieren; es wird gezeigt, daß diese Flächen Integrale einer linearen Gleichung zweiter Ordnung in bezug auf die zweiten Ableitungen sind. Sh.

J. Clairin. Sur les transformations de **Baecklund**. Ann. de l'Éc. Norm. **19**, Suppl. 3-63.

E. Goursat. Sur quelques transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre. Toulouse Ann. (2) **4**, 299-340.

Sind vier Relationen

$$F_i(x, y, z, p, q;\ x', y', z', p', q') = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

zwischen den Koordinaten der Elemente zweier Systeme E und E' gegeben, so existieren stets Flächen von E, denen Flächen von E' entsprechen, und es können im speziellen diese Flächen Integrale einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung sein. Ebenso können die Flächen von E', die solchen von E entsprechen, Integrale einer zweiten derartigen Gleichung sein. Tritt dies ein, so sagt man, daß man von einer zur anderen Gleichung durch eine Bäcklund-Transformation gelangt, die durch die Relationen $F_i = 0$ definiert ist.

Im ersten Teile der Abhandlung von Clairin werden die allgemeinen Eigenschaften dieser Transformationen abgeleitet, und es wird im speziellen ein Fall behandelt, der bisher noch nicht untersucht worden ist. Es wird ferner eine zweckmäßige Einteilung der Transformationen in drei Kategorien gegeben, von denen die erste im zweiten Teile einer besonderen Untersuchung unterworfen wird, solche Transformationen nämlich, bei denen sich die Integrale der beiden Gleichungen einzeln entsprechen; sehr allgemeine Sätze können über diese Transformationen ausgesprochen werden.

Im dritten Teile werden die Transformationen behandelt, bei denen einem Integrale der einen Gleichung unendlich viele der anderen entsprechen; hier liegen die Verhältnisse erheblich verwickelter, und die Ergebnisse sind hier noch ziemlich unvollständig.

Mit denselben Transformationen beschäftigt sich Goursat. Bei ihm handelt es sich um die Frage, zu erkennen, ob eine gegebene Differentialgleichung zweiter Ordnung aus einer Bäcklund-Transformation hervorgeht, und alsdann diese Transformation zu finden. Direkt ist das Problem nicht ohne weiteres zu lösen; es wird vereinfacht durch die Annahme, daß die Gleichungen $F_i = 0$ eine infinitesimale Berührungstransformation in bezug auf das Element (x', y', z', p', q') zulassen. Sh.

E. Goursat. Sur quelques transformations de **Baecklund**. C. R. **134**, 459-462.

E. Goursat. Sur une classe de transformations de **Baecklund**. C. R. **134**, 1035-1038.

Sind x', y', p', q' unabhängige Funktionen von x, y, p, q, so ist dadurch eine Bäcklundsche Transformation definiert, die zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnnng auf einander zurückzuführen erlaubt. Verlangt man, daß $p'dx' + q'dy'$ ein vollständiges Differential

in x, y, z, p werden soll, so erhält man die eine dieser beiden Gleichungen in der Form:

$$(1) \qquad R_{pq}(rt - s^2) + R_{yp}r + R_{xq}t + S_s + R_{xy} = 0,$$

wo die Koeffizienten Funktionen von x, y, p, q sind. Der Verf. untersucht nun, wann eine vorgelegte Monge-Ampèresche Gleichung (1), deren Koeffizienten von z frei sind, auf dem angegebenen Wege durch eine Bäcklundsche Transformation erhalten werden kann. Sind die betreffenden Bedingungen erfüllt, so erfordert die Aufstellung der Bäcklundschen Transformation selbst (es gibt deren immer unendlich viele) noch Quadraturen, und die Reduktion eines Pfaffschen Ausdrucks in vier Veränderlichen auf seine Normalform. Auf die betrachtete Form läßt sich durch Berührungstransformationen jede Bäcklundsche Transformation bringen, die eine infinitesimale Berührungstransformation des Raumes x, y, z und ebenso eine des Raumes x', y', z' gestattet. In der zweiten Note betrachtet der Verf. Bäcklundsche Transformationen, die nur eine infinitesimale Berührungstransformation des einen der beiden Räume gestatten. Eine solche Transformation kann durch Berührungstransformationen so umgeformt werden, daß sie x', y', p', q' als Funktionen von x, y, z, p, q ausdrückt. Verlangt man, daß $p'dx' + q'dy'$ ein vollständiges Differential wird, so erhält man eine Monge-Ampèresche Gleichung (1), deren Koeffizienten aber jetzt z enthalten. Der Verf. stellt wieder fest, unter welchen Bedingungen eine vorgelegte Gleichung (1) auf dem angegebenen Wege erhalten werden kann, und wie man dann die zugehörigen Bäcklundschen Transformationen findet. Das macht sich alles ähnlich wie in dem vorher betrachteten besonderen Falle. Dagegen entspricht jetzt der Gleichung (1) durch die Bäcklundsche Transformation im allgemeinen keine Gleichung zweiter Ordnung, sondern ein System von zwei Gleichungen dritter Ordnung. Auch sonst erheben sich noch Fragen, auf die der Verf. in einer ausführlicheren Arbeit zurückkommen will.

El.

E. Goursat. Sur un groupe de transformations. S. M. F. Bull. 30, 155-165.

In einer Arbeit über die Transformation der Abelschen Funktionen (C. R. 1855) hat Hermite eine Gruppe von linearen Substitutionen betrachtet, deren 16 ganzzahlige Koeffizienten a_i, b_i, c_i, d_i durch sechs Relationen von der Form:

$$(1) \qquad a_i d_k - a_k d_i + b_i c_k - b_k c_i = 0 \text{ oder } 1$$

verknüpft sind. Der Verf. bemerkt nun, daß bei einer Berührungstransformation: $x' = X(x, y, z, p, q), \ldots, q' = Q$ des Raumes x, y, z die Klammerrelationen $[XY] = 0$ usw., die zwischen den vier Funktionen X, Y, P, Q bestehen, genau die Form (1) erhalten, sobald man die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}, \ \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z}, \ \frac{\partial}{\partial p}, \ \frac{\partial}{\partial q}$ in geeigneter Weise mit

den Buchstaben a_i, b_i, c_i, d_i bezeichnet; nur tritt an die Stelle von 1 das zu der Berührungstransformation gehörige ϱ. Die vier Größen r, s, t, $rt - s^2$ werden bei der Berührungstransformation durch eine Transformation von projektiver Gestalt transformiert, und betrachtet man a_i, b_i, c_i, d_i und ϱ als willkürliche Größen, die aber an die betreffenden sechs Relationen gebunden sind, so bilden alle diese Transformationen eine Gruppe, die mit der von Hermite betrachteten übereinstimmt. Führt man endlich die Berührungstransformation auf eine Monge-Ampèresche Gleichung aus:

$$u_1(rt - s^2) + u_2 r + u_3 t + u_4 + u_5 s = 0,$$

so werden die Koeffizienten $u_1, \ldots, u_5$ linear und homogen transformiert, und zwar so, daß der Ausdruck $u_5^2 - 4u_2u_3 + 4u_1u_4$ bis auf den Faktor ϱ^2 reproduziert wird. Diese Resultate können allerdings kaum als wirklich neu bezeichnet werden. Neu sind dagegen wenigstens in dieser Form die vom Verf. ohne Beweis angegebenen Bedingungen dafür, daß zwei Gleichungen $\varphi(x, y, z, p, q) = a$, $\psi = b$ für beliebige Werte der Konstanten a, b ein integrables System bilden, das der Monge-Ampèreschen Gleichung genügt. Die algebraischen Umgestaltungen, die der Verf. mit den Relationen (1) vornimmt, und die er zuletzt auch auf die Berührungstransformationen des R_{n+1} überträgt, finden sich schon bei A. Mayer, Gött. Nachr. 1874, S. 322ff., was der Verf. eigentlich wissen müßte. El.

V. Amato. Sull' integrazione di talune equazioni a derivate parziali di 2° ordine. Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania (4) **16**, 22 S.

Ein von Chini (Sulle equazioni a derivate parziali di 2° ordine, Batt. G. **39**, 1-8; F. d. M. **32**, 364, 1901) aufgestellter Satz wird auf Differentialgleichungen mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen folgendermaßen ausgedehnt:

Sind in der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$M \equiv a_{11}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + a_{12}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2} + a_{13}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_3} + \cdots + a_{1n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_n}$$
$$+ a_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + a_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \cdots + a_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} + a_0\varphi = 0$$

die Koeffizienten $a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}$ von Null verschieden, so ist:

$$\lambda M = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\lambda\left(a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + a_{13}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \cdots + a_{1n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} + \theta\varphi\right)\right]$$

dann und nur dann, wenn zwischen den Koeffizienten der Gleichung die Relationen:

$$\frac{1}{a_{12}}\left(a_2 - \frac{\partial a_{12}}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{a_{13}}\left(a_3 - \frac{\partial a_{13}}{\partial x_1}\right) = \cdots = \frac{1}{a_{1n}}\left(a_n - \frac{\partial a_{1n}}{\partial x_1}\right),$$

$$\frac{A}{a_{12}}\left(a_3 - \frac{\partial a_{13}}{\partial x_1}\right) = a_0 - \frac{\partial A}{\partial x_1}$$

bestehen, wo:

$$A = a_1 - \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} - \frac{a_{11}}{a_{12}}\left(a_2 - \frac{\partial a_{12}}{\partial x_1}\right).$$

Es ist dann:

$$\theta = A, \; \lambda = \frac{f(x_2, x_3, \ldots, x_n)}{a_{12}} e^{\int \frac{a_2}{a_{12}} d x_1}$$

wo $f(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ eine willkürliche Funktion von $x_2, x_3, \ldots, x_n$ bezeichnet. Vi.

A. D'ADHÉMAR. Sur une équation aux dérivées partielles à caractéristiques réelles. Brux. S. sc. 26 A, 59-67.

Auszug aus einer ausgedehnten, später zu veröffentlichenden Arbeit bezüglich der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + fu + h$$

und Notiz über die früheren auf diese Gleichung und auf verwandte Gleichungen sich beziehenden Arbeiten. Mn. (Lp.)

R. D'ADHÉMAR. Sur une classe d'équations aux dérivées partielles, intégrables par approximations successives. C. R. 134, 407-409.

Die Differentialgleichung

$$\sum_1^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_h^2} - \sum_1^q \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} = \sum_1^p a_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + \sum_1^q b_k \frac{\partial u}{\partial y_k} + cu + f,$$

wo alle Koeffizienten Funktionen der x und y sind, läßt sich für alle Werte von p und q durch sukzessive Approximationen integrieren.

Sh.

R. D'ADHÉMAR. Sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, du type hyperbolique, à plus de deux variables indépendantes. C. R. 135, 1100-1102.

Die Integration der Gleichung

$$\Delta^{p,1} = \sum_1^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x_i, t)$$

unter der Bedingung, daß sie sich auf den Außenraum des Kegels $\sum_1^p (x - x_0)^2 = (t - t_0)^2$ bezieht, ist in einigen speziellen Fällen durch-

geführt: für $p = 2$ von Volterra, für $p = 2n$ von Tedone; aber für ein ungerades p sind noch keine Versuche gemacht worden. Hier wird das Integral für $p = 3$ erhalten. Sh.

Un correspondant. Aggrégation des sciences mathématiques (concours de 1897). Nouv. Ann. (4) **2**, 82-89.

Die vier Fragen der Konkurrenzaufgabe über die partielle Differentialgleichung $p^2 + q^2 + (px + qy - z)^2 = F\left(\frac{x^2 + y^2 + 1}{z^2}\right)$ werden vollständig beantwortet. Sh.

L. Raffy. Sur la déformation des surfaces et sur certaines transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre. S. M. F. Bull. **30**, 106-108.

Die Gleichungen, auf die vom Verf. früher (S. M. F. Bull. **25**, 1-3; F. d. M. **28**, 539, 1897) das Problem der Deformation der Flächen zurückgeführt worden ist, werden in ein anderes System transformiert, das aus verschiedenen Gründen Beachtung verdient. Sh.

W. Kapteyn. Over de differentiaalvergelijking van Monge. Amst. Ak. Versl. **10**, 466-468.

In einer früheren Abhandlung (Amst. Ak. Versl. **10**, 13-15; F. d. M. **32**, 363) war die Differentialgleichung $r - \lambda^2 t + \mu = 0$ in den Fällen untersucht worden, wenn λ und μ allein von p und q oder von x, y und z abhängen. Läßt man diese beschränkenden Bedingungen fallen, so findet man nur einen einzigen Fall, in dem die Gleichung zwei Zwischenintegrale besitzt. Sh.

J. Delemer. Sur certaines équations aux dérivées partielles que l'on rencontre en physique mathématique et notamment dans l'étude de la propagation de l'électricité. Brux. S. sc. **26** B, 69-95.

Darlegung der verschiedenen Methoden zur Integration der Gleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 4\lambda \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

in Hinblick auf ihre Anwendungen auf das Studium der Elektrizität.

Mn. (Lp.)

J. R. Brajtzew. Zwei Sätze betreffs der Integrale der Gleichung $\Delta_{2k} u = 0$. Moskau Math. Samml. **23**, 35-40 (Russisch).

Sind zwei Funktionen u, v der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ samt ihren partiellen Ableitungen bis zur $2n$-ten Ordnung im Innern

einer *n*-fach ausgedehnten geschlossenen Mannigfaltigkeit W kontinuierlich, genügt weiter u im Innern von W der Gleichung

$$\Delta_{2k} u \equiv \Sigma_i \frac{\partial^{2k} u}{\partial x_i^{2k}} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

und fallen v, u und ihre partielle Ableitungen bis zur $(k-1)$-ten Ordnung auf der Grenze von W zusammen, so wird das auf W ausgedehnte n-fache Integral $J = \int_w \left[\Sigma_i \left(\frac{\partial^k v}{\partial x_i^k}\right)^2\right] dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ für $v = u$ ein Minimum, und umgekehrt.

Si.

B. M. Kojalowicz. Über eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung. St. Petersb. XI u. 125 S. 8° u. eine Tafel (Russisch).

Die Arbeit ist der Gleichung

$$\Delta\Delta u \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$

gewidmet. Den Verf. beschäftigen besonders solche Lösungen dieser Gleichung, welche in und auf einer Kontur mit ihren Ableitungen erster Ordnung stetig und endlich bleiben, und welche der Verf. hyperharmonische Funktionen nennt. Im ersten Kapitel leitet er mit Hülfe der partiellen Integration einige allgemeine Beziehungen zwischen den Werten der einer linearen Differentialgleichung

$$\text{(a)} \qquad \Sigma A_{m,n} \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} = 0 \quad (m + n \gtreqless p,\ A_{m,n} = \text{const.})$$

genügenden Funktion und ihren Ableitungen auf der Kontur her und drückt die Funktion im Innern der Kontur durch die Werte ihrer Ableitungen auf der Kontur aus. Für die Gleichung $\Sigma B_k \frac{\partial^p u}{\partial x^{p-k} \partial y^k} = 0$ mit imaginären Charakteristiken wird dies ausführlicher gezeigt. Die Formeln geben die Möglichkeit, einen allgemeinen Satz über den Zusammenhang der Fragen nach der Existenz und der Eindeutigkeit der Lösungen von (u) zu beweisen, nämlich, daß (a) nur eine einzige, bestimmten Bedingungen genügende Lösung besitzt, falls für die zu (a) „konjugierte" Gleichung $\Sigma (-1)^{m+n} A_{m,n} \frac{\partial^{m+n} M}{\partial x^m \partial y^n} = 0$ eine gewissen anderen Bedingungen genügende Lösung existiert. Hieraus folgt z. B. die Eindeutigkeit der harmonischen Funktion, welche gegebene Werte auf der Kontur annimmt. — Im zweiten Kapitel (S. 24-105) werden zwei Hauptaufgaben für die rechteckige Kontur betrachtet: I. Eine hyperharmonische Funktion zu finden, welche auf der Kontur des Rechtecks gegebene Werte unter der Bedingung annimmt, daß ihre normalen Ableitungen auf derselben Kontur gleich Null seien. II. Eine hyperharmonische Funktion zu finden, welche auf derselben Kontur den Wert Null

unter der Bedingung annimmt, daß ihre Ableitungen auf derselben Kontur gegebene Werte annehmen. Jede Aufgabe wird in drei Fällen für sich betrachtet, je nachdem die gesuchte Funktion gerade oder ungerade in bezug auf beide unabhängige Veränderliche, oder gerade in bezug auf die eine, ungerade in bezug auf die andere wird. Der erste der sechs Fälle wird ausführlich behandelt, die anderen nur in großen Zügen. Der Verf. nimmt eine hyperharmonische Funktion mit unbestimmten Koeffizienten an, bestimmt diese Koeffizienten durch sukzessive Annäherungen und beweist, daß die so gefundenen Funktionen sämtlichen gestellten Forderungen wirklich genügen. Im dritten Kapitel wird als Beispiel die Aufgabe über das Gleichgewicht der elastischen viereckigen Platte betrachtet, welche an den Rändern vollständig befestigt und einem gleichmäßigen Druck unterworfen ist. Eine angenäherte Lösung und ihre graphische Darstellung wird für den Fall gegeben, wenn die eine Seite doppelt so lang wie die andere ist. Si.

Elisabeth Stephansen. Über partielle Differentialgleichungen vierter Ordnung, die ein intermediäres Integral besitzen. Archiv for Math. og Naturvidenskab **24**, 80 S. (Auch sep. Kristiania: A. Cammermeyer.)

Die Arbeit behandelt partielle Differentialgleichungen vierter Ordnung in einer abhängigen und zwei unabhängigen Veränderlichen, die ein intermediäres Integral dritter Ordnung besitzen. Bezeichnet man, wie gewöhnlich, die ersten partiellen Ableitungen von z nach x und y mit p, q, die zweiten mit r, s, t, die dritten mit α, β, γ, δ und die vierten mit a, b, c, d, e, so findet man, daß die partielle Differentialgleichung vierter Ordnung, die ein erstes Integral dritter Ordnung von der Form $u = f(0)$ haben soll, von der folgenden Gestalt sein muß:

$$Aa + Bb + Cc + Dd + Ee + F(b^2 - ac) + G(c^2 - bd)$$
$$+ H(d^2 - ce) + J(ad - bc) + K(ac - bd) + L(be - cd) + M = 0,$$

wo die Koeffizienten $A, B, C, \ldots, M$ gegebene Funktionen von $x, y, z, p, q, r, s, t, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ bedeuten.

Es wird gezeigt, daß die Lösung der obigen Differentialgleichung, wenn die Bedingung $JL - FH + GK = 0$ erfüllt ist, die Befriedigung eines Systems von sechs partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung fordert, von denen zwei vom ersten und vier vom zweiten Grade sind. Die Integration dieses Systems hängt, unter gewissen Bedingungen, von einer gewissen Anzahl äquivalenter Systeme von vier linearen, partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ab.

Falls die partielle Differentialgleichung vierter Ordnung linear ist, reduziert sich das System von sechs partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung auf die vier Gleichungen, die erster Ordnung und zweiten Grades sind. Die Integration dieses Systems läßt sich immer auf eine Anzahl äquivalenter Systeme von vier linearen partiellen Differentialgleichungen zurückführen. Gbg.

A. C. DIXON. Note on simultaneous partial differential equations. Quart. J. **33**, 239-242.

Diese Note knüpft an eine frühere Arbeit (Lond. Phil. Trans. **195**, 151-191; F. d. M. **32**, 358) an: es ist dort im § 19 die Frage nach der Existenz einer gewissen Funktion w_4 aufgeworfen worden; hier wird gezeigt, daß diese im allgemeinen nicht existiert. Sh.

G. FUBINI. Sopra una classe di equazioni che ammettono como caso particolare le equazioni delle membrane e delle piastre sonore. Lomb. Ist. Rend. (2) **35**, 779-798.

Die Untersuchungen von Poincaré (Palermo Rend. **8**, 57-196; F. d. M. **25**, 1526-32, 1894) über die Differentialgleichung schwingender Membranen und die allgemeineren von Lauricella (Torino Mem. (2) **46**, 65-92; F. d. M. **27**, 688, 1896) werden hier abermals verallgemeinert auf Gleichungen der Form:

$$a_0 \Delta_{2n} u + a_1 \Delta_{2(n-1)} u + \cdots + a_{n-1} \Delta_2 u + a_n u = 0,$$

worin $a_0, \ldots, a_n$ Konstanten mit abwechselnden Zeichen bedeuten, mit Ausnahme des letzten Koeffizienten a_n, der mit a_{n-1} gleiches Zeichen hat. Fubini entwickelt verschiedene Eigenschaften der Gleichung und untersucht die Integration in beliebigen Gebieten. Sh.

T. BOGGIO. Sulle soluzioni comuni a due equazioni lineari a derivate parziali con due variabili indipendenti. Rom. Acc. L. Rend. (5) **11**$_1$, 513-519.

Betrachtet man die linearen Gleichungen

$$\vartheta_1 z = \sum_0^m a_{ij} \frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j} = \Phi, \qquad \vartheta_2 z = \sum_0^n a'_{ij} \frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j} = 0,$$

worin a und a' konstante Koeffizienten bedeuten, so wird bewiesen, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß beide Differentialgleichungen gemeinsame Integrale besitzen, darin besteht, daß die Gleichung $\vartheta_2 \Phi = 0$ erfüllt ist. Einige Anwendungen dieses Ergebnisses werden zum Schlusse angegeben. Sh.

T. BOGGIO. Sull' integrazione di alcune equazioni lineari alle derivate parziali. Annali di Mat. (3) **8**, 181-232.

Von Bianchi sind in verschiedenen Noten die Bedingungen dafür abgeleitet worden, daß zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln gemeinsame Lösungen besitzen; hier wird das entsprechende Problem für lineare partielle Differentialgleichungen

beliebiger Ordnung behandelt. Zunächst stellt das erste Kapitel Beziehungen zwischen den behandelten Differentialausdrücken auf:

$$\vartheta = \sum_0^m a_{r_1 r_2 \ldots r_n} \frac{\partial^{r_1+r_2+\cdots+r_n}}{\partial x_1^{r_1}\,\partial x_2^{r_2}\ldots\partial x_n^{r_n}} \quad (r_1 + r_2 + \cdots + r_n \leqq m),$$

worin die a im allgemeinen Funktionen der $x_1, \ldots, x_n$ und deren Ableitungen sind, und gibt Formeln, durch welche $\vartheta(xu)$, $\vartheta(x^m u)$, $\vartheta(uv)$ ausgedrückt werden, wo u und v zwei Funktionen der x bedeuten. Genügen u und v der Gleichung $\vartheta = 0$ unter der Annahme konstanter Koeffizienten, so wird im zweiten Kapitel gezeigt, daß $U = xu + v$ der Gleichung $\vartheta^2 U = 0$ genügt, und für verschiedene Typen von Differentialgleichungen wird auch die Umkehrung dieses Satzes nachgewiesen. Im dritten und sechsten Kapitel werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen im Falle zweier unabhängigen Variabeln dafür angegeben, daß zwei lineare Differentialgleichungen mit konstanten, resp. variabeln Koeffizienten, von denen eine homogen ist, gemeinsame Lösungen besitzen. Im vierten Kapitel wird nachgewiesen, daß jede Funktion U, die der Gleichung $\vartheta^m U = 0$ genügt, im allgemeinen durch

$$U = x^{m-1} u_1 + x^{m-2} u_2 + \cdots + x u_{m-1} + u_m$$

dargestellt werden kann, worin die u der Gleichung $\vartheta = 0$ genügen. Verschiedene der in den vorhergehenden Kapiteln abgeleiteten Eigenschaften gelten auch für den Fall variabler Koeffizienten; auf diesen Fall wird im fünften und sechsten Kapitel eingegangen, während im letzten Kapitel Anwendungen der vorhergehenden Entwicklungen gegeben werden. Sh.

V. Kommerell. Einleitung in die Theorie der Transformationsgruppen. Pr. Realanstalt Reutlingen. 41 S. 4°.

Der Verf. will durch eine knappe Darstellung der einleitenden Partien der Lieschen Gruppentheorie und durch einige Anwendungen zum Studium dieser „schönen und fruchtbaren Theorien“ anregen. Zu diesem Zwecke bespricht er die eingliedrigen Gruppen, die infinitesimalen Transformationen und die zugehörigen Invarianten in der Ebene und im Raume, die r-gliedrigen Gruppen und ihre Invarianten, endlich Anwendungen auf die gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in der Ebene und auf die Invarianten der binären Formen, sowie die Berührungstransformationen der Ebene. — Auf S. 34 hat der Nenner Δ^2 in den Ausdrücken für $A_1 f, \ldots, A_4 f$ keinen Sinn, überdies müßte bei $A_1 f$ und $A_4 f$ rechts auch das Minuszeichen stehen. El.

A. Guldberg. Über Integralinvarianten und Integralparameter bei Berührungs-Transformationsgruppen. Sep.-Abdr. Christiania, Vidensk. Selsk. Skr. 1902, No. 5, 10 S. gr. 8°.

Es wird gezeigt, daß die Frage, ob eine vorgelegte Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene eine Integralinvariante:

$$\int \Omega(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) dx$$

besitzt, mit der andern gleichbedeutend ist, ob sie einen Differentialparameter von der Form $\omega(x, y, y', \ldots, y^{(n)}, \varphi, \varphi')$ besitzt. Der Verf. nennt ferner $\Omega(x, y, y', \ldots, y^{(n)}, \varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n)})$ einen Integralparameter einer Gruppe von Berührungstransformationen, wenn immer, sobald $\int \varphi(x, y, y', \ldots, y^{(m)}) dx$ eine Integralinvariante ist, auch der Ausdruck $\int \Omega dx$ eine Integralinvariante darstellt. Er leitet die Differentialgleichungen ab, denen Ω im Falle $r = 1$ genügen muß, und zeigt, daß, sobald diese Differentialgleichungen integriert sind, aus dem einen gefundenen Integralparameter alle übrigen (für $r > 1$) durch Differentiation erhalten werden. El.

C. W. Oseen. Über die endlichen, kontinuierlichen, irreduziblen Berührungstransformationsgruppen im Raume. Diss. Lund. 1901.

In einer früheren Arbeit (F. d. M. **32**, 380, 1901) hat der Verf. die endlichen kontinuierlichen irreduziblen Berührungstransformationsgruppen in R_3 folgendermaßen klassifiziert: Jeder solchen Gruppe entspricht eine homogene Berührungstransformationsgruppe in sechs Veränderlichen $\xi_1, \xi_2, \xi_3; \eta_1, \eta_2, \eta_3$. Bei einer solchen Gruppe bleibe die folgende Schar von Gleichungssystemen invariant:

$$\Phi_1(\xi, \eta) = c_1, \ \Phi_2(\xi, \eta) = c_2, \ldots, \Phi_r(\xi, \eta) = c_r,$$

wo $c_1, c_2, \ldots, c_r$ als Parameter aufzufassen sind, und die Funktionen Φ eine Funktionengruppe bilden sollen. Dieser Schar entsprechend besitzt die nicht-homogene Gruppe eine invariante Schar von Gleichungssystemen, deren Gliederzahl s sei. Bleiben bei einer Gruppe mehrere solcher Scharen invariant, so wird die betrachtet, welche die kleinste Zahl s hat. Zu einer Klasse werden jetzt alle Gruppen gezählt, bei denen die Zahl s denselben Wert hat.

Zweck der vorliegenden Dissertation ist, die Klasse $s = 5$ zu untersuchen. Das Ergebnis des Verf. ist, daß es keine zu dieser Klasse gehörige Gruppe gibt. Bdn.

S. E. Slocum. The infinitesimal generators of certain parameter groups. American M. S. Bull. (2) 8, 156-168.

Der Aufsatz gibt den Inhalt eines Vortrags wieder, den der Verf. am 26. Oktober 1901 auf der Versammlung der Amerikanischen mathematischen Gesellschaft über das Thema gehalten hat: „The symbols of the infinitesimal transformations which generate the parameter groups corresponding to all possible types of structure of two, three, and four parameter complex groups.“ Da dieser Vortrag nach einer Erklärung in der Einleitung ein Résumé derjenigen Methode ist, die vom Verf. in der Abhandlung „On the continuity of groups generated by infinitesimal transformations“ (American Ac. Proc. **36**, 85-109; F. d. M. **31**, 149, 1900)

erörtert wurde, so können wir auf das Referat über diese Abhandlung verweisen. Nach der Definition der Parametergruppe einer gegebenen Gruppe, die durch eine Familie von Transformationen mit r wesentlichen Parametern gebildet wird, zeigt der Verf., wie die Symbole der infinitesimalen Transformationen, welche die Parametergruppen erzeugen, für alle Gruppen von der nämlichen Struktur dieselben sind, und wie sie aus den zu jeder gegebenen Struktur gehörigen Strukturkonstanten erhalten werden können. Dann folgen Tabellen dieser Symbole für alle möglichen Typen der Struktur bei den Komplexgruppen mit zwei, drei und vier Parametern, wie sie von Lie gegeben sind. Lp.

T. J. I'A. Bromwich. The infinitesimal generators of parameter groups. American M. S. Bull. (2) 8, 375-386.

„Slocum hat (vergl. das vorstehende Referat) eine Methode zur Berechnung der infinitesimalen Erzeugenden der Parametergruppe gegeben, die zu einer Gruppe von bekannter Struktur gehört. Beim Durchlesen seiner Abhandlung schien es mir, daß gewisse, von mir gewonnene Resultate mit Vorteil dabei angewandt werden könnten, und bei näherer Prüfung fand ich, daß mein Verfahren weniger mühevoll als dasjenige Slocums war, außerdem aber nach meiner Ansicht zuverlässiger. Ich habe nämlich gewisse Verschiedenheiten in unseren Resultaten gefunden, und soweit ich sie prüfen kann, scheint es mir, daß Slocums Ergebnisse weniger befriedigend als die meinigen sind, falls beide nicht übereinstimmen."

„Wegen der ungemein umfangreichen Rechnungen, welche die Ableitung dieser Ergebnisse benötigt, kann ich kaum hoffen, sie fehlerlos durchgeführt zu haben. Leider habe ich keine Unterstützung zur Bestätigung der Arbeit erlangen können, und alle meine Berechnungen mußten unter dem Drucke der mir als Professor obliegenden Pflichten des Unterrichts gemacht werden. In allen Fällen jedoch, in denen Unterschiede zwischen meinen ersten Ergebnissen und denen von Slocum auftraten, ist meine Arbeit zweimal (und zuweilen dreimal) durchgeführt und alle denkbaren Kunstgriffe sind angewandt worden." Lp.

S. E. Slocum. Note on the transformation of a group into its canonical form. American M. S. Bull. (2) 8, 280-288.

Die Abhandlung bezweckt die Aufstellung der endlichen Gleichungen der Gruppe, deren infinitesimale Transformationen

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1}$$

sind. Einige Bemerkungen beziehen sich auf die singuläre Transformation. Ist $T_a = a_1 X_1 + \cdots + a_r X_r$, entsprechend T_b und T_c, so

gilt der Satz: Wenn die endlichen Gleichungen einer Gruppe nicht in ihrer kanonischen Form sind, so ist die Bedingung dafür, daß für jedes endliche System der a und der b ein endliches System der c gefunden werden kann, welches die symbolische Gleichung $T_b\, T_a = T_c$ befriedigt, eine notwendige, aber nicht eine hinreichende Bedingung für die Kontinuität der Gruppe. Lp.

E. Pascal. Del terzo teorema di Lie sull'esistenza dei gruppi di data struttura. Lomb. Ist. Rend. (2) 35, 419-431.

E. Pascal. Altre ricerche sulla formola del prodotto di due trasformazioni finite e sul gruppo parametrico di un dato. Lomb. Ist. Rend. (2) 35, 555-567.

In der ersten Note leitet der Verf. aus den bekannten Lieschen Relationen, die zwischen den Konstanten c_{iks} der Zusammensetzung einer r-gliedrigen Gruppe bestehen, gewisse neue Relationen ab, die er dann benutzt, um zu zeigen, daß r gewisse infinitesimale Transformationen eine r-gliedrige einfach transitive Gruppe von der gegebenen Zusammensetzung c_{iks} erzeugen. Damit ist in der Tat ein neuer Beweis für den dritten Lieschen Fundamentalsatz der Gruppentheorie geliefert. Einfach kann ich freilich diesen Beweis nicht finden; auch dann, wenn man sich mit den langen Rechnungen befreundet hat, die der Verf. braucht, fühlt man sich unbefriedigt, weil gar nicht zu ersehen ist, wie der Verf. gerade auf jene r infinitesimalen Transformationen verfallen ist. In der zweiten Note kommt der Verf. auf die früher von ihm behandelte Aufgabe zurück, die infinitesimale Transformation $X_3 f$ zu berechnen, von der das Produkt zweier endlichen Transformationen erzeugt ist, die ihrerseits von den infinitesimalen Transformationen $X_1 f$ und $X_2 f$ erzeugt sind. Er berechnet in der Reihenentwicklung für $X_3 f$ gewisse Glieder auf einem neuen Wege und wird dadurch in den Stand gesetzt, die infinitesimalen Transformationen der (kanonischen) Parametergruppe, die zu einer gegebenen r-gliedrigen Gruppe gehört, aufzustellen. Dabei ergibt sich dann, daß die in der ersten Note auftretende Gruppe eben diese Parametergruppe ist. El.

E. Pascal. Su di un' invariante simultaneo di una espressione ai differenziali totali di ordine qualunque e di un' altra alle derivate parziali. Lomb. Ist. Rend. (2) 35, 691-700.

Betrachtet man $x_1, \dots, x_n$ als Funktionen irgend welcher unabhängigen Veränderlichen, so erhält das Differential r-ter Ordnung von $f(x_1, \dots, x_n)$ die Form:

$$(1) \qquad \sum_m^{1\dots r} \sum_{j_1\dots j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \sum_{i_1\dots i_m} (i_1, \dots, i_m)\, d^{i_1} x_{j_1} \dots d^{i_m} x_{j_m},$$

wo $i_1 + \dots + i_m = r$ und wo $(i_1, \dots, i_m)$ eine ganze Zahl ist, die der Verf. im Laufe seiner Arbeit berechnet. Ersetzt man in (1) jede Ab-

leitung von f durch eine Funktion $X_{j_1,\dots,j_m}$ von den x, so erhält man eine besondere Klasse von Differentialausdrücken r-ter Ordnung:

$$(2) \qquad \sum_m^{1,\dots,r} \sum_{j_1,\dots,j_m} X_{j_1,\dots,j_m} \sum_{i_1,\dots,i_m} (i_1,\dots,i_m)\, d^{i_1}x_{j_1} \dots d^{i_m}x_{j_m},$$

deren Verhalten bei beliebigen Punkttransformationen der Verf. untersucht, und zwar stellt sich heraus, daß die Klasse dabei ihren Charakter bewahrt. Nimmt man nun einen Ausdruck:

$$(3) \qquad \sum_m^{1,\dots,s} \sum_{j_1,\dots,j_m} \xi_{j_1,\dots,j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \qquad (s \leqq r)$$

hinzu, unter den ξ beliebige Funktionen der x verstanden, so ist, wie der Verf. nachweist,

$$\sum_m^{1,\dots,s} \sum_{j_1,\dots,j_m} X_{j_1,\dots,j_m} \xi_{j_1,\dots,j_m}$$

eine simultane Invariante von (2) und (3), von der die simultane Invariante eines Pfaffschen Ausdrucks und einer infinitesimalen Transformation einen besonderen Fall bildet. El.

L. Sinigallia. Sulle equazioni ai differenziali totali di ordine qualunque. Lomb. Ist. Rend. (2) **35**, 749-778.

Der Verf. verweist in der Einleitung auf die Arbeiten, in denen sich E. Pascal mit Problemen dieser Art beschäftigt hat, und entwickelt in § 2 einige Sätze über die im vorhergehenden Referate erwähnten Zahlen $(i_1,\dots,i_m)$. In § 2 beschäftigt er sich mit den integrierenden Faktoren eines unbeschränkt integrabeln Systems von totalen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und zeigt, daß sich diese wesentlich anders verhalten als die integrierenden Faktoren eines unbeschränkt integrabeln Systems von Pfaffschen Gleichungen. In § 3 untersucht er die Bedingungen für die unbeschränkte Integrabilität einer totalen Differentialgleichung r-ter Ordnung. Es ergibt sich, daß die Gleichung die im vorigen Referate angegebene Form (2) besitzen muß, daß ferner die aus (2) abgeleitete totale Gleichung zweiter Ordnung

$$\sum_j^{1,\dots,n} X_j\, d^2x_j + \sum_{j_1,j_2}^{1,\dots,n} X_{j_1,j_2}\, dx_{j_1}\, dx_{j_2} = 0$$

unbeschränkt integrabel sein muß, wofür E. Pascal die notwendigen und hinreichenden Bedingungen angegeben hat, und daß endlich die X mit mehr als zwei Indizes aus den X_j, X_{j_1,j_2} in bestimmter Weise abgeleitet sein müssen. Hieraus folgt u. a., daß zu jeder unbeschränkt integrabeln totalen Differentialgleichung zweiter Ordnung für jedes $r > 2$ eine und nur eine unbeschränkt integrable Gleichung r-ter Ordnung ge-

hört, die dieselben Funktionen X_j und X_{j_1, j_2} enthält wie jene. Ähnliche Resultate ergeben sich in § 4 bei der Betrachtung eines unbeschränkt integrabeln Systems von totalen Differentialgleichungen r-ter Ordnung. Endlich wird in § 5, anknüpfend an die von Pascal aufgestellte simultane Invariante der beiden Ausdrücke (2) und (3), gezeigt, daß zu jedem Systeme von totalen Differentialgleichungen r-ter Ordnung ein kovariantes System von linearen partiellen Differentialgleichungen r-ter Ordnung gehört, das, wenn jenes erste System unbeschränkt integrabel ist, gerade m unabhängige Lösungen besitzt, und das für diesen besonderen Fall schon in § 4 auf anderm Wege abgeleitet war. El.

E. Pascal. Sulle matrici a caratteristiche invarianti nella teoria delle forme ai differenziali di second' ordine. Lomb. Ist. Rend. (2) **35**, 835-850.

Der Verf. zeigt, daß die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die unbeschränkte Integrabilität einer totalen Differentialgleichung zweiter Ordnung einfach so ausgedrückt werden können: Der Rang einer gewissen Matrix muß gleich 2 sein. Hat diese Matrix den Rang 1, so ist die linke Seite der Differentialgleichung ein vollständiges zweites Differential. In ähnlicher Weise lassen sich z. B. auch die Bedingungen dafür ausdrücken, daß die linke Seite der Gleichung auf die Form:

$$\frac{1}{\mu}\left\{d\,(\Sigma Z_i\,dx_i) + (\sum_j Y_j\,dx_j)(\Sigma Z_i\,dx_i)\right\}$$

gebracht werden kann. Dabei muß natürlich noch unterschieden werden, ob die Gleichung $\Sigma Z_i\,dx_i = 0$ integrabel ist oder nicht; in beiden Fällen ist die Gleichung wenigstens partiell integrabel, aber nur im ersten durch eine endliche Gleichung $f =$ const., im zweiten bloß durch eine Differentialrelation erster Ordnung vom Typus $\Sigma Z_i\,dx_i =$ const. El.

E. Pascal. Estensione di alcuni teoremi di Frobenius. Lomb. Ist. Rend. (2) **35**, 875-882.

Der Verf. hat in einer früheren Arbeit (F. d. M. **32**, 296, 1901) gezeigt, daß zu jedem totalen Differentialausdruck zweiter Ordnung gewisse Matrizen gehören, deren Rang sich bei Einführung neuer Veränderlicher nicht ändert. Er untersucht jetzt, welche Änderungen die Rangzahlen dieser Matrizen erleiden, wenn man den Differentialausdruck mit einem Faktor ϱ multipliziert, und wenn man das zweite Differential einer Funktion von $x_1, \ldots, x_n$ oder das erste Differential eines Pfaffschen Ausdrucks hinzuaddiert. El.

G. Combebiac. Sur un système numérique complexe représentant le groupe des transformations conformes de l'espace. S. M. F. Bull. **30**, 1-12.

Schreibt man die Gleichung einer Kugel in der Form:

$$\alpha_0 (x^2 + y^2 + z^2) + 2\alpha_1 x + 2\alpha_2 y + 2\alpha_3 z + \delta = 0,$$

so kann man bekanntlich die konformen Transformationen des R_3 durch die linearen homogenen Transformationen in $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \delta$ repräsentieren, bei denen die quadratische Form $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_0\delta$ invariant bleibt. Indem sich der Verf. auf das Buch von Lipschitz: „Über die Summen von Quadraten" (Bonn 1886) stützt, stellt er die Transformationen dieser linearen homogenen Gruppe mit Hülfe eines Systems von 16 komplexen Zahlen dar, das er Quadriquaternionen nennt, und von dem die Triquaternionen, die er früher betrachtet hat (F. d. M. **30**, 94, 1899) ein besonderer Fall sind. Eine Quadriquaternion hat die Form:

$$\Delta = q + \mu q_1 + \omega q_2 + \omega' q_3,$$

wo die q Quaternionen sind, deren 16 Koeffizienten fünf Relationen erfüllen müssen, und wo μ, ω, ω' den Multiplikationsregeln genügen:

$$\mu^2 = 1, \qquad \omega^2 = \omega'^2 = 0,$$
$$\omega\mu = -\mu\omega = \omega, \qquad \omega'\mu = -\mu\omega' = -\omega',$$
$$\omega\omega' = 2(\mu - 1), \qquad \omega'\omega = -2(\mu + 1),$$

während ihr Produkt mit den Quaternioneneinheiten von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig sind. Die Transformationen selbst erscheinen in der symbolischen Gestalt $\Delta X' = X\Delta$, wo X eine spezielle Quadriquaternion von der Form $\mu(i\alpha_1 + j\alpha_2 + k\alpha_3) - \omega'\alpha_0 + \omega\delta$ ist, die eine Kugel darstellt. Den Schluß der Arbeit bilden einige Andeutungen über den geometrischen Kalkül, zu dem die Quadriquaternionen Anlaß geben. El.

E. Duporcq. Sur les transformations de contact dans le plan. Nouv. Ann. (4) **2**, 247-253.

Der Verf. entwickelt zunächst den Begriff der Berührungstransformation in der Ebene, indem er von einer aequatio directrix $f(x, y, \alpha, \beta) = 0$ ausgeht, und bemerkt dann, daß zwei Scharen $f(x, y, \alpha, \beta) = 0$, $\varphi(x, y, \alpha, \beta) = 0$ von je ∞^2 Kurven eine Berührungstransformation bestimmen, bei der jede Kurve $f(x, y, \alpha, \beta) = 0$ in die Kurve

$$\varphi(x, y, \alpha, \beta) = 0$$

übergeht. Diese bekannte Tatsache verallgemeinert er folgendermaßen: Hat man n Kurven, deren jede von n Parametern $a_1, \ldots, a_n$ abhängt, und beschränkt man diese Parameter derart, daß die $n-1$ ersten Kurven der Reihe nach $n-1$ feste Kurven berühren, so daß also nur noch ein Parameter willkürlich bleibt, so berührt die n-te Kurve ihre Enveloppe in Punkten, die nur von den Berührungspunkten auf den

$n-1$ ersten Kurven abhängen. Davon macht der Verf. eine sehr hübsche Anwendung auf die Wellentheorie, indem er in denkbar einfachster Weise zeigt, daß die Huygenssche Konstruktion für den gebrochenen Lichtstrahl auch in dem allgemeinen Falle einer nicht geradlinigen (ebenen) Lichtwelle und einer nicht geradlinigen Grenzkurve anwendbar bleibt. Schließlich folgt noch eine geometrische Anwendung, die eine Verallgemeinerung der eben gemachten ist. El.

W. de Tannenberg. Sur quelques transformations de contact. C. R. **134**, 409-412.

Bei der Transformation eines beliebigen Kreises in einen Kreis spielen vier bestimmte Gruppen von Berührungstransformationen eine Rolle, die von Lie analytisch definiert worden sind, während hier eine einfache geometrische Interpretation dieser Gruppen gegeben wird. Sh.

G. Sannia. Cambiamenti di variabili che conservano le trasformazioni infinitesimali nei sistemi differenziali ordinarii. Batt. G. **40**, 167-179.

Das System

$$f_r = dx_r - X_r\,dx_0 = 0 \qquad (r = 1, \ldots, n),$$

das der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} + X_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = 0$$

äquivalent ist, kann durch Änderung der Variabeln in ein anderes System verwandelt werden, das in ein reduziertes System von $n-i$ Gleichungen übergeführt werden kann, wenn i Integralrelationen des gegebenen Systems bekannt sind. Über entsprechende Infinitesimaltransformationen des gegebenen und des reduzierten Systems wird eine Reihe von Theoremen abgeleitet. Sh.

Kapitel 7.

Variationsrechnung.

N. Gernet. Untersuchung zur Variationsrechnung. Über eine neue Methode in der Variationsrechnung. Diss. Göttingen. 75 S. 8°.

Die Verfasserin stellt sich die Aufgabe, die Bedingungen des Extremums für das Integral

$$J = \int_{x=a}^{x=b} F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) dx$$

mit Hülfe der Weierstraß-Hilbertschen Methode sowohl für den gewöhnlichen Fall, als für den Fall vorgeschriebener Nebenbedingungen abzuleiten. Diesen beiden Fällen entsprechend gliedert sich die Arbeit in zwei Abschnitte.

In dem ersten, weitaus umfangreicheren Abschnitte leitet die Verf. auf dem gewöhnlichen Wege die Lagrangesche Bedingung, daß die Funktionen y, z Integrale gewisser Differentialgleichungen sein müssen, als notwendige Bedingung ab. Das folgende Kapitel enthält dann die Aufsuchung hinreichender Bedingungen für ein Extremum des obigen Integrals. Zur Ableitung benutzt die Verf. die von Hilbert in seinen Vorlesungen gegebene Modifikation des Weierstraßschen Verfahrens, durch welche die sonst übliche Betrachtung der ersten Variation entbehrlich wird, und welche bereits in der im vorigen Bande des Jahrbuches (32, 381-382, 1901) besprochenen Dissertation von Noble verwendet worden ist. Die Noblesche Arbeit und die hier vorliegende ergänzen sich in verschiedenen Punkten. Noble hat in dem dritten Abschnitte seiner Arbeit bereits die Resultate dieses Kapitels benutzt. Es ist nachzuweisen, daß das Integral

$$\int_{x=a}^{x=b}\left\{F(x,y,z,p,q)+\left(\frac{dy}{dx}-p\right)\frac{\partial F(x,y,z,p,q)}{\partial p}+\left(\frac{dz}{dx}-q\right)\frac{\partial F(x,y,z,p,q)}{dq}\right\}dx$$

einen vom Integrationswege unabhängigen Wert hat, falls p, q Funktionen von x, y, z sind, welche erste Integrale der bezüglichen Lagrangeschen Differentialgleichungen sind. Bezeichnet man die Funktion in der Klammer $\{\ \}$ mit E^*, so kann die Differenz

$$\Delta J-\underset{\substack{\text{längs der benach-}\\\text{barten Kurve } L}}{\int_a^b F\left(x,y,z,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}\right)dx}-\underset{\substack{\text{längs der Minimal-}\\\text{kurve } M}}{\int_a^b F\left(x,y,z,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}\right)dx}$$

ersetzt werden durch

$$\Delta J=\int_a^b (F-E^*)\,dx=\int_a^b E\,dx.$$

Ein Minimum von J kann nur eintreten, wenn $\Delta J \geqq 0$ ist, und hieraus folgt als hinreichende Bedingung $E \geqq 0$ für ein Minimum (und $E \leqq 0$ für ein Maximum). Diese Funktion E ist genau der Weierstraßschen E-Funktion für das einfachere Problem

$$\int_a^b F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)dx=\text{Min.}$$

nachgebildet. Die geometrische Deutung der Bedingung $E \geqq 0$ und einige Beispiele beschließen das Kapitel.

In dem folgenden Kapitel wird hierauf die Jacobische Bedingung abgeleitet, daß das Integral aufhört, einen extremen Wert zu liefern, wenn das Integrationsgebiet den zum Anfangspunkte konjugierten Punkt im Innern oder auf der Begrenzung enthält. Das letzte Kapitel des ersten Abschnittes enthält sodann den nach der Nobleschen Arbeit geführten Nachweis, daß die Extremalkurve, wenn sie existiert, notwendigerweise analytischen Charakter besitzt.

In dem zweiten Abschnitte werden die Untersuchungen, parallel denen des ersten, für den Fall geführt, daß noch Nebenbedingungen gegeben sind, und dadurch wird zugleich ein neuer Beweis für die Lagrangesche Multiplikatorenmethode erbracht.

Zu bedauern ist, daß die Verf. die Arbeit vor ihrer Veröffentlichung nicht einer genaueren Durchsicht in sprachlicher Beziehung hat unterziehen lassen. Hau.

E. R. Hendrick. On the sufficient conditions in the calculus of variations. American M. S. Bull. (2) 9, 11-24.

Der Verf. unternimmt den Versuch, die Diskussion der hinreichenden Bedingungen der Variationsrechnung, welche in neuerer Zeit in zahlreichen Untersuchungen besondere Beachtung gefunden haben, möglichst zu vereinfachen und eine engere Übereinstimmung zwischen den bekannten notwendigen und den bekannten hinreichenden Bedingungen zu erzielen. Bei seinen Untersuchungen stützt sich der Verf. zum großen Teile auf Vorlesungen, welche von Hilbert in den Jahren 1899-1901 in Göttingen gehalten sind. Die Untersuchung beschränkt sich auf die Untersuchung der Variation einfacher bestimmter Integrale

$$I=\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')\,dx.$$

Aus dem Hilbertschen invarianten Integral leitet der Verf. die Weierstraßsche hinreichende Bedingung für ein Extremum von I ab. Aus ihr erhält er dann die Legendresche und Jacobische Bedingung.

Einigen Resultaten des Verf. widersprechen allerdings verschiedene Beispiele, welche Bolza in derselben Zeitschrift unmittelbar vorher (siehe in diesem Bande des Jahrbuches das Referat über die Bolzasche Arbeit auf S. 383) behandelt hat. Der Widerspruch ist nach der Ansicht des Referenten wohl nur scheinbar, insofern als der Verf. der vorliegenden Arbeit engere Voraussetzungen gemacht hat.

Zum Schlusse unternimmt der Verf. noch einen nicht gerade glücklichen Angriff gegen „die übertriebenen Komplikationen, welche neuerdings von einigen Autoren in den wirklich einfachen Gegenstand der Variationsrechnung hineingebracht sind“. Vornehmlich richtet sich dieser Angriff gegen das Knesersche „Lehrbuch der Variationsrechnung“, welches der Verf. zwar selbst als das einzige moderne Lehrbuch anerkennt, dem er aber geradezu die Schuld an jenen Komplikationen zuschiebt. Wenn

nun auch die Darstellung in dem Kneserschen Buche öfter durchsichtiger sein könnte, so verfehlen die Vorwürfe des Verf. doch ganz ihr Ziel, da fast alle Untersuchungen, welche vor dem Kneserschen Buche über tiefer gehende Fragen der Variationsrechnung erschienen sind, bereits solche Komplikationen zeigen. Die Fragen, zu denen die Variationsrechnung Anlaß gibt, sind eben durchaus nicht einfach, sondern bieten große Schwierigkeiten dar, und deshalb sind auch schon die meisten jener Abhandlungen nicht ganz leicht lesbar. Zugleich liegt hierin der Grund für die Schwierigkeiten, welche sich dem Versuche einer zusammenfassenden Darstellung der Variationsrechnung entgegenstellen. Kneser aber hat sich durch sein Buch ein großes Verdienst erworben, da er seit Moigno und Lindelöf zuerst wieder eine zusammenfassende und alle neueren Untersuchungen berücksichtigende Darstellung der Variationsrechnung gegeben hat. Hau.

A. Kneser. Beiträge zur Theorie und Anwendung der Variationsrechnung. (Zweiter Aufsatz.) Math. Ann. **56**, 169-232.

Bezüglich des ersten Aufsatzes vergleiche man das Referat F. d. M. **32**, 385-386, 1901. In §§ 34 u. folg. seines Lehrbuches der Variationsrechnung (F. d. M. **31**, 386-388, 1900) hat der Verf. die isoperimetrische Aufgabe, die Kurve $\mathfrak{C}$ von gegebener Länge l zu bestimmen, welche mit einer gegebenen Kurve $\mathfrak{C}_0$ eine Fläche von möglichst großem Flächeninhalt einschließt, auch für den Fall gelöst, daß nur der Anfangspunkt 0 von $\mathfrak{C}$ fest auf $\mathfrak{C}_0$, der Endpunkt 1 dagegen auf $\mathfrak{C}_0$ frei zur Verfügung steht, und die Grenzlage von 1 bestimmt, an welcher das Extremum des Flächeninhalts aufhört.

In dieser Abhandlung leitet der Verf. die dort erhaltenen Resultate mit einigen Erweiterungen auf eine neue Art her und bestimmt die Grenze des Extremums auch für den Fall, daß beide Endpunkte der gesuchten Kurve auf gegebenen Kurven frei gewählt werden können. Gerade für eine derartige Aufgabe der Variationsrechnung, bei welcher beide Integrationsgrenzen veränderlich sind, werden hier zum ersten Male die Grenze des Extremums und die hinreichenden Bedingungen desselben bestimmt.

Hierbei folgt der Verf. der wichtigen Abhandlung von Erdmann (F. d. M., **9**, 278-279, 1877) vornehmlich darin, daß er einen von Euler herrührenden und in seinem Werke Methodus inveniendi etc. vielfach benutzten Kunstgriff anwendet, durch welchen die zunächst ein relatives Extremum fordernde Aufgabe auf die Untersuchung eines absoluten Extremums zurückgeführt wird.

Bei der Behandlung des allgemeinen Problems, daß beide Endpunkte variabel sind, wird hinsichtlich der gegebenen Kurve die beschränkende Voraussetzung gemacht, daß ein Kreis $\mathfrak{K}$ und eine von ihm ausgehende Kurve $\mathfrak{C}_0$ gegeben sind und verlangt ist, von einem nicht vorgeschriebenen Punkte auf $\mathfrak{K}$ nach $\mathfrak{C}_0$ hin eine Kurve $\mathfrak{C}$ von der gegebenen Länge l zu ziehen, sodaß sie mit $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}_0$ zusammen eine Fläche maximalen Inhaltes einschließt. Hau.

A. Kneser. **Die Jacobische Bedingung des Extremums bei einem allgemeinen Typus von Aufgaben der Variationsrechnung.** Charkow, Ges. (2) 7, 253-267.

Bereits in einer im Wintersemester 1837-38 gehaltenen Vorlesung hat Jacobi die Bemerkung gemacht, daß für das Extremum des Integrals

$$J=\int f(x,y,p)\,dx,$$

wo $p=dy/dx$, die Enveloppe der durch einen festen Punkt A gehenden und der Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}=0$$

genügenden Kurven die Bedeutung hat, daß der Bogen AC einer solchen Kurve nur dann ein Minimum des Integrales J beider Punkte liefert, wenn C diesseits des Berührungspunktes B jener Kurve mit der Enveloppe liegt. Jacobi bemerkt sogar weiter, daß schon für den Bogen, welcher von dem festen Punkte A und dem entsprechenden Berührungspunkte B auf der Enveloppe, also von zwei konjugierten Punkten begrenzt wird, das gesuchte Extremum des Integrals J im allgemeinen nicht mehr geliefert wird.

Diesen Jacobischen Satz erweitert der Verf. für das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,p_1,p_2,\ldots,p_n)\,dx \qquad \left(p_\nu=\frac{dy_\nu}{dx}\right), \quad \nu=1,2,\ldots,n$$

wo die n unbekannten Funktionen $y_1,y_2,\ldots,y_n$ für $x=x_0$ und $x=x_1$ vorgeschriebene Werte annehmen und allgemein den Bedingungsgleichungen

$$\varphi_\varrho(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,p_1,p_2,\ldots,p_n)=0 \quad (\varrho=1,2,\ldots,r)$$

genügen. Auch bei diesem Problem haben die ein festes Wertesystem enthaltenden und den Differentialgleichungen des Problems genügenden Mannigfaltigkeiten im Gebiete der Größen $x,y_1,y_2,\ldots,y_n$ eine Enveloppe, an welcher das gesuchte Extremum in ähnlichem Sinne wie bei dem Jacobischen Satze aufhört. Dabei gelingt es auch, die bekannte Eigenschaft der Enveloppe der durch einen Punkt A gehenden geodätischen Linien einer Fläche zu verallgemeinern: Berühren zwei dieser Linien die Enveloppe in B und D, so ist

$$AD-AB=BD,$$

wo rechts ein Bogen der Enveloppe, links geodätische Bogen stehen. Bei der Verallgemeinerung treten an Stelle der Bogenlängen die entsprechenden Werte des vorstehenden Integrales, an Stelle der geodätischen Linien die den Differentialgleichungen des Problems genügenden Mannigfaltigkeiten.

Hau.

O. Bolza. Proof of the sufficiency of Jacobi's condition for a permanent sign of the second variation in the so-called isoperimetric problems. American M. S. Trans. 3, 305-311 und Sep.-Abdr. Chicago, Decenn. Publ. 7 S. 4°.

Die Diskussion der zweiten Variation für die einfachste Klasse isoperimetrischer Probleme in Parameterdarstellung führt zu der Frage: Bezeichnen H_1, H_2, T drei im Intervall (t_0, t_1) reguläre Funktionen von t und sei überdies $H_1 > 0$ und T nicht identisch Null; unter welchen Bedingungen ist dann das bestimmte Integral

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} \left[H_1 \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + H_2\, w^2\right] dt$$

positiv für alle nicht identisch verschwindenden Funktionen w, welche den drei Bedingungen

(a) $$w(t_0) = 0, \quad w(t_1) = 0,$$

(b) $$\int_{t_0}^{t_1} w\, T\, dt = 0,$$

(c) die Funktionen w_x besitzen erste Ableitungen und genügen, ebenso wie diese, gewissen Stetigkeitsbedingungen,

Genüge leisten?

Die Antwort gibt die Jacobische Bedingung, daß

$$t_1 < t_0'$$

sein muß, wo t_0' den zu t_0 konjugierten Wert bezeichnet. Während man die Notwendigkeit dieser Bedingung leicht zu erkennen vermag, ist es schwieriger, nachzuweisen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist; dies letztere zu zeigen, ist der Zweck der vorliegenden Mitteilung.

Der Beweis beruht auf einer Ausdehnung eines Hülfssatzes über den Differentialausdruck

$$\Psi(w) = H_2\, w - \frac{d}{dt}\left(H_1 \frac{dw}{dt}\right),$$

mittels dessen Jacobi den analogen Satz für das Problem ohne Bedingungen bewiesen hat, und welcher lautet: Ist u ein Integral der Differentialgleichung $\Psi(u) = 0$, so gilt für jede Funktion p, welche erste und zweite Ableitungen zuläßt, die Relation

$$(pu)\,\Psi(pu) = H_1 (p'u)^2 - \frac{d}{dt} H_1 p p' u^2,$$

wo der Akzent die Ableitungen nach t bezeichnet.

Diese Arbeit findet ihre Ergänzung in einer Abhandlung des Verf. in den Math. Ann. 57, 44-48 (vergl. auch F. d. M. 32, 385, 1901; Referat über A. Kneser). Hau.

O. Bolza. Some instructive examples in the calculus of variations. American M. S. Bull. (2) 9, 1-10.

Zunächst kennzeichnet der Verf. in § 1 das allgemeine Problem der Variationsrechnung und die zu seiner Lösung notwendigen Bedingungen. In § 2 wird als Beispiel, welches die Notwendigkeit der von Weierstraß hinzugefügten Bedingungen dartut, das Minimum des Integrals $J=\int_{x_0}^{x_1} y'^2(y'+1)^2\,dx$ behandelt. Der dritte Paragraph dient zur Klärung der Frage, bei welchen Problemen das ältere Verfahren und bei welchen die Weierstraßsche Methode vorzuziehen ist, also die Beziehung zwischen einem Problem in Parameterdarstellung und dem entsprechenden Problem mit x als unabhängiger Variable. „Die beiden Methoden haben es mit zwei offenbar verschiedenen Fragen zu tun, und welche der beiden den Vorzug verdient, hängt von der Natur des speziellen gerade behandelten Problems ab.“ In § 4 wird ein Beispiel behandelt, das die Unzulänglichkeit der Weierstraßschen Bedingung in dem Falle darlegen soll, wenn x als unabhängige Variable genommen wird, nämlich:

$$J=\int_0^1 (ay'^2-4byy'^3+2bxy'^4)\,dx,$$

wo a und b zwei positive Konstanten sind und $y=0$ für $x=0$, ferner $y=0$ für $x=1$. „In dem Weierstraßschen Problem ist der Richtung der Tangenten der zulässigen Kurven keine Beschränkung auferlegt; in unserem Problem dagegen ist die Richtung parallel zur x-Achse, außerdem aber keine andere, ausgeschlossen. In dem ersteren Falle ist die Gesamtheit zulässiger Richtungen geschlossen, in dem letzteren ist sie nicht geschlossen.“ Lp.

A. Korn. Über den einfachsten semidefiniten Fall in der eigentlichen Variationsrechnung. Münch. Ber. 1902, 75-90.

Es handelt sich um das Extremum des Integrales

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\,dx.$$

Ist $y=y(x,c_1,c_2)$ das Integral der zugehörigen Lagrangeschen Differentialgleichung, und bezeichnet man die Substitution desselben und die Substitution der Auflösungen der Gleichungen $|y|_{x=x_1}=y_1$, $|y|_{x=x_2}=y_2$ (y_1, y_2 gegebene Konstanten) nach c_1, c_2 durch Einschließung in [], so ist $[y]$ eine Lösung des Problems, wenn im ganzen Intervall (x_1, x_2)

$$\text{(I)} \qquad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right]$$

ein festes Vorzeichen hat und $\neq 0$ ist und

$$\text{(II)} \quad \varDelta(x, x_1) = \left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\right] \left[\frac{\partial y}{\partial c_2}\right]_{x=x_1} - \left[\frac{\partial y}{\partial c_2}\right] \left[\frac{\partial y}{\partial c_1}\right]_{x=x_1} \neq 0$$

ist.

Die Betrachtung höherer Variationen als der zweiten ist erforderlich bei der Untersuchung der semidefiniten Fälle, deren einfachster:

(I) ist erfüllt; $\varDelta(x, x_1)$ ist in dem ganzen Intervalle $\neq 0$, verschwindet aber für $x = x_2$,

der von dem Verf. untersucht wird. Aus den von ihm für diesen Fall aufgestellten Kriterien folgen leicht und einwandsfrei die von Erdmann in eleganter Form gegebenen Kriterien. Der von Erdmann selbst für seine Kriterien gegebene Beweis ist nicht einwandsfrei, worauf bereits A. Mayer in seiner Besprechung der Erdmannschen Arbeit (in diesem Jahrbuche **9**, 278-279, 1877) hingewiesen hat. Hau.

A. Guldberg. Über die Maxima und Minima der Integrale, die eine kontinuierliche Gruppe gestatten. Christiania, Videnskabs. Skrift. 1902, 10 S. gr. 8°.

Ist bei Problemen der Variationsrechnung das Maximum oder Minimum eines Integrales

$$J = \int f(x, y, y')\, dx$$

zu finden, so muß bekanntlich y als Integral der Lagrangeschen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

bestimmt werden. Es fragt sich nun, ob man in dem Falle, daß das Integral J invariant bei einer kontinuierlichen Gruppe von Punkttransformationen ist, Vorteil daraus für die Integration der Lagrangeschen Gleichung ziehen kann. Die Aufgabe aber, die verschiedenen Fälle zu untersuchen, welche auftreten können, je nachdem das Integral J die verschiedenen Gruppen der Ebene gestattet, wird durch die Bemerkung bedeutend vereinfacht: Ist J bei einer kontinuierlichen Gruppe G invariant, so gestattet die Lagrangesche Differentialgleichung diese Gruppe G. Hiernach brauchen nur die Gruppen der Ebene betrachtet zu werden, welche eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung invariant lassen. Nach Lies Untersuchungen sind acht Fälle möglich. In zwei Fällen besitzen jedoch die zugehörigen Gruppen keine Integralinvariante erster Ordnung und geben auch die Untergruppen nicht Anlaß zu Variationsproblemen, welche nicht unter den übrigen Gruppen sich finden. Deshalb werden nur die übrigen sechs Gruppen näher untersucht.

Hau.

G. A. Bliss. **The second variation of a definite integral when one end-point is variable.** American M. S. Trans. **3**, 132-141.

Das Verfahren, welches in dieser Abhandlung angewendet wird, um die zweite Variation eines bestimmten Integrales

$$J=\int_{t_0}^{t_1} F(x,y,x',y')\,dt$$

zu diskutieren für den Fall, daß die gesuchte Kurve C durch einen festen Punkt B hindurchgeht und der andere Endpunkt A auf der gegebenen Kurve D frei verfügbar bleibt, ist ganz analog dem Verfahren, welches Weierstraß in seinen Vorlesungen über Variationsrechnung (1879) für den Fall gegeben hat, daß beide Endpunkte fest vorgeschrieben sind. Der Unterschied beider Verfahren hat seinen Ursprung in dem Umstande, daß bei dem hier vorliegenden Problem außerhalb des Integralzeichens stehende Glieder mit in Betracht gezogen werden müssen. Als Resultat der Diskussion ergibt sich ein dem Jacobischen analoges Kriterium, welches in neuer Weise den „kritischen" Punkt der festen Kurve D, wie der Verf. den von Kneser in seinem Lehrbuche der Variationsrechnung als extremalen Brennpunkt bezeichneten Punkt nennt.

Nachdem noch einige einfache Sätze über die Lage des kritischen zu dem konjugierten Punkte hergeleitet sind, werden schließlich die Beziehungen zwischen dem Resultate des Verf. und dem von Kneser in seinem oben erwähnten Lehrbuche gegebenen besprochen. Beide sind im wesentlichen identisch. Kneser hat kürzlich sein Resultat in neuer Weise hergeleitet (vergl. das Referat auf S. 380). Hau.

J. Kürschák. **Über die Transformation der partiellen Differentialgleichungen der Variationsrechnung.** Math. Ann. **56**, 155-164.

Die Abhandlung ist identisch mit der unter dem gleichen Titel in den Ungar. Ber. **17**, veröffentlichten und in diesem Jahrbuche **32**, 383, 1901 besprochenen Arbeit. Hau.

O. Bolza. **The isoperimetric problem on a given surface.** Sep.-Abdr. Chicago, Decenn. Publ. 8 S. 4°. (Vergl. auch Math. Ann. **57**, 48-52.)

Der bekannte Satz, daß die Extremalen für das isoperimetrische Problem auf einer gegebenen Fläche Kurven konstanter geodätischer Krümmung sind, läßt sich in einfacherer und zugleich allgemeinerer Art beweisen, als dies von Kneser (F. d. M. **31**, 386-388, 1900) und Whittemore (F. d. M. **32**, 386, 1901) geschehen ist.

Während Kneser die gegebene und Whittemore die gegebene und die gesuchte Kurve in der Form $v=f(u)$ annehmen, wählt der Verf. für die auftretenden Kurven die Parameterdarstellung. Hierdurch gelingt es ihm, statt des Bonnetschen Ausdruckes für die geodätische Krümmung

einer Flächenkurve einen geeigneteren, von Laurent und Minding gegebenen Ausdruck in die Betrachtungen einzuführen. Da sich dieser Ausdruck in den gebräuchlicheren Lehrbüchern der Differentialgeometrie nicht findet, so leitet ihn der Verf. zunächst in neuer und elementarer Weise ab, wobei der Bestimmung des für die Diskussion der zweiten Variation wichtigen Vorzeichens besondere Beachtung geschenkt ist.

Dann folgt die Betrachtung des isoperimetrischen Problems auf einer Fläche; statt der üblichen unsymmetrischen Form der Differentialgleichung der Extremalen wird hierbei die symmetrische Weierstraßsche Form benutzt. Nach Erledigung des Falles fester Endpunkte der zu bestimmenden Kurve beschließt noch die Betrachtung des Falles veränderlicher Endpunkte die Abhandlung. Hau.

E. Zermelo. Zur Theorie der kürzesten Linien. Deutsche Math.-Ver. 11, 184-187.

Das für die Variationsrechnung klassische Problem der kürzesten Linien auf einer Fläche gestattet, wie der Verf. zeigt, einige Erweiterungen, welche in ihrer anschaulichen Form zur Aufklärung allgemeinerer Variationsprobleme beitragen können. Hau.

J. O. Müller. Über die Minimaleigenschaft der Kugel. Gött. Nachr. 1902, 176-181.

Der Satz, daß die Kugel kleinere Oberfläche besitzt als jeder andere Körper gleichen Volumens, bietet — wenigstens für Flächen mit stetig veränderlicher Tangentialebene — ein Problem der relativen Maxima und Minima von Doppelintegralen dar. Als solches ist es aber bisher noch nicht behandelt, da auch der elegante Beweis dieses Satzes von H. A. Schwarz, dem das Verdienst gebührt, zum ersten Male diesen Satz streng bewiesen zu haben, als Mittelglied Rotationsflächen einschiebt und dann nur Sätze aus der Theorie der einfachen Integrale zu verwenden braucht.

Der Verf. hat das Problem direkt — ohne Einschaltung der Rotationsflächen — aus den allgemeinen Prinzipien der Variationsrechnung zu beweisen unternommen. Hierzu mußte er eine allgemeine Theorie der isoperimetrischen Probleme bei Doppelintegralen unter beständiger Berücksichtigung ihrer unmittelbaren Anwendbarkeit auf das Kugelproblem ausarbeiten. Durch Übertragung der von Hilbert in der Theorie der absoluten Extrema von einfachen und Doppelintegralen gegebenen Darstellung des Weierstraßschen Kriteriums auf das isoperimetrische Problem von Doppelintegralen gelangt der Verf. zu einer allgemeinen Theorie dieser Aufgaben, welche sich unmittelbar zum Beweise des Kugelsatzes verwenden läßt.

In dieser vorläufigen Mitteilung wird nur kurz der Gedankengang des Beweises dargelegt, ohne alle Behauptungen streng zu begründen;

letzteres geschieht in der inzwischen (1903) erschienenen Dissertation des Verf. und in einer Arbeit in den Mathematischen Annalen. Hau.

A. Kneser. Ein Beitrag zur Frage nach der zweckmäßigsten Gestalt der Geschoßspitzen. Arch. der Math. u. Phys. (3) **2**, 267-278.

Die praktisch interessante Frage bei diesem Problem ist: Wie muß bei gegebener Länge und gegebener hinterer Grenzfläche der Geschoßspitze der Meridian ihrer Mantelfläche angenommen werden, damit diese zusammen mit der Stirnfläche (d. i. einer das Geschoß nach vorn begrenzenden Kreisfläche) den kleinstmöglichen Widerstand von der durchschnittenen Luft erleide? Der Radius der Stirnfläche ist hierbei nicht vorgeschrieben.

Armanini hat gezeigt, daß, wenn das gesuchte Minimum vorhanden sein soll, die Mantelfläche, deren Meridian die bekannte Newtonsche Kurve ist, sich unter einem Winkel von 45° an die Stirnfläche ansetzen muß. Es bleibt aber noch zu untersuchen, ob die nach der Regel von Armanini konstruierte Geschoßspitze wirklich ein Minimum des Widerstandes liefert.

Um diese Frage zu beantworten, benutzt der Verf. die Methode zur Ableitung hinreichender Bedingungen des Extremums bei Problemen der Variationsrechnung mit veränderlichen Integrationsgrenzen, welche er im Anschlusse an die Weierstraßschen Grundgedanken in seinem Lehrbuche der Variationsrechnung (F. d. M. **31**, 386-388, 1900) abgeleitet hat. Hierdurch gelingt es ihm, den strengen Nachweis zu führen, daß eine nach der obigen Vorschrift gestaltete Geschoßspitze in der Tat den kleinsten Widerstand erfährt. Hau.

J. Hadamard. Sur une question de calcul des variations. S. M. F. Bull. **30**, 253-256.

Es liegt nahe, für das Maximum oder Minimum eines n-fachen Integrals mit m unbekannten Funktionen

$$(1)\quad \int\int\cdots\int f(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1^1, \ldots, p_n^m)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

wo

$$p_k^i = \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

gesetzt ist — nach Analogie der Bedingung für die gewöhnlich untersuchten speziellen Fälle $n = 1$ oder $m = 1$ —, als notwendige Bedingung anzusehen, daß die quadratische Form

$$(2)\qquad \sum_{i,k,i',k'} \frac{\partial f}{\partial p_k^i \cdot \partial p_{k'}^{i'}} u_k^i u_{k'}^{i'}$$

mit den mn Unbestimmten $u_1^1, \ldots, u_n^m$ positiv sein muß.

Dies ist aber nicht der Fall, wie aus den von Clebsch in seiner Abhandlung „Über die zweite Variation vielfacher Integrale“ ausgeführten Transformationen folgt. Es ist vielmehr, damit die zweite Variation von (1) wesentlich positiv sei, hinreichend, daß die Form (2) positiv werden kann, wenn man sie in beliebiger Weise mit den

$$\frac{m(m-1)}{2}\,\frac{n(n-1)}{2}$$

Formen

$$(3) \qquad u_k^i u_{k'}^{i'} - u_{k'}^i u_k^{i'} \qquad \left(\begin{matrix} i, i' = 1, 2, \ldots, m \\ k, k' = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}\right)_{i \neq i',\, k \neq k'}$$

kombiniert. Als notwendige Bedingung für das Eintreten eines Extremums von (1) ergibt sich, daß die Form (2) wesentlich positiv sein muß für alle Werte von u, welche die Formen (3) zum Verschwinden bringen. Der Beweis für diese Behauptung ist von dem Verf. in seinen inzwischen erschienenen Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique veröffentlicht. Hau.

Siebenter Abschnitt.

Funktionentheorie.

Kapitel 1.

Allgemeines.

W. F. OSGOOD. Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen a) einer und b) mehrerer komplexen Größen. Encykl. d. math. Wiss. 2_2, 1-114.

Einleitende Bemerkungen.

I. Grundlage der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Größe.

1. Die Bereiche T, B, T'. 2. Funktionen eines komplexen Arguments; analytische Funktionen. 3. Der Cauchysche Integralsatz; das Residuum. 4. Die Cauchysche Integralformel; isolierte singuläre Punkte. 5. Die konforme Abbildung im kleinen. 6. Gleichmäßige Konvergenz. 7. Die Cauchy-Taylorsche Reihe, nebst Anwendungen. 8. Der Punkt $z = \infty$. 9. Der Laurentsche Satz; die rationalen Funktionen. 10. Mehrdeutige Funktionen; Schleifenwege. 11. Die Riemannsche Fläche; das Verhalten einer mehrdeutigen Funktion im kleinen. 12. Fortsetzung; algebraische Funktionen. 13. Die analytische Fortsetzung; endgültige Definition der analytischen Funktion; das analytische Gebilde. 14. Geometrische Deutung durch ebene und Raumkurven. 15. Die Lagrangesche Reihe. 16. Funktionalgleichungen. 17. Bestimmte und Schleifenintegrale. 18. Die Umkehrfunktion und die konforme Abbildung im großen.

II. Die geometrische Funktionentheorie.

19. Riemanns neue Grundlage für die Funktionentheorie. 20. Das Prinzip der Symmetrie; analytische Fortsetzung. 21. Die konforme Abbildung analytisch begrenzter Bereiche auf den Kreis; geradlinige und Kreisbogenpolygone. 22. Die Riemannsche Fläche als definierendes Element; algebraischer Fall. 23. Die konforme Abbildung mehrfach

zusammenhängender Bereiche auf einander; algebraischer Fall. 24. Funktionen mit Transformationen in sich; periodische Funktionen. 25. Der Fundamentalbereich; zunächst der Bereich $\mathfrak{T}$; die Ecken. 26. Fortsetzung; Funktionen auf $\mathfrak{T}$; Definition des Fundamentalbereiches. 27. Der algebraische Fall; asymmetrische Riemannsche Flächen. 28. Parameterdarstellung durch eine uniformisierende Variable. 29. Der Picardsche Satz.

III. Untersuchung der analytischen Funktionen mittels ihrer Darstellung durch unendliche Reihen, Produkte usw.

30. Weierstraß. 31. Der Weierstraßsche Satz. 32. Der Mittag-Lefflersche Satz. 33. Verallgemeinerung der Sätze von Nr. 31, 32. 34. Funktionen mit vorgegebenem Definitionsbereich. 35. Auf dem Konvergenzkreis gelegene singuläre Punkte, insbesondere Pole, und die Koeffizienten der Potenzreihe. 36. Die Nullpunkte einer analytischen Funktion, insbesondere einer ganzen Funktion. 37. Die Stärke des Unendlichwerdens einer ganzen Funktion, die Koeffizienten der Taylorschen Reihe und die Höhe der Funktion. 38. Annäherungsformeln; Reihenentwicklungen nach Polynomen. 39. Kettenbruchentwicklungen.

IV. Analytische Funktionen mehrerer komplexer Größen.

40. Die Bereiche (T), (B), (T'); analytische Funktionen. 41. Der Cauchysche Integralsatz; das Residuum. 42. Die Cauchysche Integralformel; singuläre Punkte. 43. Gleichmäßige Konvergenz; die Cauchy-Taylorsche Reihe. 44. Implizite Funktionen. 45. Der Weierstraßsche Satz und die Teilbarkeit im kleinen. 46. Die Parameterdarstellung im kleinen; implizite Funktionen. 47. Das analytische Gebilde. 48. Einige Sätze über das Verhalten im großen. 49. Homogene Variabeln.

Gz.

E. T. WHITTAKER. A course of modern analysis: An introduction of infinite series and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions. Cambridge: At the University Press. XVI u. 378 S. 8°.

Dieses vortreffliche Lehrbuch zerfällt in zwei Teile: I. Die Prozesse der Analysis. II. Transzendente Funktionen. Nach einer kurzen Besprechung der komplexen Zahlen im ersten Kapitel wird im zweiten Kapitel die Theorie der unbedingten Konvergenz einigermaßen eingehend betrachtet; die Konvergenz unendlicher Determinanten wird hierbei neben den üblichen feststehenden Sätzen behandelt. Kapitel III: Die grundlegenden Eigenschaften analytischer Funktionen, die Sätze von Taylor, Laurent und Liouville. Das Kapital IV: die gleichmäßige Konvergenz unendlicher Reihen, und das Kapitel V: die Theorie der Residuen nebst Anwendung auf die Auswertung reeller bestimmter Integrale, enthalten eine lichtvolle und anziehende Behandlung der Grundelemente der modernen Analysis. Ihnen folgt im sechsten Kapitel eine reiche Auswahl von Beispielen zur Entwicklung von Funktionen in unendliche Reihen,

an ihrer Spitze die Darbouxsche Formel und unter ihnen die Maclaurin-Bernoullische Entwicklung, Bürmanns und Lagranges Reihen, die Verallgemeinerung der letzteren durch Rouché, Teixeira und Laplace, ferner Entwicklungen einer Funktion nach rationalen Funktionen und als unendliche Produkte, wobei letzteres als ein besonderer Fall des allgemeinen Faktorentheorems von Weierstraß erscheint. Kapitel VII ist den Fourierschen Reihen gewidmet, für welche zwei Beweise gegeben werden; der erste ist eine Abwandlung des zweiten Beweises von Cauchy und der zweite der Dirichletsche. Ein kurzes Kapitel über asymptotische Entwicklungen nach Poincaré schließt den ersten Teil.

Kapitel IX, das erste des zweiten Teiles, behandelt die Gammafunktion und enthält viele interessanten Dinge, die bislang für englische Leser nicht leicht zugänglich waren. Legendresche Funktionen werden im zehnten Kapitel erörtert, die hypergeometrische Reihe in Kapitel XI, die Besselschen Funktionen in Kapitel XII. Diese drei Kapitel enthalten in einem verhältnismäßig kleinen Umfange eine Fülle klar dargestellten und gut ausgewählten Stoffes. Einige interessante Anwendungen auf die Gleichungen der mathematischen Physik werden im dreizehnten Kapitel gegeben. Die übrigen Kapitel bilden gewissermaßen eine Einleitung in die Theorie der elliptischen Funktionen. Kapitel XIV handelt von der Funktion $\wp(z)$, Kapitel XV von den Funktionen $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$, Kapitel XVI von allgemeinen Theoremen.

Das Buch kann durchweg als eine ausgezeichnete Einleitung in die moderne Analysis empfohlen werden. Es ist klar und doch nicht weitschweifig; es ist mit einer ausreichenden Zahl völlig durchgearbeiteter Beispiele ausgestattet, die den allgemeinen Theoremen Bestimmtheit geben, und die dem Studenten zur Bearbeitung überlassenen Beispiele sind zahlreich und gut gewählt. Es soll auch erwähnt werden, daß das Buch eine Übersicht der gebrauchten Kunstausdrücke gibt und außerdem ein recht vollständiges Inhaltsverzeichnis. Der Druck und die Ausstattung sind vortrefflich. Gbs. (Lp.)

Éd. A. Fouët. Leçons sur la théorie des fonctions analytiques. Première partie. Fonctions en général. Fonctions analytiques: Leurs modes de définition et de représentation. Paris: Gauthier-Villars. 330 S. gr. 8°.

„Eine gewisse Nützlichkeit kann man den didaktischen Werken zusprechen, welche das Lesen unserer großen Werke über die Analysis und der Originalabhandlungen dadurch vorbereiten, daß sie die in zahlreichen Bänden zerstreuten Dinge zusammenstellen, sie im Auszuge vorführen, sie vereinfachen, sie von verwickelteren Fragen loslösen. Das vorliegende Werk ist dem Studium der analytischen Funktionen gewidmet. . . . Um ihm seinen elementaren Charakter zu wahren und trotzdem den Leser nicht über die Verwicklungen der Fragen, an die er geht, zu täuschen, haben wir es für gut gehalten, dem Texte die einfachsten Sätze vor-

zubehalten und die anderen in Fußnoten zu verweisen. In diesen zahlreichen und knappen Noten werden die Schwierigkeiten, welche die Probleme mit sich bringen, oder die interessanten Verallgemeinerungen vorgeführt; der Leser findet in ihnen zuweilen einen Fingerzeig für ihre Lösung, stets aber bibliographische Angaben, die den Übergang zu den Quellen vermitteln. Sie werden also für Forschungen als Führer und als elementares Repertorium dienen. Ebenso haben wir zur Erleichterung der Lektüre für Anfänger es für gut gehalten, die ersten Kapitel so zu fassen, daß man ohne große Unzuträglichkeit die Ordnung, in der sie stehen, umkehren kann. Mehrere Paragraphen erscheinen sogar als kurze Monographien, die aus dem Texte ausgeschieden werden könnten."

Das Werk, dessen erster Teil dem Berichtsjahre angehört, ist also ein Lehrbuch zur Einführung in die Funktionentheorie; sein Verf. zeigt eine große Belesenheit in der gesamten zu beachtenden Literatur. Die Darstellung ist von der Klarheit, deren sich die französischen Schriftsteller stets befleißigen, und somit wird das Buch, seinem Zwecke entsprechend, viele Leser finden.

Die Einleitung umfaßt zwei Abschnitte zu je drei Paragraphen. Ein kurzer Überblick über die Fragen des Zahlbegriffs, die Mengenlehre, die Typen der Funktionen wird im ersten Abschnitt gegeben; der zweite handelt folgeweise von den stetigen Funktionen, von den Funktionen, die eine bestimmte Ableitung besitzen, und von den eindeutigen analytischen Funktionen.

Nun folgt das erste „Buch", das in dem vorliegenden Bande noch nicht bis zu Ende geführt ist, über die allgemeinen Methoden zur Definition und zur Darstellung der Funktionen. Von den fünf Kapiteln, die hier vorliegen, beschäftigt sich das erste mit den algebraischen Funktionen, indem zunächst die eindeutigen, danach besondere vieldeutige Funktionen besprochen werden. Die allgemeine algebraische Funktion und die Haupteigenschaften der Riemannschen Flächen bilden die wesentlichsten Teile dieser Betrachtung.

Umfangreicher ist das zweite Kapitel über Funktionen, die durch einfache Reihen definiert werden. Der erste Abschnitt erledigt zuerst die allgemeinen Sätze über die Reihen, insbesondere die Potenzreihen, deren Bezeichnung $\mathfrak{P}(z)$ nach Weierstraß gebraucht wird, ohne daß die Verdienste des deutschen Gelehrten um diese Theorie gewürdigt werden, und deren Benennung als „ganze Reihen", von Méray eingeführt, im Buche festgehalten wird. Dann folgen die unendlichen Produkte, die trigonometrischen Reihen, die divergenten Reihen nach der in dem letzten Jahrzehnt entwickelten Theorie. In dem zweiten Abschnitt wird die Anwendung auf die elementaren Transzendenten gemacht. Die Reihen für die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen, die inversen Funktionen derselben, die unendlichen Produkte für die trigonometrischen Funktionen, die Gammafunktion und die hypergeometrischen Reihen nebst den besonderen Funktionen: Kugel- und Zylinderfunktionen, dienen der Reihe nach als Beispiele für die vorher entwickelten allgemeinen Theoreme.

Nicht ganz so umfangreich, aber besonders wichtig ist das dritte Kapitel über die durch vielfache Reihen definierten Funktionen. Auch hier werden im ersten Abschnitt die allgemeinen Sätze über vielfache Reihen im allgemeinen, über Potenzreihen mit mehreren Variabeln (wo auch der Name série de puissances gebraucht wird) und über vielfache unendliche Produkte entwickelt, und dann folgen im zweiten Abschnitt die Anwendungen auf die Transzendenten höherer Ordnung: die doppeltperiodischen Funktionen, die Funktionen von p Argumenten und $2p$ Perioden, die Weierstraßschen Funktionen σ, ζ, $\wp$, die Jacobischen Thetafunktionen, die Thetafunktion von beliebig vielen Argumenten.

Die Definition der Funktionen durch Integrale bildet den Gegenstand des vierten Kapitels. Natürlich muß der Begriff des Integrals zuerst allseitig beleuchtet werden; dann werden die Cauchyschen Integrale sowie die sich anschließenden Betrachtungen erledigt. Daß hier das Fundamentaltheorem der Algebra wieder als Theorem von d'Alembert bezeichnet wird, ist zwar allgemeiner Gebrauch in Frankreich; dieser Mißbrauch sollte aber doch nicht zur Unterdrückung des Namens Gauß und seiner grundlegenden Abhandlungen führen.

Die analytische Fortsetzung nach Weierstraß ist das im Kapitel V behandelte Thema, dessen Behandlung bis in die neuesten Arbeiten verfolgt wird.

Wegen der Reichhaltigkeit der teils durchgeführten, teils bloß angedeuteten Gesichtspunkte wird die Lektüre des Buches anregend wirken, und damit wird es sich als eine nützliche Bereicherung der mathematischen Literatur erweisen. Meinungsverschiedenheiten über einzelne Punkte können hier nicht zum Austrage gebracht werden. Lp.

H. E. Hawkes. On hypercomplex number systems. American M. S. Trans. **3**, 312-330.

Das Problem der Klassifikation und Aufzählung von Systemen höherer komplexer Zahlen ist zuerst von B. Peirce (F. d. M. **13**, 82, 1881) behandelt worden. Seine Ergebnisse sind mehrfach kritisiert.

Der Verf. hat es unternommen, die Peirceschen Methoden zu revidieren und sie auf eine durchsichtige und strenge Basis zu stellen. Als Anwendung erscheint eine erheblich kürzere Herleitung der von Scheffers und Study gegebenen Tafeln von Zahlsystemen mit weniger als sechs Einheiten.

Die Grundlage wird von zwei Sätzen gebildet:

I. „In jedem Größen-n-tupel (dessen Zahlen nicht sämtlich Teiler der Null sind) gibt es eine Zahl γ, sodaß $\gamma^2=\gamma$."

In der Tat, wenn a kein Teiler der Null ist, folgt aus $a\gamma=a$ sofort $a\gamma^2=a\gamma$ und damit $\gamma^2=\gamma$.

II. Gibt es unter den Einheiten eines Größen-n-tupels eine e_n, derart, daß $e_n^2=e_n$, so zerlegen sich die übrigen Einheiten in vier Gruppen:

1. von Einheiten e_k mit der Eigenschaft $e_k e_n = e_n e_k = e_k$;

2. von Einheiten e_k mit der Eigenschaft $e_n e_k = e_k$, $e_k e_n = 0$;
3. von analogen Einheiten e_k: $e_k e_n = e_k$; $e_n e_k = 0$;
4. von Einheiten: $e_k e_n = e_n e_k = 0$.

Der Beweis zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teile wird gezeigt, daß die übrigen Einheiten e_k jedenfalls so gewählt werden können, daß $e_n e_k$ entweder $= e_k$, oder aber $= 0$ wird. Im zweiten Teil dagegen wird bewiesen, daß den neuen Einheiten überdies noch die Bedingung auferlegt werden kann, daß entweder $e_k e_n = 0$ oder aber $= e_k$ wird. Das System heißt dann regulär in bezug auf die Einheit e_n. Die beiden Sätze I und II ermöglichen die Aufstellung der verschiedenen Fälle nicht verschwindender Produkte irgend zweier Einheiten aus verschiedenen Gruppen.

Das System kann weiter so vereinfacht werden, daß in der ersten Gruppe e_n die einzige Zahl ist, für die $e_n^2 = e_n$ gilt. Ist ferner ε eine ebensolche Zahl der vierten Gruppe ($\varepsilon^2 = \varepsilon$), so läßt sich das System dahin transformieren, daß es auch in bezug auf ε regulär wird.

Von da an tritt die Beschränkung auf Systeme mit „Moduln" ein. μ ist ein Modul, wenn für jede Zahl des Systems $a\mu = \mu a = \mu$ ist. Es kann dann nur einen solchen Modul geben.

Von Bedeutung ist dann der Satz: Wenn ein solches System keine Zahl a mit der Eigenschaft $a^2 = a$ enthält, so gibt es für jede Zahl b des Systems eine natürliche Zahl n derart, daß $b^n = 0$. My.

C. Arzelà. Sulle serie di funzioni di variabili reali. Bologna Rend. 1902-03, 13 S.

In seinem Berichte über Mengenlehre (Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, Deutsche Math. Ver. 8_2, 1-250; F. d. M. **31**, 70, 1900) erhob Schoenflies einige Bedenken gegen einen Punkt des Beweises eines von Arzelà (Intorno alla continuità della somma di infinite funzioni continue. Bologna, Band 1883-84, 79-84) aufgestellten Satzes, nach welchem die „streckenweise gleichmäßige Konvergenz" die notwendige und hinreichende Bedingung für die Stetigkeit der Summe einer Reihe von stetigen Funktionen wäre. Arzelà gibt hier seinen alten Beweis mit einigen Vervollständigungen wieder und fügt einen neuen hinzu. Vi.

W. H. Young. On the density of linear sets of points. Lond. M. S. Proc. **34**, 285-290.

In einer Arbeit von Brodén über reelle Funktionen von reellen Variabeln (J. für Math. **118**, 1-60; F. d. M. **28**, 353, 1897) wird stillschweigend die Annahme gemacht, daß eine lineare Punktmenge, für welche jeder Punkt Grenzstelle ist, überall dicht sei. Um diese Annahme als irrig zu erweisen, konstruiert der Verf. das Beispiel einer Punktmenge, für welche jedes Element Grenzstelle von beiden Seiten her und welches doch nirgends dicht ist. Lsg.

A. Capelli. Sulla continuità delle funzioni di più variabili reali. Napoli Rend. (3) 8, 22-30.

Beweis der folgenden Grundeigenschaften der stetigen Funktionen: a) Eine in einem endlichen, mit Begrenzung versehenen Bereiche stetige Funktion ist endlich. b) Nähert sich eine stetige Funktion einem Werte unbeschränkt an, so erreicht sie diesen Wert. c) Theorem von der gleichmäßigen Stetigkeit. Die Beweise könnten wohl durch den Gebrauch der Mengenlehre etwas vereinfacht werden. Vi.

J. Hadamard. Sur les dérivées des fonctions de lignes. S. M. F. Bull. 30, 40-43.

Durch Volterra (Rom Acc. L. Rend. (4) 3_2, 225-230; F. d. M. **19**, 411, 1887, und Acta Math. **12**, 233-286; F. d. M. **21**, 397, 1889) ist der Begriff der Ableitung auf Funktionen von Linien ausgedehnt worden. Es wird hier auf gewisse Schwierigkeiten bei der Benutzung dieser Ableitungen hingewiesen; es wird im speziellen hervorgehoben, daß die Formel für die Ableitung einer Funktion U auf der Linie L auf die Ableitung derselben U'_x nicht angewendet werden kann. Sh.

M. Godefroy. Principes de la théorie des fonctions dérivables d'après M. Kowalewski. Ens. math. 4, 397-405.

Vergl. den Bericht über den Aufsatz von G. Kowalewski (aus Leipz. Ber. **52**, 214-219) in F. d. M. **31**, 396, 1900.

D. R. Curtiss. Note on the sufficient conditions for an analytic function. American M. S. Bull. (2) 8, 329-331.

Eine Funktion $w = u(x, y) + iv(x, y)$ ist bekanntlich eine analytische Funktion der komplexen Variable $z = x + iy$ in jedem Punkte des Bereiches T, wenn überall in T 1) u und v einwertige, stetige Funktionen der unabhängigen reellen Variabeln u und v sind, 2) die vier partiellen Ableitungen von u und v nach x und y existieren, 3) die Gleichungen $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$, $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ bestehen, 4) diese vier partiellen Ableitungen stetige Funktionen der unabhängigen Variabeln x und y sind. Zufolge eines Goursatschen Satzes (F. d. M. **31**, 398, 1900) läßt sich die Anzahl dieser Bedingungen dahin verringern, daß außer 1), 2), 3) nur die Stetigkeit einer einzigen der vier partiellen Ableitungen erforderlich ist. „Die Frage bleibt noch unbeantwortet, ob man nicht jeder Annahme betreffs der Stetigkeit der partiellen Ableitungen von u und v entraten kann." Lp.

G. Morera. Sulla definizione di funzione di una variabile complessa. Torino Atti **37**, 99-102.

Verf. hatte früher [Lomb. Ist. Rend. (2) **19**, 304-307; F. d. M. **18**. 338, 1886] den Satz hergeleitet: „Wenn die komplexe Variable w von einer andern z in der Weise abhängt, daß sie in einem gegebenen Bereich T der z-Ebene stetig, eindeutig und endlich und daß ferner das Integral $\int w\,dz$, ausgedehnt über die ganze Begrenzung jedes Teiles von T, gleich Null ist, so ist w notwendig eine Funktion von z im Riemannschen Sinne.“ In der vorliegenden Notiz zeigt Verf., daß dieser Satz zu einer neuen Definition der Funktion einer komplexen Variable führt, nämlich: Eine komplexe Veränderliche $w = u + iv$, die in einem zusammenhängenden Bereich T der (x, y)-Ebene eindeutig, endlich und stetig ist, heißt eine Funktion der unabhängigen Variable $z = x + iy$, wenn das Integral $\int w\,dz$, erstreckt über die Begrenzung eines beliebigen, einfach zusammenhängenden Teiles von T, gleich Null ist. Verf. zeigt dann insbesondere noch, wie hieraus gefolgert werden kann, daß auch das Produkt zweier solcher Größen w und w_a eine Funktion von z in T ist. Gz.

D. Pompéiu. Sur les fonctions de variables complexes. C. R. **134**, 1195-1197.

Angabe der hauptsächlichsten Ergebnisse einer ausführlichen Arbeit „Sur la continuité des fonctions de variables complexes et sur le prolongement analytique“, die binnen kurzem erscheinen wird. Es sei daher auf den Bericht über diese Abhandlung verwiesen. Gz.

E. Jaggi. Détermination des fonctions d'une variable qui admettent les substitutions d'un groupe quelconque donné, et seulement ces substitutions-là. Nouv. Ann. (4) **2**, 368-383.

E. Jaggi. Application aux fonctions circulaires et aux fonctions elliptiques d'une méthode générale de détermination des fonctions dont on donne le groupe des substitutions. Nouv. Ann. (4) **2**, 448-465.

E. Jaggi. Sur la détermination des fonctions qui admettent les substitutions d'un groupe donné, et seulement ces substitutions-là. Nouv. Ann. (4) **2**, 485-496.

Siehe F. d. M. **32**, 390, 1901. St.

J. Fredholm. Sur une classe de transformations rationnelles. — Sur une classe d'équations fonctionnelles. C. R. **134**, 219-222; 1561-1564.

In der ersten Note gibt Verf. in den Hauptzügen die Theorie der Funktionalgleichung:

$$A_i \varphi(x) \equiv \varphi(x) + \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x),$$

wo φ die unbekannte Funktion und $f(x, y)$ endlich und integrabel ist. In der zweiten Note behandelt er dieselbe Funktionalgleichung unter der Voraussetzung, daß $(x - y)^a f(x, y)$ endlich und integrabel bleibt, wenn $a < 1$ ist. Erweiterung auf n Veränderliche. Wbg.

A. Emch. Algebraic transformations of a complex variable realized by linkages. American M. S. Trans. 3, 493-498.

Koenigs hat (C. R. **120**, 861 u. 981; F. d. M. **26**, 802, 1895) den Satz bewiesen, daß jede der Bewegung eines Körpers auferlegte algebraische Bedingung vermittelst eines Gelenksystems (système articulé) verwirklicht werden kann. In der vorliegenden Arbeit wird der Fall eines ebenen Gelenkwerkes mit Benutzung der komplexen Variabeln und ihrer Funktionen behandelt und hier der Satz aufgestellt: Eine Anzahl algebraischer Relationen zwischen n komplexen Variabeln kann durch ein ebenes Gelenkwerk verwirklicht werden. Dabei ist unter einem ebenen Gelenkwerk eine Kombination von Platten oder ebenen Figuren zu verstehen, die in fester Ebene gelegen sind, und von denen einige mit einander durch Scharniere oder Zapfen verbunden sind. Lsg.

G. Vivanti. Sopra le rotazioni della sfera su sè stessa. Mat. pure ed appl. 2, 1-3.

Der analytische Ausdruck, den Cayley für das Problem der Drehung einer Kugel um einen ihrer Durchmesser aufgestellt hat, wird auf einfachem Wege und anschaulich abgeleitet. Lwt.

P. Kirchberger. Über Tschebyschefsche Annäherungsmethoden. Diss. Göttingen. 96 S. 8°.

Mit dem Begriffe der Funktion ist, wie der Verf. in der Einleitung ausführt, die Forderung gegeben, die Funktionswerte für irgendwelche Werte der unabhängigen Variabeln zu berechnen. Da wir nun sämtliche Funktionen nur insoweit numerisch beherrschen, als sie sich durch rationale Funktionen ersetzen, das heißt angenähert darstellen lassen, so folgt die große Bedeutung der Annäherungsprobleme für die ganze Mathematik und die ausgezeichnete Stellung, die die Probleme der Annäherung durch ganze oder gebrochene rationale Funktionen einnehmen.

Die verschiedene Natur der anzunähernden Funktion, die entweder stetig sein oder auch aus diskreten Wertsystemen bestehen kann, läßt eigentliche Annäherungsprobleme und Interpolationsprobleme unterscheiden. Ferner kann man einteilen nach der Art der annähernden Funktion, die

ein Polynom, eine rationale oder eine transzendente Funktion sein kann. Endlich aber hat man nach der Natur der Annäherung selbst, das heißt nach dem Gesichtspunkte, von dem aus die gesuchte Funktion als die am besten annähernde betrachtet werden soll, verschiedene Gruppen von Problemen zu unterscheiden. Es kann ein Punkt bevorzugt und hier zum Beispiel in der Übereinstimmung möglichst vieler Ableitungen das Kennzeichen der besten Annäherung gesehen werden. Es kann aber auch ein ganzes Intervall als gleichberechtigt erscheinen, und dann können entweder alle gemachten Fehler gleichmäßig berücksichtigt werden, wie bei der Methode der kleinsten Quadrate; oder aber es kann gefordert werden, daß der größte Fehler, der bei der Ersetzung der anzunähernden Funktion durch die annähernde begangen wird, möglichst klein sei. Das letzte Kriterium wurde zuerst von Poncelet aufgestellt und dann von Tschebyschoff systematisch ausgearbeitet.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, die etwa 50 Jahre zurückliegenden Untersuchungen Tschebyschoffs einer Revision zu unterziehen, bei der die Forderungen der modernen Strenge berücksichtigt werden; es handelt sich z. B. um die Frage nach der Existenz der annähernden Funktion und nach der analytischen Natur ihrer Koeffizienten. Darüber hinaus wird aber ein prinzipieller Fortschritt erzielt, indem nicht nur mit Tschebyschoff die absolute Größe, sondern auch das Vorzeichen der Fehler berücksichtigt wird. Endlich wird auch die Theorie auf Funktionen von zwei Veränderlichen übertragen. St.

W. Stekloff. Sur la représentation approchée des fonctions. C. R. **135**, 848-851.

W. Stekloff. Sur quelques conséquences de certains développements en séries analogues aux développements trigonométriques. C. R. **135**, 946-949.

Werden mit $V_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ die Funktionen bezeichnet, welche der Differentialgleichung

$$V_n'' + k_n\, p(x) V_n = 0$$

und den Nebenbedingungen $V_n(a)=0$, $V_n(b)=0$ genügen, und ist ψ eine stetige Funktion von x, die im Intervalle (a,b) eine Derivierte hat und für $x=a$ und für $x=b$ verschwindet, φ aber eine andere Funktion, die die Bedingung

$$\int_a^b \varphi^2\, dx < Q^2$$

erfüllt, in der Q eine gegebene Zahl ist, so hat man stets:

$$(1) \qquad \int_a^b p\,\psi\,\varphi\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k B_k + \tau_n,$$

$$A_k = \int_a^b p\varphi V_k\, dx, \qquad B_k = \int_a^b p\,\psi V_k\, dx,$$

wobei

$$(2) \qquad |\tau_n| < \frac{K\sqrt{\int_a^b \psi'^2\, dx}}{\sqrt{k_{n+1}}}.$$

Hieraus folgt, wenn f eine beliebige im Intervalle stetige Funktion, für die Funktion:

$$\varphi_n = f - \sum_{k=1}^{n} A_k V_k, \quad A_k = \int_a^b p f V_k\, dx$$

die Reihenentwicklung:

$$\varphi_n = A_1 V_1 + A_2 V_2 + \cdots + A_n V_n,$$

welche die gegebene Funktion f im Intervalle (a, b) mit beliebig vorgeschriebener Annäherung darstellt. Hieraus wird in der zweiten Note das Theorem hergeleitet:

Jede im Intervalle (a, b) stetige und differenzierbare Funktion f, die an den Grenzen dieses Intervalles verschwindet, kann in eine gleichmäßig konvergente Reihe der Form entwickelt werden:

$$\frac{b-a}{2} f = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a} \int_a^b f \sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\, dx.$$

Der Absolutwert des Restes der Reihe ist höchstens gleich:

$$\frac{(b-a)\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{M_1}{\sqrt{n+1}},$$

wobei M_1 das Maximum von $|f'(x)|$ im Intervalle bedeutet. Lsg.

W. Stekloff. Remarque relative à ma Note „Sur la représentation approchée des fonctions". C. R. **135**, 1311-1313.

In einer früheren Arbeit (vergl. das vorstehende Referat) hatte Verf. eine ungenaue Beschränkung eingeführt, die ihn hinderte, die interessanten Konsequenzen der von ihm auseinandergesetzten Methode zu ziehen. In der vorliegenden Note korrigiert er diesen Fehler und behandelt die Frage in ihrer ganzen Allgemeinheit. Wbg.

W. Stekloff. Sur certaines égalités remarquables. C. R. **135**, 783-786.

Es seien p und q zwei zwischen $x = a$ und $x = b$ stetige und positive Funktionen von x, k_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ eine Folge positiver Konstanten,

die nur von p und q und von dem Intervalle (a, b) abhängen, endlich V_n eine Folge von Funktionen, welche die Gleichungen

$$V_n'' + (k_n p - q) V_n = 0$$

befriedigen mit den Nebenbedingungen:

$$\int_a^b p V_n^2 \, dx = 1, \; V_n'(a) - h V_n(a) = 0, \; V_n'(b) + H V_n(b) = 0.$$

Dann ist immer

$$\int_a^b p f^2 \, dx = \Sigma A_n^2, \; A_n = \int_a^b f_p V_n \, dx.$$

Es sei ferner ψ eine stetige Funktion von x, die eine Ableitung erster Ordnung in dem Intervalle (a, b) besitzt und für $x = a$, $x = b$ Null wird, φ eine andere Funktion, die der einzigen Bedingung

$$\int_a^b \varphi^2 \, dx < Q^2$$

genügt, und V_n genüge den Bedingungen

$$V_n'' + k_n p(x) V_n = 0, \; V_n(a) = 0, \; V_n(b) = 0,$$

so ist immer

$$\int_a^b p \psi \varphi \, dx = \Sigma A_k B_k + \tau_n,$$

$$A_k = \int_a^b p \varphi V_k \, dx, \; B_k = \int_a^b p \psi V_k \, dx,$$

$$|\tau_n| < K \left\{ \int_a^b \psi'^2 \, du \right\}^{1/2} : \sqrt{k_{n+1}}.$$

Von diesen Beziehungen werden in dieser und in den anderen Noten des Verf. Anwendungen gemacht. Lp.

L. Desaint. Sur la représentation exponentielle générale et quelques-unes de ses applications. C. R. 134, 1193-1195.

Verallgemeinerung der Darstellung einer periodischen Funktion durch eine Summe von Exponentialfunktionen innerhalb eines Rechtecks. Satz: Eine Funktion, die in einem von einem konvexen Rande begrenzten Bereiche holomorph ist, läßt sich in diesem Bereich stets durch eine Summe von Exponentialfunktionen darstellen. Ausdehnung auf Funktionen mehrerer Variablen. Anwendungen. Gz.

E. Goursat. Sur un théorème de M. Jensen. Darboux Bull. (2) 26, 298-302.

Den wichtigen Jensenschen Integralsatz (Acta Math. 22, 359-364; F. d. M. 30, 364, 1899) kann man, wie Verf. in vorliegender Mitteilung zeigt, aus dem Cauchyschen Fundamentaltheorem herleiten. Gz.

G. Kowalewski. Über das Kroneckersche Integral für die Charakteristik eines Funktionensystems. Leipz. Ber. 54, 267-271.

Es wird eine Verallgemeinerung der Gaußschen Formel

$$3\iiint dx\,dy\,dz = \iint (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy)$$

für den n-dimensionalen Raum entwickelt, aus der in einfacher Weise das im Titel genannte Integral folgt. Sh.

O. D. Kellogg. Zur Theorie der Integralgleichungen und des Dirichletschen Prinzips. Diss. Göttingen. 43 S. 8°.

„Bestimmungsgleichungen, in denen die zu ermittelnde Funktion als Teil des Integranden eines bestimmten Integrals vorkommt, trifft man in der Analysis häufig an. Am bekanntesten sind vielleicht diejenigen, welche Fouriersche, Besselsche und ähnliche Integrale enthalten. In neuester Zeit ist eine wichtige neue Gattung solcher Gleichungen von Fredholm gelöst worden, und noch andere haben durch Hilbert ihre Lösung gefunden. Die Anwendbarkeit der Theorie solcher Gleichungen scheint indessen so mannigfaltig zu sein, daß es wohl nicht zwecklos sein wird, in der vorliegenden Arbeit einen kleinen Beitrag zu dieser Theorie zu bringen. Dieser wird hauptsächlich bestehen: erstens in einem Beweise für die von Hilbert aufgestellten Reziprozitätsformeln

$$\varphi(s) = \int_0^1 f(t)\cot\pi(s-t)\,dt + \int_0^1 \varphi(t)\,dt,$$

$$f(s) = -\int_0^1 \varphi(t)\cot\pi(s-t)\,dt + \int_0^1 f(t)\,dt,$$

zweitens in einer Erweiterung des Gebietes der Anwendbarkeit der Fredholmschen Methode zum Beweise des Dirichletschen Prinzips und drittens in der Behandlung einer Gleichung, welche die von Fredholm betrachtete Form hat, in welcher aber die Unstetigkeit einer darin vorkommenden Funktion die Anwendung seiner Methode in unveränderter Form unmöglich macht. Von den Vorlesungen Hilberts ist freier Gebrauch gemacht worden, und auch die drei erwähnten Ergebnisse verdanken ihre Entstehung seiner Anregung.“ St.

L. Silla. Il principio di Dirichlet e il problema dei valori al contorno. Batt. G. **40**, 37-104.

Der Verf. gibt „zum Nutzen der mathematischen Jugend" eine eingehende Analyse der großen Literatur über das Dirichletsche Prinzip. Der Reihe nach werden behandelt: Die Gleichung von Laplace und die harmonischen Funktionen, die elektrische Verteilung und das Existenztheorem, das Problem von Green, das Mittelwerttheorem von Gauß, die Methode der elektrischen Bilder von W. Thomson, der Gaußsche Beweis für das Existenztheorem, der Beweis von W. Thomson, der Beweis von Lejeune-Dirichlet, der Beweis von Riemann, das Dirichletsche Prinzip und Riemanns Abhandlung über die Abelschen Funktionen, Kritik des Dirichletschen Prinzips, das Dirichletsche Prinzip und die konforme Abbildung, der erste strenge Beweis des Dirichletschen Prinzips von Christoffel und Schwarz, Neumanns Beweis und die Methode des arithmetischen Mittels, die Untersuchungen von Schwarz und die alternierende Methode, das Problem von Murphy und die kombinatorischen Methoden, die Untersuchungen von Harnack, Methode von Robin, Méthode de balayage von Poincaré, die fundamentalen harmonischen Funktionen Poincarés und die Untersuchungen von Le Roy, die Untersuchungen von Liapunoff und von Korn. St.

R. Marcolongo. Risoluzione del problema di Dirichlet per un solido limitato da due cilindri circolari retti coassiali e da due piani passanti per l'asse. Atti della R. Accademia Peloritana **16**, 127-142.

Die Auflösung geschieht mit Hülfe von Zylinderfunktionen von beliebigem Index. Vi.

F. von Dalwigk. Bemerkungen zum Weierstraßschen Doppelreihensatz und zur Theorie der gleichmäßig konvergenten Reihen. Math. Ann. **55**, 516-520.

Von den Bemerkungen des Verf. seien hier hervorgehoben, daß (§ 1) die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$, worin die $f_\nu(z)$ monogene Funktionen bedeuten, die in einem endlichen und einfach zusammenhängenden Bereich der z-Ebene frei von Singularitäten sind, allein schon den monogenen Charakter der Reihe zur Folge hat; daß ferner (§ 4) hieraus und aus dem Laurentschen Satze der bekannte Weierstraßsche Doppelreihensatz als eine fast selbstverständliche Folge gewonnen werden kann, während Weierstraß umgekehrt seinen Satz als Grundlage für den Nachweis brauchte, daß eine gleichmäßig konvergente Summe analytischer Funktionen selbst eine analytische Funktion ist. Die letzte Bemerkung (§ 5) bezieht sich auf eine Stelle in Riemanns Dissertation. Gz.

G. Mittag-Leffler. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. (Quatrième note.) Acta Math. **26**, 353-392.

Während in den vorhergehenden drei Noten (F. d. M. **30**, 364, 1899 und **31**, 404, 1900) im Sinne der Weierstraßschen Theorie nur die elementaren Sätze über Potenzreihen benutzt worden waren, wird jetzt auch das Cauchysche Integral herangezogen, und es ergeben sich auf diese Weise nicht nur neue Beweise der früheren Theoreme, sondern auch, genau wie bei der Taylorschen Reihe, Restglieder der Grenzausdrücke.

1. Es sei $v = f(u|\alpha)$ eine umkehrbar eindeutige Transformation, die den Kreis $|u| < R, R > 1$, in eine endliche, einfach zusammenhängende Fläche verwandelt; dabei mögen sich die Punkte $u = 0$ und $v = 0$, $u = 1$ und $v = 1$ entsprechen, Außerdem sei $f(u|1) = u$. Zur Abkürzung werde $h = (x-a)f(y|\alpha)$ gesetzt. Betrachtet man dann das Integral:

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int^{(S)} \frac{F(a+h)}{y-u}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy,$$

das in positivem Sinne über die Begrenzung S einer einfach zusammenhängenden Fläche erstreckt wird, auf der $f(y|\alpha)$ und $F(a+h)$ reguläre Funktionen von y sind, so ist:

$$J = F(a+(x-a)f(u|\alpha)) + \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(a+h)}{y-u}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy,$$

wo das Integral im positiven Sinne um den Punkt $y = 0$ zu nehmen ist. Wird $F(a+h)$ nach Potenzen von h entwickelt, so liefern nur die ersten $n+1$ Glieder einen Beitrag zum Integral, weil nach Voraussetzung $f(y|\alpha):y$ für $y = 0$ endlich ist, und es ergibt sich nach einfachen Umformungen, wenn noch nachträglich $u = 1$ gesetzt wird:

$$F(x) = F(a) + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{\mu!}\left(\frac{D^{(\mu)}(f)}{1!} F^{(1)}(a)(x-a)\right.$$
$$\left. + \frac{D^{(\mu)}(f^2)}{2!} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{D^{(\mu)}(f^\mu)}{\mu!} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right)$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int^{(S)} \frac{F(a+h)}{y-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy;$$

hierin ist

$$D^{(\mu)}(f^\nu) = \lim_{y=0} \frac{\partial^\mu f(y|\alpha)^\nu}{\partial y^\mu}$$

zu setzen.

Als Begrenzung S kann im besonderen der Kreis $y = r$ gewählt werden. Man erhält dann eine Formel, die für alle Punkte x gilt, die einem gewissen, im Innern des Sternes $A^{(\alpha)}$ gelegenen Gebiete X angehören. Für $\alpha = 1$ geht diese Formel in die Taylorsche Entwicklung mit dem Cauchyschen Restgliede über. Indem man die in der dritten

Note über die erzeugende Funktion $f(u|\alpha)$ gemachten Bemerkungen hinzunimmt, gelangt man jetzt zu folgendem Ergebnis.

Es sei A der Hauptstern mit dem Mittelpunkte a, der zu den der Cauchyschen Bedingung genügenden Konstanten

$$F(a),\ F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots$$

gehört. Es sei α eine Konstante, die kleiner als 1 ist, und $A^{(\alpha)}$ ein zu A konzentrischer und in A eingeschriebener Stern, der zu der erzeugenden Funktion $f(u|\alpha)$ gehört. Man kann dann diese Funktion so wählen, daß für hinreichend kleines α der Stern $A^{(\alpha)}$ in seinem Innern jedes innerhalb A gelegene Gebiet einschließt und für $\alpha = 1$ der Stern $A^{(1)}$ der zu A konzentrische, A eingeschriebene Kreis wird, daß ferner der Grenzausdruck

$$\text{(I)} \quad F(a) + \lim_{n=\infty} \left[\frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{1!} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{\alpha_{2n}(\alpha)}{2!} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{\alpha_{nn}(\alpha)}{n!} F^{(n)}(a)(x-a)^n\right],$$

in dem die

$$\alpha_{\mu n}(\alpha) \begin{Bmatrix} \mu = 1, 2, \ldots, n \\ n = 1, 2, \ldots, \infty \end{Bmatrix}$$

positive Konstanten bedeuten, die nur von der Wahl der erzeugenden Funktion abhängen, den Konvergenzstern $A^{(\alpha)}$ besitzt und im Innern von $A^{(\alpha)}$ überall die Funktion $FA^{(\alpha)}(x)$ darstellt; das Gesagte bleibt richtig, wenn man zur Grenze für $\alpha = 0$ übergeht, wobei sich der Stern $A^{(\alpha)}$ in den Hauptstern A verwandelt. Macht man in (I) beim Übergang zur Grenze bei einem bestimmten Werte von n Halt, so gilt die Gleichung:

$$FA^{(\alpha)}(x) = F(a) + \frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{1!} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{\alpha_{2n}(\alpha)}{2!} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{\alpha_{nn}(\alpha)}{n!} F^{(n)}(a)(x-a)^n + \int^{(C)} \frac{F(a+h)}{y-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} dy,$$

wo das Integral in positivem Sinne zu nehmen ist und wo C einen Kreis mit dem Mittelpunkte Null und einem Halbmesser r $(1 < r < R)$ bezeichnet, sodaß $a + h$ dem Innern des Sternes A angehört.

Die Wahl der erzeugenden Funktion ist trotz der ihr auferlegten Bedingungen noch in hohem Maße willkürlich, und es entsteht die wichtige Frage, wie man sie zu wählen hat, damit die Konstanten $\alpha_{\mu n}(\alpha)$ möglichst einfach ausfallen. Bei den von Mittag-Leffler und Fredholm angenommenen Formen von $f(u|\alpha)$ ist diese Forderung nicht erfüllt, sie wird es jedoch, wenn man

$$f(u|\alpha) = \frac{\alpha u}{\left(1 - \frac{u}{R}\right)^{\alpha}}, \quad \frac{1}{R} = 1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}}$$

setzt. Alsdann ergibt sich

$$\alpha_{\mu n}(\alpha) = \alpha^{\mu}\Big[1 + \frac{\alpha}{1!}(1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}}) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}\left(1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}}\right)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-\mu+1)}{(n-\mu)!}\left(1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{n-\mu}\Big].$$

2. In dem Integral J darf man, ohne daß die Betrachtungen sich wesentlich ändern, statt des Faktors

$$\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1}$$

irgend einen anderen Faktor setzen, der nur die Eigenschaft hat, daß er für $y = u$ gleich 1 wird, und daß $y = 0$ sein einziger singulärer Punkt ist. Ein solcher Faktor wird durch den Ausdruck

$$e^{\omega\left(\frac{u}{y} - 1\right)}$$

dargestellt, wo ω eine positive Konstante bedeutet.

Im folgenden wird zunächst $f(u|\alpha) = u$ und $u = 1$ angenommen. An die Stelle des Konvergenzkreises der Taylorschen Reihe tritt dann ein „Borelscher Stern", der aus dem Hauptsterne A so gewonnen wird: Man trage auf jedem von dem Mittelpunkte a ausgehenden Vektor l eine Länge x ab, die so beschaffen ist, daß der Kreis mit dem Durchmesser x ganz in A liegt. Die obere Grenze dieser Längen heiße ϱ. Trägt man dann auf den Vektoren l von a aus immer die Längen ϱ ab, so bilden die Endpunkte die Begrenzung des Borelschen Sternes $A^{(1)}$. Die drei Ausdrücke

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-\omega}\mathfrak{F}(a, \omega(x-a))d\omega, \\ \qquad \mathfrak{F}(a, \omega(x-a)) = \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} \frac{F^{(\mu)}(a)}{(\mu!)^2}(\omega(x-a))^{\mu}, \end{cases}$$

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \lim\limits_{\omega=\infty} e^{-\omega} \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} \Big[F(a) + \frac{1}{1!}F^{(1)}(a)(x-a) + \cdots \\ \qquad + \frac{1}{\mu!}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\Big] \frac{\omega^{\mu+1}}{(\mu+1)!}, \end{cases}$$

$$\text{(IV)} \quad \lim_{\omega=\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(\mu!)^2} \int_0^{\infty} e^{-\omega}\omega^{\mu}\, d\omega \cdot F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}$$

haben, wie Phragmén bewiesen hat, den Borelschen Stern zum Konvergenzstern und stellen in seinem ganzen Innern die Funktion $FA^{(1)}(x)$ dar.

Die Formel (II) ist die berühmte Formel von Laplace-Abel, deren Konvergenz in dem Sterne $A^{(1)}$ Borel bewiesen hat, von dem auch die Formel (III) herrührt; die Formel (IV) stammt von Mittag-Leffler selbst.

Macht man bei dem Grenzprozeß an einer bestimmten Stelle Halt, so gelten die Gleichungen:

$$FA^{(1)}(x) = \int_0^\omega e^{-\omega}\mathfrak{F}(a, \omega(x-a))\,d\omega + \frac{1}{2\pi i}\int^{(\mathfrak{C})} \frac{F(a+h)}{y-1} e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)} dy,$$

$$= e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left[F(a) + \frac{1}{1!}F^{(1)}(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{\mu!}F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right]\frac{\omega^{\mu+1}}{(\mu+1)!} + \frac{1}{2\pi i}\int^{(\mathfrak{C})}\frac{F(a+h)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy,$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{(\mu!)^2}\int_0^\infty e^{-\omega}\omega^\mu d\omega \cdot F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu + \frac{1}{2\pi i}\int^{(\mathfrak{C})}\frac{F(a+h)}{y-1}e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}dy,$$

wo die Integrale an zweiter Stelle in positivem Sinne zu nehmen sind und $\mathfrak{C}$ einen Kreis vom Halbmesser $\frac{1}{2}r$ $(r > 1)$ und dem Mittelpunkte $\frac{1}{2}$ bezeichnet, der so beschaffen ist, daß $h = a + (x-a)y$ dem Innern von $A^{(1)}$ angehört.

Verallgemeinerungen ergeben sich, wenn die erzeugende Funktion $f(u|\alpha)$ nicht gleich u gesetzt wird. Man kann sie auf unendlich viele Arten so wählen, daß die drei Grenzausdrücke:

$$\text{(A)}\quad \left\{ \lim_{\omega=\infty} e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left[F(a) + \frac{\alpha_{1\mu}(\alpha)}{1!}F^{(1)}(a)(x-a) + \cdots + \frac{\alpha_{\mu\mu}(\alpha)}{\mu!}F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right]\frac{\omega^{\mu+1}}{(\mu+1)!}, \right.$$

wo die

$$\alpha_{\mu n}(\alpha)\begin{Bmatrix}\mu = 1, 2, \ldots, n\\ n = 1, 2, \ldots, \infty\end{Bmatrix}$$

bestimmte positive Konstanten sind, die nur von der erzeugenden Funktion abhängen,

$$\text{(B)}\qquad F(a) + \lim_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\int_0^\omega e^{-\omega}f_\nu(\omega|\alpha)\,d\omega\,F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu,$$

wo

$$f_\nu(\omega|a) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{D^{(\mu)}(f^\nu)}{(\mu!)^2}\,\omega^\mu$$

ist, und

(C) $$\int_0^\infty e^{-\omega}\,\mathfrak{F}(x|f,\omega)\,d\omega,$$

wo

$$\mathfrak{F}(x|f,\omega) = F(a) + \frac{f_1(\omega|a)}{1!}F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f_2(\omega|a)}{2!}F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots$$

ist, alle einen Konvergenzstern $\mathfrak{A}^{(a)}$ besitzen und in seinem ganzen Innern die Funktion $F\mathfrak{A}^{(a)}(x)$ darstellen. Dieser Stern geht aus dem Hauptsterne A folgendermaßen hervor. Ebenso wie $A^{(a)}$ bei der erzeugenden Funktion $f(u|a)$ entsteht, wenn u den Kreis mit dem Mittelpunkte a und dem Halbmesser 1 beschreibt, so soll $\mathfrak{A}^{(a)}$ entstehen, wenn u den Kreis mit dem Mittelpunkte 0 und dem Halbmesser 1 beschreibt. Dabei ist $f(u|a)$ so zu wählen, daß $\mathfrak{A}^{(a)}$ bei hinreichend kleinem Werte von a jedes im Innern von A enthaltene Gebiet in sich faßt, und daß der Stern $\mathfrak{A}^{(a)}$ für $a = 1$ in den Borelschen Stern $A^{(1)}$ übergeht.

Das Gesagte bleibt wieder richtig, wenn man zur Grenze für $a = 0$ übergeht, wobei der Hauptstern A an die Stelle der Sterne $\mathfrak{A}^{(a)}$ tritt.

Macht man in den Formeln (A), (B) und (C) bei dem Grenzübergange an einer bestimmten, endlichen Zahl Halt, so hat man, wenn $\mathfrak{C}$ dieselbe Bedeutung besitzt, wie vorher, die Gleichungen:

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(\mathfrak{C})} \frac{F(a+h)}{y-1}\,e^{\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)}\,dy = F\mathfrak{A}^{(a)}(x) - e^{-\omega}\sum_{\mu=0}^{\infty}\Big[F(a) + \frac{a_{1\mu}(a)}{1!}F^{(1)}(a)(x-a) + \cdots + \frac{a_{\mu\mu}(a)}{\mu!}F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\,\frac{\omega^{\mu+1}}{(\mu+1)!}\Big],$$

$$= F\mathfrak{A}^{(a)}(x) - \int_0^\omega e^{-\omega}\,d\omega\,F(a) - \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\int_0^\omega e^{-\omega} f_\nu(\omega|a)\,d\omega\cdot F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu),$$

$$= F\mathfrak{A}^{(a)}(x) - \int_0^\infty e^{-\omega}\,\mathfrak{F}(x|f,\omega)\,d\omega.$$

Wie den Noten 2 und 3 ist auch dieser ein Verzeichnis der zahlreichen Abhandlungen beigegeben, die im Anschluß an die Untersuchungen Mittag-Lefflers von anderen Forschern veröffentlicht worden sind. St.

G. Mittag-Leffler. Sur l'intégrale de Laplace-Abel. C. R. 135, 937-939.

Ist $FC(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzkreise C, so ist die Reihe

$$\overline{F}(x) = c_0 + \frac{c_1}{1!} x + \frac{c_2}{2!} x^2 + \cdots$$

beständig konvergent. Wenn $0 < \alpha \leqq 1$, so kann man in dem Laplace-Abelschen Integral $\int_0^\infty e^{-\omega}\, \overline{F}(\omega x)\, d\omega$ die Funktion $\overline{F}(\omega x)$ ersetzen durch eine andere $\overline{F}(x, \omega, \alpha)$ von der Beschaffenheit, daß $\overline{F}(x, \omega, 1) = \overline{F}(\omega x)$ ist; alsdann ergibt sich:

$$FA(x) = \lim_{\alpha=0} \int_0^\infty e^{-\omega}\, \overline{F}(x, \omega, \alpha)\, dx,$$

und zwar gilt diese Gleichung für das Innere des Konvergenzsterns A dieses modifizierten Laplace-Abelschen Integrals. (Vgl. das vorangehende Referat.) Unter Hinweis auf die Arbeit von Le Roy (Toulouse Ann. (2) 2, 317-430; F. d. M. **31**, 256-263, 1900) wirft Verf. am Schluß die Frage auf, ob der Stern A noch ein Konvergenzstern für die beiden Ausdrücke ist:

$$\lim_{t=1} \sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} c_n x^n \quad \text{und} \quad \lim_{t=1} \int_0^\infty e^{-\omega}\, \overline{F}(\omega^t x)\, d\omega.$$

Gz.

L. Desaint. Théorèmes généraux sur les points singuliers des fonctions données par une série de Taylor. Journ. de Math. (5) 8, 433-451.

Eine Reihe von Sätzen, die Hadamard, Borel, Leau (F. d. M. **29**, 210-211, 1898) und Pincherle, Hurwitz, dell'Agnola (F. d. M. **30**, 362-363, 1899) aufgestellt haben, sind spezielle Fälle des folgenden allgemeinen Theorems:

Es seien p Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^\infty a_\alpha(n) z^n \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p)$$

gegeben, deren Konvergenzradius größer als Eins ist. Ist dann die Funktion von n Veränderlichen $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ in der Umgebung des Punktes $u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots, u_n = 0$ holomorph, so hat die durch die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^\infty f(a_1(n), a_2(n), \ldots, a_p(n)) z^n$$

definierte Funktion keine anderen Singularitäten außer den Punkten, die

sich ergeben, indem man aus den zu den gegebenen n Funktionen gehörigen Singularitäten auf alle möglichen Arten Produkte bildet, wobei jede Singularität beliebig oft in den Produkten auftreten kann. Einer besonderen Untersuchung bedürfen jedoch außerdem die Punkte $x = 1$ und $x = \infty$.

Anwendungen dieses Theorems auf Differentialgleichungen werden in Aussicht gestellt. St.

P. Painlevé. Sur le développement des fonctions analytiques en série de polynomes. C. R. **135**, 11-15.

Verf. stellt Reihen von Polynomen auf, welche im ganzen Innern eines Mittag-Lefflerschen Sternes gleichmäßig gegen eine analytische Funktion $f(z)$ konvergieren, außerdem aber auf jeder Geraden L (vgl. H. von Koch), die nur Pole enthält, und wendet diese Entwicklungen auf die Funktionen

$$(1-z)^{\frac{1}{2}}, (1-z)^{\frac{1}{3}} \text{ und } \Sigma \frac{1}{(p^2+q^2)^2}\left(1-\frac{z^3}{\cos\frac{p}{q}+i\sin\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(p, q ganze positive Zahlen) an. Wbg.

E. Borel. Sur la généralisation du prolongement analytique. C. R. **135**, 150-152.

P. Painlevé. Observations sur cette communication de M. Borel. C. R. **135**, 152-153.

Veranlaßt durch eine Note von Painlevé (Referat vorstehend), präzisiert Borel die Bedingungen, unter denen seine Verallgemeinerung der analytischen Fortsetzung (vgl. F. d. M. **31**, 411, 1900) Gültigkeit besitzt, und bemerkt, daß diese Bedingungen in den Beispielen Painlevés nicht erfüllt sind. Dieser gibt das zu, bemerkt aber, daß ihm Borels Theorie solange nur rein spekulativen Wert zu haben scheine, bis man eine solche (M)-Reihe explizite hergestellt habe, daß ihre Konvergenz von selbst die von Borel angegebenen Bedingungen nach sich zieht, wie das bei der Taylorschen Reihe der Fall ist. St.

E. Lindelöf. Une application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor. C. R. **135**, 1315-1318.

Es sei $F(x)$ eine im Punkte $x = 0$ holomorphe analytische Funktion, $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$ ihre Taylorsche Entwicklung in der Umgebung von $x = 0$, A der zugehörige Mittag-Lefflersche Stern und $FA(x)$ der zugehörige Zweig von $F(x)$. Verf. stellt dann die Aufgabe, eine Funktion $\varphi(z, \alpha)$ zu finden, welche die Bedingung:

$$\lim_{n=\infty} |\varphi(n,\alpha)|^{\frac{1}{n}} = 0$$

erfüllt und die weitere Eigenschaft hat, daß die ganze transzendente Funktion

$$a_0\,\varphi(0,\alpha) + a_1\,\varphi(1,\alpha)x + \cdots + a_n\,\varphi(n,\alpha)\,x^n + \cdots$$

in jedem innerhalb A gelegenen Gebiete gleichmäßig nach $FA(x)$ konvergiert, wenn das positive α gegen 0 abnimmt.

Verf. gelangt zu dem einfachen Resultat, daß die Funktion $\varphi(z,\alpha) = \frac{1}{z^{\alpha z}}$ der Forderung genügt, und findet allgemeiner, daß dies von jeder analytischen Funktion $\varphi(z,\alpha)$ des komplexen Argumentes $z = \tau + it$ mit dem positiven Parameter α gilt, welche vier Voraussetzungen erfüllt: 1. $\lim_{n=\infty} |\varphi(n,\alpha)|^{\frac{1}{n}} = 0$ für $\alpha > 0$. 2. $\varphi(z,\alpha)$ ist holomorph in der Halbebene $\tau \leqq 0$. 3. $\varphi(z,\alpha)$ konvergiert in jedem endlichen in dieser Halbebene gelegenen Gebiete gleichmäßig gegen 1, wenn α zu 0 abnimmt. 4. Es besteht, $z = \varrho e^{i\psi}$ gesetzt, eine Ungleichung

$$|\varphi(z,\alpha)| < e^{K(\alpha)\varrho}$$

für $|\psi| \leqq \frac{\pi}{2}$, wo $\lim_{\alpha=0} K(\alpha) = 0$ ist.

Es genügt z. B. $\varphi(z,\alpha) = \frac{1}{(\Gamma(z+1))^{\alpha}}$ diesen Bedingungen.

Lnd.

H. Laurent. Sur les séries de polynomes. Journ. de Math. (5) 8, 309-328.

Um eine in einem geschlossenen Bereich synektische Funktion in eine Reihe ganzer rationaler Funktionen zu entwickeln, kann man zunächst $1/(z-x)$ entwickeln und dann die Cauchysche Residuenformel

$$f(x) = \mathcal{E}\,\frac{f(z)}{z-x}$$

anwenden. Dieser Weg führt aber den Übelstand mit sich, daß die Polynome in der Form ziemlich schwer zu berechnender Integrale erscheinen. Verf. versucht deshalb, sich die Polynome a priori zu geben, und gelangt dabei zu bemerkenswerten Ergebnissen. Es seien hier nur die beiden Sätze wiedergegeben, welche die Grundlage der vorliegenden Untersuchung bilden.

I. Sind

$$Q_1 = \frac{1}{x} + \frac{q_{12}}{x^2} + \frac{q_{13}}{x^3} + \cdots,$$

$$Q_2 = \frac{1}{x^2} + \frac{q_{23}}{x^3} + \frac{q_{24}}{x^4} + \cdots,$$

$$Q_3 = \frac{1}{x^3} + \frac{q_{34}}{x^4} + \frac{q_{35}}{x^5} + \cdots,$$

. . . . ,

wo die q_{ij} von x unabhängig sind, gegebene Reihen, die außerhalb des mit R um den Anfangspunkt beschriebenen Kreises konvergieren, so gibt es ganze rationale Funktionen P_k von x vom Grade k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ von der Beschaffenheit, daß die Residuen $\mathfrak{G}\, Q_{i+1} P_j$ sämtlich verschwinden mit Ausnahme des Falles $i = j$, in dem man sie gleich Eins voraussetzen kann.

II. Sind Polynome P_k vom Grade k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ gegeben, so gibt es stets Reihen $Q_1, Q_2, \ldots$, die formell den Formeln $\mathfrak{G}\, Q_{i+1} P_j = 0$ genügen, mit Ausnahme für $i = j$; diese Reihen werden nicht immer konvergieren, aber ihre Koeffizienten sind wohl bestimmt.

Unter den Anwendungen sei eine neue Formel für die Koeffizienten einer Entwicklung nach Legendreschen Polynomen erwähnt, und als allgemeineres Ergebnis sei die Formel wiedergegeben:

$$F(x) = \frac{1}{s} \Sigma F(a_k) + \cdots + \frac{P_i}{i!\, s} \Sigma F^{(i)}(a_k) + \cdots,$$

die eine ähnliche Bedeutung besitzt wie die Taylorsche Entwicklung.

Gz.

H. F. Baker. Elementary proof of a theorem for functions of several variables. Lond. M. S. Proc. 34, 296-306.

Es handelt sich um eine gewöhnliche Potenzreihe $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, welche für den Mittelpunkt der Variabeln x nicht verschwindet, und es wird gezeigt, daß der reziproke Wert $1 : f$ in eine Reihe entwickelt werden kann, die in demselben Bereich konvergiert, falls darin kein Nullwert von f enthalten ist. Als Korollar ergibt sich daraus ein Beweis für die Existenz der Wurzeln einer Gleichung n-ten Grades.

R. M.

E. Lindelöf. Quelques applications d'une formule sommatoire générale. Acta Soc. Fennicae 31, 46 S. 4⁰.

Setzt man:

$$p(\tau, t) = \tfrac{1}{2}[f(\tau + it) + f(\tau - it)],$$

$$q(\tau, t) = \frac{1}{2i}[f(\tau + it) - f(\tau - it)],$$

$$P(\tau, t) = \frac{p(\tau, t)(e^{2\pi t}\cos 2\pi\tau - 1) - q(\tau, t)\, e^{2\pi t}\sin 2\pi\tau}{e^{4\pi t} - 2e^{2\pi t}\cos 2\pi\tau + 1},$$

$$Q(\tau, t) = \frac{q(\tau, t)(e^{2\pi t}\cos 2\pi\tau - 1) + p(\tau, t)\, e^{2\pi t}\sin 2\pi\tau}{e^{4\pi t} - 2e^{2\pi t}\cos 2\pi\tau + 1},$$

so lauten die beiden Hauptformeln des Verf.:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \sum_1^n f(\nu) = \frac{1}{2}[f(1) + f(n)] \\ + \int_1^n f(\tau)\, d\tau + 2\int_0^\infty [q(n,t) - q(1,t)] \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}, \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \sum_1^n f(\nu) = \int_\alpha^\beta f(\tau)\, d\tau + 2\int_0^\infty [Q(\beta,t) - Q(\alpha,t)]\, dt,$$

wobei über die Funktion f gewisse Voraussetzungen zu machen sind. Aus diesen beiden Formeln ergeben sich leicht weitere, und es werden dann insbesondere Anwendungen von den allgemeinen Formeln gemacht, und zwar zunächst auf die Bernoullischen Polynome, dann auf die Eulersche Summenformel und analoge Formeln. Dabei wird für den Rest der Eulerschen Summenformel ein neuer bemerkenswerter Ausdruck gewonnen, der in gewissen Fällen vorteilhafter ist, als die von Poisson und Jacobi gegebenen Ausdrücke. Die Lindelöfsche Form des Restes lautet:

$$\overline{R}_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^\infty \lambda' [\Phi(\theta' t) + \Phi(-\theta' t)] \frac{t^{2k+1}}{e^{2\pi t} - 1},$$

wo $\Phi(t) = f^{(2k+1)}(n + it) - f^{(2k+1)}(m + it)$ gesetzt und $0 < \theta < 1$, $|\lambda'| \leqq 1$ ist.

Als dritte Anwendung der allgemeinen Formeln behandelt der Verf. die analytische Fortsetzung der Taylorschen Reihen, während der letzte Teil der Arbeit der Anwendung auf die Riemannsche Funktion $\zeta(s)$ gewidmet ist, deren Eigenschaften sich daraus sehr leicht ergeben; auch knüpft Verf. daran eine einfache Methode zur Berechnung der Nullstellen der ζ-Funktion.

Mit diesen Anwendungen ist, wie Verf. betont, die Bedeutung der in Frage stehenden Formeln längst nicht erschöpft, und es lassen sich noch viele Folgerungen für die Theorie der Funktionen und insbesondere für die analytische Fortsetzung erwarten. Gz.

H. von Koch. Applications nouvelles de la fonction exponentielle. Stockh. Ak. Bihang 28 (1902). 16 S.

Durch Anwendung der Funktion $1 - e^{-x^2}$ als Diskontinuitätsfaktor beweist der Verf. den folgenden Satz.

Die Reihe (1) $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$ konvergiere in der Umgebung von $z = 0$; es sei t eine positive Zahl derart, daß die Funktion $f(z)$ die durch die Reihe (1) und ihre analytischen Fortsetzungen innerhalb des Kreises $|z| = t$ definiert ist, die folgenden Voraussetzungen erfüllt: 1. $f(z)$ ist regulär auf der Peripherie des Kreises $|z| = t$. 2. $f(z)$ ist meromorph innerhalb des Kreises. 3. Alle Pole von $f(z)$ in diesem Gebiete sind reell und positiv.

Dann ist die Summe der Residuen von $f(z)$ bezüglich dieser Pole gleich

$$-\lim_{s=\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}C_{\nu s-1}t^{\nu s}.$$

Spezialfall: Es sei $F(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$ $(a_0\neq 0)$ eine ganze Funktion, die nur reelle Nullstellen besitzt. Es sei

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=A_0+A_1z+A_2z^2+\cdots.$$

Wenn $n(t)$ die Anzahl der Nullstellen zwischen -1 und $+1$ bedeutet (der Kürze wegen nehmen wir an, daß diese Zahlen keine Nullstellen sind), dann ist

$$n(t)=-\lim_{s=\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}A_{2\nu s-1}t^{2\nu s}.$$

Der Verf. gibt auch die folgende Form dieses Ausdruckes:

$$n(t)=\lim_{s=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}\frac{F'(z)}{F(z)}e^{-\left(\frac{t}{z}\right)^{2s}}dz,$$

wo C eine beliebig kleine geschlossene Kontur bedeutet, welche den Nullpunkt umschließt.

Die Mittag-Lefflerschen Polynomentwicklungen eines eindeutigen Zweiges einer analytischen Funktion stellen diesen Zweig in der ganzen Ebene dar, wenn man die „Coupuren" des Prinzipalsterns ausschließt. Im allgemeinen sind diese Coupuren wenigstens teilweise nur künstlich.

Der Verf. ist (durch Benutzung der Funktion $x^{s^2}e^{-x^s}$ als Diskontinuitätsfaktor) zu Polynomentwicklungen gelangt, die auch auf einem Teil dieser Coupuren den Zweig darstellen. So z. B. stellen diese Entwicklungen, auf eine meromorphe Funktion angewandt, diese Funktion in der ganzen Ebene dar. Hmg.

E. W. Barnes. **A memoir of integral functions.** Lond. Phil. Trans. **199**(A), 411-500; Lond. Royal Soc. Proc. **69**, 121-125.

Die umfangreiche Arbeit beschäftigt sich in der Hauptsache mit einer Klassifikation der ganzen transzendenten Funktionen. Verf. lehnt sich teilweise an die Vorgänger an, geht aber vielfach eigene Wege. Diese führen auch zu Erörterungen, die mit dem Thema nicht direkt in Zusammenhang stehen. Die Arbeit geht von der Aufgabe aus, für die ganzen transzendenten Funktionen im allgemeinen eine asymptotische Darstellung zu finden, die die wesentliche Singularität im Unendlichen wiedergibt. In welchem Sinne eine solche asymptotische Darstellung verstanden werden soll, wird nirgends definiert; es geht aber aus den einzelnen Ausführungen hervor, daß eine Darstellung durch verhältnismäßig einfache ganze transzendente Funktionen (Exponentialfunktionen

und dgl.) gemeint sein soll. Im ersten Teil werden zunächst folgende Definitionen aufgestellt. Wird eine ganze transzendente Funktion mit den Nullstellen $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ geschrieben in der Form eines unendlichen Produkts, in dem die Faktoren $(1 - z/a_n)$ und im übrigen nur Exponentialfunktionen von z vorkommen, und ist a_n eine für alle n gleiche Funktion von n, so wird die Funktion bezeichnet als eine einfache ganze Funktion mit einer einfachen Folge von nicht wiederholten Nullstellen. Der Ausdruck $\Pi(1 - z/a_n) e^{g(z)}$, wo $g(z) = \sum_{m=1}^{\varrho_n - 1} (z/a_n)^m : m$ zu setzen ist, wird dabei eine einfache ganze Funktion genannt, und ϱ_{n-1} bestimmt sich durch die Angabe, daß ϱ die kleinste ganze Zahl sein soll, für welche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-\varrho_n}$ absolut konvergiert. Ergibt sich für ϱ_n ein von n unabhängiger Wert p, so ist dies der Wert von Laguerres Geschlecht („genre"). Bringt jede Vergrößerung von ϱ eine Divergenz der Reihe hervor, so ist ϱ der Wert für Borels „Ordnung". Beide Ausdrücke werden vom Verf. übernommen. Die Arbeit zieht nur Funktionen von endlicher „Ordnung" in Betracht. Den Schluß des ersten Teils bilden einige Unterscheidungen der ganzen Funktionen nach den Nullstellen. Ist die Nullstelle a_n für große n eine transzendente Funktion von n, so ist die ganze Funktion eine solche von transzendenter Folge. Im Sinne eines synthetischen Aufbaus wird eine Reihe solcher Funktionen einfacher Art angedeutet. Aus Funktionen mit einer einfachen Folge von nicht wiederholten Nullstellen kann man solche mit mehreren derartigen Folgen durch Multiplikation in der obigen Produktform zusammensetzen. Durch Potenzierung der einzelnen Faktoren entstehen solche mit wiederholten Nullstellen: wiederholte Funktionen. Die Ordnung solcher Funktionen muß etwas anders definiert werden; wiederholte Funktionen von unendlicher Ordnung werden ebenfalls von der Betrachtung ausgeschlossen. Sind die Nullstellen nicht Funktionen eines Parameters, sondern von zweien (oder theoretisch mehr), so entstehen doppelte (und mehrfache) Folgen von Nullstellen und damit doppelte (und mehrfache) ganze Funktionen. Da doppelte ganze Funktionen den doppeltperiodischen Funktionen der gewöhnlichen Bezeichnungsweise gleichzusetzen sind, so ist die Existenz mehrfacher ganzer Funktionen im reinen Sinne ausgeschlossen. Die Parameter sind dann nicht von einander unabhängig, und die Funktionen reduzieren sich auf solche einfacherer Art. Es sind noch andere Funktionen denkbar: Ringfunktionen, bei denen die Nullstellen nicht auf Kurven, die ins Unendliche gehen, sondern auf Ringen liegen; diese werden aber, da es sich in erster Linie um asymptotische Darstellungen handelt, ausgeschlossen.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit den divergenten Reihen und ihrem Zusammenhang mit den gesuchten asymptotischen Darstellungen. Er geht aus von dem Borelschen Satze, wonach eine Funktion, die innerhalb des Konvergenzkreises durch eine Potenzreihe darstellbar ist, außerhalb dieses Kreises die Darstellung durch ein bestimmtes Rand-

integral gestattet, das als Summe der divergierenden Reihe definiert werden kann, und untersucht, ob diese Darstellung auch für einen Konvergenzkreis vom Radius 0 erhalten bleibt. Das ist an sich nicht der Fall. Denn während nach dem Borelschen Satze alle denkbaren Randintegrationen zu demselben Werte leiten, führen sie bei einer nur im Punkte 0 nicht divergierenden Reihe zu lauter verschiedenen Werten, die aber alle die Reihe als asymptotische Darstellung für den Nullpunkt haben, der für sie selbst eine wesentliche Singularität bildet. Wird, wenn das allgemeine Glied der Reihe $a_n z^n$ ist, das kleinste k, für das $\lim \sqrt[n]{a_n/n^k} = 0$ wird, jetzt als „Ordnung" einer divergenten Reihe bezeichnet, so ergibt sich, daß zwar divergierende Reihen von erster Ordnung noch in ähnlicher Weise durch Randintegrale dargestellt werden können, Reihen von höherer Ordnung aber nur durch Wiederholung des Borelschen Integrationsprozesses oder durch Anwendung anderer Integrandenfunktionen, die mit der hypergeometrischen Reihe in Zusammenhang stehen. Eine Anwendung wird auf das Restglied der Mac-Laurinschen Reihe (für den Fall der Divergenz) gemacht.

Der dritte Teil bringt dann die Anwendung auf das eigentliche Thema, nämlich die asymptotische Darstellung. Für diese treten als grundlegende Funktionen drei Funktionen auf, die sich nach dem oben bezeichneten Schema aus Produkten (aber endlichen) und Exponentialfunktionen zusammensetzen, und deren logarithmische Werte insbesondere in Betracht kommen. Es wird unterschieden zwischen solchen Funktionen, deren Ordnung (im obigen Sinne) kleiner als 1, solchen, deren Ordnung eine nicht ganze Zahl größer als 1, und solchen, deren Ordnung eine ganze Zahl größer als 1 ist. Ein Algorithmus zur asymptotischen Darstellung solcher Funktionen wird in den Grundzügen entwickelt und an dem Beispiel $\prod_{n=1}^{x} (1 + z/e^n)$ durchgeführt. Sämtliche Entwicklungen gelten aber nur für Funktionen mit einer Folge von nicht wiederholten Nullstellen.

Der vierte Teil gibt die Ausdehnung auf wiederholte Funktionen mit einer Folge von Nullstellen, wobei dieselben drei Klassen auftreten. Ein Ausblick wird auch auf Funktionen von unendlicher Ordnung geworfen. Als praktisches Beispiel für die Entwicklung dient die G-Funktion.

Der fünfte Teil betrifft einige Folgerungen, die sich aus der asymptotischen Darstellung ergeben. Insbesondere ergibt sich aus der Darstellung die Anzahl der Nullstellen in Kreisen von großem Radius. So wird bewiesen, daß für Funktionen, deren Ordnung ϱ keine ganze Zahl ist, die Anzahl der Wurzeln in einem Kreise vom Radius $(\sin \pi\varrho/\pi) \lg \varphi(r)$ ist, wo $\varphi(r)$ der Maximalwert der Funktion auf dem Kreise ist. Ist ϱ eine ganze Zahl, so ist der Wert $\lg \varphi(r)/\lg r$. Andeutungen werden ferner gemacht auf Erweiterungen betreffend Funktionen, die sich durch Kombination der betrachteten gewinnen lassen. Endlich wird eine Reihe bekannter Sätze über Ordnung und Geschlecht von Funktionen teils neu abgeleitet, teils erweitert. Br.

A. PRINGSHEIM. Zur Theorie der ganzen transzendenten Funktionen. Münch. Ber. 32, 163-192, 295-304.

Der Verf. gibt in der ersten Abhandlung einen elementaren, d. h. auf die Cauchyschen Methoden verzichtenden Beweis des Satzes von Poincaré, wonach eine ganze transzendente Funktion $g(x) = \Sigma c_\nu x^\nu$, welche in der Weise unendlich wird, daß für große x:

$$|g(x)| < e^{\varepsilon |x|^m}$$

ist, durch eine Reihe dargestellt wird, deren Koeffizienten der Gleichung

$$\lim_{\nu=\infty} (\nu!)^{\frac{1}{m}} c_\nu = 0$$

genügen, sowie der von Hadamard gegebenen Umkehrung dieses Satzes. In dem Nachtrag vereinfacht der Verf. noch die Beweise dieser Sätze auf Grund einer Bemerkung von Lüroth über Potenzreihen mit reellen Gliedern. Lsg.

J. HADAMARD. Sur les fonctions entières. C. R. 135, 1309-1311.

Wie man bei einer gegebenen ganzen Funktion $F(x)$ von endlicher Gattung oft a priori erkennen kann, daß sie nicht zu dem durch den Picardschen Satz bedingten Ausnahmefall gehört, d. h. daß keine Konstante a (oder sogar kein Polynom $p(x)$) von der Beschaffenheit existiert, daß die Gleichung $F(x) = a$ oder $F(x) = p(x)$ nur eine endliche Anzahl von Wurzeln besitzt, sucht der Verf. auch für die Funktionen der Gattung unendlich eine solche Ausschluß-Regel zu gewinnen. Eine derartige Regel existiert in der Tat, und sie läßt sich sogar auf Funktionen der Form $F(x) + F_1\left(\frac{1}{x}\right)$ anwenden, wo F eine ganze Funktion und F_1 eine Potenzreihe mit nicht verschwindendem Konvergenzradius bedeutet. Gz.

E. MAILLET. Sur les fonctions entières et quasi-entières. Journ. de Math. (5) 8, 329-386.

Der Verf. beweist im ersten Teile folgende Sätze über ganze Funktionen:

1. Wenn ein kanonisches Produkt von Primfunktionen von der wahren Ordnung ϱ gegeben ist und man um jeden Nullpunkt einen Kreis von endlichem Radius zieht, so gilt bei beliebig kleinem ε für jeden Punkt außerhalb dieser Kreise, wenn $|z| = r$ hinreichend groß ist, die Ungleichung

$$|G(z)| > e^{-r^{\varrho+\varepsilon}}.$$

Dieser Satz unterscheidet sich nach Inhalt und Beweis nur unerheblich von dem sogenannten zweiten Theorem von Hadamard, wie es in Borels Leçons sur les fonctions entières p. 75ff. dargestellt ist.

2. Ist $f(z) = A_0 + A_1 z + \cdots A_l z^l + \cdots$ eine ganze Funktion von endlicher Ordnung ϱ', und setzt man

$$f_l(z) = A_0 + A_1 z + \cdots + A_l z^l,$$

so entspricht für hinreichend großes l jeder Wurzel von $f_l(z)$ mit einem absoluten Betrage kleiner als $l^{\frac{1}{\varrho'+\varepsilon}}$ eine Wurzel von $f(z)$, die von jener beliebig wenig abweicht.

3. Für eine ganze Funktion von der scheinbaren Ordnung ϱ' können die Potenzsummen der reziproken Wurzeln von der Ordnung $m > \varrho'$ wie für ein Polynom durch die Newtonschen Formeln berechnet werden.

Im zweiten Teile der Abhandlung betrachtet der Verf. „fonctions quasi-entières", das sind Funktionen mit einer endlichen Anzahl isolierter wesentlich singulärer Stellen. Sind diese Stellen $\infty, a_0, a_1, \ldots, a_k$, und bezeichnen ψ und φ ganze Funktionen, so lassen sich jene Funktionen in die doppelte Form setzen:

$$f = \psi(z) + \psi_0\left(\frac{1}{z - a_0}\right) + \cdots + \psi_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right)$$

und

$$f = \varphi(z)\,\varphi_0\left(\frac{1}{z - a_0}\right) \cdots \varphi_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right).$$

Der Verf. zeigt, daß, wenn $\psi, \psi_0, \ldots, \psi_k$ endliche Ordnungen $\varrho, \varrho_0, \ldots, \varrho_k$ besitzen, das gleiche auch von $\varphi, \varphi_0, \ldots, \varphi_k$ gilt, und überträgt einige Sätze von Laguerre auf diese Funktionen und ihre Quotienten, die „fonctions quasi méromorphes". Lsg.

E. Maillet. Sur les fonctions entières et quasi-entières à croissance régulière et les équations différentielles. (Deuxième Note.) Toulouse Ann. (2) **4**, 447-469.

Verf. sucht im ersten Teile Kriterien zur Entscheidung darüber, ob eine durch ihre Taylorsche Entwicklung gegebene ganze Funktion im Borelschen Sinne reguläres oder irreguläres Wachstum aufweist; er stellt für jeden dieser Fälle ein Kriterium auf. Das Ergebnis gipfelt in dem Satze:

I. Ist $\varphi(x) = \Sigma a_m x^m$ eine ganze Funktion endlicher Ordnung ϱ, so gibt es bekanntlich für hinreichend großes m unendlich viele Koeffizienten a_m der Art, daß

$$(1) \qquad \sqrt[m]{a_m} = 1/m^{\frac{1}{\varrho}+\varepsilon}$$

ist, wo ε kleiner ist als eine beliebige noch so kleine endliche positive Zahl. 1. Kriterium: Wenn nun θ eine positive Zahl ist, die mit m weniger schnell wächst als $m(\lg m)^{1-\alpha} - m$ (α positiv, beliebig klein, aber endlich), und wenn unter θ auf einander folgenden Koeffizienten von a_m an es stets einen gibt, der der Bedingung (1) genügt, wenn m

eine endliche Grenze übersteigt, so besitzt die Funktion $\varphi(x)$ reguläres Wachstum.

2. Kriterium: Wenn θ mit m schneller wächst als $m^{1+\zeta} - m$ (ζ endlich, positiv, beliebig klein) für unendlich viele Werte von m, die der Bedingung (1) genügen, sobald m eine endliche Grenze übersteigt, so besitzt die Funktion $\varphi(x)$ irreguläres Wachstum.

Hieraus ergeben sich durch Anwendung auf Differentialgleichungen die folgenden Sätze:

II. Die ganzen oder quasi-ganzen Funktionen endlicher Ordnung, welche einer linearen Differentialgleichung mit in x rationalen Koeffizienten genügen, haben reguläres Wachstum.

III. Es sei

(2) $$F(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0$$

eine Differentialgleichung, die in $y, y', \ldots, y^{(k)}$ ganz ist und nur ein einziges Glied in $y, y', \ldots$ oder $y^{(k)}$ enthält. Alsdann kann eine der Funktionen $P\left(\frac{1}{x}\right) + \sum\limits_0^\infty \theta_n x^n$ oder $P(x) + \sum\limits_0^\infty \frac{\theta_n}{x^n} P(x)$, wo P eine ganze rationale Funktion und $\Sigma \theta_n x^n$ eine ganze Funktion endlicher Ordnung bedeutet, der Gleichung (2) nur dann genügen, wenn $\Sigma \theta_n x^n$ reguläres Wachstum besitzt.

IV. Es sei $A_0 \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_n y = 0$ eine lineare Differentialgleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten und mit Integralen, die sich im Endlichen regulär (im Fuchsschen Sinne) verhalten. Sind dann alle im Endlichen gelegenen kritischen Punkte mit Ausnahme von $x = x_0$ Pole des allgemeinen Integrals, so gibt es eine gewisse Anzahl von Integralen der Form $(x - x_0)^r u_0$, wo u_0 eine rational gebrochene oder eine quasi-ganze Funktion ist, die im Endlichen keine anderen kritischen Punkte als Pole besitzt (d. h. die Summe eines rationalen Bruches und einer ganzen Funktion ist). Von endlicher Ordnung ist u_0 nur dann, wenn sein Wachstum im Borelschen Sinne ein reguläres ist.

Gz.

E. Maillet. Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières et quasi-entières. S. M. F. Bull. 30, 134-155.

Die Polynome mit rationalen Koeffizienten haben folgende Eigenschaften:

1. Das Produkt von zwei Polynomen mit rationalen Koeffizienten ist wieder ein Polynom mit rationalen Koeffizienten. 2. Ist das Argument eine rationale oder eine algebraische Zahl, so ist der Wert des Polynoms mit rationalen Koeffizienten ebenfalls eine rationale oder algebraische Zahl. 3. Dasselbe gilt für alle Ableitungen des Polynoms, woraus folgt, daß die Entwicklung nach dem Taylorschen Satze für alle rationalen und für alle algebraischen Stellen rationale, bezw. algebraische Koeffizienten besitzt.

Betrachtet man statt der Polynome ganze transzendente Funktionen, die also durch beständig konvergente Potenzreihen dargestellt werden, so bleibt die erste Eigenschaft erhalten; dagegen zeigt schon das Beispiel e^x, daß die zweite und die dritte Eigenschaft nicht vorhanden zu sein brauchen. Der Verf. untersucht sodann die „fast ganzen" Funktionen, worunter er eindeutige Funktionen mit einer endlichen Anzahl von wesentlich singulären Stellen versteht, die sich nach Weierstraß in Form einer Summe von eindeutigen Funktionen mit nur einer wesentlich singulären Stelle darstellen lassen; dabei kann jeder der Summanden nach dem Taylorschen Satze entwickelt werden. Nimmt man an, daß die Koeffizienten alle rationale Zahlen sind, so zeigt sich, daß die erste Eigenschaft nicht mehr erhalten bleibt. Es gilt nämlich der Satz: Hat man

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^{-n},$$

so lassen sich die rationalen Zahlen a_n und b_n stets so bestimmen, daß die Koeffizienten c_n und d_n sämtlich transzendente Zahlen werden.

St.

E. Maillet. Quelques remarques sur les fonctions entières. C. R. **134**, 275-277.

Ist ein kanonisches Produkt von Primfaktoren von der Ordnung ϱ und eine beliebige positive Zahl ε gegeben, und beschreibt man um jede Nullstelle einen Kreis von endlichem Radius η ($\eta \leqq 1$, beliebig), so besteht in jedem außerhalb dieser Kreise gelegenen Punkte die Ungleichung

$$|G(z)| > e^{-r^{\varrho+\varepsilon}},$$

wo ε beliebig klein, aber endlich ist.

Von diesem Satze werden im wesentlichen Anwendungen gemacht, um Sätze über Nullstellen herzuleiten.

Gz.

E. Maillet. Sur les fonctions quasi-entières. C. R. **134**, 405-407.

Vier Theoreme über monodrome Funktionen, die in der ganzen Ebene nur eine endliche Anzahl isolierter wesentlich singulärer Stellen besitzen.

Wbg.

E. Maillet. Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières et quasi-entières. C. R. **134**, 1131-1133.

Die ganzen rationalen Funktionen $F(x)$ mit rationalen Koeffizienten besitzen u. a. die Eigenschaften: 1. Das Produkt zweier solcher Funktionen hat rationale Koeffizienten; 2. für rationale oder algebraische Werte von x ist $F(x)$ ebenfalls rational oder algebraisch; 3. wenn b ein rationaler oder algebraischer Wert ist, so sind in der Entwicklung von $F(x+b)$

nach Potenzen von x die Koeffizienten rational oder algebraisch. Verf. legt sich die Frage vor, wie weit diese Eigenschaften bei ganzen oder quasi-ganzen Funktionen bestehen, und macht Angaben über seine Untersuchungen, die allerdings nicht die Frage in ihrer vollen Allgemeinheit behandeln, aber ausgedehnte Spezialfälle betreffen. Es zeigt sich, daß (mit Ausnahme der ersten Eigenschaft für ganze Funktionen) jene Eigenschaften für die ganzen und quasi-ganzen Funktionen nicht mehr gelten.
Gz.

E. MAILLET. Sur les fonctions entières et quasi-entières et les équations différentielles. C. R. **185**, 391-392.

I. Kriterien für das regelmäßige Wachstum („croissance régulière", ein von Borel eingeführter Begriff) der ganzen Funktionen von endlicher Ordnung. II. Die ganzen oder quasi-ganzen Funktionen von endlicher Ordnung, welche einer linearen Differentialgleichung mit in x rationalen Koeffizienten genügen, besitzen regelmäßiges Wachstum. III. Verallgemeinerung dieses Satzes auf beliebige algebraische Differentialgleichungen.
Wbg.

E. MAILLET. Sur les fonctions monodromes à point singulier essentiel isolé. C. R. **135**, 889-891.

In dieser kurzen Note wird dargetan, daß viele Eigenschaften der ganzen und der quasi-ganzen Funktionen, insbesondere die asymptotischen Eigenschaften, sich — oft in ähnlicher Weise — bei den monodromen Funktionen mit einer wesentlichen Singularität für die Umgebung dieser Stelle nachweisen lassen.
Gz.

S. WIGERT. Quelques théorèmes sur les fonctions entières. Stockh. Öfv. **59**, 207-214.

Es sei $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ eine ganze Funktion, welche, wenn $|x|=r$ größer als eine gewisse Zahl ist, die Bedingung $|G(x)|<e^{\alpha r}$ erfüllt, wo α eine beliebig klein zu nehmende Konstante ist. (Diese Funktionen sind auch durch die Bedingung $\lim_{n=\infty} n\sqrt[n]{|A_n|}=0$ charakterisiert. Siehe desselben Verf. Arbeit in Stockh. Öfv. Oct. 1900.)

Der Hauptzweck des Aufsatzes ist, zu zeigen, daß es r-Werte größer als irgend welche Zahl gibt, für welche, wenn x einen beliebigen Vektor durchläuft, $|G(x)|>e^{-\alpha r}$ ist, wo α eine positive Konstante bezeichnet, die beliebig klein genommen werden kann (cf. Hadamard, Journal de Liouville (4) **9**, 171-215; F. d. M. **25**, 698, 1893).
Hmg.

B. LINDGREN. Sur la fonction entière $e^{K(z)}P_1(z)+P(z)$. Stock. Ak. Bihang **58**. 25 S.

Die Abhandlung enthält Untersuchungen über die ganzen Funktionen:

(I) $$e^{K(z)} P_1(z) + P(z),$$

wo $K(z)$, $P_1(z)$, $P(z)$ Polynome von z sind; über die Größenordnung des zugehörigen kanonischen Produkts, über die Verteilung der Nullstellen, über „le cas d'exception de M. Picard“.

Der folgende Satz dürfte der wichtigste sein:

Es seien $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ die Nullstellen der Funktion (I), wo $K(z)$ vom Grade m vorausgesetzt ist.

Dann divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^m}$ (die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{m+\varepsilon}}$, wo ε beliebig klein und positiv ist).

Hmg.

E. Lindelöf. Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini. Acta Soc. Fennicae 31, IV u. 79 S. 4°.

Der erste Teil der Abhandlung leitet die wichtigsten in der Theorie der ganzen transzendenten Funktionen von endlicher Höhe („genre“) erhaltenen Resultate auf möglichst einfachem Wege her und vervollständigt sie in einigen wesentlichen Punkten. Es wird zunächst auf Grund einer fundamentalen Ungleichung der Satz von Poincaré über die obere Grenze eines unendlichen Produktes $f(x)$ von Primfunktionen bewiesen, nach welchem für große Werte des absoluten Betrages r von x:

$$|f(x)| < e^{r^{\varrho+\varepsilon}}$$

bei beliebig kleinem positivem ε ist, wenn ϱ die wahre Ordnung von $f(x)$ bedeutet; konvergiert überdies die aus den Nullstellen $|a_\nu|$ gebildete Reihe $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$, so gilt die schärfere Grenzenbestimmung:

$$|f(x)| < e^{\varepsilon r^\varrho}.$$

Diesen Ungleichungen lassen sich die Sätze gegenüberstellen: Ist $f(x)$ eine Funktion von der Höhe Null und der wahren Ordnung $\varrho < 1$, so kann man bei beliebig kleinem ε eine unendliche Menge von Kreisen um den Nullpunkt mit unbegrenzt wachsenden Radien finden, so daß

$$|f(x)| > e^{-r^{\varrho+\varepsilon}};$$

wenn die Reihe $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ konvergiert, so kann man überdies eine unendliche Menge von Kreisen um den Nullpunkt mit unbegrenzt wachsenden Radien finden, so daß

$$|f(x)| > e^{-\varepsilon r^\varrho}$$

ist. Der zweite Teil dieses Satzes ist neu.

Hiernach geht der Verf. zum Beweise des Satzes von Jensen (Acta Math. **22**, 359; F. d. M. **30**, 364, 1899) über, welcher eine Beziehung zwischen einem Integral und den Nullstellen von $f(x)$ feststellt,

und wendet sich sodann zu den Sätzen von Hadamard und Borel über die Beziehungen zwischen dem Wachstum einer ganzen Funktion und der Dichtigkeit ihrer Nullstellen und zu den Theoremen von Borel über Funktionen mit regelmäßigem Wachstum.

Im zweiten Teile der Abhandlung präzisiert der Verf. die Resultate des ersten und berechnet die in den Ungleichungen auftretenden Konstanten. Zu diesem Zwecke werden asymptotische Ausdrücke verwendet, die durch die Cauchysche Theorie an die Hand gegeben werden.

Indes sind diese Untersuchungen aus Mangel an Zeit nicht völlig zu Ende geführt und sollen später vervollständigt werden. Lsg.

E. Lindelöf. Sur les fonctions entières de genre fini. C. R. **135**, 316-319.

Verf. hebt einige der Resultate hervor, zu denen er in seiner ausführlichen Abhandlung sur la théorie des fonctions entières [Acta Soc. Fennicae, **31**; Bericht vorstehend] gelangt ist, und berichtigt eine darin enthaltene Stelle [a. a. O. S. 35, Note 2], die auf einer irrtümlichen Auffassung einer Bemerkung von Hadamard beruht [Sur les fonctions entières. S. M. F. Bull. **24**, 186-187; F. d. M. **27**, 321, 1896, wo irrtümlich S. M. F. Bull. **26** statt **24** steht]. Gz.

E. Borel. Sur les fonctions de genre infini. C. R. **134**, 1343-1344.

T. Levi-Civita. Sur les fonctions de genre infini. Darb. Bull. (2) **26**, 333-335.

Nach dem Theorem von Jensen (F. d. M. **30**, 364, 1899; vergl. auch Petersen, F. d. M. **30**, 378, 1899, und Lindelöf, Referat vorstehend S. 421, unten) gilt für jede ganze transzendente Funktion $f(z)$ von z, die für $z=0$ den Wert 1 annimmt, die Ungleichheit

$$\frac{1}{r_1 r_2 \dots r_n} < \frac{M(r)}{r^n},$$

in der $M(r)$ das Maximum des absoluten Betrages von $f(z)$ für $|z|=r$ bedeutet, während $r_1, r_2, \dots, r_n$ die nach der Größe des absoluten Betrages geordneten Nullstellen bezeichnen; dabei ist n ganz beliebig. Jetzt sei $\theta(s)$ die Anzahl der Nullstellen, deren absoluter Betrag kleiner ist als s. Aus dieser Definition folgt sofort die Gleichung:

$$\int_{r_1}^{r} \frac{\theta(s)}{s} ds = \log \frac{r^n}{r_1 r_2 \dots r_n},$$

und hieraus erschließt man nach dem Theorem von Jensen, daß die Ungleichheit besteht:

$$\log M(r) \geqq \int_{r_1}^{r} \frac{\theta(s)}{s} ds.$$

Wenn

$$\int_{r_1}^{r} \frac{\theta(s)}{s} ds$$

weniger rasch als $\theta(r)$ wächst, so ergibt sich daraus die asymptotische Ungleichheit:

$$\log M(r) > \frac{1}{r} \int_{r_1}^{r} \theta(r) dr.$$

Die so gewonnene Beziehung zwischen der Ordnung der Größe einer ganzen transzendenten Funktion und der Dichtigkeit ihrer Nullstellen scheint berufen, in der Theorie der ganzen Funktionen von unendlichem Geschlecht eine große Rolle zu spielen. St.

P. Boutroux. Sur la théorie des fonctions entières. C. R. **134**, 82-85.

P. Boutroux. Sur la croissance des fonctions entières. C. R. **134**, 153-155.

Gegen die Mitteilung von E. Lindelöf, Quelques théorèmes nouveaux sur les fonctions entières [C. R. **133**, 1279-1282; F. d. M. **32**, 410] macht Verf. einige Prioritätsansprüche geltend; ferner präzisiert er einige Angaben und führt neue Sätze an über das Wachstum ganzer Funktionen, insbesondere auch über die logarithmische Ableitung ganzer Funktionen. Gz.

P. Painlevé. Remarques sur la communication de M. Boutroux. C. R. **134**, 155-157.

Painlevé ist durch die ihm eigentümlichen Methoden zu demselben Resultat gelangt wie Boutroux (C. R. **134**, 85) durch Anwendung seiner allgemeinen Theorie der ganzen Funktionen auf die Differentialgleichung $y'' = 6y^2 + x$: die derselben entsprechende ganze Funktion hat die Ordnung $\frac{5}{2}$ und wächst wie $e^{hr^{2,5}}$. Wbg.

P. Boutroux. Sur les fonctions entières de genre infini et les transcendantes méromorphes découvertes par M. Painlevé. C. R. **134**, 519-522.

Verf. greift das genauere Studium der ganzen Funktionen der Gattung unendlich auf und hebt als eine Klasse, die sich am meisten den ganzen Funktionen von endlicher Gattung annähert, die Funktionen von einfachem Exponentialtypus hervor, das sind diejenigen, bei denen eine positive Zahl σ von der Beschaffenheit existiert, daß von einem bestimmten Werte von i ab

$$|a_i| > (\lg i)^{\frac{1}{\sigma}}$$

ist, wo a_i die Nullstellen der ganzen Funktionen bedeuten. Verf. untersucht die Art des Wachstums dieser Funktionen und wendet seine Methode auf die Differentialgleichungen vom dritten Painlevéschen Typus an (C. R. **134**, 449-453; Referat oben S. 346), nämlich:

$$y'' = \frac{y'^2}{y} + e^z(\alpha y^2 + \beta) + e^{2z}\left(\gamma y^3 + \frac{\delta}{y}\right).$$

Verf. hat gefunden, daß die Integrale dieser Differentialgleichung vom einfachen Exponentialtypus sind, und ermittelt die Art ihres Wachstums.

Statt mit Painlevé $y = \frac{v}{u}$ zu setzen und die simultanen Differentialgleichungen für die ganzen Funktionen u und v zu betrachten, bildet Verf. die meromorphe Funktion $\zeta = ye^z$, die der Differentialgleichung

$$\zeta\zeta'' = \zeta'^2 + \alpha\zeta^3 + \zeta\gamma^4 + \beta\zeta e^{2z} + \delta e^{4z}$$

genügt. Gz.

E. Fabry. Sur le genre des fonctions entières. S. M. F. Bull. **30**, 165-176.

Lindelöf hatte sich in einer früheren Arbeit (Acta Soc. Scient. fennicae **31**; Referat oben S. 421) die Aufgabe gestellt, die Höhe (genre) einer gegebenen ganzen Funktion aus ihrer Entwicklung

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

zu bestimmen. Da der Limes superior des Bruches $\frac{\log|c_n|}{n\log n}$ eine negative Zahl $-\frac{1}{\varrho}$ ist, so ist zu unterscheiden, ob ϱ ganzzahlig ist oder nicht. Ist ϱ keine ganze Zahl, so ist bekanntlich die Höhe der Funktion die nächst niedere ganze Zahl; ist aber ϱ eine ganze Zahl, so ist das auch die Höhe, falls $n^{\frac{1}{\varrho}}\sqrt[n]{|c_n|}$ nicht den Grenzwert Null hat. Ist aber dieser Grenzwert Null, so ist die Höhe ϱ oder $\varrho - 1$. In diesem letzteren Fall fragt Lindelöf, ob die Höhenbestimmung von der Konvergenz oder Divergenz der Reihe $\Sigma\left(\sqrt[n]{|c_n|}\right)^\varrho$ abhänge, und verneint diese Frage durch den Hinweis, daß es sowohl Funktionen von der Höhe ϱ gibt, für welche jene Reihe konvergiert, als auch Funktionen von der Höhe $\varrho - 1$, für welche die Reihe divergiert. Die Höhe hängt hiernach alsdann nicht allein von der Größenordnung der Koeffizienten c_n ab. Aber diese Behauptungen, die daselbst nur wahrscheinlich gemacht werden, bedürfen eines exakten Beweises, der in der hier vorliegenden Arbeit gegeben wird. Lsg.

E. Jaggi. Sur les zéros des fonctions entières. Nouv. Ann. (4) **2**, 218-226.

Nachdem Verf. in einer früheren Notiz (Nouv. Ann. (4) **1**, 16-19; F. d. M. **32**, 411) von der Weierstraßschen Produktformel für eine

ganze transzendente Funktion $F(x)$ mit gegebenen Nullstellen $a_1, a_2, \ldots$ aus die naheliegenden Beziehungen zwischen diesen und den Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots$ der beständig konvergenten Potenzreihe

$$(1) \qquad \frac{F(x)}{F(0)} = 1 + \frac{A_1}{1} x + \frac{A_2}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots$$

abgeleitet hat, geht er jetzt auf eine nähere Untersuchung der bei der Weierstraßschen Formel

$$(2) \qquad F(x) = F(0) \cdot e^{G(x)} \cdot \prod_i \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) e^{g_i(x)}$$

auftretenden Funktionen $g_i(x)$ ein, die bekanntlich Mittag-Leffler schon untersucht hat. Es sei hier nur der folgende allgemeine Satz mitgeteilt: Damit die durch die Reihe (1) gegebene ganze Funktion $F(x)$ die Stellen $a_1, a_2, \ldots$ als einzige Nullstellen besitze, ist notwendig und hinreichend, daß die Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots$ den Relationen

$$(3) \qquad \begin{cases} A_1 = \sum_i \left[g_i'(0) - \frac{1}{a_i}\right], \\ A_2 = \sum_i \left[g''(0) - \frac{1}{a_i^2}\right] + \left\{\sum_i \left[g_i'(0) - \frac{1}{a_i}\right]\right\}^2, \\ A_3 = \sum_i \left[g_i'''(0) - \frac{2}{a_i^3}\right] + 3 \sum_i \left[g_i'(0) - \frac{1}{a_i}\right] \cdot \sum_i \left[g_i''(0) - \frac{1}{a_i^2}\right] \\ \qquad + \left\{\sum_i \left[g_i'(0) - \frac{1}{a_i}\right]\right\}^3 \end{cases}$$

usw. genügen, wo die $g_i'(0), g_i''(0), \ldots$ die Werte der Ableitungen gewisser Funktionen $g_i(x)$ für $x = 0$ sind, welche die Reihe $\sum_i \left[g_i'(x) + \frac{1}{x - a_i}\right]$ konvergent machen und sonst keiner weiteren Bedingung unterworfen sind.

In der zweiten Hälfte der vorliegenden Abhandlung leitet Verf. aus der Formel (1) durch Einführung beliebiger reeller endlicher Exponenten in die Primfaktoren neue Funktionen her, die in Primfaktoren zerlegt, aber nicht mehr eindeutig sind. Gz.

W. Wirtinger. Algebraische Funktionen und ihre Integrale. Encyklop. d. math. Wissensch. 2_2, 115-175.

Inhaltsübersicht. A. Allgemeines. 1. Definition. 2. Die algebraische Funktion in der Nähe einer einzelnen Stelle. 3. Das algebraische Gebilde. 4. Die Riemannsche Fläche. 5. Zusammenhang und Geschlecht der Riemannschen Fläche. 6. Zerschneidung der Riemannschen Fläche. 7. Spezialfälle und Normalformen. 8. Funktionen am algebraischen Gebilde. 9. Der Körper der rationalen Funktionen, Transformation des Gebildes und der Riemannschen Fläche. 10. Bedeutung des Klassenbegriffes. 11. Die Integrale der algebraischen Funktionen, ihre Perioden. 12. Rie-

manns Problemstellung. 13. Verallgemeinerungen der Riemannschen Fläche. 14. Die allgemeinsten Riemannschen Mannigfaltigkeiten. 15. Potentiale und Funktionen auf der allgemeinen Riemannschen Fläche. 16. Die drei Gattungen der Integrale. 17. Relationen zwischen den Perioden. 18. Die transzendent normierten Integrale. 18. Darstellung der Funktionen der Fläche durch die Integrale der drei Gattungen.

B. Besondere Darstellungen und Funktionen. 20. Darstellung der Integranden als rationale Funktionen von x, y. 21. Fortsetzung, homogene Variabeln. 22. Definition des Geschlechtes auf Grund der Formen φ. 23. Die Theorie von Weierstraß. 24. Die Fälle $p = 0, 1$. 25. Äquivalente Systeme von Stellen, Scharen von Stellen und Funktionen. 26. Die algebraischen Kurven im Raum von q Dimensionen. 27. Die Darstellung der algebraischen Funktionen an der Raumkurve. 28. Die Normalkurve der φ. 29. Spezialfunktionen und Spezialscharen. 30. Normalformen. 31. Die Moduln des algebraischen Gebildes. 32. Vertauschung von Argument und Parameter. 33. Integrale zweiter Gattung, Normalkombinationen. *34. Fortsetzung, die Weierstraßschen Periodenrelationen. 35. Die Reduktion der allgemeinsten Abelschen Integrale. 36. Die Integration durch algebraische Funktionen und Logarithmen. 37. Kleins kanonische Kurven. 38. Primfunktionen und Primformen. 39. Fortsetzung. 40. Wurzelfunktionen und Formen. Multiplikative Funktionen und Formen.

C. Das Abelsche Theorem. 41. Das Abelsche Theorem. 42. Das Abelsche Theorem für die drei Gattungen, spätere Beweise. 43. Die Differentialgleichungen des Abelschen Theorems. 44. Die Umkehrung des Abelschen Theorems und die Erweiterung der Umkehrung. 45. Anwendungen und Erweiterungen des Abelschen Theorems.

D. Ergänzungen. 46. Die Abelschen Reduktionstheoreme. 47. Das Problem der Transformation der Abelschen Integrale. 48. Spezielle Reduktionsuntersuchungen. 49. Binomische Integrale. 50. Hyperelliptische Integrale.

E. Korrespondenz und singuläre Gebilde. 51. Korrespondenz auf dem algebraischen Gebilde. 52. Die allgemeine Korrespondenztheorie von Hurwitz und die singulären Gebilde. 53. Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich. 54. Symmetrie und Realität.

F. Mehrere Variabeln. 55. Algebraische Funktionen mehrerer Variabeln. 56. Die Geschlechtszahlen der Flächen. 57. Untersuchungen nach transzendenter Richtung. Lp.

K. Hensel. Über analytische Funktionen und algebraische Zahlen. Berl. Math. Ges. Ber. 1, 29-32.

Die Arbeit gibt einige Gesichtspunkte an, nach denen die in der Theorie der Darstellung analytischer Funktionen durch Potenzreihen angewendeten Methoden auf algebraische Zahlen übertragen werden können. Lsg.

K. Hensel und G. Landsberg. Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Leipzig: B. G. Teubner. XVI u. 707 S. gr. 8°.

Daß die Wissenschaft häufig auf gewundenen Pfaden zu ihrem Ziele gelangt, daß namentlich der systematische Ausbau einer einzelnen Disziplin erst nach weiten Umwegen sich vollzieht, dafür liefert die Theorie der algebraischen Funktionen ein klassisches Beispiel. Ein Bericht über die Entwicklung dieser Theorie, an welcher Arithmetik, Algebra, Funktionentheorie und Geometrie ihren Anteil haben, ist von Brill und Noether in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1894 gegeben worden; an einem Lehrbuch, welches die verschiedenen Methoden zu einem organischen Ganzen verband und eine im wesentlichen vollständige Darstellung der Theorie gab, hat es bislang gefehlt. Diesem Mangel wird durch die Vorlesungen von Hensel und Landsberg abgeholfen. Von welchen Gesichtspunkten die Verf. ausgingen, und welches Ziel sie sich gesteckt, haben sie in einem Vor- und Nachwort ausführlich dargelegt, welchen wir hier einige besonders charakteristische Sätze entnehmen: „Im Laufe der letzten vierzig Jahre hat sich den Forschern, zuerst durch die Arbeiten von Weierstraß, Kronecker, Dedekind und Weber, mehr und mehr die Überzeugung aufgedrängt, daß der leichteste und sicherste Eingang in diese Theorie durch eine wesentlich arithmetische Betrachtung der rationalen und der algebraischen Funktionen gewonnen werden kann, selbstverständlich unter organischer Einführung der hierher gehörigen Resultate aus der Funktionentheorie. ... Es war unser Wunsch, der arithmetischen Theorie neben der ihr von Natur eigentümlichen Strenge und Allgemeinheit auch diejenige Geschmeidigkeit zu geben, welche sie vor Einseitigkeit bewahrt und für die Erfüllung der zahlreichen ihr obliegenden Aufgaben fähig macht. ... Eine in diesem Sinne ausgestaltete arithmetische Theorie vermag nach unserer Meinung ohne Mühe überhaupt jede Bereicherung in sich aufzunehmen, die ihr von irgend einer Seite her zugeführt wird.“

Diesen Anschauungen entsprechend, welchen wohl die Mehrzahl der heutigen Mathematiker zustimmen dürfte, ist die arithmetische Richtung, die jüngste unter allen, die vorherrschende, und zwar sind es namentlich die Methoden von Dedekind und Weber, welche die Verf. aufgenommen, im einzelnen weiter durchgebildet und fortgeführt haben; diese bilden das feste Gerüst, auf welches die anderen Richtungen der Theorie sich stützen. Ihren Ausgangspunkt nehmen jedoch die Vorlesungen von den elementaren funktionentheoretischen Eigenschaften der algebraischen Funktionen, wobei Riemannsche und Weierstraßsche Anschauungen in gleicher Weise Berücksichtigung finden. Erst nachdem die Untersuchungen so weit geführt sind, daß durch Angabe der charakteristischen Eigenschaften der algebraischen Funktionen ihre Stellung im Bereiche der analytischen Funktionen gekennzeichnet und die Bedeutung des zu einer Riemannschen Fläche gehörigen Funktionenkörpers auseinandergesetzt ist, setzen

jene arithmetischen Theorien ein, welche speziell auf die vorliegende Funktionenklasse zugeschnitten sind und in ihrem ersten Teil im wesentlichen eine Übertragung des von Kummer, Kronecker und Dedekind für die Zahlentheorie geschaffenen Prinzips der idealen Faktoren auf das Gebiet der algebraischen Funktionen darstellen.

Der wesentliche Unterschied dieser Anordnung von der von Dedekind und Weber befolgten entspricht den verschiedenen Zwecken der Schriften. Bei Dedekind und Weber steht die Forderung der Reinheit der Methode im Vordergrunde; jede mit Stetigkeitsvoraussetzungen behaftete Deduktion, insbesondere jede geometrische Veranschaulichung ist geflissentlich vermieden, und wenn der Begriff des Punktes eingeführt wird, so geschieht dies in so abstrakter Form, daß die Gefahr einer unrichtigen oder auch nur der Methode zuwiderlaufenden Verwendung geometrischer Vorstellungen ausgeschlossen wird. Dieser prinzipielle Standpunkt erscheint gewissermaßen als Reaktion gegen die in der älteren Riemannschen Theorie üblichen, auf angebliche geometrische Evidenzen sich stützenden Beweisführungen. Bei einem Lehrbuch, welches tiefergehendes Interesse für den Gegenstand erst erwecken soll, nicht schon voraussetzen darf, würde eine solche abstrakte Einführung das Eindringen in die Theorie nur unnötig erschweren. Das hier von Anfang an benutzte Hülfsmittel der Reihenentwicklung hebt diesen Übelstand, ohne darum die Strenge der Deduktion irgendwie zu beeinträchtigen. Auch wird der Leser, wenn, wie es hier geschieht, die prinzipiellen Verschiedenheiten der Methoden deutlich hervorgehoben werden, bald selbst fühlen, welche Hülfsmittel wesentlich, welche entbehrlich sind, wenn man den Zusammenhang mit der Theorie der analytischen Funktionen lösen will. Aus ihrer Verbindung mit dieser erwächst aber der arithmetischen Theorie außer ihrer konkreten Gestaltung auch noch die Anregung zu mannigfacher weiterer Durchbildung, welche zu einer Reihe sehr bemerkenswerter Sätze führt. Unter diesen seien zwei hervorgehoben, von denen der eine sich auf die Elementarteiler der zu einem Modul gehörigen Matrizen bezieht, der andere ein Kriterium liefert, durch welches die Ideale aus der Gesamtheit der Moduln ausgesondert werden.

Die arithmetischen Theorien, welche als das wichtigste Resultat den Riemann-Rochschen Satz liefern, bilden den zweiten und dritten Teil der Vorlesungen. Diesen schließt sich am engsten der sechste Teil an, wo die tiefer liegenden Untersuchungen über die Abelschen Integrale bis zur Aufstellung des Abelschen Theorems und der Formulierung des Umkehrproblems fortgeführt werden. Der vierte und fünfte Teil sind der Theorie der algebraischen Kurven gewidmet. Diese wird von vornherein ohne jede vereinfachende Voraussetzung entwickelt, und so werden auch die Plückerschen Formeln in ihrer allgemeinsten, d. h. für jeden beliebigen speziellen Fall gültigen Fassung gegeben. Es zeigt sich, daß, nachdem einmal durch die vorangehende arithmetische Theorie eine sichere Basis für die Behandlung der algebraischen Kurven geschaffen ist, die vollständige Durchführung dieser Aufgabe nicht nur möglich ist, sondern sich auch durchaus übersichtlich gestaltet. Eine Reihe neuer

Untersuchungen, wie über Kurven im Raum von drei und mehr Dimensionen, findet sich auch in diesen Teilen des Werkes.

Es können hier die Leistungen der Verfasser nicht in allen Einzelheiten aufgeführt werden; denn wir finden auf Schritt und Tritt selbständige Arbeit, sei es, daß es sich um ganz neue Untersuchungen handelt oder solche, die bereits vorhandene ergänzen und abrunden, oder endlich um neue Darstellung bekannter Resultate. Häufig wird durch eine scheinbar geringfügige formale Änderung die wahre Bedeutung eines Ergebnisses erst in das rechte Licht gesetzt. So gilt nach der Ausdehnung des Begriffs der Divisorenklassen auf gebrochene Divisoren der einfache Satz, daß die den Abelschen Integralen entsprechenden Divisoren (Differentialteiler) in ihrer Gesamtheit genau eine Klasse konstituieren. Dieses Resultat findet sich im Grunde genommen auch bei Dedekind und Weber, aber durchaus nicht in dieser einfachen Fassung.

Zu den rein wissenschaftlichen Vorzügen des Werkes gesellen sich noch eine sehr klare Darstellung und eine sorgfältig gewählte Ausdrucksweise, durch die sich wohl jeder bei der Lektüre angezogen fühlt. So steht denn zu hoffen, daß der Wunsch der Verfasser, ihr Interesse und ihre Liebe für dieses schöne Gebiet mathematischer Forschung ihren Lesern mitzuteilen, bei recht vielen sich erfüllen werde. Stz.

E. Landfriedt. Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. Leipzig: G. J. Göschen. IV u. 294 S. 8° (Sammlung Schubert, No. XXXI).

Von den fünf Kapiteln des vorliegenden Lehrbuches der Sammlung Schubert erfaßt das erste den Begriff der algebraischen Funktion als einer mehrwertigen Funktion mit polaren Unstetigkeiten und stellt die Lehre von der Fortsetzung solcher analytischen Funktionen auf Grund der Puiseuxschen Methode der Reihenentwicklungen dar. Das zweite Kapitel konstruiert die Riemannsche Verzweigungsfläche, entwickelt den Begriff einer Klasse algebraischer Funktionen und sucht die zwischen den Funktionen der Klasse bestehenden algebraischen Beziehungen auf. Das dritte gibt eine Klassifizierung und Aufstellung der zur gegebenen Riemannschen Fläche gehörigen Abelschen Integrale unter der Voraussetzung, daß die Grundkurve nur Doppelpunkte als Singularitäten besitzt, während das vierte sodann den Riemann-Rochschen Satz darlegt und das fünfte und letzte von den birationalen Transformationen des Gebildes und den Moduln der Klasse handelt. Die ersten beiden Kapitel halten im wesentlichen den in den bisherigen Lehrbüchern üblichen Entwicklungsgang inne, die drei letzten benutzen in der Hauptsache die von Christoffel in Abhandlungen und Vorlesungen gegebenen Methoden. Referent ist der Meinung, daß diese weder mehr dem heutigen Stande der Wissenschaft entsprechen, noch zur Einführung in das betrachtete Gebiet geeignet erscheinen können. Außerdem findet sich auch im einzelnen in dem Buche eine Anzahl tatsächlicher Irrtümer. Die Begrün-

dung dieser Behauptungen findet man in einer im Archiv der Mathematik und Physik erscheinenden ausführlichen Besprechung des Werkes. Lsg.

A. KORN. Application de la méthode de la moyenne arithmétique aux surfaces de Riemann. C. R. **135**, 94-95.

A. KORN. Sur le problème de Dirichlet pour des domaines limités par plusieurs contours (ou surfaces). C. R. **135**, 231-232.

Eine gewisse Transformation, die nach Poincaré benannt wird und eine Beziehung zwischen den Punkten im Innern eines Kreises und denen im Innern eines beliebigen ebenen Bereiches herstellt, und die eine Rolle beim Dirichletschen Problem spielt, wird von der Ebene auf Riemannsche Flächen ausgedehnt, während in der zweiten Note auf die Wichtigkeit eines von Zaremba (Krak. Anz. 1901, 171-189; F. d. M. **32**, 776, 1901) herrührenden Theorems für diese Probleme hingewiesen wird. Sh.

A. V. BÄCKLUND. Geometrischer Beweis eines algebraischen Satzes von Jacobi. Acta Math. **26**, 287-306.

Die Abhandlung bezieht sich im wesentlichen auf den Satz, welchen Jacobi im J. für Math. **14**, 281 entwickelt hat, nämlich auf

$$\Sigma \frac{\Omega}{(F\Phi)} = 0,$$

wo F, Φ und Ω beliebige ganze Funktionen von x und y der Grade m, bez. n und $m+n-3$ bedeuten und die Summierung über alle Schnittpunkte von $F=0$ und $\Phi=0$ auszudehnen ist. Der rein algebraischen Herleitung stellt Verf. eine rein geometrische Beweisführung an die Seite, die sich auf einen Satz von Liouville (Liouville J. **6**, 345; 1841) über den Schwerpunkt der Schnittpunkte zweier Kurven stützt, der seinerseits leicht auf geometrischem Wege gewonnen werden kann, wie Verf. früher in der Abhandlung Om geometriska kurvor med dubbel krökning (Jahresschrift der Universität zu Lund **8**, 1871) dargetan hat. Gz.

L. SCHLESINGER. Sur la théorie des fonctions algébriques. C. R. **135**, 676-678.

Verf. gibt eine rein algebraische Lösung des von Riemann mit Hülfe des Dirichletschen Prinzips, von Schwarz und Neumann später durch andere transzendente Methoden behandelten Problems, eine auf einer gegebenen Riemannschen Fläche eindeutige algebraische Funktion zu bestimmen, indem er eine bereits früher (J. für Math. **105**; F. d. M. **21**, 438, 1889) von ihm für einen besonderen Fall angegebene Methode verfolgt. Dabei ergibt sich, daß man von algebraischem Gesichtspunkte aus nicht eine

inzige Riemannsche Fläche betrachten darf, sondern gleichzeitig alle Flächen, welche aus ihr durch Monodromie der Verzweigungspunkte hervorgehen. Wbg.

L. SCHLESINGER und T. BRODÉN. Bemerkungen zum Riemannschen Problem. J. für Math. **125**, 28-33.

Einige zusätzliche Bemerkungen über mögliche Erweiterungen des von Schlesinger behandelten Riemannschen Problems (J. für Math. **123**, 138-173 u. **124**, 47-58; F. d. M. **32**, 321-325, 1901) der Bestimmung eines Systems von Funktionen, welche bis auf vereinzelte singuläre Punkte regulär sind und bei Umkreisung dieser singulären Punkte vorgegebene Substitutionen erleiden. Lsg.

J. C. FIELDS. Algebraic proofs of the Riemann-Roch theorem and of the independence of the conditions of adjointness. Acta Math. **26**, 157-170.

Der Verf. gibt einen algebraischen Beweis des Riemann-Rochschen Satzes, aber nur unter der vereinfachenden Annahme, daß die Grundkurve ausschließlich Doppelpunkte mit getrennten Tangenten besitzt und die Asymptoten der Kurve verschiedene Richtungen haben, und verweist für den allgemeinen Fall auf die Methoden, durch welche vermöge birationaler Transformation jede Kurve auf eine Kurve jener besonderen Beschaffenheit abgebildet werden kann. Indes bietet, wie Referent an anderer Stelle ausgeführt hat, das letztere Problem Schwierigkeiten dar, welche mit den vom Verf. angewendeten älteren algebraischen Methoden bisher nicht überwunden worden sind. Lsg.

J. C. FIELDS. The Riemann-Roch theorem and the independence of the conditions of adjointness in the case of a curve, for which the tangents at the multiple points are distinct from one another. J. für Math. **124**, 179-201.

Der Verf. gibt im Anschluß an die frühere in Acta Math. **26**, 157 (Referat vorstehend) veröffentlichte Arbeit einen Beweis des Riemann-Rochschen Theorems in dem etwas allgemeineren Falle, daß die Grundkurve nur vielfache Punkte mit getrennten Tangenten hat. Referent muß die bei Besprechung der vorigen Arbeit geäußerten Bedenken auch für die vorliegende aufrecht erhalten. In der Tat verspricht der Verf. auch den Beweis des Riemann-Rochschen Satz für ganz beliebige Grundkurven mit irgend welchen Singularitäten „by other and more powerful methods, which I have in possession", zu geben. Lsg.

P. Stäckel. Arithmetische Eigenschaften analytischer Funktionen.
Deutsche Math.-Ver. **11**, 183-184.

Wenn eine elliptische Funktion $\varphi(x)$ komplexe Multiplikation gestattet und das Periodenverhältnis $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ also eine algebraische Zahl ist, so läuft das Problem, ob ω und ω' selbst transzendente Zahlen sind, auf die Frage hinaus, ob zwischen den Summen

$$S_n = \sum_{\mu\mu'} \frac{1}{(\mu + \mu'\tau)^n}$$

eine endliche lineare Relation mit algebraischen Koeffizienten bestehen kann oder nicht. Lsg.

P. Stäckel. Arithmetische Eigenschaften analytischer Funktionen.
Acta Math. **25**, 371-384.

Bedeutet $g(x, y)$ eine ganze rationale Funktion von x und y mit ganzzahligen Koeffizienten, so hat eine Funktion y von x, die der Gleichung $g = 0$ genügt, die Eigenschaft, daß zu jedem algebraischen Werte von x ein algebraischer Wert von y gehört, und das gleiche gilt auch für jede Funktion x von y, die die Gleichung befriedigt. Ist hingegen $K(x, y)$ eine Potenzreihe von x und y mit rationalen Koeffizienten, so zeigt der Verf., daß der Gleichung $K(x, y) = 0$ transzendente Funktionen von x, resp. von y genügen können, die trotzdem die Eigenschaft haben, daß zu algebraischen Werten der unabhängigen auch ebensolche Werte der abhängigen Variable gehören. Lsg.

O. Niccoletti. Sulle proprietà aritmetiche delle funzioni analitiche.
Rom. Acc. L. Rend. (5) 11_2, 351-357.

Stäckel hatte (Referat vorstehend) eine transzendente Funktion y der komplexen Veränderlichen x angegeben, bei der zu jedem algebraischen Werte von x nur algebraische Werte von y und auch umgekehrt zu jedem algebraischen Werte von y nur algebraische Werte von x gehören. Die eben angegebene Eigenschaft ist daher für die algebraischen Funktionen nicht charakteristisch, und Stäckel hatte die Frage gestellt, ob man vielleicht die algebraischen Funktionen y von x, die durch eine Gleichung $G(x, y) = 0$ definiert sind, wo G eine ganze rationale Funktion mit ganzzahligen Koeffizienten bedeutet, dadurch charakterisieren könne, daß zu jedem algebraischen Werte des Argumentes nicht nur algebraische Werte der Funktion, sondern auch sämtlicher Ableitungen gehören, sodaß ein Zweig der Funktion für jede algebraische Stelle des Argumentes durch eine Taylorsche Reihe mit lauter algebraischen Koeffizienten dargestellt wird. Niccoletti zeigt nun, wie man durch eine einfache Abänderung des von Stäckel benutzten Verfahrens zu transzendenten Funktionen gelangen kann, denen die eben angegebene Eigenschaft zu-

kommt, sodaß also die algebraischen Funktionen durch sie nicht charakterisiert werden. Ja es gilt sogar der allgemeinere Satz: Es gibt Potenzreihen von n komplexen Veränderlichen mit lauter rationalen Koeffizienten, die, gleich Null gesetzt, in einem gewissen Bereiche (der auch der ganze Bereich der Veränderlichen sein kann) jede von ihnen als transzendente Funktion der $n - 1$ anderen in der Weise definieren, daß, wenn zwischen den Veränderlichen irgend ein System algebraischer Gleichungen mit rationalen Koeffizienten besteht, sowohl jene Funktion von $n - 1$ der Veränderlichen, als auch alle ihre Ableitungen sich auf algebraische Funktionen gewisser Veränderlichen reduzieren. St.

H. Hancock. Primary prime functions in several variables and a generalization of an important theorem of Dedekind. American J. **24**, 39-60.

Der Verf. betrachtet Primmodulsysteme in m Variabeln:

$$[M] = [p, g_1(x_1), g_2(x_1, x_2), \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_m)];$$

hierin bedeutet p eine Primzahl, g_1 eine ganze ganzzahlige Funktion von x_1, welche nach dem Modul p unzerlegbar ist, g_2 eine ebensolche Funktion von x_1, x_2, welche nach dem Primmodulsysteme $[p, g_1(x_1)]$ unzerlegbar ist, usw. Besitzt g_a in x_a den Grad n_a, so besteht das vollständige Restsystem nach dem Modul M aus $p_m = p^{n_1 n_2 \cdots n_m}$ Elementen. Bezeichnet man ferner mit ω_h die Anzahl aller mod. M verschiedenen ganzen ganzzahligen Funktionen von $x, x_1, x_2, \dots, x_m$, welche mod. M unzerlegbar und in x vom Grade h sind und deren höchster Koeffizient gleich 1 ist, so ist:

$$p_m^h = \sum d\omega_a \qquad (d \text{ alle Teiler von } h),$$

woraus ω_d leicht berechnet werden kann. Auch die übrigen, für den Fall $m = 1$ von Dedekind u. a. bewiesenen Sätze lassen sich auf den hier betrachteten allgemeineren übertragen. Lsg.

B. Levi. Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables. C. R. **134**, 642-644.

Verf. gibt eine Zusammenstellung der Ergebnisse, die er über die Darstellung einer algebraischen Funktion z zweier Variablen x und y in der Umgebung des Punktes $x = \alpha, y = \beta, z = \gamma$ durch Entwicklungen der Form:

$$z = e_0(\xi) + e_1(\xi)\,\eta^{\frac{1}{b}} + e_2(\xi)\,\eta^{\frac{2}{b}} + \cdots$$

gewonnen hat. Hierbei ist:

$$\xi = (x - \alpha)^{\frac{1}{a}}, \quad \eta = y - y_0(\xi),$$

und a und b sind ganze Zahlen, $y_0, e_0, e_1, e_2, \dots,$ sind Potenzreihen, die

nach ganzen Potenzen von ξ fortschreiten; einige von ihnen können auch Null sein. Ly.

É. Picard. Sur quelques points fondamentaux dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables. Acta Math. 26, 273-286.

Ist $f(x, y, z) = 0$ eine algebraische Fläche, so hatte der Verf. in einer früheren Arbeit (Ann. de l'Éc. Norm. (3) 18; s. F. d. M. 32, 419, 1901) folgendes Theorem über Integrale von totalen Differentialen dritter Gattung aufgestellt: Man kann auf der Oberfläche eine bestimmte Zahl, nämlich λ algebraische irreduktible Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$ finden, so daß kein Integral dritter Gattung

$$\int (P dx + Q dy) \quad (P \text{ und } Q \text{ rational in } x, y, z)$$

existiert, welches nur für die Kurven C und die unendlich ferne Kurve C_∞ der Oberfläche logarithmisch unendlich würde, während bei Hinzunahme einer beliebigen weiteren irreduktiblen Kurve $C_{\lambda+1}$ ein Integral dritter Gattung existiert, welches für $C_{\lambda+1}$ und einen Teil der Kurven $C_\infty, C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$ unendlich wird. In der gegenwärtigen Arbeit wendet der Verf. diesen Satz auf solche Integrale an, die sich durch eine Kombination von Logarithmen rationaler Funktionen von x, y, z darstellen lassen, und gibt einige Ausführungen, die das noch ungelöste Problem der Berechnung der charakteristischen Zahl λ weiterführen sollen. Lsg.

E. Picard. Sur les périodes des intégrales doubles dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables. Ann. de l'Éc. Norm. (3) 19, 65-73.

Die Abhandlung gibt eine systematische Untersuchung der Perioden, welche den Doppelintegralen erster Gattung in einem Körper algebraischer Funktionen zweier Variabeln zugehören, indem sie diese Perioden auf die Perioden analytischer Funktionen von nur einer Veränderlichen reduziert. Lsg.

E. Picard. Sur les périodes d'une intégrale double de fonction rationnelle. Ann. de l'Éc. Norm. (3) 19, 75-78.

Die Perioden eines Doppelintegrales sind in erster Linie die von Poincaré eingeführten Residuen; der Verf. zeigt an dem Beispiele des Integrales (vergl. unten S. 435):

$$\iint \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt[3]{1 - x^3 - y^3}},$$

daß ein Integral außer den Residuen noch andere Perioden haben kann. Lsg.

E. Picard. Sur le nombre des conditions exprimant que certaines intégrales doubles sont de seconde espèce. Ann. de l'Éc. Norm. (3) 19, 79-87.

Ist $f(x, y, z) = 0$ eine algebraische Fläche m-ter Ordnung, die nur Doppelkurven als Singularitäten hat, so kann jedes Doppelintegral zweiter Gattung, das auf diese Fläche bezüglich ist, auf die Form gebracht werden:

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

worin P ein Polynom von bestimmtem Grade ist, das für die Doppelkurve der Fläche verschwindet. Damit dieses Integral von der zweiten Gattung werde, muß das Polynom P überdies $2\pi + m - 1$ linearen Gleichungen genügen, wobei π das Geschlecht einer beliebigen ebenen Schnittkurve der Fläche bedeutet. Der Verf. zeigt, daß von diesen $2\pi + m - 1$ Bedingungsgleichungen $m - 1$ von selbst erfüllt sind, so daß nur 2π Bedingungen übrig bleiben. Lsg.

E. Picard. Sur les intégrales doubles de fonctions rationnelles dont tous les résidus sont nuls. Darb. Bull. (2) 26, 143-152.

Ist $F(x, y)$ eine rationale Funktion von x und y, deren Nenner durch die irreduktible Funktion $A(x, y)$ teilbar ist, so versteht man nach Poincaré unter dem Residuum des Doppelintegrals

$$\int\int F(x, y)\, dx\, dy$$

die Perioden des Abelschen Integrals

$$2\pi i \int R_1 (x_1, y)\, dy,$$

in welchem x_1 die durch die Gleichung $A = 0$ definierte algebraische Funktion von y und $R(x_1, y)$ das Residuum bedeutet, welches sich für $F(x, y)$ bei beliebigem y an der entsprechenden Stelle $x = x_1$ ergibt.

Der Verf. stellt die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß alle Residuen des obigen Integrales verschwinden, und findet dieselben darin, daß

$$F(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

ist, worin P und Q rationale Funktionen von x und y sind. Lsg.

E. Picard. Quelques remarques sur les périodes des intégrales doubles et la transformation des surfaces algébriques. C. R. 134, 629-631.

Das zu der Fläche dritter Ordnung $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ gehörige Doppelintegral zweiter Gattung:

$$\iint \frac{y\,dx\,dy}{z}$$

besitzt im Sinne Poincarés keine Residuen, hat aber dennoch Perioden (vergl. F. d. M. **32**, 418, 1901). Hieraus ergibt sich die Notwendigkeit, den Begriff des zweidimensionalen Cyklus, wenn man nicht eine einzelne Fläche, sondern eine Klasse sich punktweise entsprechender Flächen betrachtet, in gewisser Weise zu verallgemeinern, wobei die Fundamentalpunkte und die Ausnahmekurven bei den birationalen Transformationen der algebraischen Flächen eine wichtige Rolle spielen. St.

Ch. J. Joly. Integrals depending on a single quaternion variable. Dublin Proc. **24** (A), 6-20.

In diesem Artikel werden einige der Hamiltonschen Resultate (Lectures on quaternions, No. 625-630) diskutiert, und die Methode wird auf Quaternionen-Integrale angewandt, die von einer einzigen Quaternionen-Variable abhängen. Hamiltons Ergebnisse führen, wie gezeigt wird, geraden Weges zu den Theoremen von Green und Stokes, sowie zu den von Tait gefundenen Verallgemeinerungen dieser Theoreme. Einige physikalische Anwendungen der Quaternionen-Integrale werden ebenfalls noch gegeben. Gbs. (Lp.)

Fr. L. Hitchcock. On vector differentials. Phil. Mag. (6) **3**, 576-586.

Verf. entwickelt eine Reihe von Formeln über die Differenzierung von Vektoren unter Anlehnung an die Methoden der Quaternionentheorie, insbesondere die Entwicklungen von Tait. Br.

G. Fubini. Sulle funzioni armoniche che ammettono un gruppo discontinuo. Torino Atti **37**, 644-654.

Durch eine von ihm an anderem Orte (Sui principii fondamentali della teoria delle funzioni armoniche, negli spazi a curvatura costante. Pisa Annali **9**, 1904) angegebenes „alternierendes Verfahren“ weist der Verf. die Existenz von Funktionen nach, welche in einem zwei- oder dreidimensionalen Raum von konstanter Krümmung harmonisch und in bezug auf eine diskontinuierliche Gruppe invariant sind und vorgegebene Singularitäten besitzen, unter der Beschränkung, daß der Fundamentalbereich der Gruppe ganz im Endlichen liegt. Vi.

T. Boggio. Costruzione mediante integrali definiti di funzioni armoniche o poliarmoniche nell' area esterna ad un' ellisse, per date condizioni al contorno. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{11}_1$, 308-309.

Die Darstellung harmonischer oder polyharmonischer Funktionen für das außerhalb einer gegebenen Ellipse gelegene Gebiet, auf deren

Begrenzung sie gegebene Werte annehmen sollen, durch bestimmte Integrale gelingt vermöge der Bemerkung, daß sich das äußere Gebiet einer gegebenen Ellipse vermittelst der Transformation durch reziproke Radienvektoren auf das innere Gebiet einer Pascalschen Schneckenlinie abbilden läßt, die nicht durch ihren Pol geht, und daß weiter dieses Gebiet mit Hülfe von Polynomen sich konform auf einen Kreis abbilden läßt. Gz.

L. KÖNIGSBERGER. Bemerkungen zu einem Satze von Sophus Lie über ein Analogon zum Abelschen Theorem. Acta Math. **26**, 171-188.

Sophus Lie hatte dem Verf. folgenden Satz als Analogon zum Abelschen Theorem mitgeteilt: Wenn sich aus $m+1$ Gleichungen von der Form

$$v_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + \cdots + A_{km}(t_m) \quad (k = 1, 2, \ldots, m+1)$$

nur eine Relation $\Omega(v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}) = 0$ zwischen $v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}$ ableiten läßt, so ist diese dann und nur dann algebraisch, wenn zwei beliebige Größen $A_{ki}(t_i)$, $A_{ji}(t_i)$ algebraisch von einander abhängen. An diesen Satz knüpft Verf. einige analytische Betrachtungen und entwickelt dann den Zusammenhang mit der Abelschen Arbeit „Sur les fonctions qui satisfont à l'équation $\varphi(x) + \varphi(y) = \psi(xf(y) + yf(x))$“, in der Abel eine Erweiterung des algebraischen Additionstheorems anstrebte. Gz.

P. PAINLEVÉ. Sur le théorème fondamental de la théorie des fonctions abéliennes. C. R. **134**, 808-813.

Direkter elementarer Beweis des Fundamentaltheorems der Abelschen Funktionen (Darstellung durch den Quotienten zweier Thetafunktionen), der allein auf den klassischen Prinzipien der Theorie der eindeutigen Funktionen einer einzigen Variable beruht. Wbg.

E. ESCLANGON. Sur une extension de la notion de périodicité. C. R. **135**, 891-894.

Zweck der Note ist, zu zeigen, daß man für Funktionen von periodischen Funktionen mit verschiedenen Perioden eine Klassifikation herstellen kann, indem man zeigt, daß sie zu einer allgemeineren Funktionenklasse gehören, deren Eigenschaften auf einer neuen Erweiterung des Begriffs der Periodizität beruhen. Verf. beschränkt sich hier auf Funktionen reeller Variabeln. Ist $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine stetige Funktion ihrer Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so werden die reellen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die Elemente einer Periode w genannt, wenn identisch

$$F(x_1 + \alpha_1, x_2 + \alpha_2, \ldots, x_n + \alpha_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ist, und $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}$ wird als Modul der betrachteten Periode

bezeichnet. Läßt sich die Funktion F durch lineare Transformation der x_n nicht auf eine Funktion von weniger Variablen zurückführen, so heißt sie irreduzibel, im anderen Falle reduzibel. Eine irreduzible Funktion kann nicht Perioden besitzen, deren Modul kleiner ist als eine beliebige Größe; die Gesamtheit der Perioden ist in diesem Falle eine nicht abzählbare Menge. Es lassen sich p Perioden $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ $(p \leqq n)$ der Art wählen, daß jede Periode ω eine geometrische Summe der Form $m_1(\omega_1) + m_2(\omega_2) + \cdots + m_p(\omega_p)$ ist, wo $m_1, m_2, \ldots, m_p$ rationale oder ganze positve oder negative Zahlen bedeuten. p wird die „periodische Ordnung" von F genannt. Die periodische Ordnung bleibt bei jeder linearen Substitution mit nicht verschwindender Determinante ungeändert usf. Es muß auf die ausführliche Arbeit hingewiesen werden, die der Verf. über den behandelten Gegenstand vorbereitet. Gz.

P. Cousin. Sur les fonctions périodiques. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **19**. 9-61.

Der erste Teil der Abhandlung enthält die Ausdehnung eines Theorems, das Appell für den Fall von zwei Veränderlichen hergeleitet hatte (F. d. M. **23**, 430, 1891), auf beliebig viele Veränderliche. Es sei $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine ganze transzendente Funktion der n komplexen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, deren Nullstellen sich in der Form darstellen lassen:

$$a_1 + l_1\, 2\pi i,\; a_2 + l_2\, 2\pi i,\; \ldots,\; a_n + l_n\, 2\pi i,$$

wo $l_1, l_2, \ldots, l_n$ beliebige ganze, positive oder negative Zahlen mit Einschluß der Null bedeuten. Dann gibt es stets eine zweite ganze transzendente Funktion $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von der Beschaffenheit, daß der Quotient $F:G$ eine ganze transzendente Funktion ist, die niemals verschwindet, die in bezug auf x_1 die Periode $2\pi i$ hat und die, wenn das Argument $x_p\,(p = 2, 3, \ldots, n)$ um $2\pi i$ vermehrt wird, sich bis auf einen Exponentialfaktor

$$e^{m_1^{(p)} x_1 + m_2^{(p)} x_2 + \cdots + m_{p-1}^{(p)} x_{p-1}}$$

reproduziert; hierin bedeuten $m_1^{(1)}, \ldots, m_{n-1}^{(n)}$ ganze positive oder negative Zahlen mit Einschluß der Null.

Die Zahlen $m_1^{(1)}, \ldots, m_{n-1}^{(n)}$ sind vollständig bestimmt, wenn die Funktion G gegeben ist; sie lassen sich aber auch ermitteln mit Hülfe der Nullstellen von G. Da die Formulierung für beliebig viele Veränderliche ziemlich umständlich wird, möge es genügen, den Fall $n = 2$ herauszunehmen. In ihm ist

$$F(x_1 + 2\pi i, x_2) = F(x_1, x_2),\quad F(x_1, x_2 + 2\pi i) = e^{m x_1}\cdot F(x_1, x_2).$$

Um m zu bestimmen, betrachte man die Gleichung $G(a_1, x_2) = 0$, in der a_1 einen konstanten Wert bedeuten soll. Sie definiert gewisse Nullstellen. Wird jetzt a_1 variiert, so wird sich die Lage dieser Nullstellen in der Ebene der komplexen Veränderlichen x_2 ändern: sie werden darin

Kurven beschreiben. Variiert jetzt a_1 in der Ebene der komplexen Veränderlichen x_1 geradlinig von einem Anfangswerte $a_1^{(0)}$ bis $a_1^{(0)} + 2\pi i$, so werden in der Ebene von x_2 durch ein geradliniges Segment von $a_2^{(0)}$ bis $a_2^{(0)} + 2\pi i$, wo $G(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}) = 0$ ist, Nullstellen von $G(a_1, x_2)$ teils von rechts nach links, teils von links nach rechts hindurchgehen. Die Differenz dieser beiden Zahlen ist gleich m.

Der zweite Teil der Abhandlung ist den meromorphen Funktionen von n Veränderlichen gewidmet, die $(n+1)$-fach oder $(n+2)$-fach periodisch sind. Es wird bewiesen, daß man stets meromorphe Funktionen von n Veränderlichen bilden kann, die $n+1$ ganz willkürlich gegebene Systeme von Perioden besitzen. Dagegen dürfen $n+2$ Systeme von Perioden nicht mehr ganz willkürlich gewählt werden; zwischen ihnen muß vielmehr, wenn es meromorphe Funktionen geben soll, die diese Perioden besitzen, eine Relation bestehen, die man folgendermaßen erhält. Man bilde das System (T) von $n+2$ Reihen und n Kolonnen aus dem System von $n+2$ Systemen konjugierter Perioden, unterdrücke in ihm auf alle möglichen Arten zwei Reihen und bilde aus den so entstehenden n Elementen die Determinante. Zwischen den so entstehenden $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Determinanten n-ter Ordnung muß dann eine homogene, lineare Relation mit ganzzahligen Koeffizienten bestehen, die nicht alle verschwinden dürfen. Die Relation, die sich so ergibt, ist nicht etwa eine Identität; sie bedingt eine wirkliche Beschränkung in der Wahl der Perioden. Für $n = 2$ wird $n + 2 = 4$, und man kommt zu den Abelschen Funktionen von zwei Veränderlichen, für die sich genau die bekannte Relation zwischen den Perioden ergibt.

Zum Schluß wird noch die Annahme gestreift, daß $n+q$ Systeme von Perioden vorhanden sein sollen; es ergeben sich dann wieder Relationen zwischen Determinanten einer Matrix (T) mit $n+q$ Reihen, deren ausführliche Diskussion jedoch verschoben wird. Für $q = n$ gelangt man zu dem Fall der Abelschen Funktionen von n Veränderlichen. Es ergeben sich dann $\frac{1}{2}n(n-1)$ Relationen zwischen den Perioden, die jedoch nicht die übliche Form haben; es läßt sich indessen zeigen, daß die bekannten Relationen auf die Gestalt von linearen, homogenen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten gebracht werden können, die zwischen den Determinanten der Ordnung n der Matrix (T) mit $2n$ Reihen bestehen. St.

H. Poincaré. Sur les fonctions abéliennes. Acta Math. **26**, 43-98.

Einer Aufforderung Mittag-Lefflers folgend, gibt Poincaré eine zusammenfassende Darstellung seiner Untersuchungen zur Theorie der Abelschen Funktionen und fügt einige in der letzten Zeit gewonnene neue Ergebnisse hinzu.

1. Im Jahre 1897 hatte Poincaré (F. d. M. 28, 404, 1897) einen neuen Beweis für den Satz skizziert: Zwischen je $p+1$ im Endlichen überall meromorphen $2p$-fach periodischen Funktionen von p Veränderlichen besteht immer eine algebraische Relation. Dieser Beweis wird

jetzt ausführlich mitgeteilt. Sein Gang ist folgender. Sind $F_1, F_2, \ldots, F_p$ p im Endlichen überall meromorphe, $2p$-fach periodische Funktionen der p Veränderlichen $v_1, v_2, \ldots, v_p$, so wird bewiesen, daß ihre gemeinsamen Nullstellen im Prismatoid der Perioden entweder in endlicher Anzahl vorhanden sind oder ein Kontinuum bilden. Dieser Beweis ist sehr leicht, wenn der Satz vorausgesetzt wird, daß eine jede im Endlichen überall meromorphe Funktion von p Veränderlichen als Quotient von zwei im Endlichen überall holomorphen Funktionen dargestellt werden kann, ein Satz, für den zuerst Cousin (F. d. M. **26**, 456, 1895) einen strengen Beweis geliefert hat. Poincaré zeigt aber, wie man auch, ohne diesen Satz zu benutzen, zum Ziel gelangen kann. Sind weiter die Funktionen $P_1, P_2, \ldots, P_p$ von $v_1, v_2, \ldots, v_p$ in einem Bereiche D holomorph, und enthalten sie einen oder mehrere stetig veränderliche Parameter λ, so gibt es innerhalb D Bereiche Δ, für die die Anzahl der gemeinsamen Nullstellen der p Funktionen P endlich ist, und diese Anzahl kann sich, wenn die Parameter variieren, nur ändern, indem eine der Nullstellen aus Δ heraustritt oder eine neue eintritt. Aus dem vorhergehenden folgt im besonderen: Sind $F_1, F_2, \ldots, F_{p+1}$ $p+1$ Abelsche Funktionen von p Veränderlichen, und bildet man p lineare Kombinationen dieser $p+1$ Funktionen, $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$, so ist die Anzahl der den p Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ gemeinschaftlichen Nullstellen, solange sie endlich bleibt, unabhängig von der Wahl der Koeffizienten der linearen Kombinationen. Betrachtet man nun $F_1, F_2, \ldots, F_{p+1}$ als Koordinaten eines Punktes in einem Raume von $p+1$ Dimensionen, so liegt dieser Punkt auf einer gewissen Mannigfaltigkeit von p Dimensionen V, und diese ist, wie jetzt bewiesen wird, algebraisch. Der Einwand, daß V weniger als p Dimensionen haben könne, läßt sich leicht beseitigen.

2. Weierstraß hat zuerst bewiesen, daß eine jede $2p$-fach periodische Funktion von p Veränderlichen mittels Thetafunktionen ausgedrückt werden kann; sein Beweis, der vollständig unbekannt geblieben war, ist jedoch erst 1903 im dritten Bande der Mathematischen Werke veröffentlicht worden. Dabei hat sich herausgestellt, daß er im wesentlichen mit dem Beweise identisch ist, den 20 Jahre vorher Picard und Poincaré geliefert hatten (F. d. M. **15**, 365, 1883). Drei neue von einander verschiedene Beweise haben dann der Reihe nach Appell (F. d. M. **23**, 430, 1891), Picard (F. d. M. **28**, 371, 1897) und Poincaré (F. d. M. **28**, 404, 1897) gegeben. Diesen vier Beweisen fügt Poincaré jetzt einen fünften hinzu. Während der alte auf dem Versuche beruhte, den Poincaré selbst gemacht hatte, den Satz zu beweisen, daß eine jede im Endlichen überall meromorphe Funktion von p Veränderlichen als Quotient von zwei im Endlichen überall holomorphen Funktionen darstellbar ist, hat den Ausgangspunkt des neuen Beweises die von Cousin für den eben angeführten Satz gegebene Herleitung gebildet; jedoch ist dabei der alte Beweis von Poincaré mitbenutzt worden, so daß eine Vereinigung beider Beweismethoden die Grundlage bildet.

3. Den Schluß der Abhandlung bildet eine Reihe kleinerer Bemerkungen. Sie beziehen sich zunächst auf die sogenannten Zwischen-

funktionen, das heißt auf ganze transzendente Funktionen von p Veränderlichen, die bei Vermehrung der Argumente um ein Periodensystem sich bis auf einen Exponentialfaktor reproduzieren, der eine lineare Funktion der p Veränderlichen ist. Diese Zwischenfunktionen lassen sich auf Thetafunktionen zurückführen; Thetafunktionen sind selbst Zwischenfunktionen, bei denen p der Multiplikatoren sich auf Konstanten reduzieren, die unbeschadet der Allgemeinheit gleich Eins gesetzt werden dürfen. Wenn die Perioden gegeben sind, dürfen die Multiplikatoren nicht willkürlich gewählt werden; hierauf beziehen sich Untersuchungen von Frobenius (F. d. M. **16**, 378, 1884) und Poincaré (F. d. M. **18**, 421, 1886). Es folgen Bemerkungen über die Zurückführung Abelscher Integrale des Geschlechtes p auf Integrale niedrigeren Geschlechtes, über die Nullstellen der Thetafunktionen, über Spezialfunktionen, und schließlich über die Nullstellen von Zwischenfunktionen, worauf näher eingegangen werden möge, da Poincaré hier eine interessante neue Betrachtung anstellt.

Wie Poincaré früher bewiesen hatte (F. d. M. **18**, 421, 1886), ist die Summe der p Zwischenfunktionen gemeinsamen Nullstellen eine Konstante, deren Wert nur von den Multiplikatoren jener Funktionen abhängt. Es seien

$$\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$$

$p+1$ Thetafunktionen der Ordnung m. Die Gleichungen

$$(1) \qquad \theta(v_i) = \theta_1(v_i) = \cdots = \theta_p(v_i) = 0$$

haben dann die gemeinsamen Lösungen

$$v_i = g_{ik},$$

wo der Index i von 0 bis p, der Index k von 1 bis N variiert, wenn $N = m^p \cdot p!$ ist. Bilden wir jetzt die Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{cases} \theta_1(v_i) + \varepsilon_1\,\theta(v_i) = \theta_2(v_i) + \varepsilon_2\,\theta(v_i) = \cdots \\ \qquad\qquad = \theta_p(v_i) + \varepsilon_p\,\theta(v_i) = 0, \end{cases}$$

wo die ε Konstanten sind, so haben sie wiederum N Lösungen

$$v_i = g'_{ik},$$

und da die Multiplikatoren der Funktionen $\theta_k + \varepsilon_k\,\theta$ dieselben sind, wie die der Funktionen θ_k, so ist

$$(3) \qquad \Sigma g_{ik} = \Sigma g'_{ik}.$$

Sind jetzt die ε sehr klein, so ist

$$g'_{ik} - g_{ik} = \delta g_{ik},$$

wo die δg_{ik} von der Ordnung der ε sind. Entwickelt man in den Gleichungen (2) nach Potenzen der ε und berücksichtigt nur die linearen Glieder, so wird

$$(4) \qquad \Sigma\,\delta g_{ik}\,\frac{\partial \theta_q}{\partial v_q} + \varepsilon_q\,\theta(g_{ik}) = 0,$$

wo in den $\frac{\partial \theta_q}{\partial v_q}$ die v_q durch die g_{ik} zu ersetzen sind. Ist nun $\Delta(v_i)$ die Determinante der $\frac{\partial \theta_q}{\partial v_q}$, und sind $\Delta_{qj}(v_i)$ die den Elementen $\frac{\partial \theta_q}{\partial v_q}$ entsprechenden Unterdeterminanten, so folgt aus (4), da $\sum \delta g_{ik} = 0$ ist:

$$\Sigma \theta(g_{ik}) \frac{\Delta_{qj}(g_{ik})}{\Delta(g_{ik})} = 0; \tag{5}$$

die Summe ist über alle N Lösungen der Gleichungen (1) zu erstrecken. Für den Fall der elliptischen Funktionen besagt diese Gleichung, daß die Summe der Residuen im Periodenparallelogramm gleich Null ist, die Gleichung (5) läßt sich mithin als eine Verallgemeinerung des Satzes von der Summe der Residuen ansehen. St.

P. Appell. Sur les fonctions abéliennes considérées comme fonctions algébriques de fonctions d'une variable. Acta Math. **26**, 249-254.

In einem Briefe an Hermite vom Jahre 1843 hat Jacobi (Werke **2**, 83-86) gezeigt, daß die Funktionen von zwei Veränderlichen, die sich aus der Umkehrung der hyperelliptischen Integrale ergeben, algebraische Funktionen von Funktionen einer Veränderlichen sind. Wie bei einer solchen Darstellung die vierfache Periodizität der meromorphen Funktionen von zwei Veränderlichen mit vier Periodenpaaren zustande kommt, hatte Appell bereits früher erörtert (F. d. M. **18**, 423, 1886). Jede Funktion dieser Art läßt sich nach Weierstraß rational durch drei besondere Funktionen derselben Art $X = f_1(u, v)$, $Y = f_2(u, v)$, $Z = f_3(u, v)$ ausdrücken, die durch eine irreduzible algebraische Gleichung $F(X, Y, Z) = 0$ verbunden sind. Setzt man

$$x = f_1(u, 0), \; y = f_2(u, 0), \; z = f_3(u, 0),$$
$$x' = f_1(0, v), \; y' = f_2(0, v), \; z' = f_3(0, v),$$

so ergibt sich aus dem Additionstheorem, daß X, Y, Z rationale Funktionen von x, y, z; x', y', z' sind, und nun zeigt sich, daß, wenn (α, β) eine Gruppe von Perioden ist, bei Vermehrung von u um α der Punkt x, y, z in einen Punkt x_1, y_1, z_1 übergeht, wo x_1, y_1, z_1 rationale Funktionen von x, y, z sind, und ebenso bei Vermehrung von v um β der Punkt x', y', z' in einen Punkt x'_1, y'_1, z'_1, wo x'_1, y'_1, z'_1 wieder rationale Funktionen von x', y', z' sind. Da aber der Punkt X, Y, Z unverändert bleibt, wenn gleichzeitig u um α und v um β vermehrt wird, so müssen diese beiden rationalen Substitutionen die Funktionen X, Y, Z von x, y, z; x', y', z' unverändert lassen.

Das algebraische Problem, die Gruppen rationaler Substitutionen zu ermitteln, die sich in der angegebenen Weise verhalten, empfiehlt Appell der Aufmerksamkeit der Mathematiker, während er selbst sich darauf beschränkt, die beiden einfachen Beispiele:

$$X = e^{u+v},\; Y = e^{\omega u + \omega^2 v},\; Z = e^{\omega^2 u + \omega v} \left(\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right);$$

$$X = e^{u} \frac{H(v-a)\,H(a+s)}{H(v-a-s)\,H(a)},\quad Y = e^{u} \frac{H(v-b)\,H(b+s)}{H(v-b-s)\,H(b)},$$

$$Z = e^{u} \frac{H(v-c)\,H(c+s)}{H(v-c-s)\,H(c)}$$

zu betrachten. St.

W. Wirtinger. Über einige Probleme in der Theorie der Abelschen Funktionen. Acta Math. 26, 133-156.

„Die vielen Anregungen“, beginnt der Verf., „welche aus dem nach Abel benannten Theorem hervorgegangen sind, erstrecken sich auf das ganze Gebiet der heutigen Algebra und Funktionentheorie und, in Verbindung damit, auch der Geometrie und anderer Zweige der mathematischen Wissenschaften. Und doch ist die Bedeutung dieses Satzes noch nicht erschöpft. Ja es scheint, daß wir erst an denjenigen Funktionen von mehr als einer Variable, die uns allein genauer bekannt sind, den Abelschen, die Gesichtspunkte und Methoden induktiv erkennen müssen, welche uns den Weg zu einer ebenso eingehenden Erkenntnis dieser Gegenstände der Analysis zeigen, wie wir sie für eine Variable besitzen. Schon Jacobi hatte bemerkt, daß die zur Darstellung der Abelschen Funktionen führenden Thetareihen von selbst auf allgemeinere mehrfach periodische Funktionen führen, als sie durch die Lösung des nach ihm benannten Umkehrungsproblems gegeben werden. Riemann und Weierstraß haben die Theorie der so erklärten mehrfach periodischen Funktionen eingehenden Studien unterworfen, jedoch leider nur einige wenige grundlegende Sätze ohne Beweis veröffentlicht. Nur der Satz, daß eine endlich-vieldeutige analytische Funktion von n Variablen nicht mehr als $2n$ unabhängige Periodensysteme haben kann, ist auch mit seinem Beweis uns von beiden Forschern überliefert. Über die Beziehungen dieser allgemeinen Funktionen zur Theorie der algebraischen besitzen wir von Weierstraß nur die kurzen Andeutungen in den Berliner Berichten von 1869. Gerade diese Fragen aber waren es, die der Gegenstand meiner Bemühungen gewesen sind. Die Resultate, welche ich erreicht habe, geben für sich einen gewissen Abschluß, und ich rechne es mir zur Ehre an, daß sie sich in einigen Punkten mit den auf ganz verschiedenem Wege erlangten eines so ausgezeichneten Mathematikers, wie Poincaré, berühren. Sie ergeben aber auch neue Gesichtspunkte für die überlieferte Theorie der Abelschen Funktionen von 2, 3, 4 Variablen, sowie überhaupt neue Problemstellungen für die zu einem algebraischen Gebilde erster Stufe gehörigen Abelschen Funktionen und Integrale. Da aber diese Untersuchungen zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Stellen nicht immer unter ausdrücklicher Betonung des inneren Zusammenhanges publiziert sind, so glaubte ich der ehrenden Einladung

des Herausgebers folgen zu dürfen, eine Übersicht derselben an dieser dem Andenken Abels gewidmeten Stelle vorzulegen."

Eine Analyse der gedrängten Darstellung zu geben, ist hier nicht möglich. Es möge nur hervorgehoben werden, daß der Verf. überall die Punkte bezeichnet hat, an denen weitere Forschungen einzusetzen hätten, und daß er auch, über seine bisherigen Veröffentlichungen hinausgehend, zwei Probleme näher erörtert, bei denen er über die Problemstellung nicht hinausgekommen ist, die ihm aber wegen der Bedeutung, die ihnen innewohnt, nicht ohne Interesse zu sein schienen. Sie betreffen erstens eine Schwierigkeit, die bei periodischen Funktionen von mehr als einer Veränderlichen durch die Bilinearrelationen zwischen den Perioden entsteht, und zweitens die algebraischen Relationen, durch die die Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente verknüpft sind; hierbei wird über einen Ansatz berichtet, den der Verf. im Jahre 1895 an Minkowski brieflich mitgeteilt hatte, und der die Zurückführung der Hauptfrage auf ein Problem der Zahlentheorie bewirkt, wobei sich eine bemerkenswerte Verallgemeinerung gewisser, von Jacobi in der Theorie der binären quadratischen Formen und der Darstellung von Zahlen als Summen von Quadraten gestellter und gelöster Probleme ergibt. St.

G. Humbert. Sur les fonctions abéliennes à multiplication complexe. C. R. **134**, 876-882.

G. Humbert. Sur les fonctions abéliennes à multiplication complexe. C. R. **134**, 1261-1266.

Im Anschluß an seine früheren Untersuchungen über die singulären Abelschen Funktionen von zwei Veränderlichen (F. d. M. **30**, 408, 1899 und **31**, 455, 1900) gibt der Verf. eine Reihe von Sätzen aus der Theorie der binären quadratischen Formen, die sich ergeben, wenn zwischen den Hermiteschen Perioden g, h, g' zwei oder drei Relationen der Form:

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0$$

bestehen, wo A, B, C, D, E ganze Zahlen bedeuten. St.

A. Capelli. Sulle relazioni algebriche fra le funzioni ϑ di una variabile e sul teorema di addizione. Rom. Acc. L. Rend. (5) 11₁, 255-263.

Die Gleichung

$$\vartheta_{\gamma g}(u, \omega) = e^{\pi i g \gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \omega (n + \frac{1}{2}\gamma)^2 + 2\pi i (n + \frac{1}{2}\gamma)(u + \frac{1}{2}g)}$$

definiert die Thetafunktion mit dem Argumente u, dem Modul ω und den Charakteristiken g und γ. Aus der fundamentalen Formel von Jacobi für die Summe von zwei Produkten von vier Thetafunktionen folgen

zahlreiche andere Formeln, indem man teils u um halbe Einheiten oder um halbe Moduln vermehrt, teils die so erhaltenen Gleichungen mit einander linear kombiniert. Alle diese Formeln sind als besondere Fälle in drei von dem Verf. angegebenen typischen Formeln enthalten, was im besonderen für das allgemeine Additionstheorem der Thetafunktionen durchgeführt wird. St.

R. Alezais. Sur une classe de fonctions hyperfuchsiennes et sur certaines substitutions linéaires qui s'y rapportent. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **19**, 261-323.

Auszug aus der 1901 erschienenen Thèse des Verf.: Sur une classe de fonctions hyperfuchsiennes. Vergl. F. d. M. **32**, 457, 1901. St.

J. I. Hutchinson. On a class of automorphic functions. American M. S. Trans. **3**, 1-11.

In der Abhandlung: Über die Darstellung einiger Fälle der automorphen Primformen durch spezielle Thetareihen hatte Burkhardt (F. d. M. **25**, 728, 1893) unter anderem die Monodromiegruppe der Riemannschen Fläche

$$y^3 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\beta_1)^2(x-\beta_2)^2$$

betrachtet und gezeigt, daß sich eine gewisse automorphe Form der Gruppe durch Thetareihen darstellen läßt. Diese Untersuchungen werden hier weiter geführt, indem die Thetafuchsschen Funktionen Poincarés eingeführt und ihre Ausdrücke durch hyperelliptische Thetafunktionen abgeleitet werden. Zum Schluß wird gezeigt, daß jede automorphe Form der Gruppe rational durch den Quotienten von zwei besonderen Thetafuchsschen Funktionen ausgedrückt werden kann. St.

E. T. Whittaker. Note on a function analogous to Weierstrass' sigma-function. Messenger (2) **31**, 145-148.

Als eine automorphe Funktion $\varphi(z)$, die durch jede der Transformationen einer gewissen unendlichen diskontinuierlichen Gruppe homographischer Transformationen S_n ungeändert bleibt, so daß also

$$\varphi\left(\frac{a_n z+b_n}{c_n z+d_n}\right)=\varphi(z)$$

ist, bildet der Verf. das unendliche Produkt

$$\sigma(z,\alpha)=(z-\alpha)\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left\{1-\frac{(z-\alpha)(z_n-\alpha_n)}{(z-z_n)(\alpha-\alpha_n)}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\frac{(z-\alpha)(z_n-\alpha_n)}{(z-z_n)(\alpha-\alpha_n)}}\right],$$

das über alle Substitutionen der Gruppe, mit Ausnahme der identischen

Substitution, zu erstrecken ist; dasselbe ist absolut und gleichmäßig konvergent für alle Werte von z mit Ausnahme gewisser spezieller Werte für jede unendliche diskontinuierliche Gruppe und geht für die Transformationsgruppe $(z, z+2m\omega+2m'\omega')$ in die Weierstraßsche Sigmafunktion über. Lp.

L. Schlesinger. De nonnullis absolutae geometriae ad theoriam complexae variabilis functionum applicationibus. Libellus ad celebrandam memoriam Ioannis Bolyai ex consilio Universitatis Claudiopolitanae editus. 1-60.

Es ist ein sehr glücklicher Gedanke Schlesingers gewesen, in der Festschrift (vergl. S. 24 dieses Bandes), die die mathematisch-naturwissenschaftliche Fakultät der Universität Klausenburg zur Feier des Tages herausgegeben hat, an dem vor hundert Jahren Johann Bolyai zu Klausenburg geboren ward, die Beziehungen zwischen der nichteuklidischen Geometrie und den automorphen Funktionen einer komplexen Variable zu behandeln; denn wir haben hier eine der merkwürdigsten Tatsachen aus der Geschichte der Analysis im 19. Jahrhundert vor uns, mit der man wohl nur den Zusammenhang zwischen den binären quadratischen Formen und den elliptischen Funktionen in Parallele setzen könnte.

Werden die Punkte einer Euklidischen Ebene durch die Werte einer komplexen Veränderlichen $\eta = p + iq$ dargestellt, so wird die allgemeinste Bewegung der Ebene durch die Formel

$$\zeta = e^{i\vartheta}(\eta + \omega) \tag{1}$$

ausgedrückt, und die Frage nach den eindeutigen Funktionen von η, die bei der Ersetzung von η durch ζ unverändert bleiben, wird durch die doppeltperiodischen Funktionen erledigt, denen eine Einteilung der Euklidischen Ebene in lauter kongruente Parallelogramme entspricht. Wenn man nun eine hyperbolische Ebene nach dem Vorgange von Beltrami auf das Innere eines Kreises

$$1 + c(p^2 + q^2) = 0$$

abbildet, so werden die Bewegungen dieser Ebene durch diejenigen projektiven Substitutionen

$$\zeta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta} \tag{2}$$

mit der Determinante 1 dargestellt, die den Kreis in sich transformieren, und man wird so auf die Frage geführt, welche eindeutigen Funktionen von η bei Substitutionen der Form (2) unverändert bleiben. Sie wird durch automorphe Funktionen erledigt, denen eine Einteilung der hyperbolischen Ebene in lauter kongruente Polygone entspricht. Die Theorie der automorphen Funktionen reicht allerdings noch weiter; bei der angegebenen Fragestellung kommen nur die Funktionen in Betracht, die Poincaré als Fuchssche Funktionen der ersten, zweiten und sechsten Familie bezeichnet hat.

Der Verf. beginnt mit allgemeinen Betrachtungen über die Analysis situs zweiseitiger Flächen oder besser zweifacher Mannigfaltigkeiten, da er mit ihnen in einem Euklidischen Raume von beliebig vielen Dimensionen operiert. Wie Stäckel gefunden hat, ist bereits Johann Bolyai der Frage nach den allgemeinsten einfachen Flächen nähergetreten und hat behauptet, man erhalte sie, indem man in einem von r Linien begrenzten Stücke der Ebene $2p$ Löcher anbringe und diese paarweise durch Henkel verbinde. Eine solche Fläche nennt Schlesinger eine Bolyaische Normalfläche $F_{r,p}$. Jede zweiseitige, n-fach zusammenhängende zweifache Mannigfaltigkeit, die von r Linien begrenzt ist, ist einer Bolyaischen Normalfläche $F_{r,\frac{n-r}{2}}$ „homoeomorph", das heißt, sie läßt sich mittels der in der Analysis situs erlaubten Deformationen stetig in diese überführen.

Wird die Fläche $F_{r,p}$ durch Schnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche $\overline{F}_{r,p}$ verwandelt, so ist diese einem gewissen Polygon $\Phi_{r,p}$ homoeomorph, das zur Bestimmung der ursprünglichen zweifachen Mannigfaltigkeit im Sinne der Analysis situs vollständig ausreicht, und umgekehrt geht aus der Deformation eines solchen Polygons $\Phi_{r,p}$, indem die konjugierten Seiten an einander geheftet werden, eine $(2p+r)$-fach zusammenhängende, von r Linien begrenzte zweifache Mannigfaltigkeit hervor.

Das Polygon $\Phi_{r,p}$ läßt sich auf unendlich viele Arten wählen, im besonderen so, daß die Seiten gerade Linien sind. Dann heißt es ein Normalpolygon. Nach Poincaré wird ihm eine Gruppe G mit $2p+r-1$ fundamentalen Operationen zugeordnet, die geometrisch bedeuten, daß je zwei konjugierte Seiten des Polygons in einander übergeführt werden. Die Gruppe G kann wiederum dazu dienen, die Fläche $F_{r,p}$ im Sinne der Analysis situs zu charakterisieren.

Die genauere Untersuchung der Gruppe G erfordert die Aufstellung einer Theorie der Bewegungen der Ebene, dieses Wort immer im Sinne der nichteuklidischen Geometrie verstanden. Diese Theorie wird im Anschluß an eine frühere Abhandlung des Verf. (F. d. M. **30**, 547, 1899) in voller Allgemeinheit durchgeführt und die Ergebnisse für die Riemannsche, Euklidische und Bolyaische Ebene ausführlich formuliert. Damit ist der Zusammenhang mit der Lehre von den gebrochenen linearen Substitutionen einer komplexen Veränderlichen gewonnen, und die Gruppe G wird jetzt eine Gruppe projektiver Substitutionen einer komplexen Variable; ihre erzeugenden Operationen sind elliptische oder parabolische Substitutionen, die die konjugierten Seiten in einander überführen.

Damit man von den Betrachtungen aus der Analysis situs zu den funktionentheoretischen Begriffen übergehen kann, muß die Beziehung zwischen der Fläche $F_{r,p}$ und dem Polygon $\Phi_{r,p}$ so modifiziert werden, daß zwischen der zerschnittenen Fläche $\overline{F}_{r,p}$ und jenem Polygon nicht bloß „Homoeomorphie", sondern „Homoeometrie", das heißt eindeutige konforme Abbildung besteht, wodurch man auf die Untersuchung einer

linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung geführt wird. Jetzt ergeben sich zwei Fragen, die der Verf. so formuliert:

I. Gegeben ist ein Normalpolygon $\Phi_{r,p}$, bei dem die Summen der Winkel in den r Cyklen von Ecken gleich aliquoten Teilen von 2π sind. Kann $\Phi_{r,p}$ wechselseitig eindeutig und konform auf die einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit $\overline{F}_{r,p}$ abgebildet werden, die aus der $(2p+r)$-fach zusammenhängenden, mit r Löchern versehenen Mannigfaltigkeit $F_{r,p}$ durch Schnitte hervorgeht?

II. Gegeben ist eine in sich zurückkehrende $(2p+1)$-fach zusammenhängende Mannigfaltigkeit F'_p, die an den Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_r$ mit Löchern versehen wird. Jedem Loche ist eine beliebige ganze Zahl g, die auch unendlich groß sein kann, zugeordnet. Kann die einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit $\overline{F}_p$, die durch Schnitte aus F_p hervorgeht, wechselweise eindeutig und konform auf ein Normalpolygon abgebildet werden? Das System der Zahlen $p, r, g_1, g_2, \ldots, g_r$ heißt die Signatur der Aufgabe.

Auf die Einzelheiten der folgenden Untersuchungen einzugehen, ist an dieser Stelle nicht möglich. Der Referent muß sich darauf beschränken, den Wunsch auszusprechen, daß der Verf. seine Ergebnisse, die sowohl durch die Art der Veröffentlichung in einer Festschrift, als auch durch die Abfassung in lateinischer Sprache schwer zugänglich sind, an anderer Stelle noch einmal entwickeln möge. St.

Weitere Literatur.

K. Bohlin. Eine Untersuchung über die Darstellung mehrwertiger Funktionen. Stockh. Akad. Bihang. 58 (1902), 16 S.

A. C. Dixon. On a class of matrices of infinite order, and on the existence of „matricial" functions on a Riemann surface. Cambr. Trans. 19, 190-233.

B. Gawrilowitsch. Über die analytische Darstellung der eindeutigen Funktionen in dem Bereiche des Punktes im Unendlichen. Belgrad. Akad. 65, 59-77 (Serbisch).

A. Gerlach. Über die Anwendbarkeit der Methode des arithmetischen Mittels auf eine von zwei konfokalen Ellipsen begrenzte Ringfläche. Diss. Leipzig. Frankfurt a. M.: Knauer. 32 S. 8⁰.

J. Hadamard. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développements de Taylor. Étude sur les propriétés des fonctions entières, et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. (Mémoire couronné par l'Académie des Sciences.) Paris: Hermann. 132 S. 4⁰.

J. C. Kluyver. Over de wijziging, welke men tracht te brengen in de van oudsher gebruikelijde analytische voorstelling eener functie. Handel. 8ste Nederl. Nat. en Geneesk. Congr. 1901, 113-116.

M. Petrowitsch. Darstellung der willkürlichen Funktionen durch bestimmte Integrale. Belgrad Ak. 63, 209-227 (Serbisch).

M. Petrowitsch. Untersuchung der durch bestimmte Integrale dargestellten Funktionen. Belgrad Akad. 65, 79-162 (Serbisch).

O. Spiess. Die Grundbegriffe der Iterationsrechnung. Bern. Mitt. 1902, 106-137; sep. Basel. 34 S. 8°.

Kapitel 2.

Besondere Funktionen.

A. Elementare Funktionen (einschließlich der Gammafunktion und der hypergeometrischen Reihe).

A. Hurwitz. Über Abels Verallgemeinerung der binomischen Formel. Acta Math. 26, 199-204.

Man bezeichne mit r und s zwei (positive oder negative) ganze Zahlen, mit $u, v, x_1, x_2, \dots, x_n$ unbeschränkt veränderliche Größen. Die Funktion $F_{r,s}(u, v \mid x_1, x_2, \dots, x_n)$ oder $F_{r,s}$ werde durch

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} F_{r,s} = \Sigma (u + \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \cdots + \varepsilon_n x_n)^\varrho \\ \qquad\qquad \times (v + \varepsilon'_1 x_1 + \varepsilon'_2 x_2 + \cdots + \varepsilon'_n x_n)^\sigma \\ [\varrho = r + \Sigma \varepsilon_i,\ \sigma = s + \Sigma \varepsilon'_i,\ i = 1, 2, \dots, n] \end{cases}$$

erklärt, worin ε'_i für $1 - \varepsilon_i$ geschrieben und die Summe in der Weise zu bilden ist, daß $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ unabhängig voneinander die beiden Werte 0 und 1 erhalten. Dann gelten die Formeln:

$$\text{(1)} \quad \begin{cases} F_{r,s} = F_{r+1,s}(u + x_1, v \mid x_2, \dots, x_n) \\ \qquad\qquad + F_{r,s+1}(u, v + x_1 \mid x_2, \dots, x_n), \end{cases}$$

$$\text{(2)} \quad \begin{cases} F_{r,s} = u F_{r-1,s} \\ \qquad + \sum_{k=1}^{n} x_k F_{r,s}(u + x_k, v \mid x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n), \end{cases}$$

$$\text{(3)} \quad \begin{cases} F_{r,s} = v F_{r,s-1} \\ \qquad + \sum_{k=1}^{n} x_k F_{r,s}(u, v + x_k \mid x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n), \end{cases}$$

$$\text{(4)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_{r,s}}{\partial u} = r F_{r-1,s} \\ \qquad + \sum_{k=1}^{n} F_{r,s}(u + x_k, v \mid x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n), \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_{r,s}}{\partial v} = s F_{r,s-1} \\ \qquad + \sum\limits_{k=1}^{n} F_{r,s}(u, v + x_k \mid x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n), \end{cases}$$

$$(6)\ \frac{\partial F_{r,s}}{\partial x_1} = \begin{cases} (r+1) F_{r,s}(u + x_1, v \mid x_2, \ldots, x_n) \\ \qquad + (s+1) F_{rs}(u, v + x_1 \mid x_2, \ldots, x_n) \\ + \sum\limits_{k=2}^{n} F_{r,s}(u, v \mid x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k + x_1, + x_{k+1}, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Im besonderen für eine einzige Veränderliche x_1 ist:

$$(7)\quad F_{r,s}(u, v \mid x_1) = (u + x_1)^{r+1} v^s + u^r (v + x_1)^{s+1}.$$

Für die Funktion $F_{-1,0}(u, v \mid x_1, \ldots, x_n)$ ist

$$\text{(II)}\qquad F_{-1,0} = (u + v + x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^n \frac{1}{u},$$

$$\text{(II')}\quad \begin{cases} \Sigma (u + x_{a_1} + x_{a_2} + \cdots + x_{a_\lambda})^{\lambda - 1} \\ \qquad \times (v - x_{a_1} - x_{a_2} - \cdots - x_{a_\lambda})^{n-\lambda} = \dfrac{1}{u}(u + v)^n: \end{cases}$$

für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ geht (II') in die Abelsche Formel über:

$$\sum_{\lambda=0}^{n} \binom{n}{\lambda} (u + \lambda x)^{\lambda - 1} (v - \lambda x)^{n-\lambda} = \frac{1}{u}(u + v)^n.$$

Setzt man in (3) $r = -1, s = 0$, so kann man $F_{-1,-1}$ bestimmen, und es ergibt sich:

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} \Sigma (u + x_{a_1} + \cdots + x_{a_\lambda})^{\lambda - 1} (v + x_{\beta_1} + \cdots + x_{\beta_\mu})^{\mu - 1} \\ \qquad = (u + v + x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^{n-1} \left(\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v}\right). \end{cases}$$

Setzt man $u + v + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s$ und bezeichnet die elementar-symmetrischen Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $f_1, f_2, \ldots, f_n$, so erhält man:

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} \Sigma (u + x_{a_1} + \cdots + x_{a_\lambda})^{\lambda} (v + x_{\beta_1} + \cdots + x_{\beta_\mu})^{\mu} \\ \qquad = s^n + \underline{|1} f_1 s^{n-1} + \underline{|2} f_2 s^{n-2} + \cdots + \underline{|n} f_n. \end{cases}$$

Wz.

J. L. W. V. Jensen. Sur une identité d'Abel et sur d'autres formules analogues. Acta Math. 26, 307-318.

1. Ist z eine komplexe Veränderliche, und sind $\Phi(z)$ und $1/f(z)$ in der Umgebung von $z = 0$ holomorphe Funktionen, so kann man $\Phi(z)$

für hinreichend kleine Werte von z in eine Potenzreihe von $z/f(z)$ entwickeln, z. B. in der Lagrangeschen Form:

$$\text{(4)}\qquad \Phi(z) = \Phi(0) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\nu}} \left[\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}} (f(z))^{\nu}\, \Phi'(z)\right]_{z=0} \left(\frac{z}{f(z)}\right)^{\nu},$$

$$\text{(5)}\qquad \frac{\Phi(z)}{1 - z\dfrac{f'(z)}{f(z)}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\nu}} \left[\frac{d^{\nu}}{dz^{\nu}} (f(z))^{\nu}\, \Phi(z)\right]_{z=0} \left(\frac{z}{f(z)}\right)^{\nu}.$$

Setzt man $\Phi(z) = e^{\alpha z}, f(z) = e^{\beta z}, u = ze^{-\beta z}$, wo α und β beliebige Konstanten bedeuten, so ist für hinreichend kleine z und u

$$\text{(6)}\qquad \begin{cases} e^{\alpha z} = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+\nu\beta)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} u^{\nu} \\[2ex] \qquad = 1 + \dfrac{\alpha}{\underline{|1}} z e^{-\beta z} + \dfrac{\alpha(\alpha+2\beta)^{1}}{\underline{|2}} z^2 e^{-2\beta z} + \cdots, \end{cases}$$

$$\text{(7)}\qquad \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha z}}{1-\beta z} = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\nu\beta)^{\nu}}{\underline{|\nu}} u^{\nu} \\[2ex] \qquad = 1 + \dfrac{(\alpha+\beta)^{1}}{\underline{|1}} z e^{-\beta z} + \dfrac{(\alpha+2\beta)^{2}}{\underline{|2}} z^2 e^{-2\beta z} + \cdots. \end{cases}$$

Die Reihe auf der rechten Seite von (6) konvergiert für $|\beta u| < e^{-1}$ oder $|\beta z|\, e^{1-R(\beta z)} < 1$; sollen beide Seiten gleich sein, so muß noch $|\beta z| < 1$ sein. Ebenso für (7).

Ist n eine ganze Zahl, so ergibt sich hieraus für $\alpha = n\beta, u = ze^{-\beta z}$:

$$\text{(8)}\qquad z^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{n(n+\nu)^{\nu-1}\beta^{\nu}}{\underline{|\nu}} u^{n+\nu} \qquad (n > 0),$$

$$\text{(9)}\qquad \frac{z^n}{1-\beta z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(n+\nu)^{\nu}\beta^{\nu}}{\underline{|\nu}} u^{n+\nu} \qquad (n \geqq 0).$$

Setzt man in (6) $\alpha = a$ und $\alpha = b$, multipliziert die erhaltenen Formeln gliedweise und vergleicht dann die Koeffizienten von u^n auf beiden Seiten, so erhält man:

$$\text{(10)}\qquad \begin{cases} (a+b)(a+b+n\beta)^{n-1} \\ \quad = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a(a+\nu\beta)^{\nu-1}\, b(b+(n-\nu)\beta)^{n-\nu-1}. \end{cases}$$

Aus $e^{(a+b)z}/(1-\beta z) = e^{az} \cdot [e^{bz}/(1-\beta z)]$ ergibt sich

$$(a+b+n\beta)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a(a+\nu\beta)^{\nu-1} (b+(n-\nu)\beta)^{n-\nu},$$

und hieraus, wenn $a = \alpha$, $b + n\beta = x$ gesetzt und dann β in $-\beta$ verwandelt wird, die Abelsche Formel:

$$(1) \qquad (x+\alpha)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \alpha(\alpha - \nu\beta)^{\nu-1} \cdot (x+\nu\beta)^{n-\nu}.$$

2. Setzt man in (4) und (5) $\Phi(z) = (1+z)^\alpha$, $f(z) = (1+z)^\beta$, wo α und β beliebige Konstanten bedeuten und für die Potenzen ihre Hauptwerte zu nehmen sind, so ergibt sich für hinreichend kleine z, $v = z(1+z)^{-\beta}$:

$$(11) \quad \begin{cases} (1+z)^\alpha = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha}{\nu} \binom{\alpha - 1 + \nu\beta}{\nu - 1} v^\nu \\ \qquad = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha + \nu\beta} \binom{\alpha + \nu\beta}{\nu} v^\nu, \end{cases}$$

$$(12) \quad \frac{(1+z)^\alpha}{1 - \beta \frac{z}{1+z}} = \frac{(1+z)^{\alpha+1}}{1 - (\beta - 1)z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha + \nu\beta}{\nu} v^\nu.$$

Wenn $\beta - 1$ nicht reell und negativ ist, so ist der Konvergenzradius von (12) gleich $\left| \frac{(\beta-1)^{\beta-1}}{\beta^\beta} \right|$, und $v = \frac{(\beta-1)^{\beta-1}}{\beta^\beta}$ ist der dem Nullpunkt zunächst gelegene singuläre Punkt der Reihe. Ist β negativ, bezüglich positiv, so ist der Konvergenzradius gleich $\frac{(-\beta)^{-\beta}}{(1-\beta)^{1-\beta}}$, bezüglich

$$\frac{1}{\beta^\beta (1-\beta)^{(1-\beta)}}.$$

Für $\beta = 0$ gehen (11) und (12) in die binomische Formel

$$(1+z)^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} z^\nu$$

mit beliebigem Exponenten über.

Setzt man in (4) $\Phi(z) = l(1+z)$, $f(z) = (1+z)^\beta$, wo unter dem Logarithmus der Hauptwert zu verstehen ist, so erhält man für hinreichend kleine Werte von $|z|$:

$$(13) \quad l(1+z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \binom{\nu\beta - 1}{\nu - 1} v^\nu, \quad v = z(1+z)^{-\beta}.$$

Aus (11) und (12) ergibt sich für $\alpha = n\beta$, wo n eine ganze Zahl ist, $v = z(1+z)^{-\beta}$:

$$(14) \qquad z^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{n}{n+\nu} \binom{(n+\nu)\beta}{\nu} v^{n+\nu} \qquad (n > 0),$$

$$(15) \qquad \frac{z^n}{1 - \beta \frac{z}{1+z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{(n+\nu)\beta}{\nu} v^{n+\nu} \qquad (n \geqq 0).$$

Entwickelt man die beiden Seiten von $(1+z)^{a+b}=(1+z)^a(1+z)^b$ nach (11) in Potenzreihen von v und setzt die Koeffizienten von v^n einander gleich, so erhält man:

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{a+b}{a+b+n\beta}\dbinom{a+b+n\beta}{n} \\ = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \dfrac{a}{a+\nu\beta}\dbinom{a+\nu\beta}{\nu}\dfrac{b}{b+(n-\nu)\beta}\dbinom{b+(n-\nu)\beta}{n-\nu} \end{cases}$$

oder, wenn b durch $b-n\beta$ ersetzt wird:

$$(16^*)\quad \begin{cases} \dfrac{a+b-n\beta}{a+b}\dbinom{a+b}{n} \\ = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \dfrac{a}{a+\nu\beta}\dbinom{a+n\beta}{\nu}\dfrac{b-n\beta}{b-\nu\beta}\dbinom{b-n\beta}{n-\nu}. \end{cases}$$

Aus $\dfrac{(1+z)^{a+b}}{1-\beta\dfrac{z}{1+z}}=(1+z)^a\dfrac{(1+z)^b}{1-\beta\dfrac{z}{1+z}}$ und (11) und (12) erhält man die der Abelschen Formel (1) analoge:

$$(17)\quad \binom{a+b}{n}=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{a}{a+\nu\beta}\binom{a+\nu\beta}{\nu}\binom{b-\nu\beta}{n-\nu}$$

und hieraus

3. die Formeln:

$$(18)\quad \sum_{\nu=0}^{n}\binom{a+\nu\beta}{\nu}\binom{b-\nu\beta}{n-\nu}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{a+b-\nu}{n-\nu}\beta^{\nu},$$

$$(19)\quad \sum_{\nu=0}^{n}\binom{a+\nu\beta}{\nu}\binom{p-a-\nu\beta}{n-\nu}=\beta^{p+1}(\beta-1)^{n-p-1}$$
$$(0\leqq p<n).$$

4. Die Identitäten (1), (10), (16), (17), (18), (19) sind spezielle Fälle allgemeinerer Gleichungen. Es sei Ω eine funktionelle Operation, für welche $\Omega(aA+bB)=a\Omega A+b\Omega B$ ist, worin a, b Konstanten sind, während A, B Funktionen der Veränderlichen x bedeuten, auf welche Ω angewandt wird. Dann kann man mit Polynomen von Ω, deren Koeffizienten konstant sind, ebenso rechnen, wie wenn die Symbole Ω wirkliche Größen wären.

Es sei A eine ganze rationale Funktion von x und Ω, so beschaffen, daß ΩA von niedrigerem Grade als A und $\Omega a=0$ ist. Dann kann man Ω in die Potenzreihen einführen; z. B. die durch $\Delta\varphi(x)=\varphi(x+1)-\varphi(x)$ definierte Operation Ω und $\dfrac{d}{dx}=D_x$ sind solche Operationen. Für die erste ergibt sich:

$$\varphi(x+a) = \sum_{\nu=0}^{p} \binom{\alpha}{\nu} \Delta^\nu \varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} \Delta^\nu \varphi(x)$$

oder in symbolischer Form $\varphi(x+\alpha) = (1+\Delta)^\alpha \varphi(x)$; hieraus erhält man die symbolische Gleichung $\varphi'(x) = D\varphi(x) = l(1+\Delta)\cdot\varphi(x)$.

Setzt man $l(1+\Delta)$ für z in (6), (7), (11), (12), (13), so erhält man (in nicht symbolischer Form) die Gleichungen:

$$\varphi(x+\alpha) = \sum_{\nu=0} \frac{\alpha(\alpha+\nu\beta)^{\nu-1}}{|\underline{\nu}} \varphi^\nu(x-\nu\beta),$$

$$(20)\quad \begin{cases} \varphi(x+\alpha) + \beta\,\varphi'(x+\alpha) + \beta^2 \varphi''(x+\alpha) + \cdots \\ \qquad = \sum_{\nu=0} \frac{(\alpha+\nu\beta)^\nu}{|\underline{\nu}} \varphi^\nu(x-\nu\beta). \end{cases}$$

$$(21)\quad \varphi(x+\alpha) = \sum_{\nu=0} \frac{\alpha}{\alpha+\nu\beta} \binom{\alpha+\nu\beta}{\nu} \Delta^\nu \varphi(x-\nu\beta),$$

$$(22)\quad \begin{cases} \varphi(x+\alpha) + \beta\Delta\varphi(x+\alpha-1) + \beta^2\Delta^2\varphi(x+\alpha-2) + \cdots \\ \qquad = \varphi(x+\alpha+1) + (\beta-1)\Delta\varphi(x+\alpha+1) \\ \qquad\quad + (\beta-1)^2\Delta^2\varphi(x+\alpha+1) + \cdots \\ \qquad = \sum_{\nu=0} \binom{\alpha+\nu\beta}{\nu} \Delta^\nu \varphi(x-\nu\beta). \end{cases}$$

$$(23)\quad \varphi'(x) = \sum_{\nu=1} \frac{1}{\nu} \binom{\nu\beta-1}{\nu-1} \Delta^\nu \varphi(x-\nu\beta).$$

Die obere Grenze ∞ ist bei dem Zeichen Σ fortgelassen, um anzuzeigen, daß die Reihe endlich und soweit fortzusetzen ist, bis die Glieder gleich Null werden. Wz.

W. Wirtinger. Einige Anwendungen der Euler-Maclaurinschen Summenformel, insbesondere auf eine Aufgabe von Abel. Acta Math. 26, 255-272.

I. Setzt man nach Stieltjes

$$(1)\qquad P_1(x) = [x] - x + \tfrac{1}{2},$$

so ist für alle nicht ganzzahligen Werte von x

$$(2)\qquad P_1(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}.$$

Aus $P_1(x)$ werden die Funktionen $P_k(x)$ durch die Rekursionsformeln:

$$(3)\quad \begin{cases} P_k(x) = (-1)^k \frac{dP_{k+1}(x)}{dx} \qquad (0 < x < 1), \\ \int_0^1 P_{k+1}(x)\,dx = 0, \quad P_{k+1}(x+1) = P_{k+1}(x). \end{cases}$$

Die Funktionen $P_k(x)$ sind identisch mit den Bernoullischen, und es ist $P_{2k}(r) = 2^{-2k+1}\pi^{-2k}\zeta(2k)$, wo $\zeta(s) = \sum_1^\infty n^{-s}$ ist.

II. Ist $F(x)$ eine reelle oder komplexe Funktion der reellen Veränderlichen x, welche im Intervall von a bis $a+Nb$, wo b positiv und N eine positive ganze Zahl ist, überall eine stetige Derivierte hat, so ist

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\lim_{N=\infty} l\,\frac{(y+1)(y+2)\cdots(y+N)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots N}N^{-y} = (y+\tfrac{1}{2})\,ly - y + 1 \\ &\qquad - \int_0^\infty \frac{P_1(z)}{1+z}dz + \int_0^\infty \frac{P_1(z)}{y+z}dz, \end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_0^N F(a+nb) = \int_0^N F(a+zb)\,dz \\ &+\tfrac{1}{2}(F(a+Nb)+F(a)) - b\int_0^N P_1(z)\,F'(a+zb)\,dz. \end{aligned}\right.$$

Hat $F(x)$ in dem betrachteten Intervall noch weitere stetige Derivierten, so erhält man die Eulersche oder Euler-Maclaurinsche Summenformel:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_0^N F(a+nb) = \int_0^N F(a+zb)\,dz + \tfrac{1}{2}(F(a+Nb)+F(a)) \\ &+ \sum_{h=0}^{k}(-1)^h P_{2h+2}(0)\,(F^{(2h+1)}(a+Nb) - F^{2h+1}(a))\,b^{2h+1} \\ &\qquad + \theta_k, \\ &\theta_k = (-1)^{k+2}\,b^{2k+3}\int_0^N P_{2k+3}(z)\,F^{(2k+3)}(a+bz)\,dz \\ &\qquad = (-1)^{k+1}\,b^{2k+2}\int_0^N P_{2k+2}(z)\,F^{(2k+2)}(a+bz)\,dz. \end{aligned}\right.$$

III. Setzt man $F(x) = l(y+x)$, wo y irgend eine reelle oder komplexe Zahl bedeutet, ausgenommen die reellen negativen Zahlen, und gibt dem Logarithmus seinen Hauptwert, so ergibt sich aus (9) für $a = 0$, $b = 1$:

$$\sum_0^N l(y+n) = \int_0^N l(y+z)\,dz + \tfrac{1}{2}(l(y+N)+l(y))$$
$$+\, l(y) - \int_0^N \frac{P_1(z)}{y+z}dz,$$

und hieraus folgt die Gleichheit der beiden wichtigsten Ausdrücke aus der Theorie der Gammafunktionen (links steht das Gaußsche Produkt, rechts die Stieltjessche Form der Stirlingschen Formel), hier unmittelbar aus der Eulerschen Formel hergeleitet.

IV. Für $F(x) = x^{-s}$, $a = 1$, $b = 1$ enthält man aus (9)

$$(14) \begin{cases} \sum_0^N (1+n)^{-s} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1-s} + \frac{(1+N)^{-s+1}}{1-s} \\ \qquad + \frac{1}{2}(1+N)^{-s} + s\int_0^N P_1(z)(1+z)^{-s-1}\,dz \end{cases}$$

und, da man zur Grenze für ein unendliches N übergehen kann:

$$(15) \quad \zeta(s) = \sum_1^\infty n^{-s} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1-s} + s\int_0^\infty P_1(z)(1+z)^{-s-1}\,dz.$$

Hierin ist die linke Seite definiert, solange der reelle Teil von $s > 1$ ist; die rechte Seite stellt jedoch eine analytische Funktion von s dar, solange der reelle Teil von s positiv bleibt; durch (15) ist demnach unmittelbar die analytische Fortsetzung von $\zeta(s)$ für das Gebiet der s-Werte mit positivem reellen Teil gegeben.

Ebenso leicht erhält man andere Sätze aus der Eulerschen Formel. unter andern z. B., wenn E die Eulersche Konstante bedeutet:

$$(21) \begin{cases} \sum_0^N (1+n)^{-1} = l(1+N) + E \\ \qquad + \frac{1}{2}(1+N)^{-1} - \int_N^\infty P_1(z)(1+z)^{-2}\,dz. \end{cases}$$

und hieraus durch partielle Integration die bekannte Summenformel.

V. Setzt man $F(z) = e^{-z^\lambda \pi x}$, $a = 0$, $b = 1$, nimmt x und λ reell und positiv an, so erhält man aus (9)

$$(25) \qquad x^{\frac{1}{\lambda}} \sum_0^\infty e^{-n^\lambda \pi x} = \frac{1}{\lambda}\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)\pi^{-\frac{1}{\lambda}} + \theta x^{\frac{1}{\lambda}},$$

wo θ zwischen 0 und 1 liegt.

VI. Die Reihen (26) $\sum_0^\infty e^{in\varphi}(1+n)^{-s}$ konvergieren für jedes s, dessen reeller Teil > 1 ist, und ein beliebiges reelles φ, ferner für ein s, dessen reeller Teil von Null verschieden und $\leqq 1$ ist, und für alle reellen Werte von φ, ausgenommen Null und ganze Vielfache von 2π; sie divergieren in allen andern Fällen.

VII. Ist eine Funktion durch eine Potenzreihe definiert und haben die Koeffizienten c_n die Eigenschaft, daß sich der Quotient c_{n+1}/c_n von einem bestimmten n an in eine nach ganzen fallenden Potenzen von n

fortschreitende Reihe entwickeln läßt: $1+\frac{\alpha+i\beta}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\frac{a_3}{n^3}+\cdots$, so lassen sich immer r Zahlen $g_0, g_1, g_2, \ldots$ und erforderlichenfalls eine Größe h so bestimmen, daß

$$(36)\quad \begin{cases} f(x)=hl(1-x) \\ +\sum\limits_{m=0}^{r-1} g_m\Gamma(\alpha+i\beta-m+1)(1-x)^{-\alpha-i\beta+m-1}+\sum\limits_{0}^{\infty} q_n x^n, \end{cases}$$

wo die letzte Potenzreihe rechts am ganzen Konvergenzkreis der ersten Reihe konvergiert und ebenfalls zu dem hier betrachteten Typus gehört. Dabei ist r eine beliebige ganze Zahl, welche größer ist als $1+\alpha$. Das logarithmische Glied tritt niemals auf, wenn nicht $\beta=0$ und α eine ganze Zahl ist, welche größer oder gleich -1 ist.

Die Funktion $f(x)$ hat daher höchstens für $x=1$ keinen endlichen Wert. Wz.

M. KRAUSE. Zur Theorie der ultra-bernoullischen Zahlen und Funktionen. Leipz. Ber. **54**, 139-205.

Referat in einem späteren Kapitel.

E. PASCAL. Sopra i numeri bernoulliani. Lomb. Ist. Rend. (2) **35**, 377-389.

Bei seinen Untersuchungen über die Gruppentheorie war der Verf. u. a. auf gewisse Zahlen $\gamma^{(s)}$ gekommen [vgl. F. d. M. **32**, 376, Z. 6 v. u.], die durch die Rekursionsformel

$$\gamma^{(s)}+\frac{1}{2!}\gamma^{(s-1)}+\frac{1}{3!}\gamma^{(s-2)}+\cdots+\frac{1}{s!}\gamma'+\frac{1}{(s+1)!}\gamma=0$$

mit $\gamma=1$, $\gamma'=-\frac{1}{2}$ verknüpft sind. Diese Zahlen $\gamma^{(s)}$ haben eine einfache Beziehung zu den Bernoullischen Zahlen, nämlich

$$\gamma^{(2n)}=(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{2n!};\ \gamma^{(2n+1)}=0\ (n=1,2,\ldots);\ \gamma'=-\frac{1}{2}.$$

Für diese Zahlen $\gamma^{(s)}$ leitet Verf. Identitäten ersten Grades und ebenso Identitäten zweiten Grades her. Gz.

L. CRAWFORD. A proof of Rodrigues' theorem

$$\sin nx=\frac{n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\left(\frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\sin^{2n-1}x,$$

and some expansions derived from it. Edinb. M. S. Proc. **20**, 11-15.

Bedeutet X_n die Funktion auf der rechten Seite der Gleichung, so wird gezeigt, daß $X_n+X_{n-2}=2\cos x\,X_{n-1}$, woraus das Resultat sofort folgt. Anwendungen auf die Entwicklungen von $\sin nx$ und $\cos nx$ nach Potenzen von $\operatorname{tg} x$. Gbs. (Lp.)

T. H. Blakesley. On a method of mechanically obtaining ϑ from the hyperbolic trigonometrical functions of ϑ. Phil. Mag. (6) 4, 238-240.

Beschreibt ein Instrument, das durch einfaches Abrollen unter gewissen Bedingungen die Ermittelung des zu einem bestimmten Wert von sinhyp. oder coshyp. gehörigen Argumentes gestattet. Br.

G. H. Hardy. On the zeroes of the integral function

$$x - \sin x = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Messenger (2) 31, 161-165.

G. H. Hardy. On the zeroes of certain integral functions. Messenger (2) 32, 36-45.

Setzt man $x = \xi + i\eta$, so hat die Gleichung $x - \sin x = 0$ die einzige reelle Wurzel 0; die Zahlen ξ und η werden zunächst durch die Formeln

$$\xi = (2p + \tfrac{1}{2})\pi + \alpha, \; \eta = \log(4p+1)\pi + \beta \quad (\pm p = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

gegeben, wo α und β sehr kleine Zahlen sind. Hieran knüpft der Verf. die Diskussion der Gleichung $ax - \sin x = 0$, deren Wurzeln sich asymptotisch den Punkten:

$$\pm(2p + \tfrac{1}{2})\pi \pm i \log\{(4p+1)\pi a\}$$

nähern. Dieselben Methoden der Untersuchung werden in dem zweiten Artikel auf andere Fälle angewandt, weil der Verf. die Ermittelung der Nullstellen ganzer Funktionen für sehr wichtig hält. Das erste Beispiel ist

$$\sin x - \Sigma a_s x^s = 0 \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

wo die a_s reell, a_n positiv angenommen werden. Die Wurzeln nähern sich asymptotisch den Punkten

$$(2p + \tfrac{1}{2})\pi + i\{\log 2a_n + n \log(2p + \tfrac{1}{2})\pi\}.$$

Weitere Beispiele sind $e^x - \Sigma a_s x^s = 0$; die Wurzeln, nähern sich asymptotisch ebenfalls bestimmten Werten, die aber verschieden von einander sind, je nachdem $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$ ist. Lp.

P. Wolfskehl. Über einen Satz von Hermite in (3) 1, 25. Arch. der Math. u. Phys. (3) 4, 179.

Beweis der Formel: $x > \sin x > \dfrac{2x}{\pi}$. Wz.

P. BARBARIN. Sur les tables trigonométriques centésimales. Revue de Math. spéc. 12, 449-453.

Vom Jahre 1905 ab müssen die Kandidaten der Militärschule von Saint-Cyr und der Polytechnischen Schule bei der Prüfung Tafeln benutzen, welche nach dem System der Zentesimalteilung des Kreisquadranten eingerichtet sind; der Verf. teilt deshalb für solche Kandidaten, welche noch Tafeln mit der bisher gebräuchlichen Sexagesimalteilung besitzen, drei Tabellen mit, mit deren Hülfe sich der Übergang von dem einen Systeme zum andern leicht ausführen läßt. An einigen Beispielen wird der Gebrauch dieser Tabellen erläutert. Zch.

E. LEBON. Sulla identità di due metodi elementari pel calcolo di π. Mat. pure ed appl. 2, 197-199.

Eine untere Grenze für π ergibt sich, wenn man den Umfang eines Kreises mit dem des eingeschriebenen regulären n-Ecks vergleicht. Der Umfang dieses n-Ecks ist größer als der Umfang des ihm einbeschriebenen Kreises, und der Umfang des erstgenannten Kreises kleiner als der Umfang des ihm umgeschriebenen regulären n-Ecks. Beide Bedingungen liefern eine obere Grenze für π. Verf. gibt einen „neuen Beweis“ für die Identität der beiden oberen Grenzen. Lwt.

A. C. DIXON. Note on the logarithmic series. Math. Gazette 2, 111-113.

N. NIELSEN. Note sur la fonction Gamma. Mat. pure ed appl. 2, 249-253.

In einer früheren Arbeit war Verf. auf einen Grenzwert gestoßen. Der zweite Teil enthält die Bestimmung eines allgemeineren Ausdrucks.

Von der Richtigkeit der vorhergehenden Bestimmung der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^{p,r} - 1}$$

hat Ref. sich nicht überzeugen können. Für den einfachen Fall der Goldbachschen Reihe $(p = 1, r = 2)$ sowie für den Eulerschen Fall $(p = r = 2)$ fällt der Fehler heraus, nicht aber im Falle $p = 3, r = 2$ (Gl. 10). Warum sollte hier z. B. n nicht gleich 4 gesetzt werden dürfen? $\alpha_n^{p,r}$ bedeutet die n-te Zahl in der nach der Größe geordneten Reihe:

$$(ps + r)^{\nu} \begin{pmatrix} r = 2 \text{ oder } 3 \text{ oder } 4 \ldots \text{ oder } p + 1 \\ s = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu + 2, 3, 4, \ldots \end{pmatrix}$$

Lwt.

G. A. Barbieri. Alcune ricerche relative alla funzione Γ Euleriana. Periodico di Mat. (2) 4, 276-278.

Mit Hülfe einiger Formeln von Gauß über die hypergeometrische Reihe und die Gammafunktion werden unendliche Produkte und Reihenentwicklungen für π aufgestellt, z. B.:

$$\pi = \lim_{n=\infty} \frac{2^{4n+1}}{2n+1} \left[\frac{(n!)^2}{2n!}\right]^2,$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots.$$

Lp.

J. Beaupain. Sur une extension de la formule de Stirling. Belg. Bull. Sciences 1902, 943-945.

Eine Formel, die $\log \Gamma(a+\xi)$ als Reihe für alle Werte von ξ zwischen 0 und 1 gibt. Mn. (Lp.)

M. Godefroy. Sur la convergence de la série hypergéométrique. Nouv. Ann. (4) 2, 64-65.

Weierstraß hat gezeigt, daß, wenn man die Funktion $\Gamma(x)$ als Grenze des Produktes

$$\Pi(x) = n^x \frac{1 \cdot 2 \ldots n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

für $n=\infty$ auffaßt, der Ausdruck

$$\frac{1}{n^x} \frac{\Gamma(x+n)}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)}$$

für dieselbe Grenze gegen 1 konvergiert. Dieses Resultat wird hier auf die Diskussion der Konvergenz der Gaußschen hypergeometrischen Reihe

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots$$

angewendet. Sind a, b, c die reellen Teile von α, β, γ, so kann man den Modul des allgemeinen Gliedes U_n setzen:

$$|u_n| = \lambda_n n^{a+b-c-1} |x|^n,$$

wo λ_n ein Koeffizient ist, der für $n=\infty$ gegen eine Grenze konvergiert. Der Radius der Konvergenz ist 1, und die Reihe der Moduln ist nur konvergent, wenn $a+b-c<0$. M.

E. B. van Vleck. A determination of the number of real and imaginary roots of the hypergeometric series. American M. S. Trans. 3, 110-131.

Zur Bestimmung der Anzahl der reellen Nullstellen, welche die hypergeometrische Funktion $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ bei bestimmt gegebenen reellen

Parametern α, β, γ zwischen $x = 0$ und $x = 1$ besitzt, hatte F. Klein eine bemerkenswerte Methode entwickelt (Math. Ann. **37**, 573-590; F. d. M. **22**, 444-445), die sich auf die konforme Abbildung der positiven Halbebene auf ein Kreisbogendreieck vermittelst des Quotienten zweier Fundamentalintegrale der hypergeometrischen Differentialgleichung und auf einen sehr bekannten Satz von Sturm über die Nullstellen von Integralen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung stützt. Klein fand die gesuchte Anzahl reeller Nullstellen gleich einer gewissen Zahl E oder $E+1$ und rekurrierte zur Entscheidung darüber, welche von diesen beiden Zahlen richtig ist, auf die hypergeometrische Funktion selbst, während jene Zahlen aus geometrischen Betrachtungen flossen.

Der Verf. der vorliegenden Abhandlung nimmt die Kleinsche Methode wieder auf und zeigt, daß die Anzahl der reellen Nullstellen direkt am Kreisbogendreieck festgestellt werden kann, ohne weitere Betrachtungen zu Hülfe zu nehmen.

Ferner vervollständigt der Verf. die Kleinsche Methode in bemerkenswerter Weise nach der Richtung, daß damit auch die Anzahl der komplexen Nullstellen festgestellt wird. Die Einzelergebnisse der Untersuchung lassen sich nicht ohne längere Erklärungen wiedergeben. Erwähnt mag aber werden, daß die Methode nicht auf die hypergeometrische Differentialgleichung beschränkt ist, sondern auf jede reguläre lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit reellen Parametern (reellen singulären Punkten, Exponenten usw.) ausgedehnt werden kann. Um die Anzahl von Nullstellen eines Integrals in der positiven Halbebene oder in einer zwischen singulären Punkten liegenden Strecke der reellen Achse zu finden, hat man nur das Kreisbogenpolygon zu konstruieren, in welches durch den Quotienten zweier beliebigen Partikularintegrale die Halbebene abgebildet wird. Gz.

Ch. J. de la Vallée Poussin. Rapport sur un mémoire de M. Beaupain intitulé: Sur les fonctions d'ordre supérieur de Kinkelin. Belg. Bull. Sciences 1902, 306-312.

Die von dem Verf. betrachteten Funktionen $G_\lambda(a)$ genügen einer Differentialgleichung, einer Funktionalrelation und haben die Einheit als Anfangswert:

$$D^{\lambda+2} \log G_\lambda(a) = 2!\, D^2 \log \Gamma(a), \quad G_\lambda(a+1) = a^{a^\lambda}\, G_\lambda(a).$$

Sie unterscheiden sich von gewissen, von Glaisher betrachteten Funktionen um ein ganzes Polynom des Grades $\lambda+1$. In jedem der vier Kapitel dehnt der Verf. eine bekannte Eigenschaft der Funktionen $\Gamma(a)$ auf die $G_\lambda(a)$ aus. 1. Die Gaußsche Relation. 2. Die Stirlingsche Formel. 3. Die Kummersche Reihe. 4. Eigenschaften, die Alexejewski entdeckt hat. Mn. (Lp.)

W. Wirtinger. Zur Darstellung der hypergeometrischen Funktion durch bestimmte Integrale. Wien. Ber. **111**, 894-900.

Erledigung einer bisher unbestätigten Bemerkung Riemanns betreffend die Transformation eines hypergeometrischen Integrals mit den Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in ein solches mit den Exponenten

$$-\alpha-1, -\beta-1, -\gamma-1, -\delta-1.$$

Darstellung der hypergeometrischen Funktion als eindeutiger Funktion der durch $x = k^2(\tau)$ definierten elliptischen Modulfunktion, auf einem neuen Wege hergeleitet. G. K.

L. Saalschütz. Die Summation der Arcussinus-Reihe. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **33**, 229-234.

Mit Hülfe der Binomialreihe wird für arc sin x die Ableitung der Potenzreihe bewerkstelligt. „Da aber bei dieser heuristischen Methode immer unendlich viele Glieder fortgelassen werden, so erfordert die wissenschaftliche Strenge, die gefundene Reihe zu summieren, was dadurch geschieht, daß aus der gefundenen Reihe eine Funktionalgleichung für deren Summe erschlossen und daß als Lösung derselben eine betreffende Funktion, hier arc sin x, erkannt wird. Und dieser Teil der Aufgabe bietet auf angegebenem Wege besondere Schwierigkeiten dar.“ Lp.

B. Elliptische Funktionen.

J. Tannery, J. Molk. Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. Tome IV: Calcul intégral (IIe partie). Applications. Paris: Gauthier-Villars. IX u. 303 S. gr. 8°.

Mit diesem vierten Bande ist das Werk zum Abschluß gebracht worden. Auf den ersten 86 Seiten wird zunächst noch die im III. Bande begonnene „Umkehrung“ zu Ende geführt. Das IX. Kapitel handelt von der Auswertung der Integrale $\int dz/R(z)$, wo

$$\{R(z)\}^2 = Az^4 + 4Bz^3 + 6Cz^2 + 4Dz + E.$$

Die Berechnung wird auf einem beliebigen Wege für die Weierstraßsche Normalform gelehrt und dann im allgemeinen Falle hierauf reduziert. Das Kapitel X beschäftigt sich allgemein mit den elliptischen Integralen. An diese beiden Kapitel schließen sich die Kapitel XI und XII etwas lose an: Die birationalen Substitutionen von Weierstraß nebst der Integration der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4,$$

endlich partielle Differentialgleichungen für die elliptischen Funktionen.

Als eine praktisch sehr wertvolle Beigabe folgt nun (S. 88-158) eine Zusammenstellung der Formeln aus dem Teile, der als „Integral-

rechnung“ bezeichnet war, ähnlich wie am Schlusse des zweiten Bandes nach Beendigung der „Differentialrechnung“ eine Sammlung der Formeln aus den beiden ersten Bänden abgedruckt war. Eine Note über die Bestimmung der inversen Funktion von $\wp(u)$ vermittelst der unter CXXVIII und CXXIX gegebenen Formeln macht den Beschluß dieses Abschnittes.

Die „ersten Anwendungen“ der elliptischen Funktionen, welche nun folgen, sind auf die Seiten 167-263 beschränkt, können daher nicht weit gehen. Das erste Kapitel mit den ersten Anwendungen auf die Geometrie und die Mechanik bringt die Rektifikation der Ellipse und der Lemniskate, die Komplanation des dreiachsigen Ellipsoids, die Behandlung des einfachen und des sphärischen Pendels, sowie der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt bei Abwesenheit äußerer Kräfte.

Das zweite Kapitel enthält die nächst liegenden Anwendungen auf die Algebra und die Zahlentheorie: Teilung der Perioden durch eine ganze Zahl, Modulargleichungen, Problem der Transformationen, Teilung der Perioden durch 3 und 5 nebst den zugehörigen Modulargleichungen, Teilung einer Schleife der Lemniskate in 3, 4, 5 gleiche Teile, Teilung des Arguments, komplexe Multiplikation, Zerlegung einer ganzen Zahl in eine Summe von vier Quadraten.

Es folgen fünf Noten: 1. Über die durch die Gleichung

$$\tau = i\,X'(x)/X(x)$$

definierte Funktion von x und über einen Satz von Picard. 2. Über die arithmetisch-geometrischen Folgen von Gauß. 3. Über die Kovarianten H und T einer biquadratischen Form. 4. Über eine Transformation zweiter Ordnung, welche die beiden Fälle verbindet, in denen die Invarianten reell sind. 5. Über den Sinn der Änderung der Thetafunktionen für reelle Werte des Arguments in dem normalen Falle.

Als wertvolle und interessante Zugabe wird am Schlusse ein Brief von Ch. Hermite an J. Tannery vom 24. September 1900 abgedruckt, dem Tannery erläuternde Bemerkungen vorausschickt. „Wir haben gesagt, daß die Formeln $XLVI_{1,2,3}$, welche die Funktionen $\varphi(T)$, $\psi(T)$, $\chi(T)$ $\left(T = \frac{c + d\tau}{a + b\tau},\ ad - bc = 1\right.$ und a, b, c, d ganze Zahlen) mit Hülfe von $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$ ausdrücken, von Hermite herrühren. Er hat sie 1858 ohne Beweis gegeben. Der in seinem Briefe enthaltene Beweis ist der einzige, den er somit veröffentlicht hat.“ Lp.

G. Schouten. Inleiding tot de studie der elliptische functiën van Weierstrass. Delft: J. Waltman jr. 152 S. 8°.

Dieses Buch (Einleitung in das Studium der Weierstraßschen elliptischen Funktionen) enthält eine kurze Darstellung der Theorie, geeignet um angehenden Studierenden einen ersten Überblick und eine Anleitung zum weiteren Studium zu bieten. Vorangeht im I. Kapitel eine ge-

drängte Entwicklung der Weierstraßschen Funktionentheorie, in welcher der Verf. seine Disposition an O. Biermanns „Theorie der analytischen Funktionen" anlehnt. Das II. Kapitel bringt die Lehre von den einfachsten eindeutigen Funktionen und ihren Umkehrungen. Die beiden folgenden Kapitel handeln über eindeutige ganze Funktionen mit einer einfach oder auch doppelt unendlichen Reihe gegebener Nullstellen, womit der Weg zu der σ-Funktion und ihren Ableitungen angebahnt ist. Die Art und Weise, in welcher dabei der Verf. die Identität von Sinusreihe und Sinusprodukt zu beweisen sucht, ist freilich nicht ganz einwandfrei. Kapitel V und VI enthalten die eigentliche Theorie der elliptischen Funktionen und der Umkehrung des elliptischen Integrals unter Voraussetzung reeller Invarianten. Im Schlußkapitel werden zur Anwendung der Theorie zwei Fälle der zentralen Bewegung, die Bewegung des sphärischen Pendels und endlich die kräftefreie Rotationsbewegung eines Körpers um seinen Massenmittelpunkt einer eingehenden Diskussion unterzogen. Kl.

A. B. Exercices et lectures sur les fonctions elliptiques (Préparation à l'agrégation des sciences mathématiques). Notes réunies. Nouv. Ann. (4) **2**, 66-77.

Aus verschiedenen Lehrbüchern und Abhandlungen von C. Jordan, Greenhill, E. Rouché, G. Humbert, Hermite, Mathieu und mehreren anderen sind 42 Aufgaben aus der Theorie der elliptischen Funktionen zusammengestellt. M.

A. G. Greenhill. Les fonctions elliptiques au point de vue de leurs applications. Annuaire des math. 429-444.

Um die elliptischen Funktionen auch außerhalb des Kreises der eigentlichen Mathematiker einzubürgern, empfiehlt der Verf. die Behandlung solcher Probleme, die auf elliptische Integrale dritter Gattung führen, so vorzunehmen, wie er selbst sie seit längerer Zeit in seinen größeren Arbeiten durchgeführt hat, nämlich die Fälle zu bevorzugen, in denen pseudoelliptische Integrale auftreten. Zur Erleichterung der vorzunehmenden Rechnungen schlägt er die Herausgabe passender kurzer Formelsammlungen vor, nach dem Muster derjenigen, welche die Nouvelles Annales im Jahre 1900 schon für die Zwecke französischer Prüfungen in einer kleinen besonders ausgegebenen Broschüre zusammengestellt haben. Lp.

G. Mittag-Leffler. Un mémoire d'Abel. Acta Math. **26**, 1-2.

N. H. Abel. Recherches sur les fonctions elliptiques. Second mémoire. Acta math. **26**, 3-42.

Die Christiania le 27 août 1828 datierte Abhandlung Abels, die zum Zentennarium seiner Geburt von G. Mittag-Leffler veröffentlicht ist,

war für das J. für Math. bestimmt gewesen. Sie ist auch, wie Randbemerkungen von der Hand Crelles zeigen, diesem richtig zugegangen. Crelle hat aber, man weiß nicht warum, nur den ersten Paragraphen unter dem Titel Théorèmes sur les fonctions elliptiques im vierten Bande seines Journals veröffentlicht. Das Manuskript ist dann in Libris Sammlung geraten und hat später der 1894 in Rom verkauften Sammlung Manzoni-Borghesi angehört, aus der es Mittag-Leffler erworben hat. Wenn auch fast alle Theoreme, die in dieser Fortsetzung der unsterblichen Recherches enthalten sind, Aufnahme in andere Abhandlungen Abels gefunden haben, und wenn darin keine Ergebnisse zu finden sind, die bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft neu wären, so hat die Veröffentlichung doch großen historischen Wert, da sie auf die Verkettung und die Entwicklung der Ideen Abels neues Licht wirft. „Man wird dazu gedrängt, zu denken“, behauptet der Herausgeber, „daß, wenn Crelle die Abhandlung unverkürzt veröffentlicht hätte, die Recherches sur les fonctions elliptiques von Anfang an eine weit vollständigere und vollendetere Doktrin gebildet haben würden, und daß auf diese Weise Abel schon in den Augen seiner Zeitgenossen als der wahre und wesentliche Begründer der Theorie der elliptischen Funktionen erschienen sein würde.“ St.

J. W. L. Glaisher. On the relation of the Abelian to the Jacobian elliptic functions. Acta Math. 26, 241-248.

Setzt man

$$\mathrm{sn}(x) = \frac{\mathrm{s}(x)}{\mathrm{n}(x)}, \quad \mathrm{cn}(x) = \frac{\mathrm{c}(x)}{\mathrm{n}(x)}, \quad \mathrm{dn}(x) = \frac{\mathrm{d}(x)}{\mathrm{n}(x)},$$

so unterscheiden sich die Funktionen $\mathrm{s}(x)$, $\mathrm{c}(x)$, $\mathrm{d}(x)$ und $\mathrm{n}(x)$ von den Thetafunktionen nur um Faktoren, die von dem Modul k abhängen. Die vollständige Entwicklung der Theorie der elliptischen Funktionen verlangt dann die Betrachtung der sämtlichen 12 Quotienten, die sich aus diesen vier Funktionen s, c, d, n bilden lassen. Da aber die Anzahl der Formeln sehr groß wird, so pflegt man eine Gruppe von drei dieser zwölf Funktionen mit gemeinsamem Nenner als „Standardgruppe“ auszuwählen, wie das Abel und Jacobi getan haben; es sind das in leicht verständlicher Bezeichnungsweise bei Abel sd, cd, nd, und bei Jacobi sn, cn, dn. Dazu würde dann noch die Gruppe sc, dc, nc kommen. Der Verf. vergleicht die Formeln für die drei Gruppen und konstatiert, daß jede ihre Vorzüge und Nachteile hat. Abels Form der elliptischen Funktionen erweist sich als besonders geeignet für die Geometrie der Lemniskate. Glaisher meint, daß diese Eigenschaft dazu beigetragen habe, daß Abel gerade die Gruppe der sd, cd, nd gewählt habe. Ohne Zweifel hat er hierin recht; denn die Aufzeichnungen Abels in seinem Pariser Notizbuch machen es fast gewiß, daß der Ausgangspunkt seiner Untersuchungen das Problem der Teilung der Lemniskate gewesen ist, wobei die algebraischen Gesichtspunkte ausschlaggebend

waren; sehr wahrscheinlich ist es, daß die Disquisitiones arithmeticae von Gauß, besonders die Sectio septima, für Abel die Anregung zur Beschäftigung mit der Teilung der Lemniskate gegeben haben. Da nach dem kürzlich veröffentlichten Tagebuch von Gauß nicht, wie Schering annahm, das arithmetisch-geometrische Mittel, sondern die Betrachtung der Lemniskate (curvam lemniscatam perscrutari coepi, Jan. 8, 1797) der Ausgangspunkt der Untersuchungen von Gauß gewesen ist, so gewinnt diese Kurve fundamentale Wichtigkeit für die Geschichte der elliptischen Funktionen. St.

H. Andoyer. Sur la forme doublement quadratique et ses rapports avec la théorie des fonctions elliptiques. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **19**, 491-513.

Der Verf. will, wie er selbst sagt, einen Kommentar zu dem neunten Kapitel des zweiten Teiles von Halphens Traité des fonctions elliptiques geben. Seine Darstellung unterscheidet sich von der Halphens wohl nur dadurch, daß die Rolle der Invarianten der doppelt quadratischen Form mehr in den Vordergrund tritt. St.

O. Biermann. Über die Diskriminante einer in der Theorie der doppeltperiodischen Funktionen auftretenden Transformationsgleichung. (III. Mitteilung.) Wien. Ber. **111**, 1444-1462.

Nachdem in der ersten Mitteilung (F. d. M. **31**, 449, 1900) die Form der Diskriminante derjenigen Transformationsgleichung entwickelt worden war, deren Lösungen die Verhältnisse der aus einem Integralmodul c transformierten k und der entsprechenden Multiplikatoren M sind, waren in der zweiten Mitteilung (F. d. M. **32**, 446, 1901) Nullstellen der Diskriminante $D(c)$ gefunden worden. Es blieb aber die Frage unentschieden, ob so alle Nullstellen von $D(c)$ erhalten werden. Der Weg, auf dem man zur Entscheidung gelangen könnte, wird angegeben; die Rechnungen werden jedoch nur für den Transformationsgrad $n = 3$ durchgeführt, in dem keine weiteren Nullstellen existieren. Ob man, wie der Verf. meint, diese Tatsache als Hindeutung darauf ansehen darf, daß es sich für beliebige n ebenso verhält, erscheint dem Referenten zweifelhaft. St.

P. Kokott. Das Additionstheorem der elliptischen Funktionen in geometrischer Form. Arch. der Math. u. Phys. (3) **3**, 226-242.

Die Punkte des Umfanges eines Kreises werden durch eine einfache geometrische Konstruktion in eindeutige Beziehung gesetzt zu den Werten des Argumentes $K + ix$, wo x von 0 bis $2K'$ variiert. Es gelingt dann, mit den einfachsten Mitteln der ebenen Trigonometrie das Additionstheorem aufzustellen. Die geometrische Darstellung wird durch eingehende Behandlung der Verdoppelung des Argumentes erläutert. St.

P. Kokott. Untersuchungen über die Landensche Transformation. J. für Math. **124**, 165-178.

Die von dem Verf. vorgeschlagene Darstellung der elliptischen Funktionen am Kreise (vgl. das vorstehende Referat) wird für die Landensche Transformation nutzbar gemacht, die als Abbildung zweier Kreise auf einander erscheint. Sodann wird durch Einführung der in der elementaren Dreieckslehre unter dem Namen des Apollonius benannten Kreises eine neue Deutung der Formel jener Transformation gewonnen und gleichzeitig die Darstellung der elliptischen Funktionen am Kreise mit der durch den Apolloniusschen Kreis und mit der bekannten Darstellung von Halphen in Verbindung gesetzt. St.

A. L. Dixon. A geometrical investigation of some addition theorems for elliptic integrals. Quart. J. **33**, 245-257.

Eine von Cayley (Math. Pap. **11**, 73) für Integrale erster Gattung durchgeführte Idee wird im Anschluß an Staudes Abhandlung über die geometrische Deutung der Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale (F. d. M. **15**, 433, 1883) auf Summen von Integralen zweiter und dritter Gattung ausgedehnt. St.

W. Snow Burnside. On the integrals of the differential equation $\frac{du}{\sqrt{f(u)}}+\frac{dv}{\sqrt{f(v)}}=0$, where $f(x)\equiv ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e$, considered geometrically. Lond. M. S. Proc. **34**, 230-234.

Drückt man die Koordinaten eines Punktes auf einem Kegelschnitt als quadratische Funktionen einer Variable φ aus in der Form:

$$kx=a_0\varphi^2+2b_0\varphi+c_0,\ ky=a_1\varphi^2+2b_1\varphi+c_1,$$
$$kz=a_2\varphi^2+2b_2\varphi+c_2,$$

stellt dann die Gleichung für die Sehne zwischen 2 Punkten u, v des Kegelschnittes auf und sucht die Bedingungsgleichung $\Sigma=0$ dafür, daß diese Sehne einen zweiten Kegelschnitt berührt, so genügt Σ einer Differentialgleichung $\frac{du}{\sqrt{F(u)}}+\frac{dv}{\sqrt{F(v)}}=0$ von demselben Typus, wie $\frac{du}{\sqrt{f(u)}}+\frac{dv}{\sqrt{f(v)}}=0$, wo $f(x)\equiv ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e$. Nun läßt sich zeigen, daß man die beiden Kegelschnitte so auswählen kann, daß $F(u)$ mit $f(u)$ identisch wird. Der Verf. wählt die beiden Kegelschnitte

$$U\equiv ax^2+cy^2+ez^2+2dyz+2czx+2bxy,\ V\equiv y^2-4zx$$

und sucht die Bedingung, daß die Sehne uv von V den Kegelschnitt

$U - \varrho V = 0$ berühre. Diese geometrische Betrachtung zeigt, daß die Reduktion des elliptischen Differentials auf die Weierstraßsche Normalform, die sonst rein analytisch durchgeführt wird (s. z. B. Enneper, Ell. Funktionen, 2. Aufl. Halle 1890, S. 27sq. oder Greenhill, Elliptic Functions), von der Kontravariante der Kegelschnitte U und V abhängig ist.

M.

M. Hamburger. Über die Darstellung doppeltperiodischer Funktionen als Quotienten von Thetafunktionen. Berl. Math. Ges. Ber. 1, 19-21.

Nach einem Satze von Weierstraß läßt sich jede $2n$-fach periodische Funktion von n komplexen Variabeln als Quotient zweier Thetafunktionen darstellen, vorausgesetzt, daß die Funktion im Endlichen meromorph ist (den Charakter einer rationalen Funktion besitzt). Durch das Studium des neuen Beweises, den H. Poincaré für diesen Fundamentalsatz gegeben hat (Acta Math. **22**, 89-178; s. F. d. M. **29**, 370, 1898), ist Hamburger auf seine Darstellung der doppeltperiodischen Funktionen geführt, als deren Ausgangspunkt ihm die Entwicklung von $\log(z - z')$ in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von z dient, unter der Voraussetzung, daß $|z'| > |z|$ ist. Ist die doppeltperiodische Funktion F, welche die Form $\frac{e^{\nu(z)}}{e^{\nu'(z)}} \cdot e^U = \frac{Q(z)}{Q'(z)} e^U$ annimmt, wo U eine Funktion 2. Grades von z ist, gleich $\wp(u)$, so wird $Q'(z) = (\sigma(z))^2$. M.

E. Fabry. Sur une formule fondamentale des fonctions elliptiques. Nouv. Ann. (4) 2, 114-123.

Aus den Eigenschaften der Funktionen $\wp(u)$ und $\zeta(u)$ und mit Hülfe der Relation $\delta = \eta\omega' - \omega\eta' = \pm \frac{1}{2}\pi i$ (wo $\eta = \zeta(\omega)$, $\eta' = \zeta(\omega')$ und das Zeichen $\pm$ das des Koeffizienten von i in dem Verhältnis ω'/ω ist) läßt sich der Wert des Integrals

$$I = \int_{e_2}^{e_1} \int_{e_3}^{e_2} \frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{-16(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}} = \frac{\pi}{2}$$

(wo $e_1 > x > e_2 > y > e_3$ ist) herleiten. (Siehe Greenhill, Les fonctions elliptiques et leurs applications, Trad. p. Griess, Paris 1895, Exercices à la fin du Chapitre VI). Hier wird nun gezeigt, daß man umgekehrt direkt den Wert des Doppelintegrals I ohne Hülfe der elliptischen Funktionen auswerten und daraus einen Beweis der Formel

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \pm \tfrac{1}{2}\pi i$$

herleiten kann. M.

N. Delaunay. Sur le calcul graphique des fonctions elliptiques et de quelques fonctions ultra-elliptiques. S. M. F. Bull. 30, 113-121.

Derselbe Gedanke, welcher den Verf. auf den im folgenden Referat erwähnten Mechanismus geführt hat, wird hier zu einer graphischen Konstruktion verwertet, mit deren Hülfe sich die elliptischen Funktionen und gewisse ultraelliptische Funktionen berechnen lassen, und zwar mit einer Annäherung, die für die meisten technischen Probleme, in denen diese Funktionen auftreten, ausreichend ist. Die Annäherung läßt sich mit Hülfe der Eulerschen Formel

$$\int_a^b f(\varphi)\,d\varphi = h\left[\frac{f(a)}{2} + f(\varphi_1) + f(\varphi_2) + \cdots + \frac{f(b)}{2}\right] - \frac{h^2\varepsilon}{12}[f'(b) - f'(a)]\,(1 > \varepsilon > 0)$$

bestimmen, wo h der Zuwachs der Variabeln und $\varphi_p = \varphi_{p-1} + h$ ist. Die Differenzen für die graphische Darstellung sind

$$\xi_1 = \frac{\pi}{4n}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right)}} - 1\right]$$

und

$$\xi_2 = \frac{\pi^2\,\varepsilon\,k^2 \sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)\cos\left(\frac{p\pi}{2n}\right)}{4n^2\cdot 12\left[1 - k^2\sin^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right)\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

ξ_1 ist zu vernachlässigen für $k < 0,3$, ξ_2 für $k < 0,9$, wenn man überhaupt Fehler, die $\overline{\gtrless} \frac{1}{250}$, vernachlässigen darf. Für $0,9 > k > 0,3$ wird die Konstruktion etwas geändert, durch Subtraktion der Längen $\frac{\pi}{4n}(\sec\vartheta - 1)$. Für $k > 0,9$ muß man sich der Landenschen Transformation bedienen. Das hier gegebene graphische Verfahren läßt sich auch auf die Konstruktion des ultraelliptischen Integrals

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(m_1 - x)(m_2 - x)\ldots(m_j - x)}} = U$$

anwenden, in welchem alle Wurzeln $m_1, m_2, \ldots, m_j$ reell sind. M.

N. Delaunay. Sur les calculateurs cinématiques des fonctions elliptiques. Darb. Bull. (2) 26, 177-180.

In dem hier beschriebenen Mechanismus beschreibt eine Kurbel jedesmal einen Winkel $\varphi = \operatorname{am} u$, wenn ein Rad sich um den Winkel

u dreht. Mit Hülfe eines Zirkels lassen sich leicht die Längen sn u, cn u, m dn u auf diesem Mechanismus für jedes u messen. Durch Anbringung dieses Räderwerks an dem von Delaunay erfundenen Ellipsographen (s. Darboux Bull. (2) **19**) hat ein Schüler desselben, Lipetz, Student an dem Polytechnischen Institut zu Warschau, einen Mechanismus konstruiert, mit dessen Hülfe man das elliptische Integral zweiter Gattung berechnen kann (s. F. d. M. **32**, 705, 1901). M.

O. Kragh. Bemaerkning angaaende en formel af Hermite. Nyt Tidss. for Math. **13** B, 80-83.

De Sparre hat in einer Abhandlung in Acta Math. **3**, 130 gezeigt, daß man haben muß

$$A e^{\frac{n(n+1)}{2K} ix} \frac{H(x-a_1)\, H(x-a_2) \cdots H(x-a_n)\, H(x+\omega)}{\Theta^{n+1}(x)}$$

$= M\varphi(\text{sn}^2 x) - \text{sn}\, x \cdot \text{cn}\, x \cdot \text{dn}\, x \cdot \psi(\text{sn}^2 x)$, eine Formel von welcher Kragh bemerkt, daß sie nur ein Beispiel von dem bekannten Satze ist, daß eine doppeltperiodische Funktion $F(z)$, welche dasselbe Periodenparallelogramm besitzt wie eine doppeltperiodische Funktion zweiter Ordnung $\varphi(z)$, rational durch $\varphi(z)$ und $\varphi'(z)$ ausgedrückt werden kann. Der Verf. wendet diesen Satz dazu an, eine allgemeinere Formel herzuleiten, welche die Formel von de Sparre als einen speziellen Fall einschließt. V.

G. H. Hardy. Note on the limiting values of the elliptic modular-functions. Quart. J. **34**, 76-86.

In Riemanns Werken (**2**, 312-320) befindet sich ein Fragment aus dem Nachlasse, in dem das Verhalten der Modulfunktionen $\log k$, $\log k'$, $\log \frac{2K}{\pi}$ untersucht wird, wenn q sich dem Werte $e^{\frac{b\pi i}{a}}$ nähert. Von Smith (Messenger **11**, 1-11; F. d. M. **13**, 356, 1881) und Dedekind in einer dem Fragmente beigefügten Note sind die betreffenden Beweise in strenger Form geliefert worden, und zwar vermittelst der linearen Transformation der Thetafunktionen. In der vorliegenden Note wird das Problem in direkter Weise in Angriff genommen und gelöst. Sh.

R. Bricard. Sur l'arc de la lemniscate. Nouv. Ann. (4) **2**, 150-161.

Bekanntlich besteht zwischen den Koordinaten der beiden Punkte, welche einen konstanten Bogen einer Lemniskate begrenzen, eine algebraische Gleichung, die das Integral einer Eulerschen Differentialgleichung ist. Nun haben Chasles (C. R. 1845, 199) und G. Humbert (Journ. de Math. (5) **1**, 216; F. d. M. **26**, 660, 1895) eine geometrische Deutung dieser algebraischen Relation gegeben. Bricard stellt zunächst diese

bekannten Resultate nach derselben Methode zusammen, indem er die Lemniskate als Fußpunktenkurve der gleichseitigen Hyperbel betrachtet. Man kann aber auch eine andere Erzeugungsweise der Lemniskate zugrunde legen. Verbindet man nämlich einen festen Punkt O eines Kreises vom Radius r mit den Endpunkten A, B eines variablen Durchmessers und bestimmt auf OB einen Punkt P so, daß $AP = r\sqrt{2}$, so ist der Ort von P eine Lemniskate mit dem Zentrum O. Auf diese Weise ergeben sich Sätze über Lemniskatenbogen von konstanter Länge, welche wiederum einfachere geometrische Konstruktionen liefern als die früheren. Unter anderem fließt daraus ein einfacher Zusammenhang zwischen der Gaußschen Kreisteilung und der Abelschen Lemniskatenteilung. M.

G. Fontené. Interprétation par l'aire d'un secteur gauche de l'argument des fonctions $\frac{\sigma_i u}{\sigma u}$. Nouv. Ann. (4) 2, 27-34.

Die Parameterdarstellung einer Raumkurve vierten Grades, die der Durchschnitt zweier Flächen zweiten Grades, deren Achsen längs Ox, Oy, Oz gerichtet sind, kann durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + e_1 = \frac{y^2}{\beta^2} + e_2 = \frac{z^2}{\gamma^2} + e_3 = \wp u$$

gegeben werden, wo $\wp(u)$ der Differentialgleichung

$$\wp'^2 = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3) \quad (e_1 + e_2 + e_3 = 0)$$

genügt. x, y, z sind eindeutige Funktionen von u, und man hat:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\sigma_1 u}{\sigma u}, \quad \frac{y}{\beta} = \frac{\sigma_2 u}{\sigma u}, \quad \frac{z}{\gamma} = \frac{\sigma_3 u}{\sigma u}, \quad \wp' u = -2\frac{x}{\alpha}\frac{y}{\beta}\frac{z}{\gamma},$$

$$\frac{dx}{\alpha} = -\frac{y}{\beta}\frac{z}{\gamma}du, \quad \frac{dy}{\beta} = -\frac{z}{\gamma}\frac{x}{\alpha}du, \quad \frac{dz}{\gamma} = -\frac{x}{\alpha}\frac{y}{\beta}du.$$

Durch (b^2, c'^2), (c^2, a'^2), (a^2, b'^2) mögen die Halbachsen der Kegelschnitte bezeichnet werden, welche die Projektionen der Kurve auf die Achsenebenen sind. Ist A ein fester, M ein laufender Punkt der Kurve, so wird das Differential dS der konischen Oberfläche AOM ausgedrückt durch die Gleichung:

$$4(dS)^2 = [b^2 c'^2(\wp u - e_1) + c^2 a'^2(\wp u - e_2) + (a^2 b'^2)(\wp u - e_3)](du)^2.$$

Hieraus lassen sich interessante Folgerungen ziehen. Für eine sphärische Kurve wird $dS = 0$. Man kann auch $\wp u$ durch eine Funktion $\varphi(u)$ ersetzen, die der Differentialgleichung

$$(\varphi' u)^2 = 4M^2(\varphi u - e'_1)(\varphi u - e'_2)(\varphi u - e'_3)$$

genügt, ohne $e'_1 + e'_2 + e'_3 = 0$ vorauszusetzen. M.

H. F. Stecker. Concerning the elliptic $\wp(g_2, g_3, z)$-function as coordinates in a line complex, and certain related theorems. American M. S. Bull. (2) 8, 148-153.

Systeme von Koordinaten, die von Zeit zu Zeit für die Kummersche Oberfläche aufgetaucht sind und mehr oder weniger zu den elliptischen Funktionen in Beziehung standen, lassen vermuten, daß die Existenz solcher Koordinatensysteme nur stückweise Kunde von einer allgemeineren Wahrheit gibt; da nämlich die Kummersche Oberfläche in bestimmter Weise mit einem Linienkomplex zweiter Ordnung zusammenhängt, d. h. seine Singularitätenfläche ist, so muß sich jedes Koordinatensystem auf einer solchen Oberfläche unter ein allgemeines System einordnen, das wenigstens mit dem Komplex zweiter Ordnung zusammenhängt, vermutlich auch mit dem allgemeinen Komplex. Die vorliegende Note befaßt sich mit dieser allgemeinen Frage und ihrer Anwendung auf die Kummersche Oberfläche und gewisse andere Konfigurationen. Lp.

A. Emch. Applications of elliptic functions to problems of closure. Colorado studies 1, 81-133.

E. G. Hogg. On certain surface and volume integrals of an ellipsoid. Rep. Austral. Assoc. 8, 191-195.

Rothe. Lösung einiger Aufgaben über Flächenberechnungen mit Hülfe elliptischer Integrale. Pr. Nordhausen. 22 S. 4°.

V. Snyder. Models of the Weierstrass' sigma function and the elliptic integral of the second kind. Amer. Math. Monthly 9, 121-123.

C. Hyperelliptische, Abelsche und verwandte Funktionen.

E. Landfriedt. Thetafunktionen und hyperelliptische Funktionen. Leipzig: G. J. Göschen. IV u. 155 S. 8° (Sammlung Schubert XLVI).

Das erste Kapitel: Theorie der Riemannschen Thetafunktion, ist in der Hauptsache eine Wiedergabe der in Math. Ann. **54** erschienenen Abhandlung Christoffels über diesen Gegenstand (vgl. F. d. M. **32**, 457, 1901). Das zweite Kapitel: „Anwendungen der ϑ-Funktionen", enthält die Lösung des Jacobischen Umkehrproblems und die Darstellung der Funktionen und Integrale der Klasse sowie der Wurzelfunktionen m-ten und speziell zweiten Grades durch Thetaquotienten; es schließt sich im wesentlichen an die Abhandlungen Webers an: „Zur Theorie der Umkehrung der Abelschen Integrale" (J. für Math. **70**, 314-345, 1869) und „Theorie der Abelschen Funktionen vom Geschlecht $p=3$" (Berlin 1876).

Diese beiden Kapitel bilden den ersten Teil des Buches, dessen zweiter Teil der speziellen Lehre der hyperelliptischen Funktionen ge-

widmet ist, in der Weise, daß das dritte Kapitel die zweiblättrige Riemannsche Fläche, ihre Funktionen und Integrale behandelt, das vierte Kapitel die Theorie der ϑ-Funktionen, das fünfte Kapitel die Anwendung derselben zur Lösung des Umkehrproblems und zur Darstellung der Wurzelfunktionen zweiten Grades enthält. Für diesen zweiten Teil war die Abhandlung Pryms: „Zur Theorie der Funktionen in einer zweiblättrigen Fläche", Zürich 1866, maßgebend, der sich der Verf. in allen wesentlichen Punkten anschließt.

Dem Zwecke des Buches, eine zusammenhängende Darstellung des behandelten Gegenstandes zu geben widerspricht es, wenn der Verf. sich wiederholt und an nicht unwichtigen Stellen mit einem Hinweise auf fremde Arbeiten begnügt; konsequenterweise hätte er dann sein ganzes Buch durch einige Zitate ersetzen müssen. Kr.

M. Noether. Rationale Reduktion der Abelschen Integrale. Acta Math. **26**, 205-226.

Die Reduktion der Abelschen Integrale umfaßt einmal die Zerlegung eines gegebenen Integrals in Integrale der drei Gattungen und weiter die Zurückführung der Integrale zweiter Gattung auf eine möglichst kleine Anzahl, $2p$, von algebraisch unabhängigen Transzendenten mit fest gegebenen Unstetigkeiten.

An eine Durchführung dieser beiden Aufgaben stellt der Verf. die Forderungen, daß alle vorkommenden Funktionen und Formen in homogenen Veränderlichen betrachtet werden, daß sie alle zu $f=0$ adjungiert seien, daß die Untersuchung frei von Umwegen sei, daß sie alle Reduktionsmöglichkeiten übersehen lasse, und daß endlich die Trennung der Integrale dritter und zweiter Gattung und die Zurückführung der letzteren auf $2p$ durch rationale Operationen geschehe.

Der Verf. zeigt, wie man insbesondere die letzte Forderung ohne Verletzung der vorhergehenden erfüllen kann. Kr.

Alfa. Dimostrazione di una relazione di condizione negli integrali iperellittici. Mat. pure ed appl. **2**, 199-203.

Wenn gewisse einfache Beziehungen zwischen den Moduln eines hyperelliptischen Integrals bestehen, läßt es sich auf hyperelliptische Integrale zurückführen, die nur von halb so viel Moduln abhängen. Lwt.

M. Krause. Sur une formule sommatoire dans la théorie des fonctions à deux variables. C. R. **135**, 1045-1048.

Ist $f(x, y)$ eine ganze rationale Funktion m-ten Grades von x und y und bezeichnet $F_1(x, y)$ den Ausdruck:

$$F_1(x,y) = f(x+ph,\ y+qk) - f(x+ph,y) - f(x,y+qk) + f(x,y),$$

so ist:

$$hk\sum_{r=1}^{p}\sum_{s=1}^{q}\frac{\partial^2 f(x+rh,\ y+sk)}{\partial x\,\partial y}$$

$$= \sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{n!}\left(h\,b\frac{\partial F_1}{\partial x} + kb'\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^{(n)},$$

wo in gewohnter Weise $\frac{\partial^k F_1}{\partial x^k}$ für $\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^{(k)}$, ... zu setzen und unter $b^{(k)}$, bez. $b'^{(k)}$ die k-te Bernoullische Zahl zu verstehen ist. Kr.

A. L. Dixon. **Addition theorems for hyperelliptic integrals.** London M. S. Proc. **34**, 172-185.

Die schon in einer früheren Abhandlung (London M. S. Proc. **33**, 274-283; F. d. M. **32**, 458, 1901) auseinandergesetzte Methode, die Sätze der Theorie der hyperelliptischen Integrale aus den Eigenschaften der konfokalen Oberflächen zweiter Ordnung abzuleiten, wird in der vorliegenden Abhandlung zur Gewinnung der Additionstheoreme der Integrale zweiter und dritter Gattung benutzt. Kr.

G. A. Kinn. **Über die lineare Transformation der Thetafunktionen.** Ungar. Ber. **18**, 52-70.

Wählt man für $\vartheta_1(v,\tau)$ die Darstellung durch ein unendliches Produkt, so liefert der Eisensteinsche Satz über die Wertänderung eines bedingt konvergenten Produkts bei Änderung der Reihenfolge seiner Faktoren für die lineare Transformation die Formel:

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\,\vartheta_1(v,\tau) = C\vartheta_1(v',\tau'),$$

wobei:

$$C = (a_0 + a_1\tau)\frac{\vartheta_1'(0,\tau)}{\vartheta_1'(0,\tau')}$$

ist. Andererseits liefert die Differentialgleichung

$$\frac{\partial\vartheta_1}{\partial v^2} = 4\pi i\,\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\tau}$$

für die Abhängigkeit der Konstante C vom Thetamodul τ die Gleichung:

$$C = \frac{c}{\sqrt{a_0 + a_1\tau}},$$

und man kann daher die von τ unabhängige Größe:

$$c=(\sqrt{a_0+a_1\tau})^3\,\frac{\vartheta_1'(0,\tau)}{\vartheta_1'(0,\tau')}$$

für solche linearen Transformationen, für welche eine komplexe Multiplikation besteht, mit Hülfe der letzten Gleichung dadurch bestimmen, daß man für τ den Modul der komplexen Multiplikation setzt. Kr.

G. A. Kinn. **Über die Transformation zweiten Grades der Thetafunktionen.** Pr. Sächsisch-Regen. 16 S. 4°.

W. Reichardt. **Über verallgemeinerte Picardsche Differentialgleichungen im Gebiete der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung.** Pr. Wettiner Gym. Dresden. 42 S. 4°.

Den Ausgangspunkt bildet eine Differentialgleichung von der Form:

$$R(z)\frac{d^2Z}{dz^2}+\left[\frac{1}{2}R'(z)-\frac{n}{z-b}R(z)\right]\frac{dZ}{dz}=\frac{1}{4}\frac{H(z)}{z-b}Z,$$

in der $R(z)$ eine ganze rationale Funktion fünften Grades, n eine positive ganze Zahl oder Null, b eine beliebige Konstante und $H(z)$ eine sogleich näher zu bestimmende ganze rationale Funktion vierten Grades ist. Stellt man nämlich für die vorliegende Differentialgleichung die Bedingung, daß sie ein Paar linear unabhängiger Integrale von der Form:

$$Z=\sqrt{G(z)}\,e^{\pm c\int\frac{(z-b)^n\,dz}{G(z)\sqrt{R(z)}}}$$

besitze, bei denen $G(z)$ eine ganze rationale Funktion und c eine beliebige Konstante bezeichnet, so existiert nur eine endliche Anzahl von zusammengehörigen Funktionen $G(z)$ und $H(z)$.

Führt man in zwei solchen Differentialgleichungen an Stelle der bisherigen Veränderlichen z_1, z_2 zwei neue Variabeln u_1, u_2 ein durch die Gleichungen:

$$du_1=\frac{z_1\,dz_1}{s_1}-\frac{z_2\,dz_2}{s_2},\quad du_2=\frac{dz_1}{s_1}-\frac{dz_2}{s_2},$$

so gehen dieselben in ein Paar Differentialgleichungen von der Form:

$$(z_1+z_2)\frac{\partial^2Z}{\partial u_1^2}+2\frac{\partial^2Z}{\partial u_1\partial u_2}-X_1\frac{\partial Z}{\partial u_1}-X_2\frac{\partial Z}{\partial u_2}=\frac{1}{4}X_3Z,$$

$$z_1z_2\frac{\partial^2Z}{\partial u_1^2}-\quad\frac{\partial^2Z}{\partial u_2^2}\quad-Y_1\frac{\partial Z}{\partial u_1}-Y\frac{\partial Z}{\partial u_2}=\frac{1}{4}Y_3Z$$

über, in denen die X, Y gewisse Funktionen von z_1, z_2 sind, die sich, ebenso wie z_1+z_2 und z_1z_2, alle durch vierfach periodische Funktionen von u_1, u_2 ausdrücken lassen. Stellt man sodann in der gleichen Weise die Integrale:

$$Z = \sqrt{G(z_1)\,G(z_2)}\,e^{\pm c\left[\int \frac{(z_1-b)^n\,dz}{G(z_1)\sqrt{R(z_1)}} \mp \int \frac{(z_2-b)\,dz}{G(z_2)\sqrt{R(z_2)}}\right]}$$

als Funktionen u_1, u_2 dar, so ist die Integration der erhaltenen Differentialgleichungen damit geleistet. Kr.

D. D. MORDUCHAY BOLTOWSKY. Über eine Verallgemeinerung des Theorems von Abel. Charkow Ges. (2) 7, No. 6, 268-283 (Russisch).

Es sei (1) $F(z_1, u) = 0$ eine irreduzible Gleichung m-ten Grades einer algebraischen Kurve. Eine andere Kurve, deren Gleichung

(2) $$\Phi(z, u;\ a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0$$

rational k Parameter $a_1, a_2, \ldots, a_k$ enthält, schneidet die erste in Punkten, deren z durch die Gleichung (3) $\Omega(z;\ a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0$ gegeben sind. Es werde diese Gleichung nach Adjunktion der Wurzel ξ der irreduzibeln Gleichung (4) $\theta(\xi;\ a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0$ auf das Rationalitätsgebiet $(a_1\, a_2 \ldots a_k)$ reduzibel, und es sei (5) $\Psi(z, \xi_1, a_1, \ldots, a_k) = 0$ einer ihrer irrdeduziblen Faktoren im neuen Gebiete. Dann wird die Summe der Abelschen Integrale, welche analog der von Abel betrachteten ist, aber nur den Wurzeln von (5) entspricht, auf die Summe der k Abelschen Integrale zurückgeführt, welche von der durch (4) definierten Irrationalität abhängen. Im besonderen Falle, wenn als (2) die Gleichung

$$\varphi(z, u) + \lambda\,\psi(z, u) + \mu\,\chi(z, u) = 0$$

genommen wird, wo λ und μ durch die Gleichung $\theta(\lambda, \mu) = 0$ verbunden sind, reduziert sich diese Summe auf ein einziges Abelsches Integral.

Si.

D. Kugelfunktionen und verwandte Funktionen.

R. MARCOLONGO. Sulla teoria delle funzioni sferiche. Atti della R. Accademia Peloritana 16, 109-126.

Lord Kelvin (Natural Philosophy, zweite Aufl.) entwickelte die Theorie der Kugelfunktionen mit drei Variabeln nach einer neuen, auf die alleinige Betrachtung der Kugelfunktion der Ordnung — 1 begründeten Methode. Diese Methode dehnt der Verf. auf Kugelfunktionen mit p Variabeln aus; er zeigt, daß jede Kugelfunktion der n-ten Ordnung eine lineare Funktion der ν unabhängigen n-ten Ableitungen von r^{-p+2} ist, wo:

$$r^2 = \sum_{h=1}^{p} x_h^2,\quad \nu = (2n+p-2)\binom{n+p-3}{p-2}.$$

Er beweist ferner den von Lord Kelvin ausgesprochenen Satz, nach welchem das Dirichletsche Problem für den von zwei konzentrischen Kugeln oder Kegeln eingeschlossenen Raum sich durch Kugelfunktionen von beliebigem Index auflösen läßt. Vi.

M. Lindow. Die Nullstellen des allgemeinen Integrals der Differentialgleichung für die zugeordneten Kugelfunktionen. Diss. Halle. Leipzig: G. Fock. 65 S. gr. 8°.

E. Haentzschel. Rotationscykliden und Laméscbe Produkte. Arch. der Math. u. Phys. (3) **4**, 57-64.

Der Aufsatz, der den Nebentitel „eine Antikritik zweier Abhandlungen Saffords“ führt, richtet sich gegen die von dem Genannten aufgestellten Behauptungen (vgl. F. d. M. **30**, 413, 549, 1899), wonach die von Haentzschel in seinen „Studien über die Reduktion der Potentialgleichung“ (Berlin 1893, vgl. F. d. M. **25**, 831) abgeleiteten Resultate sich auf die von dem Referenten früher gefundenen reduzierten, nicht aber eine Erweiterung derselben darstellen sollten. Haentzschel weist nach, daß Safford zu seinen unrichtigen Behauptungen teils durch einen unzulässigen Vergleich einer von ihm aufgestellten Gleichung mit gewissen Gleichungen der Studien gelangt, teils dadurch, daß er aus einem Sonderfall, in dem eine Kurvengleichung in ein Produkt zerfällt, auf das Zerfallen im allgemeinen Falle schließt. Im übrigen bemerkt Haentzschel, daß die Arbeiten von Safford nichts enthalten, was nicht schon von dem Referenten und von Haentzschel selbst vorher gefunden sei. Wn.

C. Cailler. Sur les fonctions de Bessel. Arch. sc. phys. Genève (4) **14**, 347-350.

A. S. Chessin. On some relations between Bessel functions of the first and of the second kind. Trans. Ac. St. Louis **12**, 99-108.

N. Nielsen. Équations différentiels linéaires obtenues pour le produit de deux fonctions cylindriques. Nouv. Ann. (4) **2**, 396-410.

Mit Benutzung einer Formel, die das Produkt zweier Zylinderfunktionen durch ein eine Zylinderfunktion enthaltendes Integral ausdrückt, zeigt der Verf., daß das Produkt

$$y = J_\mu(x)\,J_\nu(x)$$

der Differentialgleichung vierter Ordnung genügt:

$$(1)\quad \begin{cases} y'''' + \frac{6}{x}y''' + \left(4 + \frac{7-2\mu^2-2\nu^2}{x^2}\right)y'' \\ \quad + \left(\frac{16}{x} + \frac{1-2\mu^2-2\nu^2}{x^3}\right)y' + \left(\frac{8}{x^2} + \frac{(\mu^2-\nu^2)^2}{x^4}\right)y = 0; \end{cases}$$

und zwar ist das allgemeine Integral dieser Gleichung:

$$(2)\quad \begin{cases} y = AJ_\mu(x)J_\nu(x) + BJ_\mu(x)Y_\nu(x) \\ \qquad + CY_\mu(x)J_\nu(x) + DY_\mu(x)Y_\nu(x), \end{cases}$$

falls Y die Zylinderfunktion zweiter Art (für einen beliebigen Index) bezeichnet. Für den Fall $\nu = \pm\mu$ fallen von den in (2) enthaltenen vier partikularen Integralen zwei zusammen. Für diesen Fall genügt y der Gleichung dritter Ordnung:

$$(3)\qquad y''' + \frac{3}{x}y'' + \left(4 + \frac{1-4\mu^2}{x^2}\right)y' + \frac{4}{x}y = 0.$$

Die Funktionaldeterminante der vier partikularen Lösungen von (1) hat den Wert $(\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{2}{x}\right)^6$, die der drei partikularen Lösungen von (3) den Wert $\left(\frac{2}{x}\right)^3$.

Ohne Beweis wird dann der Satz mitgeteilt, daß das Produkt von n Zylinderfunktionen einer linearen Differentialgleichung der Ordnung 2^n genügt. Die Koeffizienten dieser Gleichung sind ganze Polynome von x, ihr Grad höchstens 2^n.

Zum Schluß wird für die Funktion $U^{\mu,\nu,n}(x)$, die als Koeffizient in der Entwicklung

$$\frac{1}{x-z} = \left(\frac{2}{z}\right)^{\frac{\mu+\nu}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n U^{\mu,\nu,n}(x)\, J^{\mu+n}(z)\, J^{\nu+n}(z)$$

auftritt, eine nicht homogene lineare Differentialgleichung vierter Ordnung abgeleitet, resp. für den Fall $\mu = \nu$ eine nicht homogene Gleichung dritter Ordnung. Wn.

L. Gegenbauer. Über Integrale, die Besselsche Funktionen enthalten. Amst. Ak. Versl. **10**, 748-752.

W. Kapteyn hatte (s. F. d. M. **32**, 465, 1901) die Werte verschiedener Integrale, die Besselsche Funktionen enthalten, ermittelt. Gegenbauer verallgemeinert die Resultate von Kapteyn. Ausgehend von einer früher von ihm aufgestellten Formel (s. F. d. M. **30**, 416, 1899; es handelt sich um die Formel S. 417 oben*)), drückt er den Wert der Integrale

$$\int_0^\infty \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(t\cos\varphi\cos\psi)\, J_{\frac{1}{2}(2\nu-1)}(t\sin\varphi\sin\psi)\, J_{\nu+m}(t)\,\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

durch eine Reihe aus. Setzt man darin für m eine ganze Zahl, sodann $\nu = 0$, so ergeben sich Formeln für die Integrale:

---

*) In dem Referat in den Fortschritten steht fälschlich am Ende der ersten Zeile ein Komma statt des Multiplikationszeichens.

$$\int_0^\infty \frac{\cos}{\sin}(t \cos\varphi \cos\psi) \cos(t \sin\varphi \sin\psi) J_\nu(t) \frac{dt}{t},$$

und diese gehen für $\psi = \frac{1}{2}\pi$, resp. $\psi = \pi$ in die Formeln von Kapteyn über. Auch der Fall $\nu = 1$ wird durchgeführt. Wn.

E. Gubler. Über bestimmte Integrale mit Besselschen Funktionen. Zürich: Naturf. Ges. **47**, 422-428.

Bei der Bestimmung des Integrals

$$\int_0^\infty J_0(\alpha x) \frac{d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$$

waren H. Weber (J. für Math. **75**; F. d. M. **5**, 569, 1873) und Sonine (Math. Ann. **16**; F. d. M. **12**, 400, 1880) zu verschiedenen Resultaten gelangt. Wie Gubler bemerkt, ist bei Weber nur in der Schlußformel durch ein Versehen ein Glied fortgeblieben. Geht man auf die vorletzte Webersche Formel zurück, die das vorstehende Integral durch ein anderes ausdrückt, und entwickelt letzteres in eine Reihe, so gelangt man genau zu demselben Ergebnis wie bei der Reihenentwicklung des Sonineschen Resultats.

Weiter leitet Gubler, von einer bekannten Formel ausgehend, durch Reduktion eines Doppelintegrals und mit Benutzung eines komplexen Integrationsweges die folgende Gleichung ab:

$$(1) \quad \begin{cases} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)} J_a(t) \dfrac{dt}{t + x} \\ \qquad = \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \dfrac{J_\lambda(x)}{\lambda + a} \gamma^{-\lambda - a} - \dfrac{\pi}{\pi i (a\pi)} J_a(x). \end{cases}$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung, in der $\gamma > 1$ zu nehmen ist, ist auf den Fall beschränkt, daß a keine ganze Zahl ist. Setzt man $a = n + \varepsilon$ und geht zur Grenze für $\varepsilon = 0$ über, so folgt der Wert des Integrals für ganzzahlige Indizes a. Auch der Wert des Integrals, in welches die linke Seite von (1) für $\gamma = 1$ übergeht, wird entwickelt, und aus diesem ergibt sich das Integral

$$\int_0^\infty J_a(t) \frac{dt}{t^2 + x^2}.$$

Speziell wird

$$(3^a) \quad \int_0^\infty J_0(t) \frac{dt}{t^2 + x^2} = \frac{\pi}{2x} J_0(ix) - \frac{1}{x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{x^{2\lambda+1}}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\lambda + 1))^2}.$$

Wn.

L. Gegenbauer. Über eine Relation des Herrn Hobson. Wien. Ber. **111**, 563-572.

In Lond. M. S. Proc. **25** (vergl. F. d. M. **25**, 837, 1893/1894) hatte Hobson u. a. die Kugelfunktionen sowie ihre Zugeordneten durch Integrale dargestellt, die Besselsche Funktionen enthalten. Gegenbauer verallgemeinert diese Formeln, indem er analoge Ausdrücke für die Funktionen C_n^ν, die als Koeffizienten bei der Entwicklung von

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu}$$

auftreten, und ihre Zugeordneten entwickelt. Er stützt sich dabei auf mehrere in seinen älteren Arbeiten (vgl. u. a. F. d. M. **7**, 303, 1875) abgeleitete Formeln, sowie auf die Transformation der hypergeometrischen Reihe. So ergibt sich zunächst, daß das Integral

$$(1)\quad \begin{cases} \int_0^\infty e^{-ax} x^\varrho J_\mu(a_1 x)\,dx \\ \quad (\mu>-1,\ \varrho+\mu+1>0,\ R(a)>0;\ |a|>|a_1|) \end{cases}$$

sich stets durch ein Jacobisches Polynom ausdrücken läßt, und letzteres hängt auf einfache Weise mit den C_n^ν zusammen. Als Resultat ergibt sich:

$$(2)\quad \begin{cases} C_\varrho^{\mu+\frac{1}{2}}(\cos\varphi) \\ \quad =\dfrac{2^\mu\,\Pi(\mu)}{\Pi(\varrho)\,\Pi(2\mu)\sin^\mu\varphi}\displaystyle\int_0^\infty e^{-x\cos\varphi}\,x^{\varrho+\mu}\,J_\mu(x\sin\varphi)\,dx, \end{cases}$$

eine Formel, die für $\mu=0$, $\varrho=n$ in die Hobsonsche Formel für $P_n(\cos\vartheta)$ übergeht. Eine analoge Formel wird auch für die m-te Zugeordnete der Funktion $C_\varrho^{\mu+\frac{1}{2}}$ aufgestellt.

Verbindet man ferner die Formel für das Integral (1) mit der Gleichung

$$(3)\quad J_m(x)\,J_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_{m+n}(2x\cos\varphi)\cos[(m-n)\varphi]\,d\varphi,$$

so läßt sich das Integral

$$(4)\quad \int_0^\infty e^{-ax}\,x^\varrho\,J_m(\alpha x)\,J_n(\alpha x)\,dx$$

$$[m+n+1>0,\ \varrho+m+n+1>0,\ m>-1,$$
$$n>-1,\ R(a)>0,\ |a|>|2\alpha|$$

durch eine hypergeometrische Reihe darstellen. Durch Spezialisierung folgt dann, daß die Integrale

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,[x^n J_n(\alpha x)]^2\,dx,\qquad \int_0^\infty e^{-ax}\,[x^n J_n(\alpha x)]^2\,x\,dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_n(\alpha x) J_{n+1}(\alpha x) x^{2n+1} dx, \int_0^\infty e^{-ax} J_n(\alpha x) J_{n+1}(\alpha x) x^{2n+2} dx$$

$$[R(a) > 0, |a| > |2\alpha|]$$

sich, wenn n ein ungerades (positives) Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist (das letzte auch noch für $n = -\frac{1}{2}$) durch Jacobische Polynome ausdrücken lassen.

Zum Schluß wird aus Formel (3), indem man darin für x die kleinste positive Wurzel von $J_n(x) = 0$ setzt, das Resultat gefolgert: Die kleinste positive Wurzel von $J_{2n+\varepsilon}(x)$ ist kleiner als das Doppelte der kleinsten positiven Wurzel von $J_n(x)$, falls

$$0 \leqq \varepsilon \leqq 1, n > -\frac{1+\varepsilon}{2}$$

ist. Wn.

A. C. Dixon. On a property of Bessel's functions. Messenger (2) **32**, 7-8.

Beweis des Satzes, daß zwischen je zwei aufeinander folgenden reellen Wurzeln von $J_n(x)$ eine einzige reelle Wurzel von $J_{n+1}(x)$ liegt.

Lp.

A. C. Dixon. The expansion of x^n in Bessel's functions. Messenger (2) **32**, 8.

Durch komplexe Integration wird der Ausdruck gefunden:

$$x^n = 2^n \cdot n! \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+s-1)(n+2s)}{s!} J_{n+2s}(x).$$

Lp.

N. Nielsen. Théorie nouvelle des séries asymptotiques obtenues pour les fonctions cylindriques et pour les fonctions analogues. Kjöb. Overs. 1902, 117-177.

Der Verf. behandelt in dieser Abhandlung die allgemeinsten Zylinderfunktionen (mit gebrochenen, irrationalen oder komplexen Indizes). Die allgemeinste Zylinderfunktion C^ν wird dadurch definiert, daß sie die zwei Fundamentalgleichungen

$$C^{\nu-1}(x) - C^{\nu+1}(x) = 2D\,C^\nu(x), \quad C^{\nu-1}(x) + C^{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} C^\nu(x)$$

befriedigen soll. Statt der von Neumann eingeführten Funktionen erster und zweiter Art $J^\nu(x)$ und $Y^\nu(x)$ führt der Verf. zwei neue Funktionen $H_1^\nu(x)$ und $H_2^\nu(x)$ ein (Hankelsche Funktionen), die mit den gewöhnlichen mittels der Gleichungen:

$$H_1^\nu(x) = J^\nu(x) + iY^\nu(x), \quad H_2^\nu(x) = J^\nu(x) - iY^\nu(x)$$

verbunden sind.

Darnach wird gezeigt, daß das Integral

$$U_\nu = \int_0^\infty e^{-\alpha x} (1 + \alpha y)^{\nu - \frac{1}{2}} \alpha^{\nu - \frac{1}{2}} \, d\alpha$$

gleich

$$\frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma(\nu + \frac{1}{2})\, e^{\frac{x}{2y} + \frac{\nu+1}{2}\pi i} H_1^\nu\left(\frac{xi}{2y}\right)}{2 x^\nu \sqrt{y}}$$

ist, und daß, wenn man y mit $-y$ vertauscht, H_1 mit H_2 vertauscht werden muß. Von diesem Integral ausgehend, wo $y = \frac{i}{2} e^{-\varphi i}$, $x = r$ gesetzt wird, gelangt der Verf. zu der Formel $(x = r e^{\varphi i})$:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha r} \left(1 + \frac{\alpha i}{2} e^{-\varphi i}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} \alpha^{\nu - \frac{1}{2}} \, d\alpha$$

$$= \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{r^{\nu + \frac{1}{2}}} e^{-\left(x - \frac{2\nu+1}{y}\pi\right)i} H_1^\nu(x),$$

$$= \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{r^{\nu + \frac{1}{2}}} (P_n(x) + i\, Q_n(x)) + \int_0^\infty e^{-\alpha r} R_n(\alpha)\, \alpha^{\nu - \frac{1}{2}} \, d\alpha,$$

wo $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ zwei Potenzreihen nach absteigenden Potenzen von x sind, und das letzte Integral stellt ein Restglied R_n' dar, von welchem gezeigt wird, daß bei hinlänglich großen x

$$|x^n R_n'| < \varepsilon$$

ist, wo ε beliebig klein gewählt werden kann. Diese Entwicklung erhält man, indem $(1 + \frac{1}{2}\alpha i e^{-\varphi i})^{\nu - \frac{1}{2}}$ nach Potenzen von α entwickelt wird, in Verbindung mit einem Restglied. Einer ähnlichen Entwicklung kann $H_2(x)$ unterworfen werden. Nach Poincaré wird hierdurch eine asymptotische Entwicklung von $H_1(x)$ und $H_2(x)$ erhalten.

Das Gesagte gibt nur ein Beispiel von den Sätzen, die in dieser Abhandlung abgeleitet werden, und von der gebrauchten Methode. Es ist aber sehr schwierig, ein zusammenhängendes Referat über die ganze Abhandlung zu geben. Nielsen behandelt eine Menge von Funktionen, die den Zylinderfunktionen von Lommel, Weber, Meissel, Mehler, Sonin analog sind, Integralausdrücke für solche Funktionen, Differentialgleichungen, die sie erfüllen, und asymptotische Darstellungen. V.

M. B. Porter. On the roots of functions connected by a linear recurrent relation of the second order. Annals of Math. (2) 8, 55-70.

In seiner Arbeit über homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung im ersten Bande von Liouvilles Journal bemerkt Sturm, daß er analoge Sätze, wie er sie dort für Differentialgleichungen aufgestellt, zuerst für Differenzengleichungen gefunden habe. Diese nicht veröffentlichten Sätze wieder aufzufinden und daraus durch einen Grenzübergang die entsprechenden Sätze für Differentialgleichungen herzuleiten, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit.

Es werden zuerst die Bedingungen dafür erörtert, daß die Funktionen

$$y_n(x), y_{n-1}(x), \ldots, y_0(x)$$

in dem reellen Intervalle $x_0 \leqq x \leqq x_1$ eine Sturmsche Folge bilden, derart, daß die Zahl der in einem Teilintervall verlorenen Zeichenwechsel gleich der Zahl der reellen Wurzeln von y_n in demselben Teilintervall ist. Dazu ist nötig, daß y_0 für keinen Wert des Intervalls $x_0 \ldots x_1$ verschwindet, daß nie zwei auf einander folgende y gleichzeitig verschwinden, daß ferner, wenn ein y verschwindet, die beiden benachbarten entgegengesetztes Zeichen haben, daß endlich, wenn $y_n = 0$ ist, gleichzeitig

$$\frac{d\,\dfrac{y_n}{y_{n-1}}}{dx} > 0.$$

Diese Kriterien werden nun angewandt auf solche y_n, die der Rekursionsformel (Differenzengleichung)

$$(1') \qquad y_{n+1} + G_n y_n' + y_{n-1} = 0$$

genügen. Zugleich wird gezeigt, daß die allgemeine Rekursionsformel

$$(1) \qquad L_n y_{n+1} + M_n y_n + N_n y_{n-1} = 0$$

durch Einführung einer neuen abhängigen Veränderlichen in die einfachere Gestalt (1') übergeführt werden kann. Damit die durch (1') bestimmten Funktionen $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_0$ eine Sturmsche Folge bilden, ist, falls G nur eine unabhängige Veränderliche x enthält, erforderlich:

$$(1^0) \qquad G'_m(x) \leqq 0, \qquad (2^0) \quad \left(\frac{y_1}{y_0}\right) \geqq 0.$$

Ferner trennen die Wurzeln von y_n und y_{n-1} einander, ebenso die Wurzeln von $y_n^{(1)}$ und $y_n^{(2)}$, wenn $y_n^{(1)}$ und $y_n^{(2)}$ zwei linear unabhängige Lösungen von (1') sind. Für diese Funktionen gilt nun das folgende Oszillationstheorem: Nimmt $G_n(x)$ beständig mit wachsendem x ab, so daß $G_n(x_0) \geqq L^2$, $G_n(x_1) \leqq -M^2\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$, und sind L^2 und M^2 hinlänglich groß, so gibt es in dem Intervall $x_0 \ldots x_1$ einen und nur einen Wert von x derart, daß 1) die Zahl der Zeichenwechsel in $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_1$ gleich einer gegebenen Zahl r ($\leqq n - 1$) ist, und daß 2) zugleich:

$$\frac{y_1(x)}{y_0(x)} = a, \quad \frac{y_n(x)}{y_{n-1}(x)} = a'$$

ist, wo a und a' reelle Konstanten bezeichnen. — Auch der Fall, daß die y analytische Funktionen mehrerer Parameter sind, wird kurz erörtert.

Anwendungen der Sätze werden gemacht 1. auf die Rekursionsformel, der die Kugelfunktionen genügen, 2. auf die Rekursionsformel für die Lommelsche Funktion $R^{n,m}(x)$, die bei der Darstellung der Zylinderfunktion $J_n(x)$ durch $J_{n+m-1}(x)$ und $J_{n+m}(x)$ als Faktor der letzteren beiden auftritt, 3. auf die Rekursionsformeln für Zähler und Nenner der Partialbrüche des Kettenbruches

$$F(x) = \alpha_1 x + \beta_1 - \cfrac{\gamma_1}{\alpha_2 + \beta_2 x - \cfrac{\gamma_2}{\alpha_3 + \beta_3 x} - \cdots} .$$

Zum Schluß wird, wie schon oben bemerkt, der Übergang von der Differenzengleichung (1') zu der Differentialgleichung $y'' = G(x) \cdot y$ bewerkstelligt, und für diese ergibt sich das Sturmsche Oszillationstheorem aus dem für die Differenzengleichung geltenden. Wn.

Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Kapitel 1.

Prinzipien der Geometrie.

G. Ricci. Anfänge und Entwicklung der neueren Auffassungen der Grundlagen der Geometrie. Deutsche Math.-Ver. **11**, 382-403.

Der Verf. betrachtet es als einen der größten Ruhmestitel des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der exakten Wissenschaften, „daß es eine Ära von Untersuchungen abgeschlossen hat, die allzu lange die Qual der Geometer gebildet hatten". Er denkt dabei an die Dreiteilung des Winkels und die Würfelverdoppelung, an die Quadratur des Kreises und an die Parallelentheorie. Der Geschichte dieses letzten Problems ist sein Vortrag gewidmet, der in wirklich fesselnder Weise erzählt, wie nach so vielen vergeblichen Versuchen, das Euklidische Axiom zu beweisen, nachdem man im 18. Jahrhundert der Lösung des Rätsels schon sehr nahe gekommen war, endlich im 19. fast gleichzeitig von verschiedenen Seiten her die Frage zum Abschlusse gebracht worden ist. El.

G. Ricci. Origini e sviluppo dei moderni concetti fondamentali sulla geometria. Annuario Univ. Padova per 1901/02.

B. Kagan. Ein System von Postulaten, welche die euklidische Geometrie definieren. Deutsche Math.-Ver. **11**, 403-424.

Ein äußerst lesenswerter Versuch, ein System von Definitionen und Postulaten aufzustellen, aus dem die Euklidische Geometrie streng formell entwickelt werden kann. Zwar begnügt sich der Verf. hier damit, den Gedankengang und die wichtigsten Momente einer beinahe vollendeten

ausführlichen Arbeit über den Gegenstand kurz darzulegen; aber was er gibt, ist hinreichend, um zu erkennen, daß seine Postulate wirklich, wie er behauptet, in dem Sinne von einander unabhängig sind, daß keines von ihnen mit Hülfe der übrigen bewiesen werden kann, und er macht entschieden den Wunsch rege, auch die ausführliche Darstellung seiner Untersuchungen kennen zu lernen. — In einer Reihe von Definitionen werden die Begriffe Mannigfaltigkeit von Elementen, Bewegungen einer Mannigfaltigkeit, Entfernung zweier Elemente, Raum und Punkte eines Raumes aufgestellt. Sodann werden rein formell auf analytischem Wege gewisse, sicher von einander verschiedene Räume (im ganzen zehn) charakterisiert. Nun werden nach und nach sieben Postulate aufgestellt, deren Berechtigung sich daraus ergibt, daß einzelne jener Räume Eigenschaften zeigen, die den andern fehlen. Jedes neue Postulat scheidet auf diese Weise unter allen möglichen Räumen eine gewisse Klasse von Räumen aus, die durch dieses Postulat in Verbindung mit den vorhergehenden vollständig definiert ist und für die sich gewisse Sätze beweisen lassen; zugleich wird durch jedes neue Postulat mindestens einer der noch übrig gebliebenen unter jenen zehn Räumen ausgeschlossen. Zuletzt bleiben nach Hinzufügung des siebenten Postulates nur noch die Räume übrig, in denen die Euklidische Geometrie gilt. El.

B. Kagan. Ein System von Postulaten, welche die euklidische Geometrie definieren. Odessa Ges. **20**, 67-105 (Deutsch).

Auszug aus einer größeren Arbeit, welche demnächst erscheinen wird. Auch in Deutsche Math.-Ver. **11** abgedruckt (vergl. das vorstehende Referat). Si.

D. Hilbert. Über die Grundlagen der Geometrie. Gött. Nachr. 1902, 233-241.

D. Hilbert. Über die Grundlagen der Geometrie. Math. Ann. **56**, 381-422.

In der ersten, am 8. Nov. 1901 der Göttinger Akademie vorgelegten Arbeit wird eine Untersuchung skizziert, die in der zweiten ausführlich dargestellt ist. Der Verf. beabsichtigt, ähnlich wie Lie ein System von geometrischen Axiomen aufzustellen, das auf dem Begriffe der Gruppe beruht, will aber die von Lie vorausgesetzte Differenzierbarkeit der die Bewegungen darstellenden Funktionen vermeiden und nur geometrisch ausdrückbare Forderungen benutzen. Er führt das aus für den Fall der ebenen Geometrie.

Unter Zahlenebene versteht er die gewöhnliche Euklidische Ebene mit einem rechtwinkligen Koordinatensysteme. Eine doppelpunktlose, überall stetige Kurve dieser Zahlenebene nennt er eine Jordansche Kurve, und wenn diese geschlossen ist, so nennt er das Innere des von der Kurve begrenzten Gebiets ein Jordansches Gebiet. Die Ebene definiert er als

ein System von Dingen (Punkten), die sich eindeutig umkehrbar auf die Punkte der Zahlenebene abbilden lassen. Mit Hülfe der Jordanschen Gebiete in der Zahlenebene kann dann der Begriff der Umgebung eines Punktes der Ebene definiert werden, und endlich werden die Bewegungen erklärt als eindeutig umkehrbare stetige Transformationen der Bildpunkte der Zahlenebene, bei denen der Umlaufungssinn jeder Jordanschen Kurve ungeändert bleibt. Hierzu kommen noch drei Axiome: I. Die Bewegungen bilden eine Gruppe. II. Durch die Bewegungen, die einen Punkt M in Ruhe lassen (durch die Drehungen um M), kann jeder von M verschiedene Punkt unendlich viele Lagen erhalten oder: „Der wahre Kreis besteht aus unendlich vielen Punkten." III. Gibt es Bewegungen, durch welche Punktetripel in beliebiger Nähe des Punktetripels ABC in beliebige Nähe des Punktetripels $A'B'C'$ übergeführt werden, so gibt es stets auch eine Bewegung, bei welcher das Punktetripel ABC genau in $A'B'C'$ übergeht. Hierbei wird von einem Punktetripel $A^*B^*C^*$ gesagt, daß es in beliebiger Nähe von ABC liegt, wenn A^* in einer beliebig kleinen Umgebung von A liegt usw. Es wird ferner nicht vorausgesetzt, daß die Punkte eines Punktetripels von einander verschieden sind. Demnach liegt in dem Axiome III, allerdings ziemlich versteckt, zugleich die Forderung, daß zwei verschiedene Punkte niemals durch Bewegung in beliebige Nähe zu einander geraten können. Auf Grund dieser Definitionen und Axiome gelingt es dem Verf., die Eigenschaften des wahren Kreises, die Drehungen um einen Punkt und schließlich die der wahren Geraden zu entwickeln, und er gelangt so entweder zur Euklidischen oder zur Lobatschefskij-Bolyaischen Geometrie, während die elliptische von vornherein dadurch ausgeschlossen ist, daß sich die Punkte der elliptischen Ebene nicht in einer mit den Axiomen verträglichen Weise auf die im Endlichen gelegenen Punkte der Zahlenebene abbilden lassen. El.

E. H. Moore. On the projective axioms of geometry. American M. S. Trans. 3, 142-158.

Als projektive Axiome der Geometrie bezeichnet der Verf. nach dem Vorgange von F. Schur die Hilbertschen Axiomgruppen I und II (die Axiome der Verknüpfung und Anordnung). Er versucht, diese Axiome durch einfachere zu ersetzen, und zwar gleich für den Raum von $n \geqq 2$ Dimensionen. Dabei bekämpft er die Behauptung von F. Schur, daß die Hilbertschen Axiome I, 3, 4, 5 überflüssig seien, und meint, diese Behauptung beruhe auf einer Verwechslung der Ebene, wie sie Hilbert definiert hat, mit der von Peano definierten Ebene. Es ist nicht möglich, den Inhalt der Arbeit kurz wiederzugeben; daß sie aber lesenswert ist, geht daraus hervor, daß Hilbert durch sie veranlaßt worden ist, in der zweiten Auflage seiner Grundlagen der Geometrie eines der Axiome der Gruppe II von der Liste der Axiome zu streichen und unter die Sätze aufzunehmen. Eine Bemerkung kann ich jedoch nicht unterdrücken. Nachdem der Verf. zuerst in drei Axiomen die Gerade und die zwischen

zwei Punkten A, B liegenden Punkte der Geraden AB eingeführt hat, stellt er als Axiom 4 dieses auf: „Eine Gerade, die eine Seite eines Dreiecks außerhalb und eine andere Seite innerhalb schneidet, schneidet die dritte Seite innerhalb“, und nunmehr hat es keine Schwierigkeit, die Ebene und die ebenen Räume von drei und mehr Dimensionen zu definieren. Mir scheint aber bei der Formulierung dieses Axioms die Voraussetzung, daß die Gerade die dritte Dreiecksseite überhaupt schneidet, nicht zu ihrem Rechte zu kommen. Man hat geradezu den Eindruck, als ob das Schneiden etwas Selbstverständliches wäre, und als müßte nur die Art des Schneidens durch ein Axiom festgelegt werden. Dazu kommt, daß die Voraussetzung, der dritte Schnittpunkt existiere immer, eine von vornherein nicht nötige Beschränkung des Begriffs der Ebene bedeutet.

El.

J. Kürschák. Das Streckenabtragen. Math. Ann. 55, 597-598.

Bei geometrischen Konstruktionen, die mit Hülfe des Lineals und des Streckenübertragers lösbar sind, kann man den Streckenübertrager durch ein Eichmaß ersetzen, das nur das Abtragen einer gewissen, durch das Eichmaß bestimmten Strecke a gestattet. Zunächst ist nämlich die Konstruktion der Parallelen zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt mit Hülfe von Lineal und Eichmaß lösbar, und darauf kann man die Aufgabe zurückführen, eine beliebige Strecke AB auf einer gegebenen Geraden von dem Punkte P dieser Geraden aus abzutragen.

El.

G. B. Halsted. The betweenness assumptions. Amer. Math. Monthly 9, 98-101.

E. H. Moore. The betweenness assumptions. Amer. Math. Monthly 9, 152-153.

Beweise für die Überflüssigkeit des Hilbertschen Axioms II, 4.

Lp.

J. Bolyai. Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens. Editio nova oblata ab Academia scientiarum Hungarica ad diem natalem centesimum auctoris concelebrandum. Ediderunt J. Kürschák, M. Réthy, B. Tötössy. Budapestini: Sumptibus Academiae scientiarum Hungaricae. 40 S. 4°.

P. Stäckel. Aus Johann Bolyais Nachlaß. Untersuchungen aus der absoluten Geometrie. Ungar. Ber. 18, 280-307.

Es handelt sich um Aufzeichnungen, die J. Bolyai nach dem Erscheinen seines Appendix, zum Teil erst in seinen letzten Lebensjahren gemacht hat. Leider war Johanns Schwungkraft damals schon erlahmt,

und er ist über skizzenhafte Aufzeichnungen und großartige Entwürfe nicht hinausgekommen; deshalb ist auch die Auslese aus seinem Nachlaß nicht allzu groß. Drei Fragen werden in der vorliegenden Arbeit nach den von J. Bolyai gemachten Aufzeichnungen erörtert. Erstens der Zusammenhang zwischen der sphärischen und der absoluten (Lobatschefskij-Bolyaischen) Geometrie, den Lobatschefskij, wie es scheint, nur äußerlich, durch den bekannten Übergang von den trigonometrischen Formeln der einen Geometrie zu denen der andern hergestellt hat, während J. Bolyai, dem die Abstandsfläche (Hypersphäre) als eine der drei Arten von Kugeln im Raume seiner absoluten Geometrie vollständig vertraut war, und der auch über das Wesen der imaginären Zahlen sehr gründlich nachgedacht hatte, den inneren Grund dieses Zusammenhangs wirklich aufdeckt. Zweitens handelt es sich um die Frage der Unbeweisbarkeit des 11. Euklidischen Axioms, auf die zurückkommen zu wollen J. Bolyai am Schlusse des Appendix verspricht. Leider haben sich von dem Beweise für die Unbeweisbarkeit, den Johann damals besessen haben muß, nur Bruchstücke vorgefunden. Dagegen aber sind lange Rechnungen erhalten, in denen Johann untersucht, ob nicht die Anwendung der Formeln der ebenen Trigonometrie auf die durch 4 oder 5 Punkte bestimmte räumliche Figur zu einem Widerspruche und damit zu einem Beweise des 11. Axioms führt. Während er bei 4 und 5 Punkten sich wirklich überzeugt hatte, daß kein Widerspruch vorliegt, hielt ihn die Mühseligkeit der erforderlichen Rechnungen ab, die Figur von 6 und mehr Punkten ebenso zu untersuchen, und er ist also niemals zur Gewißheit gekommen, ob sich nicht auf diesem Wege doch noch ein Widerspruch herausstellen könnte. Endlich wird drittens über die vier verschiedenen Methoden berichtet, die Johann zur Kubierung des Tetraeders angewendet hat, und es werden die von ihm aufgestellten Formeln mitgeteilt. Die eine dieser vier Methoden stimmt im wesentlichen mit der von Lobatschefskij entwickelten überein, die andre mit der, die sich in Aufzeichnungen von Gauß (Werke Bd. VIII) gefunden hat. El.

P. Stäckel. Untersuchungen aus der absoluten Geometrie, aus Johann Bolyais Nachlaß. Math. és term. értesitö **20**, 180-186.

J. Kürschák und P. Stäckel. Johann Bolyais „Bemerkungen über Nicolaus Lobatschewskijs geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien". Ungar. Ber. **18**, 250-279.

Während Lobatschefskij anscheinend von seinem großen Nebenbuhler J. Bolyai niemals etwas gehört hat, ist J. Bolyai wenigstens mit Lobatschefskijs „Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien" (Berlin 1840) bekannt geworden, und in seinem Nachlasse befinden sich von seiner Hand umfangreiche kritische Bemerkungen über

die „Untersuchungen". Diese Bemerkungen sind in magyarischer Sprache abgefaßt, und man muß J. Kürschák sehr dankbar sein, daß er sich der nicht geringen Mühe unterzogen hat, sie vollständig zu übersetzen und dadurch die Abfassung der vorliegenden Arbeit zu ermöglichen, deren Redaktion von Stäckel herrührt. Die Arbeit schildert zunächst, auf welche Weise J. Bolyai jenes Schriftchen Lobatschefskijs kennen gelernt hat, und berichtet dann über die Bemerkungen Bolyais, die zum Teil in der Übersetzung mitgeteilt werden. Auf Einzelheiten einzugehen ist hier nicht möglich. Nur soviel sei gesagt, daß J. Bolyai seinem Nebenbuhler schon deshalb nicht ganz gerecht werden konnte, weil er nur mit den „geometrischen Untersuchungen", nicht aber mit den älteren Arbeiten desselben bekannt war, während man andrerseits nicht leugnen kann, daß J. Bolyai an einigen Punkten das Wesen der Sache tiefer erfaßt hat als Lobatschefskij. El.

P. Stäckel. Zur nichteuklidischen Geometrie. Arch. der Math. u. Phys. (3) 3, 187-188.

In der Lobatschefskijschen Geometrie hängt die senkrechte Projektion $A_1 B_1$ einer Strecke AB auf eine Gerade nicht, wie in der Euklidischen Geometrie, bloß von dem Winkel α ab, den die Strecke mit dem Lote AA_1 bildet, sondern auch von der Länge dieses Lotes. Daraus erklärt es sich, daß sich die Projektion, wenn der Winkel α von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ wächst, in der nichteuklidischen Geometrie ganz anders verhält als in der Euklidischen. Der Verf. zeigt das an der Hand der betreffenden Formeln. El.

E. Study. Über nichteuklidische und Linien-Geometrie. Deutsche Math.-Ver. 11, 313-340.

E. Study. Nachtrag zu dem Aufsatz: Über nichteuklidische und Linien-Geometrie. Deutsche Math.-Ver. 11, 340-342.

Die erste Arbeit ist ein Wiederabdruck der F. d. M. 31, 470, 1900 besprochenen, mit unbedeutenden formalen Änderungen und einigen in [] eingeschlossenen Zusätzen. In dem „Nachtrage" bemerkt der Verf., daß der von ihm erwähnte Zusammenhang zwischen der konformen Abbildung und den Flächen von der Krümmung Null im nichteuklidischen Raume schon vorher bekannt war. Er bespricht ferner für Räume von konstanter positiver Krümmung die anscheinend bisher noch nicht gegebene Definition des Gaußschen Krümmungsmaßes mit Hülfe des sphärischen Bildes einer Fläche. Schließlich folgen Andeutungen über später zu veröffentlichende Untersuchungen. U. a. kann der Verf. die Theorie der zu einer Fläche gehörigen quadratischen Differentialformen auf die Untersuchung gewisser Pfaffscher Ausdrücke zurückführen. El.

H. Liebmann. Synthetische Ableitung der Kreisverwandtschaften in der Lobatschefskijschen Geometrie. Leipz. Ber. 54, 244-260.

Die schon bei Lobatschefskij vorkommende involutorische Transformation, die durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad x_1 = x, \; \Pi(y) + \Pi(y_1) = \tfrac{1}{2}\pi$$

definiert ist, verwandelt, wie der Verf. in einer früheren Arbeit (F. d. M. 32, 484, 1901) auf synthetischem Wege gezeigt hat, jede Gerade in einen Cykel; so bezeichnet er nämlich zusammenfassend die Kreise, Grenzkreise und Überkreise der Lobatschefskijschen Geometrie. Der Verf. betrachtet jetzt die entsprechende Transformation:

$$x_1 = x, \; y_1 = y, \; \Pi(z_1) + \Pi(z) = \tfrac{1}{2}\pi$$

im Raume und zeigt, daß bei dieser jede Ebene in eine Sphäre (Kugel, Grenzkugel oder Überkugel) übergeht, wobei sich zugleich ergibt, daß der Schnitt einer Sphäre mit einer Ebene oder mit einer andern Sphäre stets ein Cykel ist. Den Schnitt der xy-Ebene mit der Sphäre, die das Bild einer gegebenen Ebene ist, nennt der Verf. das Randbild dieser Ebene; er zeigt, daß der Winkel zweier Ebenen gleich dem Winkel ihrer Randbilder ist, und führt vermöge dieser Randbilder die Untersuchung der verschiedenen Arten von Cyklenbüscheln auf die der Ebenenbüschel zurück. Nunmehr kann er auch beweisen, daß die Transformation (1) überhaupt jeden Cykel in einen Cykel verwandelt, wobei die Gerade als Grenzfall eines Cykels aufzufassen ist, daß also (1) eine Kreisverwandtschaft ist, sowie daß die erwähnte Raumtransformation jede Sphäre in eine Sphäre überführt. Die einfache Beziehung, in der (1) zu einer gewissen Spiegelung des Raumes steht, veranlaßt den Verf. dazu, eine Kreisverwandtschaft in der xy-Ebene dadurch herzustellen, daß er jedesmal den beiden Ebenen, die einander bei einer kongruenten Raumtransformation entsprechen, ihre Randbilder auf der xy-Ebene zuordnet. Er beweist, daß man dadurch alle Kreisverwandtschaften der Ebene erhalten kann, und daß jede allgemeine Kreisverwandtschaft der Ebene in eine einfache Kreisverwandtschaft und eine kongruente Transformation der Ebene zerlegt werden kann. Als einfach bezeichnet er dabei eine Kreisverwandtschaft, wenn sie einen Geradenbüschel invariant läßt. Einen Teil der Ergebnisse des Verf. findet man schon in einer Arbeit von Hausdorff (F. d. M. 30, 431, 1899) auf analytischem Wege abgeleitet. El.

H. Liebmann. Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nichteuklidischen Raum. Leipz. Ber. 54, 393-423.

Der Verf. entwickelt zuerst synthetisch und dann analytisch die verschiedenen Arten von Kegelschnitten der Lobatschefskijschen Geometrie; er benutzt bei dem zweiten Wege die folgende Definition: Der Ort aller Punkte, die von einem Punkte (oder einer Geraden) und einem Cykel (Kreis, Grenzkreis, Überkreis) gleich weit entfernt sind, ist ein

Kegelschnitt. Er drückt dann das Bogenelement des Lobatschefskijschen Raumes in den drei Arten von Polarkoordinaten aus, die man erhält, je nachdem der Pol innerhalb der Fundamentalfläche, auf dieser oder außerhalb liegt, stellt die zugehörigen Laplaceschen Differentialgleichungen auf und ermittelt jedesmal eine partikulare Lösung, die eine Funktion des Radiusvektors allein ist. Indem er diese partikularen Lösungen als Kräftefunktionen deutet, erhält er drei verschiedene reelle Anziehungsgesetze, die dem Newtonschen Anziehungsgesetze des Euklidischen Raumes entsprechen, während im elliptischen Raume nur ein solches Gesetz herauskommt. Zwei von denselben Kraftlinien (Radienvektoren) begrenzte Flächenelemente, die verschiedenen Flächen konstanten Potentials angehören, erleiden dabei Anziehungen, die sich umgekehrt verhalten wie die Größen der Flächenelemente. Nunmehr stellt der Verf. zunächst die Differentialgleichungen der Bewegungen für den Fall der Kugelfläche auf unter Benutzung elliptischer Koordinaten, und es ergibt sich recht einfach, daß die Bahnkurven sphärische Kegelschnitte sind, deren einer Brennpunkt das Attraktionszentrum ist. Durch imaginäre Abbildung der Kugelfläche läßt sich dieses Ergebnis auf die Lobatschefskijsche Ebene übertragen; doch erfordern die drei verschiedenen reellen Formen des Potentials noch besondere Behandlung. Der Verf. bespricht namentlich den Fall der elliptischen Bewegung auf der Lobatschefskijschen Ebene ziemlich eingehend und erörtert die Abänderungen, die bei den Keplerschen Gesetzen eintreten. Wie der Verf. selbst erwähnt, findet sich das erste jener drei Potentiale, ebenso wie das Potential auf der Kugelfläche, schon bei Schering, und die Bewegung auf der Kugelfläche hat schon C. Neumann erledigt; es ist ihm aber entgangen, daß die Bewegung auf der Lobatschefskijschen Ebene bereits Killing behandelt hat. El.

G. Biasi. Sopra due definizioni contestate d'Euclide. Sep.-Abdr. Mathesis. 3 S. 8°.

Es handelt sich um die dritte Definition des fünften und um die fünfte des sechsten Buches, die den Begriff des Verhältnisses zweier Größen und den des aus zwei Verhältnissen zusammengesetzten Verhältnisses definieren. Der Verf. glaubt durch eine geeignete Interpretation die Schwierigkeiten, die man in diesen Definitionen gefunden hat, beseitigen zu können. El.

E. Gronau. Das Parallelenproblem oder der Beweis des elften euklidischen Axioms als Lehrsatz. Hagen i. W.: Selbstverlag. VII u. 33 S. 8°.

Der Verf. entwickelt einige weitschweifige, zum Teil unklare, zum Teil auch vernünftige Betrachtungen über den Ort der Punkte, die von einer gegebenen Geraden gleich weit abstehen. Um nun zu zeigen, daß dieser Ort eine Gerade ist, gibt der Verf. nicht weniger als drei angebliche

Beweise dafür, daß die Winkelsumme im Viereck gleich vier Rechten ist. Bei dieser Fülle von Beweisen ist es unmöglich, die darin enthaltenen Fehler hier anzugeben, es wäre aber auch zwecklos; denn der Verf. würde, wenn überhaupt, nur durch sehr eingehende mündliche Auseinandersetzungen eines Bessern belehrt werden können. El.

J. Mollerup. Die Lehre von den geometrischen Proportionen. Math. Ann. 56, 277-280.

Die Lehre von den Proportionen wird auf Grund der ebenen Axiome mit Ausnahme des Archimedischen entwickelt. Der Verf. denkt sich auf den Schenkeln eines rechten Winkels AOC zwei Punkte B und D derart gewählt, daß BD parallel AC ist, und drückt die Beziehung zwischen den fünf Punkten der Figur durch die symbolische Gleichung:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$$

aus, die er eine Proportion nennt, während die einzelnen Verhältnisse OA/OB und OC/OD keine Bedeutung haben. Hieraus werden dann die Rechnungsregeln für die Proportionen abgeleitet und namentlich der Satz, daß in zwei Dreiecken mit gleichen Winkeln die Seiten proportional sind. Insbesondre ergibt sich ein neuer Beweis für den speziellen Fall des Pascalschen Satzes, bei dem der Kegelschnitt ein Geradenpaar und die Pascalsche Gerade unendlich fern ist. El.

Fr. Pietzker. Considérations sur la nature de l'espace. Ens. math. 4, 77-110.

H. Laurent. A propos d'un article de M. Pietzker sur la nature de l'espace. Ens. math. 4, 434-437.

Im ersten, einleitenden Abschnitt dieser Arbeit gibt Pietzker einen kurzen Überblick über die Entstehung, Entwicklung und den gegenwärtigen Stand der über die Grenzen der euklidischen Auffassung hinausgehenden modernen Formen der Geometrie. Im zweiten Abschnitt bezeichnet er als Thema seiner Arbeit die Frage: Welche Bedingungen muß eine Raumform erfüllen, damit man ihr eine reelle Existenz zuschreiben kann? Letztere ist dem Verf., wie aus den weiteren Ausführungen hervorgeht, das Kriterium für die wissenschaftliche Berechtigung einer Raumform. Im übrigen dreht sich die Untersuchung im wesentlichen um den Beweis des als „elftes Axiom" bekannten euklidischen Postulats. Den Standpunkt des Verf. bezeichnen die Sätze: „Aus der bisherigen Unmöglichkeit, dieses Axiom zu beweisen, folgt noch nicht die strikte Unmöglichkeit. Wenn in der nichteuklidischen Geometrie bisher noch keine inneren Widersprüche aufgedeckt worden sind, so ist nicht ausgeschlossen, daß solche doch noch gefunden werden. Die beste Garantie gegen solche Widersprüche ist die praktische Evidenz eines Systems, und diese fehlt

den nichteuklidischen Systemen." Von diesem Standpunkt aus polemisiert der Verf. namentlich gegen die Versuche, die Realität der nichteuklidischen Geometrie als möglich darzutun. Der dritte Abschnitt enthält in kürzerer Form den in des Verf. Schrift „Die Gestaltung des Raumes" (s. F. d. M. **23**, 530, 1891) enthaltenen Versuch eines „Beweises der Unmöglichkeit jeder anderen Raumform als der euklidischen" (vgl. S. 80 dieses Bandes). Im vierten Abschnitt wird die indirekte Natur der gewöhnlichen Definitionen der Geraden bemängelt, der Begriff des Erfahrungsraumes erörtert, und die Unveränderlichkeit des Abstandes zweier auf einer dritten senkrecht stehenden Geraden als Folge der gegenseitigen Unabhängigkeit der drei zur Bestimmung eines Raumpunktes verwendeten Koordinaten dargestellt. Diese halb analytische, halb geometrische Beweisführung gibt aber keine Aufklärung darüber, wie sich der Verf. mit unendlich großen Koordinatenwerten abfindet, die doch ebenso gut wie die endlichen eine Deutung durch Punkte verlangen und nicht so einfach zu beseitigen sind, wie der Verf. die unendlich fernen Punkte glaubt abtun zu können. Der letzte Abschnitt beschäftigt sich mit der Frage nach der Zahl der Dimensionen des Erfahrungsraumes und der Möglichkeit der realen Existenz mehrdimensionaler Räume. Die erste dieser Fragen bedarf keiner Erörterung mehr; die zweite ist dadurch entschieden, daß unsere eigene dreidimensionale Existenz in einem ebenso ausgestatteten Erfahrungsraume subjektiv den Begriff der „realen Existenz" auf dreidimensionale Gebilde innerhalb dieses Raumes beschränkt, objektiv aber mit dem Begriffe der „realen Existenz" mehrdimensionaler Räume und Gebilde, die sich nur unserer Wahrnehmung entziehen, sehr wohl verträglich ist, jedoch ohne jede Aussicht, daß diese Möglichkeit durch irgendwelche Erfahrungstatsachen direkt zu bestätigen oder zu widerlegen wäre. Überhaupt würde die Frage nach der realen Existenz eines vierdimensionalen Raumes erst dann ein praktisches Interesse gewinnen, wenn unserem Weltraume eine konstante Krümmung nachgewiesen würde, oder Erfahrungstatsachen auf optischen oder elektrischen Gebieten nicht anders als durch Zuhülfenahme eines vierdimensionalen Raumes ihre mathematische Begründung finden könnten.

Der Verf. der zweiten Arbeit präzisiert, ohne sich auf eine Widerlegung der umfangreichen Pietzkerschen Ausführungen einzulassen, den unanfechtbaren Standpunkt, welchen die moderne Mathematik gegenüber dem elften Axiom und der theoretischen und praktischen Möglichkeit verschiedener Raumformen einnimmt, in kurzer, klarer und treffender Darstellung und rückt dadurch die Kernpunkte dieser Theorien bei den Lesern des Enseignement mathématique in dankenswerter Weise wieder in das richtige Licht. Mit Recht wundert sich der Verf. über die Wichtigkeit, die noch immer stellenweise den Versuchen eines Beweises für das Postulat des Euklid beigelegt wird. Aber noch immer sind wissenschaftliche Neuerungen, mochten sie sich noch so berechtigt erweisen, mehr oder weniger hartnäckigem Sträuben begegnet in Kreisen, in denen man von altgewohnten Anschauungen und Ansichten nicht loskommen konnte.

Schg.

C. Vidal. Sur quelques arguments non-euclidiens. Ens. math. **4**, 330-346.

P. Barbarin. Sur un quadrilatère birectangle. Ens. Math. **4**, 438-444.

Der Verf. der ersten Arbeit sucht verschiedene, für die Unbeweisbarkeit des elften Axioms gegebene Beweise zu entkräften. Nach Poincaré würde die Ersetzung des beweisbar gedachten Axiomes durch sein Gegenteil, unter Beibehaltung der übrigen Axiome, zu Widersprüchen innerhalb der auf diese Voraussetzungen begründeten Geometrie führen, während die Lobatschefskijsche Geometrie von solchen Widersprüchen frei ist. Der Verf. bezweifelt das erstere und findet einen Widerspruch in den von Beltrami und Poincaré ausgesprochenen Übertragungsprinzipien, welche von den Sätzen über Geraden und Ebenen zu den Sätzen über die entsprechenden Gebilde der nichteuklidischen Geometrie führen. — Weitere Einwände richten sich gegen den auf der Analogie der Pseudosphäre und der Ebene beruhenden Beltramischen Beweis, der aber auch schon von Mansion als unvollständig und überflüssig bezeichnet worden sei. — Bei dem von Mansion selbst gegebenen analytischen Beweise bestreitet der Verf., daß die „Gerade" (im gemeinsamen Sinne aller drei Geometrien) durch „zwei einander hinreichend nahe Punkte" wirklich allgemein definiert sei, und, diese Allgemeinheit zugestanden, daß mit der Unbeweisbarkeit des Axioms aus dieser Definition die Möglichkeit jedes anderen Beweises nachgewiesen sei. — Der vom Verf. weiterhin angegriffene Beweis Poincarés, der dem Erfahrungskreise der gedachten Bewohner eines nichteuklidischen Raumes entnommen ist, soll nur dartun, daß diese Bewohner aus ihren Erfahrungen mit gleicher Konsequenz zur Lobatschefskijschen Geometrie gelangen würden, wie wir zur euklidischen. Die Einwände des Verf. gegen diese Schlüsse treffen aber mit gleicher Schärfe die Schlüsse, die wir aus unserer Erfahrung über die krümmungslose Beschaffenheit unseres eigenen Weltraumes ziehen, und zeigen erst recht die gegenseitige Unabhängigkeit und Gleichberechtigung der verschiedenen Geometrien und ihrer Postulate, einschließlich des elften Axioms. Zuletzt sucht der Verf. einen Einwand Barbarins gegen einen von ihm selbst gegebenen Beweis dieses Axioms zu widerlegen.

Hierauf antwortet Barbarin mit der an zweiter Stelle genannten Note, in welcher er seinen Einwurf aufrecht erhält, ausführlich begründet und für die von Vidal benutzte Figur eines Trapezes mit zwei rechten Winkeln die Gleichberechtigung der drei Geometrien nachweist. Schg.

C. H. Hinton. The recognition of the fourth dimension. Washington Bull. **14**, 179-203.

Ein vierdimensionaler Körper mit vier Achsen (x, y, z, w) kann zwei von einander unabhängige Rotationen machen. Die erste, welche x in y überführt, während z und w in Ruhe bleiben, ist eine Rotation um die zw-Ebene, bei der zweiten treten z und w an die Stelle von x und y

und umgekehrt. Die Kombination beider Rotationen ergibt zwei Arten einer Drehung des Körpers um den Schnittpunkt der beiden Ebenen, nämlich die „A-Drehung“ oder die „B-Drehung“, je nachdem gleichzeitig x in y und z in w, oder x in y und w in z übergeführt wird. Die hieraus sich ergebenden Bewegungsgesetze, wesentlich verschieden von denen des R_3, geben Auskunft über die Rotationen, welche in einer Gruppe einander berührender vierdimensionaler Kugeln stattfinden, wenn die Rotation einer derselben auf die übrigen übertragen wird. Bestehen diese Kugeln aus flüssiger Masse, so läßt sich die Theorie auf die Helmholtzschen Wirbel anwenden. Auch die von Lord Kelvin hypothetisch aufgestellten Wirbelbewegungen im Äther finden ihren Ausdruck und ihre Begründung in vierdimensionalen Rotationen. Endlich lassen sich die von Maxwell zur Erklärung der elektrischen Erscheinungen aufgestellten Elastizitätsgesetze, die elektrische Ladung der Ionen und andere noch nicht genügend erklärte Tatsachen der Elektrizitätslehre zwar nicht mit der Annahme der bekannten dreidimensionalen Bewegungen vereinigen, wohl aber finden dieselben eine Erklärung durch die Annahme der oben erwähnten vierdimensionalen Doppelrotationen, wobei positive und negative Elektrizität bezw. mit Hilfe einer A- und einer B-Rotation definiert werden, und die Ströme durch entsprechende Ätherwirbel. — Um diese Theorie aus dem Rahmen einer bildlichen Darstellung in die Wirklichkeit zu übertragen, müßte jedem kleinsten Teilchen des Äthers eine vierte Dimension zugeschrieben werden von einer wahrscheinlich stets unmeßbaren Ausdehnung. Aus dieser Hypothese des Verf. würde sich dann (wie hier hinzugefügt sein mag) ergeben, daß der dreidimensionale Erfahrungsraum seine reale Existenz in einem mit Äther erfüllten vierdimensionalen Raume hätte, oder die konstant positiv gekrümmte dreidimensionale Begrenzung einer vierdimensionalen Ätherkugel wäre. In beiden Fällen würde es für ein im Erfahrungsraume befindliches Ätherteilchen außer den drei auf einander senkrechten Hauptfortschreitungsrichtungen noch eine vierte, auf den übrigen senkrechte, aber unmeßbare Fortschreitungsrichtung in den vierdimensionalen Raum hinaus geben. Wir würden dann, wie der Verf. richtig bemerkt, nicht die oben erwähnten Doppelrotationen selbst, sondern nur ihre Wirkungen auf die uns geläufigen dreidimensionalen Bewegungen wahrnehmen und beobachten können. Die Entscheidung über die Bewahrheitung dieser Theorie macht aber vor der praktischen Unzugänglichkeit eines vierdimensionalen Raumes ebenso Halt, wie diejenige über die konstante Krümmung unseres Erfahrungsraumes vor den unmeßbar kleinen Größen. Die zu der Arbeit gehörige mathematische Begründung, unter Benutzung der Quaternionentheorie, ist nicht mit veröffentlicht. Schg.

G. Lechalas. Un paradoxe géométrique. Revue de métaphys. et de morale. **9**, 361-367 (1901).

Die von Russell in seinem Essai gegebenen Betrachtungen über harmonische Punkte führen Lechalas auf das folgenden Paradoxon: Die

GEORG REIMER  BERLIN W. 35.
VERLAGSBUCHHANDLUNG LÜTZOWSTRASSE 107-8.

Vor kurzem erschien der **V. Band** des

ASTRONOMISCHEN JAHRESBERICHTS

mit Unterstützung der

Astronomischen Gesellschaft

herausgegeben von **Walter F. Wislicenus.**

Enthaltend die Literatur des Jahres 1903.

Oktav XXXIV und 660 Seiten. — **Preis broschiert M. 20.—.**

Von diesem literarischen Unternehmen erschienen bisher:

I. Band (Literatur des Jahres 1899) 1768 Referate, Preis 17 Mark.
II. Band (Literatur des Jahres 1900) 2320 Referate, Preis 19 Mark.
III. Band (Literatur des Jahres 1901) 2513 Referate, Preis 20 Mark.
IV. Band (Literatur des Jahres 1902) 2411 Referate, Preis 19 Mark.

KANT'S GESAMMELTE SCHRIFTEN

HERAUSGEGEBEN VON DER KÖNIGL. PREUSS.
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN

Die Ausgabe zerfällt in 4 Abteilungen:

I. WERKE II. BRIEFWECHSEL III. HANDSCHRIFTLICHER NACHLASS IV. VORLESUNGEN

und umfaßt 22 bis höchstens 25 Bände, die in freier Folge erscheinen und einzeln käuflich sind. Zunächst gelangen Briefwechsel und Werke zur Veröffentlichung.

Bis jetzt erschienen:

BAND I: **WERKE I.**
Geheftet M. 12.—, gebunden M. 14.—
BAND III: **WERKE III.**
Geheftet M. 11.—, gebunden M. 13.—
BAND IV: **WERKE IV.**
Geheftet M. 12.—, gebunden M. 14.—

BAND X: **BRIEFWECHSEL I.**
Geheftet M. 10.—, gebunden M. 12.—
BAND XI: **BRIEFWECHSEL II.**
Geheftet M. 10.—, gebunden M. 12.—
BAND XII: **BRIEFWECHSEL III.**
Geheftet M. 9.—, gebunden M. 11.—

. ,7 .

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Achter Abschnitt.
Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

Ausführliches Inhaltsverzeichnis und Namenregister folgen am Schlusse des Bandes.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittlung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Professor Dr. Lampe. Berlin W. 15, Fasanenstraße 82.

Beweisführung der Eindeutigkeit der Konstruktion des bei drei Punkten A, B, C dem dritten zugeordneten Punktes benutzt die Betrachtung des dreidimensionalen Raumes, ohne daß jedoch die Konstruktion sich auf solche Elemente stützt, welche der betrachteten Ebene fremd sind. Lechalas hofft, das Paradoxon könne gelöst werden, entweder durch einen vom dreidimensionalen Raume freien Beweis, oder indem gezeigt wird, daß die Grundlagen der projektiven Geometrie eine Lücke enthalten, durch welche die Unmöglichkeit des Beweises erklärt wird. Fr.

P. Barbarin. Bilatères et trilatères en métagéométrie. Mathesis (3) **2**, 187-193.

Geometrischer Beweis der Grundeigenschaften bezüglich des Treffpunktes der Winkelhalbierenden, der Mittellinien und der Höhen der Figuren, die von drei in einem reellen Punkte (in endlicher oder unendlicher Entfernung) oder ideellen Punkte sich treffenden Geraden gebildet werden, in der nichteuklidischen Geometrie. Der Verf. hat keinen geometrischen Beweis für den Satz über den Schnitt der Medianen finden können. Mn. (Lp.)

C. E. Wasteels. Théorèmes de métagéométrie relatifs aux médianes d'un triangle. Mathesis (3) **2**, 39-42.

In der nichteuklidischen sowie in der euklidischen Geometrie ist ein Dreieck gleichschenklig, wenn es zwei gleiche Mittellinien hat. Der Satz gilt dagegen nicht, wenn die Gerade, welche die Endpunkte der Mittellinien verbindet, $\frac{4}{3}\Delta$ übertrifft, wo 2Δ die Maximaldistanz zweier Punkte einer Geraden bezeichnet. Mn. (Lp.)

R. Bonola. Sui fondamenti della geometria, in relazione alla geometria non-euclidea. Loria Boll. Bibl. **5**, 33-41, 65-71.

Fortsetzung; siehe F. d. M. **30**, 50, 1899; **31**, 44, 1900. Bericht nach vollendeter Publikation. Vi.

F. R. Moulton. A simple non-Desarguesian plane geometry. American M. S. Trans. **3**, 192-195.

Die Elemente der nicht-Desarguesschen Geometrie, welche der Verf. aufstellt, sind:

1. Punkte: Die Punkte der euklidischen Geometrie.

2. Gerade: Um diese zu erhalten, nehme man in der Ebene der euklidischen Geometrie in gewöhnlicher Weise ein rechtwinkliges Koordinatensystem an, sodaß die nach rechts verlaufende positive x-Achse die Ebene in eine obere und eine untere Hälfte teilt. Als Gerade gelten dann alle diejenigen Geraden der euklidischen Geometrie, welche

der x-Achse parallel sind, sowie diejenigen, welche mit ihrem oberen Teil gegen die positive x-Achse einen stumpfen oder rechten Winkel bilden. Jede Gerade der euklidischen Geometrie, deren oberer Teil mit der positiven x-Achse einen spitzen Winkel bildet, ist dagegen durch diejenige (nach der Bezeichnung der euklidischen Geometrie) gebrochene Linie zu ersetzen, welche man erhält, indem man unter Beibehaltung des unteren Teiles den oberen Teil der Geraden um den Schnittpunkt mit der x-Achse so lange dreht, bis der Richtungstangens gleich dem c-fachen des ursprünglichen geworden ist. Hierin bedeutet c eine willkürliche, aber ein für allemal fest gewählte positive, von 1 verschiedene Zahl. — Strecken und Winkel sind wie in der euklidischen Geometrie zu messen. Eine Ausnahme machen nur die Winkel, welche ihren Scheitel auf der x-Achse haben und bei denen (wenigstens) ein Schenkel oberhalb der x-Achse gelegen ist und mit ihr einen spitzen Winkel bildet. Bei diesen Winkeln hat man auf den (bezw. die) Schenkel den oben beschriebenen Drehungsprozeß umgekehrt auszuführen. Die euklidische Größe des so erhaltenen Winkels gilt als die nicht-Desarguessche des ursprünglichen.

In dieser Geometrie gelten die ebenen Axiome der Verknüpfung, der Anordnung, der Kongruenz von Strecken und Winkeln, das Parallelenaxiom. Es gilt nicht das als erster Kongruenzsatz bekannte Axiom, ebenso gilt nicht der Desarguessche Satz.

Vor dem von Hilbert gegebenen Beispiel einer nicht-Desarguesschen Geometrie hat die hier aufgestellte den Vorzug größerer Einfachheit. Sie unterscheidet sich aber auch von ihr dadurch, daß bei ihr die angegebenen Axiome wirklich sämtlich erfüllt sind, während bei der Hilbertschen das Axiom, wonach der Winkel zweier Halbstrahlen h, k von der Reihenfolge unabhängig, also $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(k, h)$ ist, nicht erfüllt ist. Stz.

K. Th. Vahlen. Über endlichgleiche Polyeder. Math. Ann. 56, 507-508.

Verf. beschäftigt sich mit dem Nachweise des von M. Dehn bewiesenen Satzes, daß inhaltsgleiche Polyeder nicht notwendig endlichgleich sein müssen. Der hier vorliegende Beweis ist jedoch nicht stichhaltig. Stz.

Weitere Literatur.

P. Barbarin. La géométrie non-euclidienne. Chartres: Durand. (Paris: Naud.) 79 S. 12mo (Scientia, phys.-math. No. 15).

J. F. Bonnel. La géométrie atomique rationnelle. Paris: Gauthier-Villars. 99 S. 8°.

T. Bonnesen. Analytiske studier over ikke-euklidisk geometri. Kjöbenhavn: Ursius. 103 S. 8°.

E. Bordage. Sur la possibilité d'édifier la géométrie euclidienne sans le postulat d'Euclide. St. Denis (île de la Réunion).

A. C. Dixon. Geometry in flatland. Math. Gazette 2, 241-242.

L. Gérard. Correspondance (sur le postulat d'Euclide). Bull. sc. math. et phys. élém. 7, 114-116.

L. Gérard. Géométrie riemannienne. Bull. sc. math. et phys. élém. 7, 211-215.

M. Gremigni. Sul postulato d'Archimede. Boll. di Mat. Conti 1, 43-44.

G. B. Halsted. The foundation of geometry. The Open Court 16, 513-521.

Issaly. La géométrie non-euclidienne et l'insuffisance de ses principes. Mémoire faisant suite aux Principes fondamentaux de la théorie des pseudo-surfaces, du même auteur. Paris: A. Hermann. VII u. 62 S. 8°.

N. J. Lobatschefskij. Pangeometrie. (Kasan 1856.) Übersetzt und herausgegeben von H. Liebmann. Leipzig: Engelmann. 95 S. 12mo (Ostwalds Klassiker 130).

S. Reiter. Studien über die Grundlagen der Geometrie. Spaczinskis Bote 1902, 223-230, 248-254, 269-277 (Russisch).

S. Schatunowski. Über die Grundlagen der Geometrie. Spaczinskis Bote 1902, 82-87, 104-108, 127-132, 149-155 (Russisch).

A. Thue. Om en pseudomekanisk methode i geometrien. Kristiania. 111 S. 8°.

O. Veblen. Hilbert's foundation of geometry. The Monist 13, 303-309.

Kapitel 2.

Kontinuitätsbetrachtungen (Analysis Situs, Topologie).

H. Poincaré. Sur certaines surfaces algébriques. III[ième] complément à l'analysis situs. S. M. F. Bull. 30, 49-70.

Es wird die vierdimensionale Mannigfaltigkeit V, die der Gleichung $z = \sqrt{F(x, y)}$ entspricht, im Sinne der Analysis situs untersucht. $F(x, y)$ ist ein Polynom. V kann in folgender Form dargestellt werden: Seien ξ, η, ζ, ζ' vier reelle Variable; dann entspricht allen Punkten ξ, η, ζ, ζ', die durch folgende Substitutionen auf einander hervorgehen, derselbe Punkt auf V:

$$\varphi_k(\xi, \eta),\ \psi_k(\xi, \eta);\ \zeta, \zeta' \qquad (k = 1, 2, \dots, 2p)$$
$$\theta_i(\xi, \eta),\ \theta'_i(\xi, \eta);\ \chi_i(\zeta, \zeta'),\ \chi'_i(\zeta, \zeta') \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

Dabei entsprechen die Substitutionen der ersten Reihe den $2p$ von einander linear unabhängigen Wegen in der x-Ebene, wenn man y als konstant betrachtet. Die Substitutionen der zweiten Reihe entsprechen den Umkreisungen der q singulären Punkte $A_1, \dots, A_q$ in der y-Ebene, für die das Geschlecht der zugehörigen Riemannschen Fläche über der

x-Ebene $< p$ wird. Man erhält diese Substitutionsfunktionen, wenn man x und z bei konstantem y als Fuchssche Funktionen einer Hülfsvariable $u = \xi + i\eta$ ausdrückt und die durch von einem Punkte aus nach $A_1, \ldots, A_q$ gehende Wege zerschnittene y-Ebene ebenfalls durch eine Fuchssche Funktion auf ein Kreisbogenpolygon der $(\zeta + i\zeta')$-Ebene abbildet. Umgibt man jeden Punkt A_i mit einem „cercle de garde“ und schließt die Werte von y im Innern dieser Kreise bei der Bildung der Mannigfaltigkeit V aus, so ist die durch die angegebenen Substitutionen erzeugte Gruppe G holoedrisch isomorph mit der „Fundamentalgruppe“ von V; d. i. jedem geschlossenen, auf einen Punkt zusammenziehbaren Wege auf V entspricht ein ebenfalls geschlossener Weg in dem $(\xi, \eta, \zeta, \zeta')$-Raum, keiner nicht-identischen Substitution von G entspricht eine identische Substitution der Fundamentalgruppe. Läßt man dagegen die „cercles de garde“ weg, so ist dies nicht mehr der Fall. Zunächst entspricht jeder Substitution der zweiten Reihe die identische Substitution, aber ferner auch gewissen Substitutionen der ersten Reihe. Bei Umkreisung eines Punktes A_i vertauschen sich im allgemeinen zwei singuläre Punkte der x-Ebene, und ein entsprechender linearer Cyklus ist mit 0 äquivalent. Aber die beiden für $y = A_i$ zusammenfallenden singulären Punkte brauchen sich bei Umkreisung von A_i auch nicht mit einander zu vertauschen. Dann hat die Fläche einen konischen Punkt. Es ist ein entsprechender linearer Cyklus dann nicht mit 0 äquivalent, sondern wird es erst, wenn er doppelt genommen wird. (Bei dieser Gelegenheit wird das wichtige Resultat von Heegaard; s. F. d. M. **29**, 529, 1898, wieder abgeleitet). Es folgt so: Ist $F(x, y)$ irreduzibel, so gibt es nur die identische Substitution (in Übereinstimmung mit Picardschen Resultaten). Zerfällt aber $F(x, y)$, dann gibt es, wenn man konische Punkte als unüberschreitbar annimmt, von der Identität verschiedene Substitutionen, und zwar beispielsweise, wenn das Polynom in n Polynome geraden Grades zerfällt, 2^{n-1}. D.

H. Poincaré. Sur les cycles des surfaces algébriques. Journ. de Math. (5) 8, 169-214.

Unter Cyklen auf einer Mannigfaltigkeit V versteht man solche geschlossenen Mannigfaltigkeiten auf V, die keinen Teil von V vollständig begrenzen. Für die Theorie der algebraischen Flächen sind die 1-, 2- und 3-dimensionalen Cyklen von Wichtigkeit, die auf einer die Wertezuordnung darstellenden Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen liegen. Diese Frage wird vom Verf. mit den Methoden untersucht, die er in der Abhandlung über Analysis situs (Journ. de l'Ec. Polyt. (2) **1**; F. d. M. **26**, 541, 1895) auseinandergesetzt hat. In der Einleitung werden zunächst noch einmal die Begriffe Kongruenz und Homologie erklärt. Eine Summe von Mannigfaltigkeiten, die einen Cyklus bilden, ist kongruent Null (geschlossen), aber nicht homolog Null (begrenzend). Es wird dann die 4-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit V, die zu der Gleichung $f(x, y, z) = 0$ gehört,

in Polyeder eingeteilt. Zu jedem Werte von y gehört eine bestimmte Riemannsche Fläche, die im allgemeinen stets von demselben Geschlecht p ist. Die q singulären Punkte auf der y-Ebene werden mit einem nicht singulären Punkte durch Schnitte verbunden. Bewegt sich dann y in der also zerschnittenen Ebene, so wird die zugehörige Riemannsche Fläche sich selbst elementar-verwandt bleiben. Man teile die Riemannsche Fläche, die zu einem bestimmten Punkte gehört, polyedrisch ein. Jede Riemannsche Fläche wird entsprechend eingeteilt und die y-Ebene selbst als $2q$-seitiges Polygon aufgefaßt. Dadurch entsteht eine Einteilung von V in Überzellen, Zellen, Seitenflächen, Kanten und Ecken, die tabellarisch nach ihrer Entstehungsweise geordnet werden und zunächst allgemein hinsichtlich der Möglichkeit und Existenz von Homologien und Kongruenzen zwischen ihnen untersucht werden. In § 2 werden die dreidimensionalen Cyklen untersucht und von ihnen wird folgendes (hauptsächlich mit Hülfe der Homologie = der Kongruenzen-Rechnung) bewiesen. Soviel invariante Cyklen die Picardsche Gruppe zuläßt, soviel von einander verschiedene dreidimensionale Cyklen gibt es. (Wenn y einen singulären Punkt umkreist, erleidet ein Cyklus der Riemannschen Fläche eine der Substitutionen der Picardschen Gruppe; ein „cycle invariant" bleibt bei jeder solchen Umkreisung sich selbst homolog.) Auf Grund dieses Satzes kann man leicht die dreidimensionalen Cyklen veranschaulichen. In § 3 wird von den zweidimensionalen Cyklen bewiesen: Es gibt zwei singuläre solche Cyklen, nämlich die Riemannsche Fläche für ein bestimmtes y und die Riemannsche Fläche für ein bestimmtes x. Die übrigen erhält man durch Benutzung der „cycles évanouissants"; diese sind, wenn man von Flächen mit außerordentlichen Singularitäten absieht, von der Form $\Gamma_i - \Gamma'_i$, wo Γ'_i der durch eine Picardsche Substitution transformierte Cyklus Γ_i ist. Das Problem der eindimensionalen Cyklen ist von Picard gelöst und wird vom Verf. im § 4 mit seinen Hülfsmitteln behandelt. Unter anderem wird bewiesen, daß jeder derartige Cyklus in eine solche Lage gebracht werden kann, daß er auf der zu einem Werte von y gehörenden Riemannschen Fläche liegt. Es wird untersucht, welche von diesen Cyklen für unsere Mannigfaltigkeit nicht homolog sind, was auf den Begriff des „cycle subsistant" führt. Im allgemeinen ist die Anzahl der „cycles subsistants" nach einem allgemeinen Theorem der Analysis situs gleich der Anzahl der „cycles invariants", was verifiziert wird. In § 5 werden einzelne Punkte, die im Texte als plausibel zu den Beweisen benutzt wurden, näher begründet. D.

E. B. Christoffel. Querschnittstheorie. Math. Ann. 55, 497-515.

In dieser von Krazer aus dem Nachlasse herausgegebenen Abhandlung beschäftigt sich der Verf. mit der Untersuchung der Zusammenhangsverhältnisse von Flächen, hauptsächlich im Hinblick auf die funktionentheoretischen Anwendungen. In §§ 1—4 werden die beiden verschiedenen Arten von Querschnitten auf zweiseitigen Flächen und ihr Einfluß

auf die Veränderung des Flächenzusammenhangs betrachtet. Es werden dann nach einander die zweiblättrigen Riemannschen Flächen mit 2, 4 und $2n$ Verzweigungspunkten und zum Schluß eine n-blättrige behandelt, bei der in einem Windungspunkte immer nur je zwei Blätter zusammenhängen. D.

A. Schoenflies. Über einen grundlegenden Satz der Analysis situs. Gött. Nachr. 1902, 185-192.

Verf. beweist folgenden Satz, der die Umkehrung des bekannten Kurvensatzes von C. Jordan darstellt: „Wenn eine perfekte ebene Menge P die ihr nicht zugehörigen Punkte der Ebene in zwei Gebiete zerlegt, ein inneres und ein äußeres, so daß zwei Außenpunkte durch einen äußeren, zwei Innenpunkte durch einen inneren Streckenzug verbindbar sind, während jeder Punkt der Menge P von jedem Innenpunkte und jedem Außenpunkte aus durch einen inneren oder äußeren Streckenzug erreicht werden kann, dessen Endpunkt oder dessen einziger Endpunkt er ist, so lassen sich ihre Punkte durch zwei stetige und eindeutige Funktionen $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$ in der Weise darstellen, daß jedem Wertepaare x, y nur ein Wert t im Intervall $t_0 \dots t_1$ entspricht, mit Ausnahme der Werte t_0 und t_1, die demselben Punkte x, y entsprechen." — Zum Zwecke der eindeutigen und stetigen Zuordnung der Punkte von P zu den Punkten eines Kreises werden rechtwinklig gebrochene Streckenzüge konstruiert, die die Punktmenge P annähern. Der Mittelpunkt des Kreises liegt im Inneren von P, und die Zuordnung wird vermittelt durch innere Streckenzüge, die den Mittelpunkt mit den Punkten von P verbinden, und deren Existenz eine wesentliche und unumgängliche Voraussetzung für die Gültigkeit des Satzes bildet. D.

S. Roberts. Networks. London M. S. Proc. 34, 259-274.

Unter einem vollständigen, normalen Dreiecksnetzwerk versteht Verf. ein nur aus dreieckigen Maschen bestehendes Netzwerk, das ein Dreieck vollständig überdeckt und bei dem zwei Knotenpunkte nur durch eine Verbindungsstrecke (connector) mit einander verbunden sind. Es wird vor allem folgender Satz mittels vollständiger Induktion bewiesen: In jedem solchen Netzwerk lassen sich stets zwei getrennte verzweigte Verbindungsstreckenzüge („Bäume" — trees —, „offene Lösungen" des Netzes) bestimmen, die durch alle Knotenpunkte gehen, keine Schleifen bilden und so beschaffen sind, daß nicht zwei Knoten desselben Baumes durch eine einfache Verbindungsstrecke verbunden werden können. Es folgt dann: Man kann die Seiten des Netzwerks mit Anwendung von drei Farben so färben, daß die Seiten jeder Masche verschiedene Farben haben. Dies Resultat wird unter Anwendung „reziproker" Figuren für das Vierfarbenproblem nutzbar gemacht. Jedes System gleichgefärbter Seiten ist ebenfalls als „Lösung" des Netzwerks anzusehen, die aber im allgemeinen nicht mehr „offen" ist, sondern Schleifen bildet. Es wird

dann weiter der Fall erörtert, daß das vollständige Netzwerk nicht normal ist, d. i. daß zwei Knoten durch mehrere „connectors" verbunden sind. Aus einem Beispiel ergibt sich, daß es dann nicht immer eine offene Lösung hat. D.

COMBEBIAC. Sur les propriétés du plan au point de vue de l'Analysis situs. C. R. 135, 1044-1045.

Verf. bemerkt, daß die von Klein in seinen „Vorlesungen über die nichteuklidische Geometrie" aufgestellten Hypothesen über die Konvexität der Ebene rein projektivisch und daher von dem Riemannschen Ausdruck der Entfernung unabhängig sind, und zeigt insbesondere, wie man auch von der euklidischen Geometrie aus zu der Vorstellung gelangt, daß die Ebene eine doppelte, doppelt konvexe Fläche ist. Wbg.

J. J. VAN LAAR. Quelques remarques sur la solution d'un problème de la „geometria situs". Arch. du Musée Teyler (2) 8, 13-71.

Von E. Lemoine wurde die Frage gestellt: Auf wieviele Arten ist es möglich, einen Streifen von n Briefmarken auf eine derselben zusammenzufalten? Laisant und Schoute haben die Anzahl N der Lösungen für $n = 2$ bis 10 bestimmt; vom Verf. wird jetzt für $n = 11$ $N = 4210$ gefunden. Ist eine allgemeine Lösung des Briefmarkenproblems bis jetzt nicht bekannt, so hat doch Schoute einige Relationen gefunden zwischen den „Erzeugungszahlen", das heißt zwischen den Zahlen, welche angeben, wieviele Figurationen des Falles $n = p - 1$ zwei, drei, ... Figurationen liefern für den Fall $n = p$, und der Verf., der während vieler Jahre sich mit dem Problem beschäftigte, hat nun andere, nicht weniger bemerkenswerte Relationen zwischen diesen Erzeugungszahlen dazugefügt in der Hoffnung, daß seine Resultate anderweitige Untersuchungen fördern mögen. Kl.

A. C. DIXON. On map colouring. Messenger (2) 32, 81-83.

Bezüglich der bekannten Tatsache, daß man eine Landkarte mit vier Farben herstellen kann, berechnet der Verf. die Zahl der Arten, nach denen dies in jedem besonderen Falle geschehen kann, indem er eine Anzahl von Reduktionsformeln aufstellt. Lp.

TH. REYE. Über bemerkenswerte Gebilde von Punkten, Geraden und Ebenen, die sich durch die Regelmäßigkeit der Anordnung ihrer Elemente auszeichnen (Konfigurationen). Zs. f. math. u. naturw. Unter. 33, 132-133.

Referat über einen Vortrag auf der Straßburger Philologenversammlung. Lp.

W. B. CARVER. Proof of the impossibility of the construction of one of the Kantor $(3, 3)_{10}$ configurations. Johns Hopkins Univ. Circ. **22**, 3-4.

Die Unmöglichkeit der in Rede stehenden Konfiguration ist so zu verstehen, daß dieselbe nicht mit zehn verschiedenen Punkten und Geraden herstellbar ist. Dies wurde zuerst durch Schroeter nachgewiesen. Stz.

V. MARTINETTI. Alcune considerazioni sulla configurazione di Kummer. Palermo Rend. **16**, 196-203.

Von drei linearen Komplexen ausgehend, die paarweise in Involution stehen, und unter Benutzung der drei Nullsysteme bezüglich der Komplexe konstruiert der Verf. vier Möbiussche Tetraeder, die paarweise einander ein- und umbeschrieben sind, und deren 16 Ecken und 16 Flächen die Elemente einer Kummerschen Konfiguration bilden. Über die Beziehungen der genannten Gebilde unter einander werden verschiedene Sätze abgeleitet. Lp.

A. ZOUKIS. Sur l'hexacoryphe complet. Journ. de Math. (5) **8**, 135-168.

Wie die Konfiguration von vier Punkten in der Ebene eine Reihe weiterer Konfigurationen von Punkten und Geraden erzeugt, so ergibt sich bei der Betrachtung der Konfiguration von sechs Raumpunkten (Hexakoryph) eine Reihe von Konfigurationen von Flächen zweiter Ordnung (einschalige Hyperboloide) und höherer Ordnung, Raumkurven dritter und vierter Ordnung (z. B. die durch die sechs Grundpunkte hindurchgehende C_3). Bei der Aufstellung der Gleichung für die durch das Hexakoryph bestimmte F_2 ergibt sich eine Reihe von Identitäten, welche geeignet sind, Eigenschaften der verschiedenen Konfigurationen abzuleiten. Die Betrachtungen lassen sich für die Konfiguration von $2n$ Punkten im R_n verallgemeinern. D.

F. LINDEMANN. Über das Pascalsche Sechseck. Münch. Ber. 1902, 153-161.

Den bisher bekannten zahlreichen Lagebeziehungen zwischen den Punkten und Geraden in der vollständigen Figur des Pascalschen Sechsecks wird eine neue an die Seite gestellt. Zu jedem der 15 Dreiecke, deren Seiten die Ecken des Sechsecks enthalten, gibt es acht Gruppen von je drei Dreiecken, deren Seiten Pascalsche Geraden sind, und von denen jedes zum ersten Dreieck perspektiv liegt. Hieraus ergibt sich der Satz: Auf jeder Pascalschen Geraden gibt es drei Paare von Punkten, in denen sie von anderen Pascalschen Geraden so geschnitten wird, daß die Verbindungslinie dieser Schnittpunkte mit gewissen Pascalschen Punkten sich auf einer Pascalschen Geraden treffen. Sk.

J. Sobotka. Über n-Kante und n-Seite in perspektivischer Lage und über eine Konfiguration eines ebenen Kräftesystems im Gleichgewichte. Rozpravy **11**, No. 1, 19 S. (Böhmisch).

Ausgehend von dem Begriffe der Perspektivität zweier Polygone in einer Ebene, sei es in bezug auf einen Punkt oder auf eine Gerade, studiert der Verf. ein Punkte- und Geradensystem, welches eine gewisse Konfiguration in der Ebene bildet, und wendet die Resultate auf ein ebenes Kräftesystem im Gleichgewicht an, wodurch er zu neuen Konfigurationen in der Ebene gelangt. Sda.

J. A. Carp. Combinatorische Configuraties in meerdimensionale ruimten. Diss. Utrecht: J. van Druten. 68 S. 8°.

Als kombinatorische Konfiguration im Raume R_{p+1} von $p+1$ Dimensionen wird bezeichnet ein System von Räumen:

$$R_p, R_{p-1}, R_{p-2}, \ldots, R_3, R_2, R_1, R_0,$$

welches die Eigenschaft hat, daß jedes Element R_{p-q} dargestellt werden kann, entweder von den Kombinationen ohne Wiederholungen zur $(s-q)$-ten Klasse oder von den Kombinationen zur $(s-p+q)$-ten Klasse von n Zahlen. Im ersten Falle heißt sie eine Konfiguration $p+1\,\tau_n^s$, im zweiten eine Konfiguration $p+1\,\sigma_n^s$. Im ersten Abschnitt wird die Existenz derartiger Konfigurationen dargetan. Es ergibt sich, daß die Konfiguration $p+1\,\tau_n^s$ konstruiert werden kann aus $s-p$ gegebenen, in einem R_s perspektivisch gelegenen $(n-s+p)$-Ecken, und es wird vom Verf. vermutet, daß auch $s-p$ in einem R_{p+1} perspektivisch gelegene $(n-s+p)$-Ecke zur völligen Bestimmung der Konfigurationen genügen. Da die beiden Konfigurationen $p+1\,\tau_n^s$ und $p+1\,\sigma_n^s$ einander dual entsprechen, so ist auch $p+1\,\sigma_n^s$ als konstruierbar zu betrachten. Indessen wird noch für die letztere eine besondere Erzeugungsweise erörtert, welche ausgeht von $s-p$ in einem R_s „lineal" (Bezeichnungsweise von Schroeter, s. J. für Math. **100**, 238, 1886) gelegenen $(n-s+p)$-R_{s-1}, so daß nun auch für das duale Gebilde $p+1\,\tau_n^s$ zwei verschiedene Entstehungsarten gewonnen sind. Im zweiten Abschnitt werden die Eigenschaften der kombinatorischen Konfiguration untersucht. So z. B. wird die Frage erörtert, unter welchen Umständen die Konfiguration $p+1\,\tau_m^s$ die Hauptgruppe punktfremder oder im allgemeinen R_q-fremder Konfiguration $p+1\,\tau_n^s$ enthält, usw. Kl.

W. Thienemann. Ein bemerkenswertes Pentagonikositetraeder. Arch. der Math. u. Phys. (3) **4**, 50-57.

Das gewöhnliche Pentagonikositetraeder, der Halbflächner des Hexakisoktaeders, ist von 24 Fünfecken begrenzt. Bezeichnet man die Kanten

eines bestimmten (des „ersten“) Fünfecks unter Festsetzung eines bestimmten Umlaufssinnes mit α, β, γ, δ, ε, so findet man, „daß die Kante α des einen Fünfecks identisch ist mit der Kante ε des benachbarten; ein gleiches Resultat ergibt sich für die Kanten β und γ.“ Das gewöhnliche Pentagonikositetraeder besitzt also dreierlei verschiedene Kanten.

Der Verf. stellt sich die Aufgabe, alle Pentagonikositetraeder zu finden, welche Kanten von zweierlei Art besitzen, und bei welchen das Fünfeck aus einem Rhombus mit angesetztem gleichschenkligen Dreieck besteht. Er kommt zu dem Resultat, daß das Pentagonikositetraeder (531) das einzige in der Kristallographie mögliche ist, welches die angegebenen Eigenschaften besitzt. Dabei bedeutet das Symbol (531), daß die Ebene des ersten Fünfecks auf den kristallographischen Hauptachsen Abschnitte bestimmt, welche den Größen $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, 1 proportional sind.

Z.

Kapitel 3.

Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

1. C. H. Allcock. Theoretical geometry for beginners. I, II. London: Macmillan & Co. IX u. 135, VII u. 123 S.
2. S. O. Andrew. Geometry. An elementary treatise on the theory and practice of Euclid. London: John Murray. XI + 182 S.
3. W. M. Baker and A. A. Bourne. Elementary geometry. (Also in parts.) London: George Bells & Sons. XXIX u. 474 S.
4. S. Barnard and J. M. Child. A new geometry for schools. London: Macmillan. XXVI u. 514 S.
5. Frank R. Barrell. Elementary geometry. I, 1, 2. II. London: Longmans, Green & Co. XI u. 116, VII u. 117-168, VIII u. 169-284 S.
6. W. D. Eggar. Practical exercises in geometry. London: Macmillan. XII u. 287 S.
7. W. C. Fletcher. Elementary geometry. London: Edward Arnold. IV u. 80 S.
8. C. Godfrey and A. W. Siddons. Elementary geometry: Practical and theoretical. Cambridge: At the University Press. XI u. 355 S.
9. H. S. Hall and F. H. Stevens. A school geometry. (Also in parts.) London: Macmillan. XII u. 340 u. IX S.
10. R. Lachlan and W. C. Fletcher. The elements of geometry. London: Edward Arnold. XII u. 207 S.
11. J. W. Marshall and C. O. Tuckey. Examples in practical geometry and mensuration. XII u. 70 S.

12. R. B. Morgan. Exercises in theoretical and practical geometry. London: Blackie & Son. 96 S.
13. T. Petch. Plane geometry. Adapted to heuristic methods of teaching. London: Edward Arnold. VII u. 112 S.
14. Rawdon Roberts. A new geometry for beginners; theoretical and practical. London: Blackie & Son. 87 S.
15. A. T. Warren. Experimental and theoretical course of geometry. Oxford: At the Clarendon Press. VIII u. 248 S.

Diese etwas lange Liste von Büchern ist nicht sowohl wegen des inneren Wertes der Bücher selbst bemerkenswert, sondern auch wegen der Wahrscheinlichkeit, daß dadurch eine Epoche in der Geschichte des Unterrichtes in der elementaren Geometrie in Großbritannien eröffnet wird. Trotz der Bestrebungen der Association for the improvement of geometrical teaching haben die „Elemente Euklids“ nach ihrer Darstellung durch Robert Simson die Grundlage für den Unterricht in der Geometrie bis auf den heutigen Tag gebildet, obgleich die neueren sogenannten Euklidausgaben viele in dem euklidischen Texte nicht enthaltenen Sätze einbegreifen, weil dieselben für notwendig erachtet wurden, die Kluft zwischen der alten und der neueren synthetischen Geometrie zu überbrücken. Zweifelsohne tritt gegenwärtig seit einigen Jahren eine allmähliche Abschwächung der euklidischen Überlieferung ein; in Schottland z. B. ist es seit lange Gebrauch gewesen, jeden Beweis anzunehmen, der Euklids logische Anordnung nicht verletzt, und in manchen Schulen vor der Angriffnahme formaler Beweise beträchtliche Zeit auf das geometrische Zeichnen zu verwenden. Die von Perry eröffnete Erörterung hierüber auf der Versammlung der British Association zu Glasgow (F. d. M. **32**, 88) zeigte deutlich, daß die Zeit zu durchgreifender Änderung reif, und die günstige Aufnahme, die der Bericht des Ausschusses der British Association fand (vergl. S. 90-92 dieses Bandes), kann als Wahrzeichen betrachtet werden, daß die Reformbewegung nicht unfruchtbar erlöschen wird. Alle oben genannten Bücher sind in höherem oder geringerem Maße unmittelbar aus den jüngsten Erörterungen entsprossen; alle stehen auf dem Boden der in dem Ausschußberichte empfohlenen Prinzipien. Großes Gewicht wird der Forderung faßbarer Anwendungen auf den frühesten Stufen beigelegt. Systematische Unterweisung zu genauen Messungen und zu Berechnungen wird nachdrücklich erteilt, und selbst auf den höheren Stufen werden häufig Übungen in Zahlenbeispielen verlangt, nicht bloß Beweise ausgesprochener Sätze.

Es ist unmöglich, alle diese Bücher einzeln durchzusprechen. Von seiten der praktischen Geometrie verdient Eggars Übungsbuch (No. 6) eine besondere Erwähnung als eine hervorragend tüchtige Schrift, die der näheren Prüfung wert ist. Die beiden Bücher unter No. 4 und 8 (Barnard und Child sowie Godfrey und Siddons) folgen in ihren theoretischen Abschnitten dem Lehrgange, der neuerdings von der Universität zu Cambridge angenommen ist. Beide Bücher werden zur Einführung der neuen Gattung von Leitfäden günstig stimmen; dasselbe gilt

von No. 3 (Baker und Bourne). No. 9 (Hall und Stevens) geht weniger von euklidischen Methoden aus als die anderen, mit Ausnahme von No. 1 (Allcock); das letztere Werk liefert einen sorgfältig erdachten Lehrplan für theoretische Geometrie. Alle diese Bücher haben noch ihre eigentümlichen Vorzüge, und obgleich keines von ihnen so hoch steht, daß es nicht der Kritik unterläge, so muß das geschwinde Erscheinen so vieler Bücher von wirklichem Werte als ein gutes Omen für die Zukunft der Geometrie angesehen werden. Weitere Erfahrung wird wahrscheinlich sogar mehr Mängel bemerkbar machen, als jetzt zu Tage liegen; inzwischen ist aber mit den neuen Methoden ein guter Anlauf gemacht worden. Vielleicht sollte hinzugefügt werden, daß viele dieser Bücher eigentlich in den nächsten Jahrgang gehören; der Zugehörigkeit des Inhalts wegen sind sie aber hier mit eingeordnet worden. Gbs. (Lp.)

R. W. Edwards. Elementary plane and solid mensuration for use in schools, colleges and technical classes. London: Edward Arnold. XXX u. 304 S.

Ein recht nettes Buch über Messungen, bestimmt für solche Schüler, deren mathematische Ausbildung gering ist. Es ist nicht eine bloße Sammlung von Regeln oder Formeln; sondern die Vorschriften werden möglichst auf vernünftiger Basis gegeben. Die Ausmessung der gewöhnlichen Flächen und Körper wird gelehrt, und bei der Behandlung wird der Nutzen der Simpsonschen Regel beleuchtet. Gbs. (Lp.)

G. Holzmüller. Elemente der Stereometrie. III. Teil: Die Untersuchung und Konstruktion schwieriger Raumgebilde. IV. Teil: Fortsetzung der schwierigeren Untersuchungen. Leipzig: G. J. Göschen. XII u. 335, XI u. 311 S. 8°.

Fortsetzung und Schluß des Werkes, das F. d. M. **30**, 445 und **31**, 487 angezeigt worden ist. Unter Benutzung elementarer Methoden und völliger Vermeidung der Schreibweise der höheren Analysis führt das Buch in die eigentliche Differentialgeometrie ein. Von der Reichhaltigkeit des Inhalts wird man sich am besten durch die Wiedergabe der Kapitelüberschriften ein Bild machen. Im dritten Teile: Die Guldinschen Regeln für Drehungskörper, Drehungsflächen und allgemeine Raumgebilde. Die Schraubenflächen, ihre Abwickelbarkeit auf Drehungsflächen, ihr Zusammenhang mit der Guldinschen Flächenformel und ihre konforme Abbildung auf die Ebene und auf andere Flächen. Die Inversionsverwandten der Schraubenlinien und Schraubenflächen. Bemerkungen über Verwandtschaften und Transformationsgruppen. Verallgemeinerte Röhrenflächen und ihre Inversionsverwandten. Im vierten Teile: Simpsonsche Regel, Schichtenformel und konforme Abbildung und ihre Anwendungen auf die Berechnung der Längen, Flächen und Inhalte stereome-

trischer Gebilde und ihrer Momente verschiedener Ordnung; auf die Kegelschnittsflächen zweiten Grades und die mit ihnen zusammenhängenden Körper. Nachtrag über Katenoid, Gaußsche Pseudosphäre und Minimal-Schraubenregelfläche. Sh.

F. Bohnert. Elementare Stereometrie. Leipzig: G. J. Göschensche Verlagshandlung. VII u. 183 S. 8° (Sammlung Schubert IV).

Führt bis zur Simpsonschen und Guldinschen Regel. Zur Körperberechnung wird u. a. der Heinzesche Zentralkörper (K. Heinze, Genetische Stereometrie, Leipzig 1886) benutzt. Gt.

E. Wienecke. Anschauliche Darstellung der Hauptsätze der Planimetrie nach dem Prinzip der Bewegung, Begleitschrift zu Wieneckes beweglichen geometrischen Figuren. Berlin: G. Winkelmann. 16 S. 8°.

Durch vier aus Holzleisten gefertigte, bewegliche Figuren sollen die Hauptbegriffe und Sätze aus dem Gebiete der Volksschulgeometrie, der Lehre von den Linien, Winkeln, Dreiecken, Vierecken und dem Kreise, veranschaulicht werden. Die erste Figur ist ein gleichschenkliges Dreieck mit Höhe. Es läßt sich durch Verschiebung seiner Spitze längs der Höhe beliebig in ein spitzwinkliges, rechtwinkliges oder stumpfwinkliges Dreieck verwandeln. Außerdem kann es längs der Höhe zusammengeklappt werden, sodaß seine beiden Hälften sich decken. Die zweite Figur ist ein mit Diagonalkreuz versehenes Quadrat, das sich durch Verschiebung der Ecken auf den Diagonalen auch in einen Rhombus verwandeln läßt. Die dritte Figur ist ein ungleichseitiges Parallelogramm, das nach Belieben in die Form eines Rechtecks oder eines Rhomboids gebracht werden kann. Die vierte Figur ist ein Kreis mit einem Durchmesser, einer Sehne, einem über der Sehne stehenden Peripheriewinkel und dem zugehörigen Zentriwinkel. Zch.

M. Schuster. Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie. II. Teil: Trigonometrie. Berlin und Leipzig: B. G. Teubner. VII u. 112 S. 1 Taf. 8°.

Wie in dem ersten Teile seines Lehrbuches, der die Planimetrie behandelt, so ist der Verf. auch hier mit Erfolg bemüht, die heuristische Methode zur Geltung zu bringen. Das Buch gliedert sich in zehn Abschnitte, von denen die beiden ersten das rechtwinklige Dreieck, der dritte und vierte das allgemeine Dreieck, der fünfte und sechste die Goniometrie und der siebente bis neunte die sphärische Trigonometrie behandeln, während der letzte Abschnitt Tafeln zur Berechnung von Funktionen, sowie geographische und astronomische Konstanten enthält.

In jedem Abschnitte wird derselbe Entwicklungsgang verfolgt: Eine an die Spitze gestellte Aufgabe führt zur Entwicklung einer allgemeinen

Formel, die sodann zur Lösung ähnlicher Aufgaben angewendet und an zahlreichen Beispielen eingeübt wird. Die Ableitung der Formeln geschieht durchweg auf konstruktiv-analytischem Wege. Der Schüler wird zunächst angeleitet, die zum Beweise nötige Figur herzustellen. Darauf wird er durch eine Reihe einzelner Fragen oder Aufgaben dazu geführt, die Formel selbsttätig abzuleiten. Dabei wird ihm die Beantwortung der Fragen oft durch einen kurzen Hinweis auf die anzuwendenden Sätze erleichtert. Eine zusammenhängende Darstellung des auf diese Weise erarbeiteten Beweises ist nicht gegeben. Nur die Hauptergebnisse (Erklärungen und Formeln) sind am Schluß jedes Abschnittes (ausgenommen VIII und IX) übersichtlich zusammengestellt. Die wichtigsten, die dem Gedächtnis fest eingeprägt werden müssen, sind durch fetten Druck besonders kenntlich gemacht.

Auch wer die eigenartige Methode des Verf. nicht durchweg zu der seinigen zu machen vermag, wird aus dem reichen Inhalte des Buches, namentlich aus den mannigfachen Anwendungen, viele Anregungen für seinen eigenen Unterricht empfangen. Zch.

A. Schülke. Aufgabensammlung aus der Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Stereometrie, nebst Anwendung auf Astronomie, Feldmessung, Nautik, Physik, Technik, Volkswirtschaftslehre. Berlin und Leipzig: B. G. Teubner. X u. 193 S. 8⁰.

Die vorliegende Aufgabensammlung erstreckt sich über alle Teile der Elementarmathematik, in denen gerechnet wird. Sie zerfällt in zwei Hauptabschnitte, von denen der erste zum größten Teile rein mathematische Aufgaben, der zweite Anwendungen enthält.

Namentlich wegen der großen Zahl anregender und interessanter Aufgaben aus den verschiedensten Gebieten der angewandten Mathematik kann die vorliegende Aufgabensammlung auf das wärmste empfohlen werden. Der Stoff ist so reichlich bemessen, daß der Lehrer der oberen Klassen je nach seinem eigenen Geschmack oder nach der Befähigung seiner Schüler bald aus diesem, bald aus jenem Gebiete Gruppen von Aufgaben zur Belebung des Unterrichts herausgreifen kann. Manche Abschnitte sind auch zur selbsttätigen Bearbeitung durch besonders befähigte Schüler recht geeignet. Zch.

E. Lemoine. Géométrographie ou art des constructions géométriques. Paris: C. Naud. 87 S. 8⁰ (Scientia, Phys.-math. No. 18).

In diesem Bändchen der Sammlung Scientia gibt der Verf. eine zusammenhängende Darstellung derjenigen Methoden, die er zur Bestimmung der Einfachheit und Genauigkeit geometrischer Konstruktionen ersonnen hat. Obschon die Gesetzmäßigkeit dieser Methoden manchem Zweifel unterliegt, so läßt sich doch nicht leugnen, daß Lemoine durch die Betonung der Gesichtspunkte, unter denen die Anfertigung einer

geometrischen Zeichnung zu vereinfachen ist, einen neuen und frischen Zug in die Betrachtungen der zeichnenden Geometrie gebracht hat. Und da seine Originalschriften in Deutschland nur schwer zugänglich sind, so ist die zusammenfassende Darstellung in diesem hübschen Bändchen recht zeitgemäß und verschafft jedem eine bequeme Gelegenheit, sich mit der Theorie und der Praxis der Lemoineschen Geometrographie bekannt zu machen. Die Sache selbst ist seit ihrem ersten Entstehen (1888) im Jahrbuche aufmerksam verfolgt worden, bedarf daher nicht eines erneuten Berichtes. Lp.

E. Lemoine. La géométrographie dans l'espace ou stéréométrographie. Mathesis (3) **2**, 105-107.

Vergl. F. d. M. **31**, 489, 1900.

R. Güntsche. Beiträge zur Geometrographie I. Arch. der Math. u. Phys. (3) **8**, 191-194.

Zu einigen Aufgaben, für die Lemoine einfache Konstruktionen angegeben hat, werden Lösungen mitgeteilt, die eine erweiterte Anwendbarkeit oder einen geringeren „Einfachheitskoeffizienten" besitzen. Die gemeinsame Grundlage dieser Konstruktionen bildet ein einfacher Satz der Kreislehre: Zwei Kreise mit den Mittelpunkten O und O' schneiden sich in S und S'. Eine durch S' gezogene Sekante schneide die Kreise in T und U. Alsdann sind die Dreiecke OST und $O'SU$ einander ähnlich. Zch.

S. Leisen. Relative Einfachheit und Genauigkeit geometrischer Konstruktionen und ihre Bestimmung. Unterrichtsbl. f. Math. 8, 35-38.

F. Pietzker. Nachschrift. Ebenda 38.

R. Güntsche. Über Geometrographie. Ebenda 61-64.

R. Güntsche. Über Geometrographie. Ebenda 82-83.

Nach einer Reihe beherzigungswerter Bemerkungen über die Vorschriften zur Anfertigung der Zeichnungen bei geometrischen Konstruktionen teilt Leisen ein System von Zählungen der auszuführenden Operationen mit, das er seit zehn Jahren bei seinem Unterrichte gebraucht. Das Ziehen einer Geraden, die ganz beliebig ist, oder durch einen oder durch zwei gegebene Punkte geht, wird bezw. durch das Symbol l_0, l_1, l_2 bezeichnet; das Beschreiben eines Kreises, der ganz beliebig ist, oder um einen gegebenen Punkt als Mittelpunkt, oder auch noch durch einen gegebenen Punkt, oder noch mit einem anderswo abzumessenden Radius wird bezw. durch die Symbole z_0, z_1, z_2, z_3 bezeichnet. Liegt der Mittelpunkt beliebig auf einer gezeichneten Linie, so werden die Symbole z_0', z_1', z_2', z_3' angewandt. Pietzker schließt sich den Bedenken Leisens gegen die Lemoinesche Beurteilung der Einfachheit einer Konstruktion an.

Gegenüber diesem neuen Versuche, die Einfachheit einer Konstruktion zahlenmäßig festzulegen, setzt Güntsche zunächst die Lemoinesche Methode nochmals auseinander, vergleicht sie mit der Leisenschen, indem er an der letzteren zugleich Kritik übt, und gelangt zu dem Schlusse, daß ein wesentlicher Unterschied nicht bestehe. „Um einer drohenden Verwirrung vorzubeugen, möchte ich dem Wunsche Nachdruck verleihen, daß man von dem klaren, wohldurchdachten und wohlerprobten Lemoineschen Verfahren nicht abgehe, so lange nicht der überzeugende Nachweis vorliegt, daß ein anderes vorzuziehen ist." Nach diesen prinzipiellen Ausführungen folgen Erläuterungen an einzelnen geeigneten Beispielen, die in dem letzten Artikel einem Aufsatze des Verf. aus dem Arch. d. Math. u. Phys. entnommen sind. Lp.

L. Ripert. Construction géométrographique des axes d'une ellipse dont on connaît, en grandeur et en position, deux diamètres conjugués. Arch. der Math. u. Phys. (3) **8**, 54.

Für die Konstruktion gibt E. Lemoine im Arch. (3) **1**, 339, 1901 (vgl. auch AFAS **21**, 69, 1892) die Zahl 41 als geometrographischen Einfachheitsgrad an; Verf. führt sie unter Benutzung des Frégierschen Satzes mit 31 Elementaroperationen aus. Gt.

J. Vojtěch. Die Theorie der geometrischen Konstruktionen. Časopis **31**, 161-173, 248-260, 329-351, 441-459 (Böhmisch).

Versuch einer Theorie der geometrischen Konstruktionen, d. i. eine Entwicklung aller bekannten Methoden, deren Anwendung die Lösung aller konstruktiven geometrischen Aufgaben verbürgen soll.

I. Über geometrische lineare Konstruktionen. II. Über die Behelfe, vermittelst welcher sich eine geometrische Konstruktion verwirklichen läßt. III. Konstruktionen höherer Art. Über die Einfachheit und Genauigkeit geometrischer Konstruktionen. Sda.

Fr. Weiss. Wissenschaftliche Strenge im mathematischen Unterricht. Unterrichtsbl. f. Math. 8, 32-35, 56-58.

G. Holzmüller. Nachschrift zu dem vorstehenden Aufsatz. Ebenda 58.

E. Haentzschel. Bemerkung zu dem Aufsatze des Herrn F. Weiss: Wissenschaftliche Strenge im mathematischen Unterricht. Ebenda 91-92.

„Was pädagogisch opportun ist, ist nicht immer wissenschaftlich streng, und umgekehrt. Häufig werden sich beide Anforderungen, der Strenge und der pädagogischen Zuträglichkeit, mit einander vereinbaren lassen; in Fällen, in denen dies nicht angeht, wird meist die Pädagogik

den Sieg davontragen müssen. Denn es ist sicher besser, daß der Schüler einige Einsicht, als daß er gar keine, oder statt der Einsicht nur Worte gewinnt." Diese Gedanken werden in dem ersten Aufsatze an einer Reihe von Beispielen aus der Elementarmathematik erläutert. Die beiden anderen Artikel sind polemisch; sie verteidigen die von Weiß bemängelten Stellen der Schriften beider Autoren. Lp.

Discussion on proposed improvements in the teaching of elementary mathematics. Edinb. M. S. Proc. **20**, 33-34.

Nach ziemlich weit ausgesponnener Erörterung hat die Gesellschaft gewisse Resolutionen angenommen, die einerseits den Wert der Mathematik als eines geistigen Zuchtmittels für den Schüler nachdrücklich betonen, andererseits aber auch den freien Wettbewerb bezüglich der Leitfäden billigen und die recht häufige Vorführung faßlicher Erläuterungen und Bestätigungen aus der Wirklichkeit mit Hülfe des Versuches und der Zeichnung fordern. Wir erwähnen eine besondere Resolution, welche die ungebührliche Hast mit dem Beginne der Infinitesimalrechnung aus Rücksicht auf ihre praktischen Anwendungen mißbilligt. Gbs. (Lp.)

A. Lodge. Rearrangement of Euclid Book I, Part 1. Nature **65**, 534.

W. C. Fletcher, E. T. Dixon, T. Petch, R. B. Hayward. Rearrangement of Euclid. Book I, Part 1. Nature **65**, 559.

G. H. Bryan. Rearrangement of Euclid I. Nature **65**, 585.

T. Petch. Rearrangement of Euclid, Book I, 1-32. Nature **66**, 7.

J. M. Child. Rearrangement of Euclid's propositions. Nature **66**, 31.

Um die Meinungen über die Änderungen zu klären, welche an Euklids Elementen vorzunehmen sind, damit sie den Ansprüchen genügen, die an ein Lehrbuch für die Jugend zu machen sind, stellt Lodge in dem ersten Artikel einen Plan für solche Anordnungen auf, die den Euklid den Lehrbüchern des europäischen Kontinents nähern. Die folgenden brieflichen Äußerungen sprechen sich größtenteils zustimmend aus. Zu erwähnen ist, daß Lodge die Konstruktionsaufgaben von der Folge der Lehrsätze trennt und sie in einem besonderen, parallel laufenden Kursus durchgenommen haben will. Lp.

K. Geissler. Eine Konstruktionsaufgabe, ausgedehnt auf verschiedene Weitenbehaftungen (Geometrie des Unendlichen). Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **33**, 336-345.

Die bekannte Aufgabe, ein Quadrat zu konstruieren, dessen Seiten einzeln durch vier gegebene Punkte gehen, wird dazu benutzt, die Vorstellungen des Verf. über die Weitenbehaftungen zu erläutern. Lp.

K. GEISSLER. Die Sätze von Menelaus, Ceva und vom vollständigen Vierseite und das Unendliche. Unterrichtsbl. f. Math. 8, 83-87.

Auch in diesem Artikel benutzt der Verf. die sonst als Grenzübergänge behandelten Schlüsse, um seine Lehre von der „Behaftung“ jener Sätze mit dem Unendlichen zu erläutern. Lp.

S. W. RICHARDSON. A method of treating parallels. Nature 66, 223.

W. R. JAMIESON. A method of treating parallels. Nature 66, 576-577.

Der erste Autor will mit dem Satz beginnen, daß ein Lot zu der einen der beiden Parallelen auch ein Lot zu der anderen ist. Der zweite zieht den allgemeineren Satz von der Gleichheit der Gegenwinkel vor. Lp.

J.-C. BOLT. Les différents modes de mesure des angles. Ens. math. 4, 128-130.

Die verschiedenen Arten des Winkelmaßes werden mit einander verglichen auf Brauchbarkeit, und aus der Bemerkung, daß $\sin 1'' = 1:206265$ ist, wird die ziemlich genaue Berechnung der Funktionen kleiner Winkel abgeleitet. — Brocard fügt (S. 218) eine richtigstellende Bemerkung bei. Tn.

G. H. BRYAN, H. W. CROOME SMITH, E. T. DIXON. Proofs of Euclid I, 5. Nature 65, 438-439, 466, 487.

Es handelt sich um den Beweis des Satzes, daß die Winkel an der Basis in einem gleichschenkligen Dreiecke gleich sind. Lp.

E. ECKHARDT. Zur Konstruktion des Winkels von 36°. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 33, 242-243.

Variante beim Nachweise, daß durch den goldenen Schnitt die Konstruktion des Winkels von 36° erreicht wird. Lp.

H. F. BLICHFELDT. Demonstrations of a pair of theorems in geometry. Edinb. M. S. Proc. 20, 16-17.

Die Sätze sind diese: 1. Wenn bei einem Dreiecke ABC der Winkel A größer als der Winkel B ist und die Linien AD und BE so gezogen sind, daß die Winkel BAD und DAC bezw. größer als die Winkel ABE und EBC sind, so ist BE größer als AD. 2. Wenn bei einem Dreiecke ABC die Seite BC größer als AC ist und die Linien AD und BE so gezogen sind, daß CD und DB bezw. größer als CE und EA sind, so ist BE größer als AD. Der erste Satz

führt zu einem Beweise des Theorems in Mackays Note „History of a theorem in elementary geometry" (Referat S. 59 dieses Bandes).

Gbs. (Lp.)

H. F. Blichfeldt. Proof of a theorem concerning isosceles triangles. Annals of Math. (2) 4, 22-24.

Der Verf. gibt einen scharfsinnigen, mit ganz elementaren Mitteln geführten, indirekten Beweis für den Satz: Sind in einem Dreieck die Halbierungslinien zweier Winkel gleich, so ist das Dreieck gleichschenklig. Der hier gelieferte Beweis erlaubt sogleich eine Verallgemeinerung des soeben zitierten Satzes: Sind in einem Dreieck die beiden Geraden, welche zwei Winkel des Dreiecks in demselben Verhältnis (innerlich) teilen, einander gleich, so ist das Dreieck gleichschenklig. Ferner ist bemerkenswert, daß der vorliegende Beweis unabhängig vom Parallelenaxiom ist, der bewiesene Satz also auch in der nichteuklidischen Geometrie, bezw. auf den Flächen konstanten Krümmungsmaßes gilt.

Z.

C. A. Laisant. Propriété élémentaire du triangle. Soc. Philom. Bull. (9) 4, 121-122.

Ist M in dem Dreieck ABC die Mitte der Seite BC, AH eine Höhe und AA' eine Winkelhalbierende, so verhält sich bekanntlich $AB:BA' = AC:CA' = k$. Hieraus wird durch einfache Ähnlichkeitsbetrachtungen die Beziehung $MH:MA' = k^2$ abgeleitet. Ist E der Punkt, in welchem der eingeschriebene Kreis die Seite BC berührt, so ergibt sich ferner $ME^2 = MA' \cdot MH$. Diese Gleichung lehrt, daß M auf der Potenzlinie des eingeschriebenen Kreises und irgend eines durch H und A' gehenden Kreises liegt.

Zch.

E. Lemoine, U. Bordoni. Risoluzione della 31ª quistione a concorso. Suppl. al Period. 5, 40-41.

„Wenn ein Dreieck ABC gegeben ist, so gibt es einen derartigen Punkt P, daß, wenn A', B', C' die Punkte sind, in denen die Geraden AP, BP, CP die Seiten BC, CA, AB treffen, $PA' = PB' = PC'$ ist. Dieser Punkt scheint nicht mit Hülfe von Zirkel und Lineal bestimmbar zu sein. Sind aber A', B', C' gegeben, so läßt sich das Dreieck ABC finden. Die Konstruktion des Dreiecks ABC aus gegebenen Punkten A', B', C' und das geometrographische Symbol anzugeben." Diese von Lemoine gestellte Preisaufgabe ist von U. Bordoni gelöst.

Lp.

J. A. Third. Question 14655. Ed. Times (2) 2, 30-32.

Aus den Ecken eines Dreiecks ABC werden die Geraden AX, BY, CZ so gezogen, daß die Summe der Winkel CAX, ABY, BCZ, in

derselben Richtung herum genommen, 180° beträgt, und AX', BY', CZ' werden aus den Ecken parallel bezw. zu CZ, AX, BY gezogen. Dann liegen die Umkreiszentren von AXX', BYY', CZZ' auf einer und derselben Geraden. Lp.

R. F. Muirhead. Constructions connected with Euclid VI, 3 and 4, and the circle of Apollonius. Edinb. M. S. Proc. **20**, 67-69.

R. F. Muirhead. Geometry of the isosceles trapezium and the contra-parallelogram, with applications to the geometry of the ellipse. Edinb. M. S. Proc. **20**, 70-72.

Im ersten Artikel werden einige einfache Beweise der angeführten Sätze gegeben nebst einigen bezüglichen Gelenkführungen. Im zweiten führen die Eigenschaften der genannten Figuren (Kontraparallelogramm ist die aus den beiden Diagonalen und den beiden nicht parallelen Seiten eines gleichschenkligen Trapezes gebildete Figur) zu einfachen Beweisen für die Tangenten-Eigenschaften einer Ellipse. Gbs. (Lp.)

T. Hayashi. On the isosceles trapezium problem. Tokio Math. Ges. **9**, 1-6.

Der Verf. hat mittels einer von den älteren japanischen Mathematikern ausgebildeten, allerdings nicht strengen Methode den Satz gefunden: Wenn man in ein gleichschenkliges Trapez eine Ellipse beschreibt und in den Ecken der Figur Kreise konstruiert, von denen jeder zwei Seiten des Trapezes und die Ellipse berührt, so stehen die Radien der Kreise in einer einfachen Proportion.

Bei dem Versuche eines exakten analytischen Beweises hat der Verf. zwar noch nicht das angegebene Resultat, wohl aber einige andere interessante Beziehungen gefunden, nämlich: 1. die Berührungspunkte der Ellipse mit den parallelen Seiten des Trapezes teilen diese in demselben Verhältnis. 2. Die Punkte, in denen eine Ellipse zwei anstoßende Seiten eines umgeschriebenen Rechtecks berührt, teilen diese Seiten in demselben Verhältnis. 3. Die Produkte der Radien zweier Kreise, von denen jeder zwei anstoßende Seiten eines einer Ellipse umgeschriebenen gleichschenkligen Trapezes und zugleich die Ellipse (außen oder innen) berührt, stehen in Proportion. Zch.

J. Neuberg. Sur le quadrilatère complet. Brux. S. sc. **26**B, 13-20.

Untersuchung der Eigenschaften 1. des Vierecks, welches die Schwerpunkte der von vier Geraden gebildeten vier Dreiecke zu Ecken hat, 2. der Lemoineschen Punkte dieser Dreiecke. Mn. (Lp.)

K. Bochow. Zur Behandlung der regelmäßigen Vielecke. Unterrichtsbl. f. Math. 8, 109-113.

J. E. Böttcher. Anschauliche Kreisberechnung. Ebenda 113-115.

Der erste Aufsatz ist eine kurze Neubearbeitung des Themas, das der Verf. 1896 behandelt hat (F. d. M. **27**, 396). Böttcher teilt zu diesen Betrachtungen, die beim Unterrichte in der Elementarmathematik nützlich zu verwerten sind, interessante Methoden mit, die er benutzt. Der zweite Aufsatz weist auf eine Reihe bezüglicher Schriften hin.

Lp.

J. Joffroy. Sur les heptagones et les ennéagones réguliers. Ens. math. **4**, 32-34.

Drei Sätze werden bewiesen:

$$(1)\qquad \sin\frac{\pi}{9}+\sin\frac{2\pi}{9}=\sin\frac{4\pi}{9},$$

$$(2)\qquad \frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}},$$

$$(3)\qquad 2\sin\frac{\pi}{7}+\sqrt{7}=4\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}.$$

Brocard zeigt übrigens (S. 217), daß (2) und (3) schon früher angegeben und bewiesen waren, und daß (1) sich leicht anders deuten läßt. Tn.

N. Henry. Die Drei- und Fünfteilung der Winkel, inbesondere die Teilung der Winkel in ein Mehr durch ein und dieselbe Konstruktion auf dem Wege der elementaren Geometrie unter Benutzung von Lineal und Zirkel. Aachen: H. Kaatzer, 1902, gr. 4°, 4 Tafeln mit Beiwort.

Der Fehler, auf dem die angebliche Lösung des Trisektionsproblems beruht, findet sich auf der zweiten Seite des Textes, Zeile 3 v. o. Dem Schluß liegt die stillschweigende, aber falsche Annahme zugrunde, daß $AD \parallel EC$ (Taf. I, Fig. 2) ist. Die Aufgaben 2, 4, 5 stützen sich auf diese Aufgabe (Aufg. 1). Die Methode des Verf. führt nur in Aufg. 3: „Einen spitzen Winkel halbieren“ zu richtigem Ergebnis. Verf. ist nicht Fachmann. Lwt.

H. Schoeler. Angenäherte n-Teilung eines beliebigen Winkels mit Zirkel und Lineal. Arch. der Math. u. Phys. (3) **4**, 128-129.

Das beschriebene Verfahren zur n-Teilung (n ungerade) eines beliebigen Winkels α setzt voraus, daß man die $(n+1)$-Teilung vollziehen kann. Man mache den $(n+1)$-ten Teil von 2α zum Zentriwinkel eines

beliebigen Kreises, verlängere einen Schenkel über den Mittelpunkt bis zum Schnitt mit der Peripherie, trage auf der Verlängerung von ihrem Endpunkte aus den $(n+1)$-ten Teil des Durchmessers ab und verbinde den erhaltenen Teilpunkt mit dem Endpunkte des anderen Radius des Zentriwinkels. Der Winkel zwischen dem Durchmessser und dieser Verbindungslinie ist angenähert gleich α/n. Der gefundene Winkel ist stets etwas größer als α/n. Der Fehler ist um so kleiner, je kleiner α ist. Um den Fehler beliebig klein zu machen, kann man von dem gegebenen Winkel erst einen passend gewählten kleineren Winkel n-mal abziehen und dann den Restwinkel teilen. Zch.

E. Lampe. Bemerkungen über einige angenäherte n-Teilungen von Winkeln. Arch. der Math. u. Phys. (3) **4**, 130-133.

Bei der von Schoeler angegebenen Näherungskonstruktion (Referat vorstehend) ergibt eine trigonometrische Berechnung, daß der konstruierte Winkel stets größer als α/n ist, der Fehler angenähert mit der dritten Potenz von α wächst und mit größeren Werten von n sehr schnell abnimmt.

Es werden zwei andere angenäherte n-Teilungen mitgeteilt, von denen die erste (M. Koenig, die geometrische Teilung des Winkels, 1894) wie diejenige von Schoeler eine rekurrente, die zweite, von einem Feldmesser angegebene (vergl. Lampe, Mathesis (2) **10**, 158, 1900) eine independente ist. Zch.

A. Massfeller. Eine einfache Lösung des Apollonischen Berührungsproblems in der Ebene. Arch. der Math. u. Phys. (3) **3**, 189-190.

Sind A_1, A_2 und A_3 drei in einer Ähnlichkeitsachse a liegende Ähnlichkeitspunkte der gegebenen Kreise K_1, K_2, K_3, so gibt es einen Berührungskreis X von der Beschaffenheit, daß von seinen Berührungspunkten T_1, T_2 und T_3 die beiden ersten mit A_3, T_1 und T_3 mit A_2 und T_2 und T_3 mit A_1 in gerader Linie liegen. Zieht man nun durch einen beliebigen Punkt B_1 von K_1 die Ähnlichkeitsstrahlen A_2B_1 und A_3B_1, welche K_3 und K_3 in den zu B_1 inversen Punkten B_2 und B_3 schneiden, so bestimmen B_1, B_2 und B_3 einen Hülfskreis H, der mit dem gesuchten Kreise X die Ähnlichkeitsachse a zur Potenzlinie hat. Die gemeinsame Sehne von H und K_1 trifft a in dem Potenzpunkte Q der Kreise X, H, K_1. Durch Q muß auch die Potenzlinie, d. h. die gemeinsame Tangente von X und K_1, gehen. Dadurch ist T_1 bestimmt und mit ihm T_2 und T_3. Da die Tangenten von Q an die Kreise H, K_1 und X gleich lang sind, kann man auch von Q die Tangente an H legen und mit der Länge derselben um Q den Kreis beschreiben, welcher K_1 in T_1 trifft.

Diese Lösung läßt sich wörtlich auf alle Sonderfälle des Problems anwenden und führt zu den gewöhnlichen Konstruktionen. Wählt man

den Orthogonalkreis als Hülfskreis, so gelangt man zu der Lösung von Gergonne (vergl. F. d. M. **32**, 499, 1901). Zch.

A. Pampuch. Das Malfatti-Steinersche Problem. Pr. Bischöfl. Gymn. St. Stephan. Straßburg. 53 S. 10 Taf. 4°.

In dem ersten Abschnitte der vorliegenden Arbeit wird der bekannte Spezialfall des Problems behandelt, bei dem drei Gerade einer Ebene oder drei größte Kreise einer Kugel gegeben sind und drei Kreise gefunden werden sollen, von denen jeder die beiden andern und zwei der gegebenen Linien berührt. Dabei wird außerdem noch gefordert, daß keine drei unter diesen sechs Linien einen Kreisbüschel bilden sollen. Nachdem der Kosinus und der Sinus des Winkels zweier Kreise allgemein (auch für imaginäre Schnittpunkte) definiert worden sind, werden gewisse trigonometrische Beziehungen entwickelt, aus denen sich die bekannte Steinersche Konstruktion, die Malfattischen und die entsprechenden trigonometrischen Lösungsformeln für das ebene und das sphärische Dreieck ergeben. Für die Kugel werden die 64 Lösungen der Aufgabe aus der Betrachtung der 64 Dreiecke hergeleitet, die von drei größten Kreisen gebildet werden. Geht man von der Kugel durch den bekannten Grenzübergang zur Ebene über, so werden 32 Lösungen unbrauchbar, weil die Lösungsfiguren ins Unendliche fallen. Die 32, bezw. 64 Lösungen beider Aufgaben sind in sechs Tabellen zusammengestellt, von denen die beiden ersten die Lösungen nach Steiner, die dritte und vierte diejenigen nach Malfatti und die beiden letzten die Lösungen auf trigonometrische Art enthalten. Sodann werden gewisse Substitutionen angegeben, durch welche man beim ebenen Dreieck aus einer beliebigen Lösung die jedesmaligen 31 übrigen Lösungen herleiten kann. In einer Anmerkung werden außerdem als Folgerungen acht Gruppen von insgesamt 10608 Formeln für den Flächeninhalt eines ebenen Dreiecks zusammengestellt.

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit dem allgemeinen Fall des Problems, bei welchem anstelle der drei Geraden oder größten Kugelkreise drei beliebige Kreise einer Ebene oder Kugel gegeben sind. Zunächst werden zwei Hülfssätze bewiesen, aus denen sich die Steinersche Konstruktion ableiten läßt. Aus einem allgemeineren Hülfssatze ergeben sich sodann zwei neue Lösungsmethoden. Diese werden zuerst auf den Fall angewendet, daß weder das Tripel der Berührungskreise, noch irgend eins der drei Tripel, bestehend aus einem gegebenen und den beiden ihn berührenden Kreisen, einen Büschel bildet. Schließlich werden dieselben Konstruktionen auch für die Fälle ausgeführt, in denen die Kreise eines oder zweier von diesen drei Tripeln einen Büschel bilden.

In einem Anhange ist ein Zahlenbeispiel für die 32 Lösungen beim ebenen Dreieck durchgeführt, bei dem die Maßzahlen aller in Frage kommenden Strecken ganze Zahlen sind. 32 nach diesen Resultaten

hergestellte Figuren ermöglichen einen anschaulichen Überblick über die Gesamtheit der Lösungen. Zch.

E.-N. Barisien. Généralisation du problème de Malfatti. Nouv. Ann. (4) **2**, 411-422.

Der Verf. setzt an der in den Lehrbüchern gewöhnlich gegebenen Darstellung des Malfattischen Problems aus, daß nur eine Lösung dieser Aufgabe erwähnt wird. Er behauptet irrtümlicherweise, es gebe deren 20 (statt 32), und sucht dies mit Benutzung der von Desboves (Questions de Trigonométrie) gegebenen trigonometrischen Lösungsformeln nachzuweisen. Er findet in der Tat 20 verschiedene Lösungen, denkt aber merkwürdigerweise nicht daran, zu untersuchen, ob damit die Zahl aller möglichen Lösungen erschöpft sei. Hätte er dies getan, so würde er wohl leicht die Unvollständigkeit seines Verfahrens bemerkt haben. Durch einen Vergleich mit den z. B. bei Pampuch (Referat vorstehend) für die 32 Fälle gegebenen Figuren kann man sofort die fehlenden Lösungen finden. Zch.

F. J. Studnička. Über äußere und innere Bipolardreiecke eines Systems von drei Kreisen. Prag. Ber. 1902, No. 19, 8 S.

Der Verf. geht von drei Kreisen in der Ebene aus, deren Mittelpunkte ein Dreieck (das Zentraldreieck) bilden, und für deren Halbmesser $a_1 > a_2 > a_3$ gilt. Die äußeren und inneren Ähnlichkeitspunkte dieser Kreise nennt der Verf. äußere und innere Bipole, und er unterscheidet acht Tripel derselben, die er in zwei Gruppen zu je vier Tripeln ordnet, je nachdem die drei Bipole eine Gerade bilden (eine äußere und drei innere Bipolaren) oder aber ein Dreieck (ein inneres und drei äußere Bipolardreiecke). Es werden nun aus den Koordinaten der Bipole sowohl für den Inhalt dieser Dreiecke als auch für das Verhältnis dieser Inhalte zu demjenigen des Zentraldreiecks symmetrische Ausdrücke gebildet. Hierbei kommt auch der Fall des Maximums der Fläche des inneren Bipolardreiecks sowie der Fall, wo dieselbe konstant bleibt, zur Sprache. Sda.

A. Krahe. Alcuni teoremi sulle figure curvilinee. Mat. pure ed appl. **2**, 34-35.

Eine Reihe elementar-geometrischer Sätze wird vom geradlinigen Dreieck auf Dreiecke übertragen, deren Seiten aus Bogen sich in einem Punkte schneidender Kreise gebildet sind. Als Hülfsmittel dient eine Transformation mittels reziproker Radien. Lwt.

G. Biasi. Sopra una estensione del teorema di Wallace. Mat. pure ed appl. **1**, 264-269.

Ausgehend von einer Notiz von Schotten (Arch. d. Math. u. Phys. (2) **13**, 65) über eine Verallgemeinerung des Wallaceschen (oder Sim-

sonschen) Satzes, beweist der Verf. drei allgemeine Sätze, in denen der Wallacesche Satz selbst, sowie die von Schotten angegebene Verallgemeinerung als Spezialfälle enthalten sind.

Wenn man einem Kreise ein vollständiges n-Eck mit den Ecken R_i und den Seiten s_i einbeschreibt und von einem Punkte Z der Peripherie auf alle s_i Lote fällt, so bilden deren Fußpunkte S_i eine Figur, bestehend aus $\binom{n}{2}$ Punkten, die zu je drei in $\binom{n}{3}$ Geraden t_i, den Wallaceschen Geraden der aus den R_i gebildeten Dreiecke, liegen. Je $n-1$ Punkte S_i, die auf den in einem Punkte R_i zusammenstoßenden Geraden s_i liegen, gehören einem Kreise an, der die Entfernung zwischen Z und dem betreffenden Punkte R_i zum Durchmesser hat. Solcher Kreise gibt es n. Durch jeden Punkt S_i gehen zwei Kreise. Es kann ferner leicht bewiesen werden, daß durch jeden Punkt S_i $n-2$ Gerade t_i gehen. Wendet man auf die aus den Punkten S_i und den Geraden t_i gebildete Figur wieder dieselbe Konstruktion an, d. h. fällt man von Z auf alle t_i die Lote, so bilden die Fußpunkte eine Figur aus $\binom{n}{3}$ Punkten, die in $\binom{n}{4}$ Geraden und $\binom{n}{2}$ durch Z gehenden Kreisen so angeordnet sind, daß jede Gerade vier, jeder Kreis $n-2$ Punkte enthält und durch jeden Punkt $n-3$ Gerade und drei Kreise hindurchgehen.

Der Verf. bezeichnet das vollständige n-Eck mit φ_1, die daraus abgeleitete Figur der Punkte S_i mit φ_2 und die aus φ_2 hergeleitete Figur mit φ_3. Es sei nun φ_r eine Figur, bestehend aus $\binom{n}{r}$ Punkten, $\binom{n}{r+1}$ Geraden und $\binom{n}{r-1}$ durch einen Punkt Z gehenden Kreisen, die so angeordnet sind, daß jede Gerade $r+1$, jeder Kreis $n-r+1$ Punkte enthält und durch jeden Punkt $n-r$ Gerade und r Kreise gehen. Durch den Schluß von r auf $r+1$ wird nachgewiesen, daß die Fußpunkte der von Z auf die Geraden von φ_r gefällten Lote eine Figur φ_{r+1} bilden, deren Eigenschaften sich ergeben, wenn man im Vorstehenden überall r durch $r+1$ ersetzt. Die Figur φ_r geht aus φ_1 durch $(r-1)$-malige Anwendung desselben Konstruktionsverfahrens hervor (Lehrsatz I).

Auf ähnlichem Wege wird der folgende Lehrsatz II bewiesen: ψ_r sei eine ebene Figur, gebildet aus $\binom{n}{r}$ Punkten R_i, $\binom{n}{r-1}$ Geraden s_i und $\binom{n}{r+1}$ durch einen festen Punkt Z gehenden Kreisen, die so angeordnet sind, daß jede Gerade $n-r+1$, jeder Kreis $r+1$ Punkte enthalte und durch jeden Punkt r Gerade und $n-r$ Kreise gehen. Wenn man in jedem Punkte R_i auf ZR_i das Lot r_i errichtet, so bilden die Schnittpunkte Q_i dieser Lote eine Figur ψ_{r+1}, bestehend aus $\binom{n}{r+1}$

Punkten Q_i, $\binom{n}{r}$ Geraden r_i und $\binom{n}{r+2}$ durch Z gehenden Kreisen von der Beschaffenheit, daß jede Gerade $n-r$, jeder Kreis $r+2$ Punkte enthält und durch jeden Punkt $r+1$ Gerade und $n-r-1$ Kreise gehen.

Wenn man noch den Symbolen φ_0 und φ_n, ψ_n und ψ_0 passende Bedeutungen beilegt, so sind die Figuren $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r, \ldots, \varphi_n$ der Reihe nach dieselben wie die Figuren $\psi_n, \psi_{n-1}, \ldots, \psi_{n-r}, \ldots, \psi_0$.

Konstruiert man zu einem und demselben vollständigen n-Eck φ_1 zwei verschiedene Figuren φ_{r+1} und φ'_{r+1}, indem man die Lote von zwei diametralen Gegenpunkten des Umkreises fällt, so sind je zwei entsprechende Gerade von φ_{r+1} und φ'_{r+1} entweder parallel oder senkrecht zu einander, je nachdem r gerade oder ungerade ist (Lehrsatz III).

Zum Schluß wird noch angemerkt, daß die drei Lehrsätze ihre Gültigkeit behalten, wenn die Geraden ZR_i zu den Geraden r_i isoklin, statt senkrecht, sind.

Bemerkenswert ist der in den Sätzen I und II hervortretende Dualismus zwischen den Geraden und den Kreisen. Zch.

G. Biasi. Di due nuove forme del teorema di Wallace nelle sue estensioni. Sepr.-Abdr. Periodico 17. 3 S. 8°.

In einer früheren Arbeit (Sopra una estensione del teorema di Wallace, Referat vorstehend) hat der Verfasser eine Verallgemeinerung des Simsonschen oder Wallaceschen Satzes angegeben, die sich nicht nur auf den Fall eines einem Kreise eingeschriebenen vollständigen n-Ecks, sondern auch auf gewisse Figuren bezieht, die aus Punkten, Geraden und durch einen festen Punkt gehenden Kreisen bestehen. Der Verfasser vervollständigt hier die Eigenschaften jener Figuren φ_r, indem er außer den durch einen festen Punkt Z gehenden Kreisen auch die Parabeln mit demselben Brennpunkte Z in Betracht zieht. Es gibt unter diesen $\binom{n}{r+2}$ Parabeln, von denen jede $r+2$ Gerade von φ_r berührt. Diese Parabeln bilden $\binom{n}{r+1}$ Scharen von je $n-r-1$ Parabeln mit einer gemeinsamen Tangente. Die Verallgemeinerung des Wallaceschen Satzes und ihre Umkehrung werden hier folgendermaßen formuliert:

I. Die Fußpunkte der isoklinen Geraden, die von Z nach allen Geraden der Figur φ_r gezogen werden, sind die Punkte einer Figur φ_{r+1}.

II. Die Geraden, welche durch alle Punkte der Figur φ_r isoklin zu den diese Punkte mit Z verbindenden Geraden gezogen werden, sind die Geraden einer Figur φ_{r-1}.

Mit Benutzung gewisser abkürzender Bezeichnungen werden den Sätzen I und II noch zwei neue kürzere Formen gegeben, die aber inhaltlich nichts Neues bieten. Zch.

L. Ripert. Sur une extension élémentaire du théorème de Wallace. Mat. pure ed appl. **2**, 30-34.

Die Arbeit enthält einige dem Theorem von Wallace verwandte Sätze, insbesondere eine Ausdehnung jenes Satzes auf den Raum.

Lwt.

E. Legrand. Note de géométrie. Revue de Math. spéc. **12**, 497-498.

Bestimmt man die Höhenschnittpunkte der vier aus den Ecken eines Kreisvierecks gebildeten Dreiecke, und verbindet man jede Ecke des Vierecks mit dem Höhenschnittpunkte des aus den drei andern Ecken gebildeten Dreiecks, so halbieren sich diese vier Verbindungslinien. Durch den Halbierungspunkt ω gehen die Neunpunktkreise der vier genannten, sowie der vier aus den Höhenschnittpunkten gebildeten Dreiecke, ferner die acht Simsonschen Linien aller dieser Dreiecke. Man verbinde die Mitten der Gegenseiten des Kreisvierecks, verbinde den Schnittpunkt dieser beiden Mittellinien mit dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises und verlängere diese Verbindungslinie über jenen Schnittpunkt hinaus um sich selbst. Dann ist der Endpunkt der Verlängerung der Punkt ω. — Die Existenz und die Eigenschaften des Punktes ω werden hier analytisch hergeleitet, nachdem sie in früheren Arbeiten des Verfassers geometrisch bewiesen worden sind.

Zch.

C. E. Brooks. On a new circle which arises from any number of directed lines. Johns Hopkins Univ. Circ. **22**, 5-7.

Unter dem Berührungskreise dreier gerichteten Geraden hat man denjenigen der vier möglichen Kreise zu verstehen, der bei bestimmtem Umlaufssinn an den Berührungsstellen mit den Geraden gleichgerichtet ist. Vier gerichtete Geraden haben zu je dreien einen Berührungskreis, und die Mittelpunkte dieser Kreise liegen auf einem Kreise, dem „Hauptkreise“ (first circle) der vier gerichteten Geraden. Fünf gerichtete Geraden haben zu je vieren einen Hauptkreis; die Mittelpunkte dieser fünf Kreise liegen wieder auf einem Kreise, dem Hauptkreise der fünf gerichteten Geraden. Analog gehört zu n gerichteten Geraden ein bestimmter Hauptkreis. Im Anschluß an diese von Loud in den American M. S. Trans. **1**, 323—338 (F. d. M. **31**, 580, 1900) mitgeteilten Untersuchungen weist der Verfasser einen anderen, ebenfalls durch n gerichtete Geraden eindeutig bestimmten Kreis, den „in-circle“ nach. Liegen zunächst vier gerichtete Geraden vor, und fällt man von den Mittelpunkten der Hauptkreise je dreier Geraden Lote auf die jedesmalige vierte, so sind diese vier Lote Tangenten eines Kreises, des in-circle der vier gerichteten Geraden. Nehmen wir an, wir hätten den in-circle für $n-1$ Gerade bereits definiert, dann ergibt sich der für n Gerade in folgender Weise: Man ermittele von $n-1$ der n Geraden den Hauptkreis und den in-circle, teile die Strecke vom Mittelpunkt des

ersteren zum Mittelpunkte des letzteren im Verhältnis $n - 4 : 1$ und fälle vom Teilpunkte das Lot auf die n-te Gerade. Solcher Lote kann man n konstruieren. Sie sind sämtlich Tangenten eines Kreises, des in-circle der n gerichteten Geraden. Stz.

V. Daniel. Question 14696. Ed. Times (2) 1, 47-48.

Einem Dreiecke ABC werde ein anderes so einbeschrieben, daß die Scheitel A', B', C' des neuen Dreiecks die Seiten des alten nach einem und demselben Verhältnisse teilen. Dann ist $\Sigma \operatorname{cotg} \alpha$ für alle so einschreibbaren Dreiecke eine invariante Funktion der Winkel. Ist das Verhältnis gleich $k/(1-k)$, so gilt für ein einzelnes Dreieck $A'B'C'$:

$$\Sigma a'^2 = \lambda \Sigma a^2, \quad \Sigma a'^4 = \lambda^2 \Sigma a^4 \quad (\lambda = 1 - 3k + 3k^2).$$

Tucker weist in der Lösung auf allgemeinere Beziehungen hin, die er früher veröffentlicht hat (vergl. F. d. M. 25, 920, 1893). — Third teilt mit, daß $\Sigma \operatorname{cotg} A$ für alle Dreiecke konstant ist, deren Ecken baryzentrische Koordinaten von der Form (α, β, γ), (β, γ, α), (γ, α, β) haben. — Davis erinnert an verschiedene Beziehungen zur neueren Dreiecksgeometrie, von denen er einige in seiner Lösung einer Frage von J. Neuberg (No. 14195, Ed. Times 72, 78, 1900) angeführt hatte.

Lp.

A. H. Coombes. Question 14873. Ed. Times (2) 1, 86-87.

Die Winkelhalbierende von A treffe die Gegenseite BC in P, die Tangente von P an den Inkreis des Dreiecks berühre in T; dann trifft die Verbindungslinie des Punktes T mit der Mitte von BC den Inkreis zum zweiten Male in einem Punkte, der auch auf dem Neunpunktekreis liegt. Hieraus folgt, daß der letztere den Inkreis berührt. Lp.

V. Hioux. Nouvelle démonstration du théorème de Feuerbach. Nouv. Ann. (4) 2, 254-256.

Der angeblich neue Beweis des Feuerbachschen Theorems mit Hülfe eines Ankreises ist schon lange bekannt; man findet ihn in dem Werk von Rouché und Comberousse. Er stammt wahrscheinlich von Mansion oder Serret. Wbg.

Genese. Question 6771. Ed. Times (2) 1, 45.

A, B, C sind drei Punkte einer Geraden; ein Kreis berührt diese Gerade in B. Ist P ein beliebiger Punkt des Kreises, so ist $\operatorname{cotg} APB + \operatorname{cotg} BPC$ konstant; hieraus läßt sich folgern, daß der Neunpunktekreis eines Dreiecks den Inkreis berührt. — Beweise von Cooney und Sanjána. Lp.

Canon. Autre démonstration du théorème de Feuerbach. Nouv. Ann. (4) 2, 500-501.

Einfacher Beweis mit Anwendung der inversen Verwandtschaft.

Jhk.

W. Fuhrmann. Kollineare und orthologische Dreiecke. Pr. Oberrealschule auf der Burg. Königsberg i. Pr. 20 S. 3 Fig. 4°.

Zwei Dreiecke heißen orthologisch, wenn die Lote, welche in irgend einer Ordnung von den Ecken des einen auf die Seiten des andern gefällt werden, sich in einem Punkte treffen. Nach Steiner gehen dann auch die Lote, welche in entsprechender Ordnung von den Ecken des zweiten Dreiecks auf die Seiten des ersten gefällt werden, durch einen Punkt. Die beiden Schnittpunkte der Lote heißen die orthologischen Zentren der beiden Dreiecke. Teilweise entsprechende Eigenschaften wie die orthologischen Dreiecke haben die Dreiecke „in paralleler Korrelation“, d. h. zwei Dreiecke von solcher Beschaffenheit, daß die Parallelen durch die Ecken des einen zu den Seiten des andern sich in einem Punkte schneiden. Von ihnen gilt der Satz, daß auch die Parallelen durch die Ecken des zweiten zu den Seiten des ersten, in entsprechender Ordnung genommen, durch einen Punkt gehen. Die Schnittpunkte der Parallelen werden als die Zentren der parallelen Korrelation bezeichnet. Die genannten Sätze werden analytisch mittels elementarer Determinantensätze hergeleitet.

Ferner werden gleichfalls mit Hülfe von Determinantenumformungen folgende Sätze bewiesen: Sind zwei Dreiecke zugleich kollinear und orthologisch, so liegen die orthologischen Zentren und das Kollineationszentrum auf einem Lote zur Kollineationsachse. Wenn zwei kollineare Dreiecke in paralleler Korrelation stehen, so halbiert die Kollineationsachse die Strecke zwischen den Zentren der parallelen Korrelation. Sind zwei Dreiecke zweifach orthologisch oder in zweifacher paralleler Korrelation, so findet zwischen ihnen stets noch eine dritte Beziehung derselben Art statt. Einer von Lemoine gezogenen Folgerung in betreff der zweifach orthologischen Dreiecke wird eine entsprechende für die in zweifacher paralleler Korrelation stehenden Dreiecke gegenübergestellt. Daran schließen sich Bemerkungen über Dreiecke, die sowohl orthologisch sind, als auch in paralleler Korrelation stehen.

Bei der Anwendung der vorstehenden Untersuchung auf die Kiepertschen Dreiecke ergibt sich der Satz, daß der Punkt von Tarry, der Mittelpunkt des Umkreises des Grunddreiecks, das Kollineationszentrum des Grunddreiecks und des Kiepertschen Dreiecks und der Steinersche Punkt auf einem Lote zur Kollineationsachse liegen, und daß die Entfernung zwischen dem Steinerschen und dem Lemoineschen Punkte von der Kollineationsachse halbiert wird. Eine zweite Anwendung bezieht sich auf das dem Grunddreieck kollineare und orthologische Dreieck, das sich ergibt, wenn man von den Höhen des Grunddreiecks Längen von den Ecken nach den Gegenseiten hin abschneidet, die gleich dem

Durchmesser des Inkreises sind. Schließlich wird noch dasjenige Dreieck betrachtet, dessen Ecken die Berührungspunkte der Ankreise des Grunddreiecks auf den zugehörigen Seiten sind. Dieses Dreieck ist auch dem Grunddreieck kollinear und orthologisch (vergl. das folgende Referat). Zch.

L. Ripert. Sur les triangles parallélogiques et leurs applications. Assoc. Franç. Ajaccio (1901) **30**, 91-106.

Wenn zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ so beschaffen sind, daß die durch A', B', C' zu BC, CA, AB gezogenen Parallelen durch einen und denselben Punkt P' gehen, so treffen sich auch die durch A, B, C zu $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ gezogenen Parallelen in einem und demselben Punkte P. Zwei solche Dreiecke heißen parallelogisch, die Punkte P und P' die Zentren der Parallelogie. Die Parallelogie hängt, wie die Orthologie, allein von der Richtung der Seiten der betrachteten Dreiecke ab. Die parallelogischen Dreiecke führen zu den biparallelogischen und den triparallelogischen Dreiecken. Sie besitzen zahlreiche Eigenschaften und haben sehr interessante Anwendungen. Hiervon handelt die vorliegende Arbeit. Wir erwähnen die naheliegende Verallgemeinerung, wenn die Gerade im Unendlichen durch eine beliebige Gerade ersetzt wird (Parallelogie bezüglich einer Geraden), die Beziehungen zwischen der Homologie, der Parallelogie und der Orthologie, endlich die Anwendungen auf die Dreiecksgeometrie. Von den beiden Noten, die am Ende des Aufsatzes hinzugefügt sind, handelt die erste von parallelogischen, antiparallelogischen Dreiecken u. dgl. m. Die zweite beschäftigt sich mit Erweiterungen eines Aubertschen Satzes: Wenn zwei einem Kegelschnitte einbeschriebene Dreiecke ABC, $A'B'C'$ homolog sind, so schneiden die von einem Punkte P nach den Ecken A, B, C des Dreiecks gezogenen Geraden PA, PB, PC die Seiten $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ in Punkten einer Geraden, die durch das Zentrum der Homologie geht (vergl. das vorangehende Referat). Lp.

A. Libický. Casparys neue Sätze aus der Geometrie des Dreieckes. Časopis **31**, 24-33, 105-115, 189-201, 273-283 (Böhmisch).

In einer Arbeit „Sur quelques nouveaux théorèmes, relatifs au triangle" (Nouv. Annales de M. 1900) liefert Caspary ohne Beweis eine Reihe von Sätzen, aus denen hervorgeht, daß viele den Lemoineschen Punkt eines Dreiecks betreffenden Sätze bestehen bleiben auch für einen anderen, ganz beliebig in der Ebene des Dreiecks gelegenen Punkt. Der Verfasser beweist die Sätze und führt bei einigen derselben neue Punkte an, wodurch den Sätzen mehr Symmetrie verliehen wird. Um seine Auseinandersetzungen Uneingeweihten zu erläutern, leitet er seine Arbeit mit einer kurzen Belehrung über baryzentrische Koordinaten ein. Sda.

Fr. Huth. Lagebeziehungen im Dreieck. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 33, 243-246.

„Caspary hat in Nouv. Ann. 17 und 18 (F. d. M. 29, 595, 1898 und 28, 504, 1899) die Graßmannschen Methoden dargelegt. Die Leichtigkeit, mit der die Ergebnisse mit Hülfe dieser Methoden zustande kommen, veranlaßte mich, dieselben Gedankengänge zur Untersuchung der Zusammenhänge einzuschlagen, die sich ergeben, wenn man auf den Seiten eines Dreiecks je einen beliebigen Punkt annimmt. Die mir bemerkenswertesten Ergebnisse habe ich hier zusammengestellt. Am Schluß beweise ich als Beispiel einen beliebig herausgegriffenen Satz.“

Lp.

F. Ferrari. Sur les triangles trihomologiques. Mathesis (3) 2, 5-12.

Grundlegender Satz: Wenn ABC mit $A'C'B'$, mit $C'B'A'$, mit $B'A'C'$, homolog ist, so gehören die beiden Punktetripel (A, B, C), (A', B', C') einer cyklischen Homographie dritter Ordnung an, und umgekehrt. Zahlreiche Folgerungen. Mn. (Lp.)

A. G. Burgess. Theorems in connection with lines drawn through a pair of points parallel and antiparallel to the sides of a triangle. Edinb. M. S. Proc. 20, 6-7.

Sind O und O' reziproke Punkte innerhalb eines Dreiecks ABC, und zieht man durch sie Parallelen zu den Seiten, so sind die drei Dreiecke, welche O zur Spitze und die von den Parallelen durch O' auf den Seiten von ABC ausgeschnittenen Strecken zu Grundlinien haben, untereinander gleich und auch gleich jedem der drei entsprechenden Dreiecke, welche O' zur Spitze haben. Sind O und O' solche Punkte, daß Antiparallelen durch sie zu den Seiten von ABC die sechs Dreiecke einander gleich machen, welche den sechs aus Parallelen entspringenden entsprechen, so werden die Punkte O und O' „antireziprok“ genannt. Die Bedingungen für solche Punkte werden aufgestellt.

Gbs. (Lp.)

G. Delitala. Nuove proprietà dei punti notevoli del triangulo. (Saggio di geometria recente). Periodico di Mat. (2) 5, 124-137, 185-191.

Als Beitrag zur neueren Dreiecksgeometrie berechnet der Verf. die Winkelkoordinaten (α, β, γ) und die Cevaschen Koordinaten (x, y, z) der merkwürdigen Punkte eines Dreiecks und drückt die drei linearen Parameter, denen er die Namen: Wert des festen Segmentes q, der äquivalenten Höhe h, der Winkelkonstante Δ gegeben hat, für jeden derselben aus. In der zweiten Note wird dieselbe Aufgabe für Punkte auf den Seiten des Dreiecks gelöst.

Wir setzen die Erklärungen der gebrauchten neuen Kunstausdrücke hinzu. „Winkelkoordinaten“ eines Punktes P bezüglich des Dreiecks ABC heißen die Winkel α, β, γ, unter denen die Seiten a, b, c von P

aus gesehen werden. Cevasche Koordinaten x, y, z sind die Strecken PA, PB, PC. Festes Segment des Punktes P ist die Basis eines Fundamentaldreiecks, das die Spitze in einer der Ecken des Bezugsdreiecks, z. B. in C, und zu Seiten die Projektionen der beiden vertauschten Seiten auf die Richtungen der nämlichen beiden Seiten hat, d. h. $a \sin\beta$ und $b \sin\alpha$, als Winkel an der Spitze die Winkeldifferenz $\gamma - C$. Die äquivalente Höhe des Punktes P ist die Höhe des dem Bezugsdreiecke gleichen Dreiecks, welches das feste Segment q zur Basis hat. Die Winkelkonstante des Punktes P ist die dritte Seite eines hypothetischen Dreiecks, das z. B. die Spitze in C hat, als Seiten die Produkte $\sin\alpha \cdot \sin(\beta - B)$, $\sin\beta \cdot \sin(\alpha - A)$, als Winkel an der Spitze denselben wie das Bezugsdreieck. Lp.

J. J. Durán-Loriga. Nota de geometría del triángulo. Revista trim. de mat. 2, 145-152.

Auszug aus einer Studie über einen besonderen Fall der Theorie der orthologischen Dreiecke; die Zentren der Orthologie fallen mit Punkten des Umkreises zusammen. Die ausführlichere Mitteilung, auf welche der Verf. sich bezieht, ist in den Verhandlungen der Assoc. Franç. Congrès de Montauban abgedruckt. Tx. (Lp.)

J. A. Third. Question 14794. Ed. Times (2) 1, 89.

Das Lot von dem konjugiert-isogonalen Punkte irgend eines Punktes auf der Eulerschen Linie eines Dreiecks auf die trilineare Polare des Punktes geht durch den Höhenschnitt. Lp.

J. S. Mackay. Note on the theorems of Menelaus and Ceva. Edinb. M. S. Proc. 20, 35-39.

R. F. Muirhead. Notes on the theorems of Menelaus and Ceva. Ibid. 62-66.

Von vier geraden Linien, unter denen keine drei durch einen und denselben Punkt gehen, können drei beliebige als Seiten eines Dreiecks, die vierte als Transversale des Dreiecks gewählt werden. Die erste der beiden Noten erläutert die Carnotsche Bemerkung, daß die vier Gleichungen zwischen den Segmenten, die man durch Annahme jeder einzelnen der vier Geraden als Transversale erhält (Satz des Menelaus), nicht unabhängig sind, und gibt geeignete Methoden zur Niederschreibung der Gleichungen. Gleiche Bemerkungen gelten für den Satz von Ceva über die Verbindungslinien eines Punktes mit den Ecken eines Dreiecks. In der zweiten Note wird die Tatsache, daß von den vier Gleichungen nur zwei unabhängig sind, sorgfältig erörtert. Gbs. (Lp.)

L. DE ALBA. Fórmulas de la geometría del triángulo. Revista trim. de mat. **2**, 1-15, 49-62, 104-115, 153-161; **3**, 1-12, 83-92, 131-143.

Eine Zusammenstellung der bis jetzt entdeckten Formeln aus der Dreiecksgeometrie. Tx. (Lp.)

R. GÜNTSCHE. Ein allgemeiner Beweis für das Additionstheorem der trigonometrischen Funktionen. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **33**, 176-183.

Der Gedankengang, den Haentzschel bei seiner Behandlung dieser Frage eingeschlagen hat (vgl. F. d. M. **31**, 501, 1900), wird dahin geändert, daß zur Definition von $\cos\alpha$ nicht $1-2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$, sondern $\cos^2\frac{1}{2}\alpha-\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ gewählt wird. „Die Entwicklung hat den Vorzug, daß sie den erforderlichen Nachweis mit einem Schlage für sämtliche Winkel liefert. Das leitende Prinzip ist:

Grundlage — Geometrie — Anschauung, Erweiterung — Arithmetik — Strenge." Lp.

H. KLEINPETER. Eine Bemerkung zum Aufsatze von R. Güntsche über die Stellung des Additionstheorems zur Einführungsart der trigonometrischen Funktionen. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **33**, 364-366.

„Die funktionentheoretische Bedingung für die Fortsetzung einer Funktion über ihren anfänglichen Gültigkeitsbereich hinaus besteht in der Aufrechterhaltung ihrer Relationen. Hat man also auf irgend eine Weise die Funktionen stumpfer, erhabener usf. Winkel definiert, so hat man den Nachweis zu erbringen, daß die auf diese neue Art definierte Funktion den alten Gesetzen gehorcht. Diesen Nachweis kann man sich nun ersparen, wenn man alle in Betracht kommenden Relationen aus einer einzigen arithmetisch ableitet und diese als Definitionsgleichung des erweiterten Funktionenbegriffs benutzt." Die Note zeigt, wie die Formel für $\sin(\alpha+\beta)$ hierzu geeignet ist. Lp.

DE TILLY. Sur une trigonométrie non symétrique. Brux. S. sc. **26** A, 109-114.

Wenn man $\cos\alpha$ als das Verhältnis der Komponente einer Geschwindigkeit nach einer zur Linken der Geschwindigkeit liegenden Geraden erklärt, die mit ihr den Winkel α bildet, $\sin\alpha$ als das der zu ihr senkrechten Komponente, so beweist man leicht die gewöhnlichen Formeln für $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, dann auch $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$,

$$\cos^2\alpha=\tfrac{1}{2}\left[\cos 2\alpha+\sqrt{\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha}\right].$$

Wenn $2\alpha=\frac{1}{2}\pi$, so findet man $\sin 2\alpha=1$, $\cos 2\alpha=0$, $\cos\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, wie in der gewöhnlichen Trigonometrie. Ebenso verhält

es sich mit den Werten der Sinus und der Kosinus aller Submultipla eines rechten Winkels, danach für alle Winkel vermittelst des Prinzips der Kontinuität. Mn. (Lp.)

R. GLAUER. Die trigonometrische Aufgabe in Untersekunda. Pr. Realschule Erfurt. 20 S. XIII Tafeln. 8°.

Verf. legt dar, wie man die Trigonometrie möglichst „ohne Formeln und Logarithmen“ in Untersekunda behandeln kann, ohne gegen den Wortlaut der Lehrpläne direkt zu verstoßen. Lwt.

CH. BIOCHE. Sur les équations trigonométriques. Journal de Math. élém. 26, 105.

Jeder trigonometrischen Funktion entspricht eine gewisse Substitution, durch welche sie in sich selbst übergeht; so ist $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(\pi + x)$, $\sin x = \sin(\pi - x)$, $\cos x = \cos(-x)$. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine dieser Funktionen sich zur Hülfsfunktion eignet, ist, daß die Gleichung bei der für diese Funktion charakteristischen Substitution in sich selbst übergehe. Diese Regel wird an zwei einfachen Beispielen erläutert. Zch.

G. SANNIA. Su due note dimostrazioni di un teorema di trigonometria. Periodico di Mat. (2) 4, 193-195.

Zwei elementare Beweise für die Relation

$$x - \sin x < \tfrac{1}{6} x^3 \qquad (0 < x < \tfrac{1}{2}\pi)$$

nach den italienischen Übersetzungen der Serretschen Trigonometrie von Ferrucci-Tolomei und von Grassi, nebst Kritik dieser Beweise. Lp.

G. SANNIA. Generalizzazione di alcuni teoremi di trigonometria. Suppl. al Period. 5, 113-116; 6, 16.

Hier wird bewiesen, daß für $x > 0$ und $\alpha \gtreqless \frac{1}{6}$ immer $x - \sin x < \alpha x^3$; daraus folgt $\cos x < 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$. In der Note an zweiter Stelle wird die Priorität dieser Formeln Peano zugesprochen (Lezioni di calcolo 1893). Lp.

ÉD. COLLIGNON. Recherches de formules approximatives pour le partage d'un arc de cercle en parties égales. Assoc. Franç. Ajaccio (1901) 30, 25-31.

Man nehme für $\sin x$ die Annäherungsformel $x - \frac{1}{6}x^3$ und bestimme A und B so, daß in den auf diese Weise aufgestellten Näherungsformeln $A \sin \alpha + B \cdot \sin \frac{1}{2}\alpha + C \sin(\alpha/p)$ die Koeffizienten von α und α^3 Null sind. Dann folgt die Näherungsformel:

(1) $$p \sin \frac{\alpha}{p} = \frac{8}{3} \frac{p^2-1}{p^2} \sin \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{3} \frac{p^2-4}{p^2} \sin \alpha.$$

Für $p = \infty$ folgt $\alpha = \frac{8}{3} \sin \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{3} \sin \alpha$, woraus die bekannte Huygenssche Konstruktion für die Bogenlänge α eines Kreises fließt. Setzt man ferner $2 \sin(\alpha/p) = x$, $2 \sin \frac{1}{2} \alpha = b$, $3 \sin \alpha = a$, so geht (1) über in

(2) $$x = \frac{1}{p}\left[\left\{2b + \frac{1}{3}(2b - a)\right\} - \frac{4}{3} \frac{2b-a}{p^2}\right],$$

woraus x leicht konstruiert, die p-Teilung eines Winkels also angenähert gefunden werden kann. In ähnlicher Weise erhält man

(3) $$\alpha = \frac{1}{3}(2 \sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha) - \frac{1}{20} \alpha^5,$$

also angenähert $\alpha = \frac{1}{3}(2 \sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha)$ für kleine Winkel. Referent verweist wegen derartiger Formeln auf seine Note in Mathesis (2) **7**: „Sur quelques formules qui représentent par approximation l'arc dont on connaît le sinus et le cosinus" (F. d. M. **28**, 374, 1897). Derartige Annäherungen sind schon oft untersucht worden; eine Zusammenstellung der erhaltenen Formeln würde ganz nützlich sein. Lp.

F. Dingeldey. Zur Euler-Goeringschen Rektifikation des Kreises. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **33**, 238-240.

Die Goeringsche, auf einer alten trigonometrischen Formel beruhende Konstruktion findet sich bei Euler, Novi Comm. Ac. Petrop. **8**, Vorrede (1763). Ferner hat Scheffler im Arch. d. Math. u. Phys. **13**, 419-423, 1849 dieselbe Konstruktion gelehrt, nachdem er sie vorher in dem Buche „Über das Verhältnis der Arithmetik zur Geometrie" (Braunschweig, 1846) mitgeteilt hatte. Lp.

Fr. Graefe. Nachweis, daß die von Euler zur Rektifikation und Quadratur des Kreises benutzte Kurve $r = \frac{\pi}{2} \frac{\sin t}{t}$ eine Inverse der Quadratrix ist. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **33**, 554-555.

E. Wölffing. Über spezielle Dreiecke. Math. naturw. Mitt. (2) **4**, 44-63.

Verf. verschafft sich eine Übersicht über alle möglichen Dreiecksgestalten, indem er jedem Dreiecke mit den Seiten a, b, c denjenigen Punkt einer auf rechtwinklige Koordinaten bezogenen Ebene zuweist, für den $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ ist. Jede Art von speziellen Dreiecken ist dann durch eine Bildkurve charakterisiert, z. B. die gleichschenkligen Dreiecke

durch Gerade, die Dreiecke mit einem gegebenen Winkel durch Kurven zweiten Grades usw. Verf. bespricht 24 Fälle spezieller Dreiecke, gibt ihre Literatur und eine Zusammenstellung, gelegentlich auch Ergänzung ihrer Eigenschaften. R. M.

G. Pesci. Risoluzione della 37ª quistione a concorso. Suppl. al Period. **5**, 116-119.

Ein sphärisches Dreieck, von welchem a, b, α gegeben sind, habe zwei Lösungen c', γ' und c'', γ''. Dann ist:

$$\frac{\cot^2\gamma'-\cot^2\gamma''}{\cot^2 c-\cot^2 c''}=\frac{\sin^2 a}{\sin^2\alpha},\ \frac{\sin(\gamma'+\gamma'')}{\sin(c'+c'')}=\frac{\sin(\gamma'-\gamma'')}{\sin(c'-c'')}\cdot\frac{\sin^2 a}{\sin^2 b},$$

$$\sin a\cdot\sin(c'+c'')=(\sin\gamma'\cos c''+\sin\gamma''\cos c')\sin\alpha$$
$$-(\cos\gamma'\cos c''+\cos\gamma''\cos c')\cos a\cos b.$$

Aus jeder dieser Gleichungen ist die entsprechende für das ebene Dreieck herzuleiten, dann aber diese direkt zu beweisen. Lp.

E. Lemoine. Transformation continue dans le triangle. Arch. der Math. u. Phys. (3) **8**, 243-248.

Denkt man sich in dem Dreieck ABC die Seiten BC und AC als feste Gerade, dagegen BA um B beweglich, so kann man BA sich, von der Lage BC ausgehend, in dem Sinne ABC um B drehen lassen. Dabei entfernt sich A von C und verschwindet, wenn $BA \parallel AC$ geworden, im Unendlichen, um bei weiterer Drehung auf der andern Seite als A_1 wieder aufzutauchen und sich jetzt dem Punkte C wieder zu nähern. Wendet man nun auf das Dreieck ABC irgend einen Lehrsatz T an, so erhält man bei der eben beschriebenen kontinuierlichen Transformation einen entsprechenden Lehrsatz T_a, der für das Dreieck A_1BC und damit für jedes Dreieck gilt. Nimmt man bei der Transformation B oder C statt A als beweglich an, so ergeben sich zwei andere Sätze T_b und T_c.

Der Inkreis von ABC wird durch kontinuierliche Transformation zu einem Ankreise von A_1BC. Aus einem Satze T vom Inkreise ergibt sich also ein Satz T_a vom Ankreise. Um die Ausführung der kontinuierlichen Transformation zu erleichtern, ist es zweckmäßig, die Änderungen festzustellen, welche die hauptsächlichsten Elemente bei der Transformation erfahren. Diese sind in einer Tabelle zusammengestellt. So gehen z. B. die Seiten a, b, c in $a, -b, -c$, die Winkel A, B, C in $-A$, $\pi-B$, $\pi-C$, der Radius R des Umkreises in $-R$, der Inhalt S in $-S$, die Radien $\varrho, \varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ in $\varrho_a, \varrho, -\varrho_c, -\varrho_b$ über.

Manche Sätze, wie der Satz von dem Schnittpunkte der drei Mittellinien, gehen bei der Transformation in sich selbst über. Andere liefern neue Sätze. Aus $x+y+z=R+\varrho$ (x, y, z die normalen trilinearen Koordinaten eines veränderlichen Punktes) wird z. B. $-x+y+z=\varrho_a-R$ u. a. Die kontinuierliche Transformation einer geometro-

graphischen Konstruktion einer Aufgabe führt zu der geometrographischen Konstruktion der transformierten Aufgabe, wie an der Konstruktion des Nagelschen Punktes N gezeigt wird. Zum Schluß wird die kontinuierliche Transformation auf einen Satz über eine gewisse dem Dreieck eingeschriebene Parabel, die eine gemeinsame Tangente des Inkreises und der Steinerschen Ellipse berührt, angewendet. Zch.

E. Lemoine. Transformation continue dans le tétraèdre. Arch. der Math. u. Phys. (3) 3, 249-256.

In dem Tetraeder $ABCD$ denke man sich die Ebene BCD um BC als Scharnier drehbar. ABC liege horizontal und D zunächst oberhalb ABC. Dreht sich BCD so, daß sich D von A entfernt, so wird schließlich $DBC \parallel AD$. Wird DBC über diese Lage hinaus in demselben Sinne weiter gedreht, so kehrt der Punkt D als D_1 unterhalb ABC aus dem Unendlichen wieder nach A hin zurück. Bei dieser kontinuierlichen Transformation des Tetraeders $ABCD$ geht jeder für dieses geltende Lehrsatz in einen andern über, der für das Tetraeder $ABCD_1$ und damit allgemein für jedes beliebige Tetraeder gilt. Um diese Umwandlung der Lehrsätze ausführen zu können, muß man die Änderungen feststellen, welche die Elemente des Tetraeders bei der kontinuierlichen Transformation erleiden. Entsprechend der durch Bewegung von D hervorgerufenen „kontinuierlichen Transformation in D" gibt es noch drei andere Transformationen in A, B und C.

Bezeichnet man die Kanten AB, BC, CA, AD, BD, CD mit c, a, b, a', b', c', so gehen diese bei der Transformation in D über in c, a, b, $-a'$, $-b'$, $-c'$. Jedes der in D zusammenstoßenden Dreiecke erleidet also eine kontinuierliche Transformation, wie sie in der Note über das Dreieck (Arch. 3, 243; Bericht vorstehend) betrachtet wird. Man kann also die Änderungen aller Elemente des Tetraeders, die nur von den Elementen einer Fläche abhängen, unmittelbar der dort gegebenen Tabelle entnehmen. Die übrigen ergeben sich entweder aus der Anschauung oder aus bekannten Formeln.

Als Beispiel wird zuerst gezeigt, wie sich aus einer von Catalan angegebenen Beziehung zwischen den reziproken Werten der Radien der eingeschriebenen und der angeschriebenen Kugeln vier analoge ableiten lassen. Die Verbindungslinien der Ecken des Tetraeders mit dem Mittelpunkte der eingeschriebenen Kugel bestimmen durch ihre Schnittpunkte mit den Gegenflächen ein neues Tetraeder; ebenso die Berührungspunkte der eingeschriebenen Kugel. Die von Genty aufgestellten Formeln für das Volumen dieser beiden Tetraeder werden kontinuierlich transformiert. Zum Schluß wird nachgewiesen, daß einem durch normale Tetraederkoordinaten bestimmte Punkte M sieben verschiedene Punkte durch kontinuierliche Transformation entsprechen können. So kann z. B. der Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugeln in jeden der sieben Mittelpunkte der angeschriebenen Kugeln transformiert werden. Zch.

J. Jung. Zur Begründung des Cavalierischen Lehrsatzes. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 33, 240-241.

Gegenüber den Vorschlägen von Weinmeister (F. d. M. 32, 512, 1901) stellt der Verf. eine Betrachtung an, die „den Vorzug größerer Übersichtlichkeit und noch geringerer Schwierigkeit für den Schüler haben dürfte". Lp.

Graeber. Die Berechnung der Kugel und ihrer Teile. Ein neues Lehrverfahren. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 33, 366-368.

Weitere Ausführung der Notiz aus den Unterrichtsbl. f. Math. 7, 30 (F. d. M. 32, 513, 1901). Da das Cavalierische Prinzip benutzt wird, so ist dies „Lehrverfahren" nicht gerade neu. Lp.

P. Barbarin. Polygones réguliers sphériques et non-euclidiens. Mat. pure ed appl. 2, 137-145.

Die Aufgabe, einem Kreise ein reguläres Dreieck und Sechseck, ein Fünfeck, Zehneck und Fünfzehneck einzubeschreiben, wird in der Kugelgeometrie gelöst. Unabhängig von diesen Lösungen wird dieselbe Aufgabe in der nichteuklidischen Ebene behandelt. Bei der Konstruktion des Sechsecks sieht Verf. den Vorzug der angegebenen Methode gegenüber der Bolyaischen in der Vermeidung des Horozyklus. Beziehungen zwischen den Seiten der regulären Fünfecke, der regulären Zehn- und Fünfzehnecke führen zu einigen neuen Sätzen.

Der letzte Teil der Arbeit ist Betrachtungen über reguläre Polygone in der nicht euklidischen Ebene gewidmet. Als n-lineare Koordinaten $X, Y, \dots$ werden die Sinusdistanzen eines Punktes M der Ebene von den Seiten eines n-Ecks eingeführt. Die $(n-2)$ Relationen, die zwischen den Koordinaten bestehen, werden aufgestellt und benutzt, hauptsächlich um die symmetrischen Funktionen ΣX, ΣX^2, ΣXY für reguläre Polygone zu berechnen. Diese Ausdrücke lassen erkennen, daß die Größen ΣX^2 und ΣXY sich nicht ändern, wenn der Punkt M sich auf einem Kreise bewegt, der mit dem regulären Polygon konzentrisch ist. Lwt.

A. Jeřábek. Wie ist das regelmäßige Zwölfflach aufzulösen, wenn die numerischen Beziehungen zwischen den Teilen eines regelmäßigen Fünfecks fehlen? Časopis 31, 156-158 (Böhmisch).

Für Anfänger berechnete Darstellung. Sda.

C. Servais. Relations entre deux systèmes d'axes. Mathesis (3) 2, 14-17.

Bedingungen dafür, daß zwei Dreikante dreifach rechtwinklig sind; Sinus einer dreiseitigen Ecke; Rauminhalt eines Tetraeders. Mn. (Lp.)

C. E. Wasteels. Sur le centre de gravité des figures sphériques. Mathesis (3) 2, 217-220, 241-244.

Strenge Beweise der Sätze von Terquem und von Schellbach (Nouv. Ann. 1, 278-280 u. J. für Math. 45, 279-282). Mn. (Lp.)

Weitere Literatur.

C. Alasia. I complementi di geometria elementare. Milano: Hoepli. XV u. 244 S. 16° (Manuali Hoepli).

M. Arriaga. Geometría elemental y superior, con ejercicios de cálculo y de dibujo lineal. Barcelona: Araluce. 241 S. 8°.

R. Baltin und W. Maiwald. Kurzgefaßtes Lehrbuch der Mathematik für Seminare und Präparandenanstalten. Unter Zugrundelegung des Lehrbuches von H. Müller: Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen. Nach den Lehrplänen von 1901 für Seminare usw. bearbeitet. Leipzig: B. G. Teubner. VIII u. 214 S. 8°.

F. Bolte. Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie, mit einem Anhang über Körperberechnungen, zum Gebrauche an Navigationsschulen bearbeitet. 3. Aufl. Hamburg: W. Peuser. 56 S. gr. 8°.

H. Bos. Geometría elemental. Paris: Hachette. 287 S. 16°.

C. Briot et C. Vacquant. Elementos de geometría aplicada. Paris: Hachette. 236 S. 16°.

E. Brooks. Plane and solid geometry; a complete course in the elements of the science. Revised edition. Philadelphia: Christopher Sower & Co. 415 S. 12°.

E. Chailan. Géométrie, à l'usage des élèves des classes de lettres, conforme au programme de la première partie du baccalauréat de l'enseignement secondaire classique. 2e édition. Paris: Poussielgue. VIII u. 240 S. 16° (Alliance des maisons d'éducation chrétienne).

Jos. Diekmann. K. Koppes Geometrie zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten. Enthaltend: Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie. Ausgabe für Realanstalten. I. Teil. 21. Aufl. VI u. 208 S. 8 Taf. 8°. II. Teil. 18. Aufl. VII u. 183 S. 8°. Essen: G. D. Bädeker.

H. Diesener. Die ebene Geometrie. Praktisches Unterrichtsbuch zur leichteren Erlernung der Planimetrie. Mit einer großen Anzahl vollständig ausgerechneter Beispiele und Übungsaufgaben bearbeitet. Vierte verbesserte Auflage. Halle: L. Hofstetter. III u. 140 S. gr. 8°.

E. Dussaux et A. Béché. Troisième année de géométrie dans l'enseignement primaire supérieur. Paris: Colin. 285 S. 16° (Collection J. Boitel).

R. Edert und M. Kröger. Geometrie für Mittelschulen und verwandte Anstalten. Mit besonderer Berücksichtigung der zentralen und axialen Symmetrie. Heft 1: Vorkursus und Planimetrie, erster Teil. Heft 2: Planimetrie, 2. Teil, und Stereometrie. Hannover: Meyer. VII u. 91, IV u. 84 S. 8°.

R. W. K. Edwards. Elementary plane and solid mensuration. London. 334 S. 8°.

J. Elliot. Elementary geometry. London: Sonnenschein. 280 S. 12°.

F. Enriques e U. Amaldi. Elementi di géometria ad uso delle scuole secondarie superiori. Bologna: Zanichelli. XXII u. 655 S. 16°.

Chr. Ernst und L. Stolte. Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche an Gymnasien, Realschulen und anderen höheren Lehranstalten. 1. Teil: Planimetrie, nebst einer Sammlung von Aufgaben. 4. Aufl. Straßburg: Straßburger Verl. 109 S. gr. 8°.

G. Escribano y Hernández. Nociones de geometría. Madrid: Aguado. 64 S. 8°.

C. Gomis. Nociones de geometría plana y del espacio. Barcelona: Tasso. 110 S. 8° (1901).

A. Guglielmi. Nozioni di geometria per le scuole tecniche. 3a edizione. Torino: Paravia. 207 S. 8°.

Haller v. Hallerstein. Lehrbuch der Elementarmathematik. Nach dem Lehrplane für das königliche preußische Kadetten-Korps bearbeitet von B. Hülsen. 3. Teil: Pensum der Sekunda. 4. Aufl. Berlin: A. Nauck & Co. VIII u. 227 S. gr. 8°.

B. Hercher. Lehrbuch der Geometrie. Fünfte verbesserte und nach den preußischen Lehrplänen von 1901 bearbeitete Ausgabe. Drei Hefte. Leipzig: P. List.

Fr. Hočevar. Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für Untergymnasien. Sechste umgearbeitete Auflage. Leipzig: G. Freytag. II u. 122 S. gr. 8°.

Jul. Hoch. Das Wichtigste aus der Geometrie. I. Leitfaden der ebenen Geometrie. II. Leitfaden der räumlichen Geometrie. Leipzig: H. Klasing. VIII u. 80 S.; VII u. 54 S. gr. 8° (L. Hubertis praktische gewerbliche Bibliothek).

Aug. Holzmann u. Rich. Massinger. Geometrische Anschauungslehre (in drei Teilen) im Anschluß an den Lehrplan der badischen Realschulanstalten. I. u. II. Teil. 3. Auflage. Karlsruhe: J. J. Reiff. 32 u. 30 S. gr. 8°.

G. J. Hopkins. Inductive plane geometry; with numerous exercises, theorems, and problems for advance work. New revised edition. Boston: Heath. VI u. 208 S. 12°.

F. J. Éléments de géométrie, comprenant des notions sur les courbes usuelles, un complément sur le déplacement des figures et de nombreux exercices. Paris: Poussielgue. XII u. 525 S. 16°.

E. Jacquet et A. Laclef. Cours de géométrie théorétique et pratique, avec de nombreux exercices, problèmes, applications, etc., à l'usage des écoles normales d'instituteurs et d'institutrices, des écoles primaires supérieures, des écoles professionnelles et des candidats au brevet supérieur. Paris: Nathan. 488 S. 16°.

O. Keller. Die Mathematik. II. Planimetrie, Stereometrie, darstellende Geometrie und Schattenlehre. 4. Aufl. Leipzig: Voigt. VI u. 48 S., 26 Tafeln. (O. Kellers Unterrichtsbücher für das gesamte Baugewerbe. II.)

Koppes Geometrie zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten, vollständig neu bearbeitet von J. Diekmann. II. Trigonometrie. 18. Aufl. II u. 137 S. III. Die Stereometrie. Der Koordinatenbegriff. Die Kegelschnitte. 2. Aufl. IV u. 145 S. Essen: G. D. Baedeker.

R. Lachlan. The Elements of Euclid, Book XI. London: Edward Arnold. 51 S. [Nature 66, 171.]

O. Lesser. Hülfsbuch für den geometrischen Unterricht an höheren Lehranstalten. Berlin: O. Salle. IX u. 189 S. gr. 8°.

H. Lieber und F. von Lühmann. Leitfaden der Elementar-Mathematik. Nach den Bestimmungen der preußischen Lehrpläne vom Jahre 1901 neu bearbeitet von C. Müsebeck. Berlin: L. Simion. VII u. 155 S., VIII u. 194 S., VII u. 180 S.

O. Lübeck. Stereometrie. Unterweisungen und Aufgaben. 5. Aufl. Strelitz: Hittenkofer. 42 S. 8° (Methode Hittenkofer No. 58).

G. Mahler. Ebene Geometrie. Verbesserte Auflage, 2. Abdruck. Leipzig: G. J. Göschen. 158 S. 12° (Sammlung Göschen No. 41).

P. Molenbroek. Leerboek der meetkunde. 2ter druk. Deel I en II: Planimetrie; Stereometrie. Leiden. 322 u. 211 S. 8°.

Emil Müller. Lehr- und Übungsbuch der ebenen Geometrie mit besonderer Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen Lehrsatz und Konstruktionsaufgabe für Gymnasien und Realschulen. Berlin: Winckelmann & Söhne. VI u. 172 S. gr. 8°.

Heinr. Müller. Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen. Für den Unterricht dargestellt. 2. Teil: Die Oberstufe. (Lehraufgabe der Klassen Obersekunda und Prima.) Ausgabe A. Für Gymnasien. 2. Auflage. Leipzig: B. G. Teubner. XII u. 311 S. gr. 8°.

O. Persiani. Elementi di geometria compilati secondo gli ultimi programmi. Vol. I: ad uso della quarta ginnasiale. Vol. II: ad uso della quinta ginnasiale. Roma: Cuggiani. 157 S. 8°.

A. Rivelli. Elementi di geometria. 4ª edizione. Napoli: Pellerano. XII u. 443 S. 16°.

C. Jiménez Rueda. Programa de geometría métrica. Madrid: Suárez. 20 S. 8° (Universidad central).

C. Jiménez Rueda. Lecciones de geometría metrica. (In 2 volumes.) Madrid: Suárez. I: XVIII u. 215 S. II: 248 S. 34 Tafeln. 8°.

E. Schultz. Leitfaden der Planimetrie für gewerbliche Lehranstalten. 1. Teil. 3. Aufl. Essen: G. D. Baedeker. IV u. 82 S.

E. Schultz. Kurzgefaßtes Lehrbuch der Körperberechnung für gewerbliche Schulen. Essen: G. D. Baedeker. IV u. 50 S. gr. 8°).

A. Schultze and F. L. Sevenoak. Plane geometry. New York: Macmillan. XI u. 233 S. 12°.

H. Sievert. Lehrbuch der Elementargeometrie zum Gebrauche an Mittelschulen und beim Selbstunterrichte. Leipzig: A. Deichert Nachf. gr. 8°.

Th. Spieker. Lehrbuch der ebenen Geometrie mit Übungsaufgaben für höhere Lehranstalten. Ausgabe C. Abgekürzte Kurse. 2. Auflage. Potsdam: A. Stein. IV u. 205 S.

H. Thieme. Leitfaden der Mathematik für Realanstalten. 2. Teil: Die Oberstufe. Leipzig: G. Freytag. IV u. 196 S. gr. 8°.

G. Veronese. Elementi di geometria ad uso dei Ginnasi e Licei e Istituti tecnici (1° biennio), trattati con la collaborazione di P. Gazzaniga. 2ª ed. Verona-Padova: Flli Drucker. 8°. Parte I. XX u. 111 S. Parte II. IV u. 212 S.

Referat in Loria Bollettino 5, 104-109, 1902.

W. Wroblewski. Geometrie. Sammlung von Aufgaben aus den Aufnahmeprüfungen in die kaiserlichen Ingenieur- und Bergfach- und technischen Schulen. St. Petersburg. 227 S. 8° (Russisch).

C. H. Ashton and W. R. Marsh. Plane and spherical trigonometry; an elementary text-book. New York: Scribner. X u. 157 S. 8°.

K. L. Barthels. Lehrbuch der Stereometrie und Trigonometrie in ausführlicher Darstellung. Wiesbaden. IV u. 120 S. 8°.

F. Bohnert. Elementare Trigonometrie. Leipzig. VII u. 183 S. 8°.

F. Bolte. Leitfaden für den Unterricht in der ebenen Trigonometrie, zum Gebrauche an Navigationsschulen bearbeitet. Hamburg: W. Peuser. IV u. 34 S. 8°.

F. Bolte. Leitfaden für den Unterricht in der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie, zum Gebrauche an Navigationsschulen bearbeitet. Hamburg: W. Peuser. 37 S. gr. 8°.

J. Bortkewitsch. Elementare Trigonometrie, mit Übungen und Aufgaben. 3. Aufl. St. Petersburg. 94 S. 4° (Russisch).

E. S. Crawley. A short course in plane and spherical trigonometry. Published by the Author. 116 u. 27 S. 8°.

Eysséric et Pascal. Éléments de trigonométrie rectiligne, à l'usage des élèves de l'enseignement secondaire et des candidats aux baccalauréats. 21e édition. Paris: Delagrave. 190 S. 12°.

H. Heilermann u. J. Dieckmann. Grundlehren der Trigonometrie und Stereometrie. 2. Teil: Stereometrie mit 26 Figuren, zahlreichen Übungen und Aufgaben. 3. Auflage. Essen: G. D. Baedeker. III u. 43 S. gr. 8°.

G. de Heredia. Lecciones de trigonometría ajustada estricamente al programa de ingreso en la Escuela central de ingenieros industriales. Madrid: Velasco. 95 S. 8°.

F. J. Éléments de trigonométrie rectiligne, avec de nombreux exercices. 7e édition, répondant aux nouveaux programmes. Paris: Poussielgue. VIII u. 256 S. 16°.

A. C. Jones. Beginnings of trigonometry. London: Longmans. 152 S. 12°.

R. Krüger. Ebene Trigonometrie. Unterweisungen und Aufgaben. 6. Aufl. Strelitz: Hittenkofer. 27 S. 8° (Methode Hittenkofer No. 57).

J. Lengauer. Die Grundlehren der ebenen Trigonometrie. Ein Leitfaden für den Unterricht, mit Übungsaufgaben. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Kempten: J. Kösel. IV u. 58 S. gr. 8°.

H. Lieber und F. von Lühmann. Anfangsgründe der Trigonometrie und Stereometrie. Elemente der Projektionslehre und Kartographie. Pensum der Untersekunda von Realanstalten. Nach den Bestimmungen der preußischen Lehrpläne vom Jahre 1901 neu bearbeitet von C. Müsebeck. Berlin: L. Simion. III u. 76 S. gr. 8°.

J. Macnab. Trigonometry simplified. Solution of plane and spherical triangles, and application to various problems in navigation and nautical astronomy. London: Philip. 60 S. 8°.

M. Ortega y Sala. Trigonometría. Obra de texto en las escuelas de ingenieros de minas y ingenieros industriales. 2ª edición. Madrid: Hernando. 239 S. 4°.

F. Peters. Zieglers graphische Darstellung der trigonometrischen Funktionen nebst Tafeln zur Konstruktion bestimmter Winkel und Linien. Ein praktisches Hülfsmittel beim geometrischen Zeichnen. Wiesbaden: C. W. Kreidel. Mit 6 Taf. u. 28 Textfig.

E. Sánchez Ramos y T. Sabras y Causape. Elementos de trigonometría rectilínea. 2ª edición. Salamanca: Núñez. 56 S. 8°.

A. Rebière. Trigonometrie, mit Übungsaufgaben. Übersetzt von N. de Georges. 3. Aufl. St. Petersburg. 207 S. 8° (Russisch).

E. Rehfeld. Leitfaden für die propädeutischen Kurse in Stereometrie und Trigonometrie an Realschulen. Berlin: Reuther und Reichard. VIII u. 88 S. 8°.

Herm. Roeder. Trigonometrische und stereometrische Lehraufgabe der Untersekunda (Prima der Realschulen). Sonderabdruck aus der Umarbeitung der Kamblyschen Planimetrie. Dritte vermehrte Auflage. Breslau: F. Hirt. 52 S. gr. 8°.

J. Rüefli. Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Bern: Schmid u. Francke. 81 S. 8°.

G. A. Serret. Trattato di trigonometria piana per uso dei licei, tradotto in italiano sulla 7ª edizione francese da F. Grassi. 5ª edizione. Torino: Bocca. 220 S. 8°.

G. A. Serret. Trattato di trigonometria piana e sferica tradotto in italiano sulla settima edizione francese da F. Grassi. 5ª edizione. Torino: Bocca. 312 S. 16°.

J. A. Serret. Trigonometrie. Russische Übersetzung der 8. französischen Auflage von W. Wróblewski. St. Petersburg. 320 S. 8°.

J. A. Serret. Sphärische Trigonometrie. Aus der 8. französ. Auflage übersetzt von M. V. Pirozheikov. St. Petersburg. 86 S. 8° (Russisch).

V. Severo. Elementi di trigonometria piana ad uso dei licei e degli istituti tecnici, compilati conformamente agli ultimi programmi governativi. Pitigliano: Paggi. 76 S. 2 Taf. 8°.

N. Schaposchinikow. Ebene Trigonometrie mit einer Sammlung von trigonometrischen Aufgaben. Moskau. 122 S. 8° (Russisch, 1901).

G. J. Schulin. Sphärische Geometrie u. Trigonometrie. 2. Auflage. St. Petersburg. 151 S. 8° (Russisch).

T. U. Taylor and C. Puryear. The elements of plane and spherical trigonometry. Boston: Ginn. 160 u. 67 S. 8°.

J. Todhunter. Spherical trigonometry. For colleges and schools. Revised by J. G. Leathem. London: Macmillan. 288 S. 12°.

J. Wereshchagin. Sammlung von trigonometrischen Aufgaben. 5. Aufl. St. Petersburg. 288 S. 8° (Russisch).

C. Wargny. Tratado de trigonometría plana. Valparaiso: Gillet 276 S. 8° (1901).

E. Wienecke. Ebene Trigonometrie mit reichem Aufgabenmaterial nebst Lösungen, zum Gebrauch an gewerblichen Fortbildungsanstalten und Seminaren. Berlin: Winkelmann. III u. 71 S. 8°.

F. Ziegler. Graphische Darstellung der trigonometrischen Funktionen nebst Tafeln zur Konstruktion bestimmter Winkel und Linien. Praktisches Hülfsmittel beim geometrischen Zeichnen. Wiesbaden. 22 S. 6 Tafeln.

- — -

D. V. Agapov. Sammlung der häufigsten geometrischen Probleme und die Methoden ihrer Lösung. Orenburg. 93 S. 2 Tafeln. 8° (Russisch).

C. Ciamberlini. Esercitazioni e ricreazioni geometriche ad uso degli allunni delle scuole elementari. Lanciano: Carabba. 45 S. 16°.

R. Clasen und H. Bach. Aufgabensammlung im Anschluß an Herchers Lehrbuch der Geometrie zusammengestellt. Zweite vermehrte Ausgabe. 3 Hefte. 1. Planimetrie I. Teil. 2, 3. Planimetrie II. Teil und ebene Trigonometrie. — Stereometrie und Grundlehren von den Kegelschnitten. Leipzig: P. List. 32, 40, 44 S. gr. 8°.

A. Eichhorn. Vollständig ausgeführte planimetrische Schülerarbeiten aus dem Lehrstoff der höheren Schulen, nebst eingestreuten pädagogischen und sachlichen Anmerkungen, zum Selbststudium für Schüler und für angehende Lehrer. Lüneburg: Herold & Wahlstab. XII u. 99 S. gr. 8°.

H. Füchtjohann. Lösung der Aufgaben in J. R. Boymans Lehrbuch der Planimetrie. 2. Teil. Aufg. 734-1244. Bonn: F. Cohen. 212 S. gr. 8°.

K. FUSS. Sammlung von Konstruktions- und Rechènaufgaben aus der Planimetrie und Stereometrie. Mit vielen vollständig gelösten Beispielen. Für den Schul- und Selbstunterricht bearbeitet. Dritte vermehrte und verbesserte Auflage. Nürnberg: F. Korn. VIII u. 252 S. gr. 8°.

D. GIKA und A. MUROMTSEV. Geometrische Aufgaben. II. Teil. Moskau. 163 S. 8° (Russisch).

A. KREBS. Konstruktionen gleichschenkliger Dreiecke mit Hülfe von Kurven höherer Ordnung. Bern. 95 S. 8°.

V. A. KRYZHANOVSKY. Lösung von 256 geometrischen Aufgaben von A. Davidov. 3. verb. Aufl. Kiew. 137 S. 8° (Russisch, 1901).

O. LIPPMANN. Flächenberechnungen (Planimetrie), Körperberechnungen (Stereometrie) und Gewichtsberechnungen mit besonderer Berücksichtigung des Maschinenbaues, Lehrgang mit 198 ausgerechneten Beispielen. Dresden: C. Höckner. VIII u. 114 S. 8°.

RAJ-ABERRÓES. Nuevo descubrimiento matemático. La politomia ó multisección geométrica del ángulo, del arco y de la circunferencia, y la consiguiente inscripción en ésta de cualquier poligono regular, si tanteo ni empirismo, ni más adminículos que la regla y el compás. Cadiz: Ortiz. 5 S. 1 Taf. 8°.

P. SCHUSTER. Aufgaben aus der Erd- und Himmelskunde als Übungsbeispiele für die sphärische Trigonometrie gruppenweise zusammengestellt und erläutert. Breslau: Preuss & Jäger. 24 S. gr. 8°.

P. SIMON. Guide méthodique de résolution des problèmes de géométrie élémentaire. 2e édition. Paris: Belin. 272 S. 12°.

C. ALASIA. Saggio terminologico-bibliografico sulla recente geometria del triangolo. Bergamo: Bolis. IV u. 43 S.

CR. ALASIA. Saggio di nomenclatura della recente geometria del triangulo. Il Pitagora 8, 43-49, 73-75.

A. BASSI. Sezioni circolari del cilindro e del cono obliqui; assi del cono. Bologna Boll. di Mat. 1, 121-128, 179-187.

G. BEAUVISAGE. La méthode d'observation fondée sur l'arithmétique et la géométrie concrètes. 2e édition. Paris: Alcan. 144 S. 8°.

W. H. BRUCE. Some noteworthy properties of the triangle and its circles. Boston: Heath. 28 S. 12°.

G. CESÀRO. Calcul du volume d'une forme cristalline quelconque. Liége Mém. (3) 4, 21 S.

DELAHAYE. Sur le triangle pseudo-isoscèle. Mathesis (3) 2, 112-114. Mn.

DELITALA. Construire un triangle connaissant une bissectrice de chacun des trois angles. Mathesis (3) 2, 159-162. Mn.

J. DÉPREZ. Géométrie du triangle. Mathesis (3) 2, 64-67. Mn.

G. Fontené. Sur les huit sphères tangentes à quatre plans. Bull. de sc. math. et phys. élém. 7, 225-226.

P. Galbiati. I teoremi intorno alle varie specie di parallelogrammi della geometria elementare piana si possono elementarmente estendere alla sfera. Riv. di fis., mat. e sc. nat. 3, 873-887.

W. Godt. Über einige sogenannte merkwürdige Punkte des Dreiecks I. Progr. Lübeck. 23 S. 8°.

H. Hippauf. Die Rektifikation und Quadratur des Kreises. Eine Darbietung. Breslau, W. G. Korn in Komm. 32 S. mit 4 lith. Taf. gr. 8°.

E. Lebon. Sur la relation entre les six distances de quatre points d'un plan. Bull. de sc. math. et phys. élém. 7, 209-210.

K. Lippitsch. Die Unverträglichkeits-Relation des Satzes vom goldenen Schnitte mit dem Gesetze der rationalen Indices, nachgewiesen am Rautendreißigflächner und regelmäßigen Pentagondodekaeder. Progr. Leoben. 12 S. 1 Taf. 8°.

H. Maschke. Some modern methods and principles of geometry. Amer. Math. Monthly 9, 214-219.

R. Migliacci. Una nuova dimostrazione al teorema di Pitagora. Livorno: Giusti. 6 S. 8°.

J. Neuberg. Sur la similitude des cercles. Mathesis (3) 2, 85-89. Mn.

J. Neuberg. Sur le quadrilatère complet. Mathesis (3) 2. Suppl. 1, 12-20. Aus Brux. S. sc. 26 B, 1-20. Mn.

B. Niewenglowski. Sur les brisées régulières circonscrites à un arc de cercle. Bull. de sc. math. et phys. élém. 7, 289-290.

C. Pagliano. Sull' uso del compasso di apertura fissa nella risoluzione dei problemi della geometria elementare e sulla sostituzione di un disco al predetto compasso. Bologna Boll. di Mat. 1, 201-209.

C. Pagliano. La disfida matematica tra N. Tartaglia e L. Ferrari e la risoluzione dei problemi della geometria elementare mediante la riga e il compasso di apertura fissa. Conti, Boll. di Mat. 1, 94-104.

L. Ripert. Su due triangoli di Brocard e una retta di Eulero. Mat. pure ed appl. 2, 158-160.

B. Russell. The teaching of Euclid. Math. Gazette 2, 165-167.

G. Richardson. The trigonometry of the tetrahedron. Math. Gazette 2, 149-158.

W. H. Stoops. A general method for the geometrical trisection of angles and arcs, with accompanying diagrams; supplemented with a formal proof and a trigonometrical analysis. Riverside: N. J. Stoops. VII u. 34 S. 4°.

G. Agolini Ugolini. La geometria od esatta divisione sessagesimale della circonferenza, ossia la scoperta dell' angolo di un grado; geometrica inscrizione nel circolo dei poligoni regolari di 9 e 45 lati e loro consequenti; dimostrazione matematica. Sanseverino-Marche: Bellabarba. 15 S. 8°.

G. VAILATI. A proposito d'un recente tentativo di basare la teoria delle proporzioni sul teorema di Pascal relativo all' esagono inscritto in una conica. Conti, Boll. di Mat. 1, 24-27.

Kapitel 4.

Darstellende Geometrie.

R. HAUSSNER. Darstellende Geometrie. I. Teil: Elemente, ebenflächige Gebilde. Leipzig: G. J. Göschen. 129 S. 8° (Sammlung Göschen Nr. 142).

Diese auf drei Bändchen geplante Bearbeitung der darstellenden Geometrie befaßt sich in dem zunächst vorliegenden ersten Teil mit den ebenflächigen Gebilden. Der erste Abschnitt behandelt die Parallelprojektion (Affinität) mit Anwendung auf Ellipsenkonstruktionen. Der zweite Abschnitt gibt das Wichtigste über die schiefe Parallelprojektion (Kavalierperspektive im weiteren Sinn). Der dritte Abschnitt lehrt die Darstellung von Punkt, Gerade und Ebene in senkrechter Doppelprojektion mit den bezüglichen Fundamentalkonstruktionen, einschließlich Drehungs- und Transformationsverfahren. Der vierte Abschnitt behandelt die Dreikantkonstruktionen, Darstellung von Polyedern, ihren ebenen Schnitten und Durchdringungen. Die im Rahmen der „Sammlung Göschen“ gehaltene Abgrenzung des Lehrstoffes erscheint durchaus zweckmäßig. Der Vortrag ist bestimmt und leicht verständlich, die in den Text gedruckten Figuren korrekt und klar. Die Bezeichnungsweise schließt sich an diejenige der Werke von Wiener und Rohn-Papperitz an. Hk.

K. VETTERS. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Hannover: Gebr. Jänecke. VII u. 285 S. 8°.

Die Absicht des Verf. war, ein Lehrbuch für den Gebrauch an technischen Lehranstalten zu schaffen. Dadurch war die Abgrenzung des Stoffes sowie die elementare Behandlung bedingt. Die letztere geht jedoch häufig auf Kosten der Präzision. Andererseits fällt der abstrakte Charakter des Buches auf. Es verzichtet auf jede praktische Anwendung und gibt nur die theoretischen Konstruktionen unter breiter Behandlung der verschiedenen Lagemöglichkeiten. Dies, in Verbindung mit Mängeln der systematischen Gliederung, bewirkt, daß der Kern der Sache mitunter nicht genügend hervortritt (vergl. z. B. die Schnittaufgaben S. 69 u. f. und S. 74 u. ff.). Die mannigfachen Ausstellungen, zu denen der Text Veranlassung gibt, können hier nicht einzeln aufgeführt werden. Figuren wie z. B. No. 105a, 106a, 107a, 165 sollten in einem Lehrbuch der darstellenden Geometrie nicht vorkommen. Hk.

J. Badon Ghyben. Gronden der beschrijvende meetkunde (Grundzüge der darstellenden Geometrie). 8[te] Auflage. Neu bearbeitet von N. C. Grotendorst und J. W. C. Beelenkamp. II. Teil. Text und Atlas. Breda. 343 S. 8°.

Der zweite Teil dieses für den Militärunterricht bestimmten Lehrbuches enthält den üblichen Lehrstoff: gekrümmte Flächen, Schattenlehre, Perspektive (zentrale, axonometrische und Kavalier-). Zahlreiche und gutgewählte Übungsaufgaben sind zugefügt. Die sorgsam gearbeiteten lithographierten Figurentafeln erhöhen bedeutend den Wert des Buches.
Kl.

J. Schlotke. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Dresden: G. Kühtmann. I. Spezielle darstellende Geometrie. 5. (Titel-)Auflage. IV u. 167 S. II. Schatten- und Beleuchtungslehre. 3. Aufl. 60 S. III. Perspektive. 2. Aufl. V u. 133 S.

Gegen die erste Auflage wenig verändert. D.

J. Schlotke. Lehrbuch der graphischen Statik. Zum Gebrauche für mittlere technische Lehranstalten, Bau-, Maschinen- und Gewerbeschulen. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Dresden: G. Kühtmann. IV u. 163 S. gr. 8°.

Bei der zweiten Auflage wurde die Anordnung im ganzen beibehalten; den Übungsaufgaben sind weitere hinzugefügt worden. D.

H. Hertzer. Zehn Aufgaben für Parallelperspektive und parallelperspektivische Schattenkonstruktion. Berlin: A. Seydel. 4°. 10 Taf. 1 Hülfstafel und ein Beiwort.

Bei allen Aufgaben wird eine dimetrische, rechtwinklige Parallelperspektive gefordert und zwar $x:y:z = 1:\frac{1}{2}:1$. Für die Konstruktion der drei Achsenrichtungen wird ein einfaches Verfahren angegeben. Den zehn Tafeln ist eine Hülfstafel hinzugefügt, auf der die elementaren Konstruktionen mit Beispielen dargestellt werden. D.

G. Bordiga. I metodi della geometria descrittiva. Ven. Ist. Atti 61, [(8) 4)], 389-403 u. 609-618.

Verf. betrachtet die verschiedenen gebräuchlichen Darstellungsmethoden der darstellenden Geometrie von allgemeinerem Gesichtspunkte, indem er sie den folgenden vier Arten der ebenen Abbildung des Raumes unterordnet:

1. Abbildung mittels Punktepaaren. Die Punkte des Raumes werden durch zwei Strahlenbündel S_1, S_2 projiziert; die Punkte der

Bildebene sind den Strahlen von S_1 und S_2 beiderseits kollinear zugeordnet; die zwei Punkte der Bildebene, die den zwei projizierenden Strahlen eines Raumpunktes entsprechen, sind dessen Bilder. — Aus dieser allgemeinen Darstellungsmethode wird zunächst die stereoskopische Doppelprojektion abgeleitet. Dieser ordnen sich weiterhin die kotierte Projektion und die orthogonale Doppelprojektion als spezielle Fälle unter; die zwei Projektionszentren S_1, S_2 fallen ins Unendliche, bei der kotierten Projektion in Richtungen senkrecht und unter 45° gegen die Bildebene. Bei der orthogonalen Doppelprojektion sind die projizierenden Richtungen zu einander senkrecht und gegen die Bildebene unter 45° geneigt; die auf dieser entstehende stereoskopische Doppelprojektion wird dann nochmals parallel zu einer der zwei projizierenden Richtungen auf eine zu ihr senkrechte Ebene projiziert.

II. Abbildung mittels Geradenpaaren. Die Ebenen des Raumes werden durch ihre Spuren auf zwei feste Ebenen σ_1, σ_2 bezogen. Die Geraden der Bildebene sind den Geraden von σ_1 und σ_2 beiderseits kollinear zugeordnet; die zwei Geraden der Bildebene, die den zwei Spuren einer Ebene in σ_1 und σ_2 entsprechen, sind deren Bilder. — Aus dieser allgemeinen Methode entsteht die Methode der zentralen Projektion, indem man von den zwei Ebenen σ_1, σ_2 die eine mit der Bildebene, die andere mit der unendlich fernen Ebene zusammenfallen läßt. — Die Methode II ist reziprok zu I; die hieraus sich ergebenden reziproken Beziehungen zwischen der zentralen Projektion und der orthogonalen Doppelprojektion werden ins einzelne verfolgt.

III. Abbildung mittels dreier Geraden. Die Punkte des Raumes werden von drei festen Zentren S_1, S_2, S_3 aus projiziert; die durch je zwei Zentren gehenden projizierenden Ebenen bilden drei Ebenenbüschel, denen in der Bildebene drei Strahlenbüschel projektiv zugeordnet sind; die den drei projizierenden Ebenen eines Raumpunktes entsprechenden drei Strahlen sind die Bilder des Raumpunktes. Als Spezialfall wird eine — vom Verf. „trizentrische Projektion" genannte — dreifache Parallelprojektion auf die nämliche Bildebene aufgeführt.

IV. Abbildung mittels dreier Punkte. Die Ebenen des Raumes werden auf drei von einem Punkte ausgehende feste Achsen durch ihre Schnittpunkte mit diesen bezogen; den dadurch auf den Achsen erzeugten drei Punktreihen sind in der Bildebene drei Punktreihen projektiv zugeordnet; die drei Punkte, welche den Achsenpunkten einer Ebene entsprechen, sind die Bilder der Ebene. — Die Methode ist reziprok zu III und führt durch Spezialisierung zur axonometrischen Methode. Hk.

G. Loria. Sur quelques problèmes élémentaires de la géométrie descriptive à 3 et 4 dimensions. Arch. d. Math. u. Phys. (3) 2, 257-266.

In der darstellenden Geometrie wird bei Anwendung der Zentralprojektion die Gerade durch Spur- und Fluchtpunkt, die Ebene durch Spur- und Fluchtgerade bestimmt, und zwei Gerade haben, um Spur-

und Fluchtgerade einer Ebene darstellen zu können, nur der Bedingung zu genügen, parallel zu sein. Der Punkt wird bestimmt durch Angabe seiner Projektion und einer durch ihn gehenden Geraden oder Ebene, welche ihrerseits in der bezeichneten Weise bestimmt werden. In ähnlicher Weise läßt sich der R_4 nach der Methode der Zentralprojektion behandeln, d. h. indem man seine Elemente auf einen beliebigen dreidimensionalen Raum, der mit R_3' bezeichnet sei, aus einem außerhalb gelegenen Punkte O projiziert. Hier haben wir als Elemente Punkte (R_0), Gerade (R_1), Ebenen (R_2) und lineare Räume von drei Dimensionen (R_3). Die Bestimmung der R_1, R_2, R_3 geschieht durch ihre Spur- und Fluchtelemente, welche im ersten Fall irgend zwei Punkte, im zweiten zwei parallele Geraden, im dritten zwei parallele Ebenen sind. Die Bestimmung des Punktes aber geschieht wiederum durch Angabe seiner Projektion und eines durch ihn gehenden R_1, R_2 oder R_3. Sind diese Festsetzungen getroffen, so bieten sich als nächste, elementarste Aufgaben diejenigen dar, welche sich auf Verbinden und Schneiden der Grundelemente $R_0, \dots, R_3$ beziehen. Diese Aufgaben behandelt vorliegende Schrift. Stz.

G. Hauck. Über die Beziehungen zwischen drei Parallelprojektionen eines räumlichen Systems. Deutsche Math.-Ver. 11, 265-268.

Kurze Inhaltsangabe einer demnächst im Journal für reine und angewandte Mathematik erscheinenden größeren Abhandlung über parallelprojektiv-trilineare Verwandtschaft. Eine solche Verwandtschaft wird durch folgende Konstruktion definiert. Sind in drei Ebenen S, S', S'' je zwei als Kernstrahlenbüschel bezeichnete Parallelstrahlenbüschel gegeben, so werden je zwei, die in verschiedenen Ebenen liegen, derart projektiv auf einander bezogen, daß ihre unendlich fernen Strahlen sich entsprechen. Diese „gegnerischen“ Kernstrahlenbüschel beziehen die Punkte von S, S', S'' auf einander, je zwei von ihnen liegen auf entsprechenden Strahlen zweier gegnerischen Kernstrahlenbüschel. Drei parallelprojektiv-trilineare Felder können in eine solche Lage zu einander gebracht werden, daß sie sich als Parallelprojektionen der Punkte eines Raumes Σ erweisen. Diese Sonderlage der drei Felder heißt „orientierte Lage“. Den verschiedenen orientierten Lagen der nämlichen drei parallelprojektiv-trilinearen Feldern entsprechen zu einander affine Räume. Eine parallelprojektiv-trilineare Verwandtschaft ist im allgemeinen durch vier Tripel zugeordneter Punkte bestimmt. Die drei gegnerischen Kernstrahlenbüschel sind in perspektiver Lage, wenn die drei auf einander bezogenen ebenen Felder zusammenfallen. Bewegt sich demnach ein veränderliches Sechseck so, daß seine Seiten sich beständig parallel bleiben, während drei Eckpunkte auf drei festen Geraden laufen, so erzeugen die drei anderen Eckpunkte drei parallelprojektiv-trilineare Punktfelder. Die drei Perspektivitätsachsen gehen hierbei nur dann durch einen Punkt, und es tritt die „ebene Orientierung“ ein, wenn ein Tripel zugeordneter Punkte sich in einem Punkte vereinigt. Die projektive Beziehung zweier per-

spektiven Parallelstrahlenbüschel, deren unendlich ferne Geraden sich entsprechen, ist bestimmt durch das Verhältnis der Abstände zweier entsprechenden Strahlenpaare. Sind diese Verhältnisse — die „Kernbüschelverhältnisse“ — für die drei Paare gegnerischer Kernstrahlenbüschel und die spitzen Winkel — die „Kernwinkel“ — von je zwei Kernrichtungen desselben Systems gegeben, so sind durch diese sechs Bestimmungselemente zwei verschiedene parallelprojektiv-trilineare Verwandtschaftstypen bedingt, die zu einander „supplementar“ heißen. Js.

G. Hauck. Über uneigentliche Projektionen. Berl. Math. Ges. Ber. **1**, 34-39.

Unter den verschiedenen Verwandtschaftsformen der parallelprojektiv-trilinearen Verwandtschaft (vergl. G. Hauck, Über die Beziehungen zwischen drei Parallelprojektionen eines räumlichen Systems. Deutsche Math. Ver. **11**, 265-268), die sich ergeben, indem man unter den sechs Bestimmungsstücken dieser Verwandtschaft Beziehungen festsetzt, ist die einfachste die „komplanare“ Verwandtschaft. Sie ist durch die Bedingung gekennzeichnet, daß die drei Kernbüschelverhältnisse je $=1$ und die Summe der drei Kernwinkel $=\pi$ ist. Solche parallelprojektiv-trilinearen Felder können in einer Ebene stets derart in orientierte Lage gebracht werden, daß je zwei gegnerische Kernstrahlenbüschel sich decken. Die Tripel zugeordneter Punkte bilden hierbei die Eckpunkte ähnlicher und ähnlich liegender Dreiecke. Jeder Punkt der Ebene repräsentiert ein Tripel zugeordneter Punkte. Bei der angegebenen Orientierung stellen die drei in einer Ebene gelegenen komplanaren Punktfelder die drei parallelprojektiven Projektionen eines Raumes dar. — Die komplanare Verwandtschaft dreier ebenen Felder läßt sich mit Vorteil in der Mongeschen darstellenden Geometrie verwenden, indem man zur Horizontal- und Vertikalebene eine dritte Projektionsebene so wählt, daß sie mit diesen drei komplanare Felder in komplanarer Orientierung bilden. Sind hierbei S und S' die Orthogonalprojektionen eines räumlichen Objektes O auf zwei zu einander senkrechte Projektionsebenen, von denen die eine in die andere umgelegt ist, und fügen wir eine dritte S'' hinzu, die mit ihnen komplanar ist, so werden diese drei komplanaren Projektionen als schiefe Parallelprojektionen ein ganz anderes Raumobjekt bestimmen, als das gegebene O. Hiernach schiene das gegebene Verfahren nur zulässig zu sein, sobald S'' mit einer wirklichen Projektion des Objektes O gleichgestaltet wäre, weil dann die drei komplanaren Felder eine andere Orientierung dreier wirklichen Projektionen von O sind. S'' erweist sich nun zwar nicht als eine wirkliche Projektion von O, wohl aber als eine zu einer solchen ähnliche. Aus diesem Grunde heißt S'' eine „uneigentliche Projektion“ von O. Die Verwendung dieser uneigentlichen Projektion und ihre Vorzüge bei der Methode der Transformation wird an zwei Beispielen erläutert. August Adler hat später nachgewiesen, daß die uneigentliche Projektion S'' als vereinigte Grundriß-

und Aufrißprojektion einer schiefen Projektion auf die zweite Medianebene aufgefaßt werden kann, wenn hierunter die Ebene verstanden wird, welche den von der oberen Vertikalebene und der hinteren Horizontalebene gebildeten Winkel hälftet. Js.

E. Baudran. Représentation des objets au moyen de deux perspectives sur un même tableau. Nouv. Ann. (4) 2, 552-562.

Das behandelte (gewöhnlich als „stereoskopische Projektion" bezeichnete) Projektionssystem ist bestimmt durch die Lage der zwei Hauptpunkte auf der gemeinsamen Bildebene und die zwei Augdistanzen. Unter dieser Voraussetzung werden die zur deskriptiven Ausführung der Raumkonstruktionen und zur Rekonstruktion der dargestellten Raumgebilde erforderlichen Fundamentaloperationen entwickelt. Hk.

F. Amodeo. Rappresentazione stereoscopica delle figure dello spazio nel piano. Mat. pure ed appl. 2, 3-18, auch Sep.-Abdr. 11 S. u. 5 Taf.

Dem gewöhnlichen Gange der Zentralperspektive folgend, löst der Verf. unter Annahme zweier Augpunkte (in einfachster Lage zur Bildebene) die Fundamentalaufgaben der stereoskopischen Perspektive (Tafel I, II), sodaß sich Konstruktionen wie die der kürzesten Entfernung zweier windschiefen Geraden leicht ergeben. Zum Schluß finden sich als Anwendungen die stereoskopischen Bilder dreier windschiefen Regelflächen von den Ordnungen 2, 3, 4 (Taf. III-V). Lwt.

F. Severi. Risoluzione descrittiva di alcuni problemi spaziali biquadratici, con tre tavole. Mat. pure ed appl. 2, 169-176. (3 Taf.)

Eine Stütze der Aussage von Chasles, daß die Kegelschnitte das natürliche Hülfsmittel zur geometrischen Behandlung kubischer und biquadratischer Probleme sind. Drei Aufgaben werden in diesem Sinne gelöst: 1. Darstellung der sich selbst entsprechenden Punkte zweier kollinear verwandten Räume in Zentralprojektion. Die gesuchten Punkte sind Schnittpunkte zweier kubischen Raumkurven, in der Bildebene (bei passender Wahl des Augpunktes) Schnittpunkte zweier Kegelschnitte. 2. Zentralperspektivische Darstellung der Schnittpunkte zweier zu derselben Familie gehörigen kubischen Kurven auf einer Regelfläche zweiter Ordnung. 3. Zentralperspektivische Darstellung der Punkte, durch die homologe Ebenen von vier projektivischen Ebenenbüscheln hindurchgehen. Lwt.

A. Adler. Zur sphärischen Abbildung der Flächen und ihrer Anwendung in der darstellenden Geometrie. Deutsche Math.-Ver. 11, 271-274.

Die sphärische Abbildung der Flächen wird synthetisch begründet und gezeigt, wie sich mit ihr die Theorie der Isophoten und Isophengen

beliebiger Flächen, insbesondere die der Flächen II. Grades ableiten läßt. Von besonderem Werte erweist sich die sphärische Abbildung für die Theorie der Krümmungslinien der Flächen II. Grades. Durch sie läßt sich, ohne konfokale Flächen II. Klasse zu Hülfe zu nehmen, die Theorie jener Krümmungslinien auf die der sphärischen Kegelschnitte gründen. In welcher vorteilhaften Weise die sphärische Abbildung zur Darstellung der Isophoten, Isophengen und Krümmungslinien der Flächen II. Grades verwendet werden kann, geht nicht nur aus dieser Abhandlung, sondern für die Mittelpunktsflächen II. Grades auch aus einer früheren Arbeit des Verf. „Zur sphärischen Abbildung der Flächen“, Wiener Ber. Bd. CX, hervor. Js.

A. Sucharda. **Über die Isophoten von Rotationsflächen bei Parallelbeleuchtung.** Rozpravy **11**, No. 25, 21 S. (Böhmisch).

Unter Anwendung der Ebene XZ des Hauptmeridians als Orthogonalprojektionsebene beweist der Verfasser zuvörderst, daß die Projektionen der Isophotentangenten in den Punkten eines beliebigen Parallelkreises einen Strahlenbüschel erster Ordnung bilden. Hierauf entwickelt er mit Hülfe der kinematischen Geometrie eine lineare Konstruktion der Projektionen dieser Tangenten und befaßt sich ferner an der Hand der darstellenden Geometrie mit einer Fläche Φ der vierten Ordnung, als dem geometrischen Orte der Isophotentangenten selbst. Er untersucht nun verschiedene Degenerationen der Fläche Φ, welche mit den Doppel- und Rückkehrpunkten der Isophoten im Zusammenhange stehen, und liefert mit Hülfe der kinematischen Geometrie eine lineare Konstruktion des Krümmungskreises für die Projektionen der Isophoten in die Ebene XZ. Hierauf zeigt er, daß die Kurve Ψ, nämlich der geometrische Ort der Wendepunkte des Systems dieser Projektionen, der Projektion eines jeden Parallelkreises im Endlichen bloß in zwei Punkten begegnet, und daß in näher angegebenen Ausnahmefällen die Projektionen gewisser Parallelkreise selbst Teile der genannten Kurve bilden. (Mit 5 Tafeln.)

Sda.

E. Weinnolt. **Über die Konstruktion von Isophengen auf Flächen zweiter Ordnung.** Arch. der Math. u. Phys. (3) **4**, 22-43.

Die Isophengen (Kurven gleicher scheinbarer Helligkeit unter Annahme der Proportionalität der Helligkeit mit den Kosinussen der Einfallswinkel der parallelen Lichtstrahlen und der parallelen Sehstrahlen) wurden für die Flächen zweiter Ordnung von Burmester in seinem grundlegenden Werke bestimmt unter Beschränkung auf eine zu einer Hauptachse parallele Sehrichtung. Die vorliegende Abhandlung gibt die konstruktive Lösung für den Fall einer beliebigen Sehrichtung. Die Projektionsebenen werden zunächst parallel zu zwei Hauptebenen der Fläche angenommen. Die Konstruktion der bezüglichen Isophengen-Projektionen wird bewirkt mittels Bezugnahme auf das Isophengensystem

einer Hülfskugel und wird damit zurückgeführt auf die Konstruktion eines Kreisbüschels und von Achsenschnitten der Fläche. Schließlich ergibt sich die Projektion senkrecht zur Sehrichtung durch zweimalige Transformation. Hk.

A. Adler. Zum Normalenproblem der Flächen zweiten Grades. Wien. Ber. **111**, 58-66.

Die von einem Punkte P an eine Fläche zweiten Grades gehenden Normalen werden mit Hülfe orthogonaler Projektion auf sehr einfache Art bestimmt. Sind bei einem einschaligen Hyperboloid z. B., dessen Achsen parallel zu den Projektionsebenen laufen, s_1, s_2 die orthogonalen Projektionen der bezw. zu der Horizontal- und Vertikalebene parallelen Hauptschnitte und P', P'' die Horizontal-, bezw. Vertikalprojektion des Punktes P, so werden die durch P' und P'' gehenden Apollonischen Hyperbeln H_1, H_2 in bezug auf s_1 und s_2 konstruiert. H_1 ist die Horizontalprojektion einer auf dem Hyperboloid gelegenen Raumkurve vierter Ordnung, deren Vertikalprojektion H_1'' die Hyperbel H_2 in den Vertikalprojektionen der Fußpunkte der gesuchten Normalen schneidet. Da ihre Horizontalprojektionen auf H_1 liegen, so sind sie somit gefunden. — Bekanntlich schneidet Steiner die Fußpunkte der von einem Punkte P auf eine Fläche zweiten Grades F^2 gefällten Normalen durch eine Raumkurve dritter Ordnung aus. Ihre orthogonalen Projektionen auf die Symmetrieebenen von F^2 sind die Apollonischen Hyperbeln der Orthogonalprojektionen von P in bezug auf die in den betreffenden Symmetrieebenen gelegenen Hauptschnitte der Fläche. Js.

G. Loria. Le quadriseccanti di una quaterna di rette. Nota di geometria descrittiva. Periodico di Mat. (2) **4**, 289-291.

Durch die Lösung angeregt, die Timerding von der Aufgabe gegeben hat, die Geraden zu finden, welche vier gegebene Raumgeraden schneiden (F. d. M. **32**, 524, 1901), teilt Loria eine Lösung mit, die bei der Ausführung den Vorzug einer erheblichen Ersparnis von Linien besitzt und vom didaktischen Gesichtspunkte aus wegen der zur Anwendung kommenden Begriffe sich empfiehlt. Lp.

O. Unger. Über ein Konstruktionsprinzip und seine Verwertung bei der Schattenbestimmung an Drehflächen. Zeitschr. für Math. u. Phys. **47**, 467-479.

Verf. dehnt die bei Umdrehungsflächen häufig benutzte Methode der Ersetzung des Grundrisses durch die in die Hauptmeridianebene umgelegten Parallelkreise aus auf die Bestimmung der auf die Fläche fallenden Schlagschatten, indem er die von den Parallelkreisen erzeugten

Schattenellipsen durch affine Transformation in Kreise überführt. — Zur Würdigung des Umlegungsverfahrens im allgemeinen sei bemerkt, daß die Methode (ebenso wie ihr Seitenstück: die Methode der kotierten Projektion) in die Zeit vor Monge zurückreicht; sie findet sich bereits bei Frézier ausgebildet. Sie ist innerhalb ihres beschränkten Anwendungsbereiches gewiß von Vorteil, konnte sich aber gegenüber der Universalität der Mongeschen Methode als allgemeine Methode nicht behaupten.

Hk.

E. DOLEŽAL. Über das Gesichts- und Aufnahmefeld bei photogrammetrischen Aufnahmen. Zeitschr. für Vermessungswesen **31**, 101-107.

Das Gesichtsfeld der Kamera wird von den Flächen des Vierkants an der Spitze der Pyramide begrenzt, die die (vertikal gestellte) rechteckige Bildplatte als Basis und die Bilddistanz als Höhe hat. Unter dem Aufnahmefeld bei zwei Aufnahmen von verschiedenen Standpunkten ist der Teil des vorgelagerten Geländes zu verstehen, der innerhalb der beiderseitigen Gesichtsfelder liegt. Im Grundriß stellt es sich als Viereck dar, dessen Seiten von den Spurlinien der vertikalen Flächen der zwei Vierkante gebildet werden. Der Flächeninhalt dieses Vierecks wird berechnet.

Hk.

E. DOLEŽAL. Das Problem der fünf und drei Strahlen in der Photogrammetrie. Zeitschr. für Math. u. Phys. **47**, 29-81.

Das Fünfstrahlenproblem (von Fr. Steiner unter der Bezeichnung „Problem der fünf Punkte" in die Photogrammetrie eingeführt) besteht darin, daß, wenn von fünf ihrer wahren Lage nach bekannten Geländepunkten eine photographische Aufnahme mit vertikaler Bildebene vorliegt, die wahre Lage des Standpunktes sowie die perspektivischen Konstanten der Kamera und der Orientierungswinkel der Bildebene zu bestimmen sind. Bei dem Dreistrahlenproblem sind drei Punkte ihrer wahren Lage nach bekannt sowie die horizontalen Visierwinkel nach jenen drei Punkten. Von beiden Problemen gibt der Verf. neue Lösungen nach trigonometrisch-rechnerischer Methode. Dabei wird die Aufgabe auf die Behandlung der Ausgleichung bei einer überschüssigen Anzahl von gegebenen Punkten ausgedehnt und werden eingehende Genauigkeitsuntersuchungen mit Bestimmung der mittleren Fehler angestellt. Das ganze Vorgehen erfährt eine wertvolle Veranschaulichung durch die Mitteilung der Ergebnisse eines nach der vorgetragenen Methode rationell durchgeführten praktischen Beispiels.

Hk.

E. DOLEŽAL. Photogrammetrische Lösung des Wolkenproblems aus einem Standpunkte bei Verwendung der Reflexe. Wien. Ber. **111**, 788-813.

Kennt man die Höhenwinkel der zwei Visierlinien nach einem Wolkenpunkt und seinem Spiegelbild in einer Wasserfläche, sowie die

Höhe des Auges über letzterer, so kann hieraus die Höhe des Objektpunktes und seine Horizontalentfernung vom Auge ermittelt werden. Durch Beobachtungen in verschiedenen Zeitmomenten ergibt sich des weiteren die Bewegungsrichtung und die Geschwindigkeit des beobachteten Wolkenpunktes. Die Messung der genannten zwei Höhenwinkel muß aber gleichzeitig erfolgen. Hierzu bietet die Photogrammetrie das einfachste Mittel, indem aus dem photographischen Bild vom Objektpunkt samt Spiegelbild die erforderlichen Winkel entnommen werden können. Die Aufnahme kann bei vertikaler und bei geneigter Stellung der Bildebene geschehen. Für beide Fälle wird die Aufgabe auf rechnerischem und auf graphischem Wege gelöst unter Feststellung der erzielbaren Genauigkeit. Beigefügt ist eine solche photogrammetrische Aufnahme mit Angabe der nach der vorgetragenen Methode erhaltenen Rechnungsergebnisse. Hk.

GEUER. Die Genauigkeit geometrischer Zeichnungen behandelt nach dem Gaußschen Ausgleichungsverfahren, wonach die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird. Pr. Progymn. Durlach. 39 S. 4 Tafeln. 4°.

Die Abhandlung gibt eine hübsche Anwendung der Gaußschen Ausgleichungstheorie auf die Genauigkeitsuntersuchung geometrischer Konstruktionen. Ist die Lage einer geraden Linie überbestimmt dadurch, daß sie durch mehr als zwei gegebene Punkte gehen soll, und nimmt man als Fehler der bestimmenden Punkte ihre Abstände von der Geraden, so gibt sich die wahrscheinlichste Lage der Geraden zu erkennen als die Achse des kleinsten Trägheitsmomentes in bezug auf die — mit ihren Bestimmungsgewichten als Masse behafteten — gegebenen Punkte. — Ist ein Punkt überbestimmt durch mehr als zwei Gerade, bezw. Kurven, auf denen er liegen soll, so ergibt sich als wahrscheinlichste Lage diejenige, für welche die geometrische Summe der Abstände Null ist. Die bezügliche konstruktive Ermittlung der ausgeglichenen Gebilde wird eingehend behandelt und die Bestimmung ihrer Gewichte erörtert. — Abgesehen von der Wichtigkeit der Genauigkeitsuntersuchungen für das spezielle Gebiet der konstruktiven Geometrie, verdient die Arbeit auch mit Rücksicht auf die sehr anschauliche Darstellung der Prinzipien der Gaußschen Ausgleichungstheorie Beachtung. Hk.

A. ADLER. Zur Theorie der Zeicheninstrumente. Berl. Math. Ges. Ber. 1, 26-28.

Es wird ausgeführt, daß jede Aufgabe zweiten Grades nicht nur mit Hülfe des Zirkels allein, sondern auch mit Hülfe eines bloßen (zwei parallele Kanten besitzenden) Lineals oder eines bloßen materiellen rechten oder spitzen Winkels (Schiebdreiecks) gelöst werden kann. Die Mascheronischen Zirkelkonstruktionen lassen sich mittels des Prinzips der reziproken

Radien systematisch entwickeln. Am Schlusse wird die einschlägige Literatur angegeben. (Vergl. F. d. M. **22**, 621 u. 643, 1890). Hk.

Potrou. Sur la génération de quelques courbes remarquables par le campylographe de P. Marc Dechevrens. Brux. S. sc. **26**, 41-56.

Der Kampylograph ermöglicht die mechanische Aufzeichnung zahlreicher Kurven und besonders der Epicykeln des Ptolemaeus in dem Falle von fünf über einander gelagerten Kreisbewegungen. Mn. (Lp.)

Weitere Literatur.

L. Alix. Curso di geometría descriptiva, accompañado de un atlas dividido in tres partes. Valencia: Alufre. 112 u. 199 u. 75 S., 31 u. 48 u. 13 Taf.

R. Aparici. Lecciones de geometría descriptiva. 2ª edición. (Rectas y planos, poliedros, superficies cilíndricas, cónicas y de revolución; planos acotados.) Madrid: Lib. Gutenberg de José Ruiz. VIII u. 32 u. 8 S. (1903).

K. Barchanek. Lehr- und Übungsbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig. VIII u. 374 S. 8°.

A. E. Church. Elements of descriptive geometry; with applications to spherical, perspective, and isometric projections, and to shade, and shadows. New York: American Book Company. II u. 214 S. u. Band mit Tafeln.

H. Diesener. Praktische Unterrichtsbücher für Bautechniker. I. Darstellende Geometrie. Das geometrische Zeichnen. Die Projektionslehre. Die Lehre vom Steinschnitt. Die Schattenkonstruktionen. Die Perspektive und die Farbenlehre. Leicht faßlich dargestellt für Selbstunterricht und Schulgebrauch. Fünfte verbesserte Auflage. Halle: L. Hofstetter. VI u. 157 S. gr. 8°.

Chr. Dietsch. Leitfaden der darstellenden Geometrie. Mit 88 in den Text eingedruckten Figuren und sehr vielen Aufgaben. Vierte nach der neuen Rechtschreibung verbesserte, sonst fast unveränderte Auflage. Erlangen: Deichert Nachf. IV u. 152 S. gr. 8°.

W. Eggers. Lehrbuch der Schattenkonstruktion. Leipzig: Seemann & Co. VI u. 42 S. 4°. Mit 21 Fig.-Taf.

F. Enriques. Lezioni di geometria descrittiva, pubblicate per cura del Dottore Umberto Concina. Con 24 tavole. Bologna: Zanichelli. 1902. XI u. 421 S. 8°.

Referat in Loria Bollettino V, 19-23, 1902.

Farisano. Elementi di geometria descrittiva secondo i programmi dei reali istituti tecnici. Roma: Forzani. 132 S. 8°.

O. Fuchs. Handbook on linear perspective, shadows and reflections. Boston: Ginn. X u. 34 S.

R. Grimshaw. Leitfaden für das isometrische Skizzieren und die Projektionen in den schiefen oder sogenannten Kavalier-Perspektiven usw., mit besonderem Bezug auf die isometrischen Skizzenblöcke. Hannover: Gebr. Jänecke. IV u. 48 S. gr. 8°.

W. S. Hall. Descriptive geometry; text and plates. 2 Vols. New York: Van Nostrand.

A. P. Jamison. Elements of mechanical drawing; a course in applied descriptive geometry. Lafayette Ind.: Jamison. 79 S. 8°.

J. F. Éléments de géométrie descriptive avec de nombreux exercices. Paris: Poussielgue. 462 S. 16mo.

K. Kraus. Grundriß der Geometrie und des geometrischen Zeichnens für Lehrerbildungsanstalten. Mit einem Situationsplan. Wien: Pichler. II u. 238 S. 8°.

H. Laurent. Traité de perspective, à l'usage des peintres et des dessinateurs de profession ou des personnes qui désirent se faciliter l'étude du dessin. Paris: Schmid. 76 S. 8°.

S. Marchesi. Prospettiva lineare pratica per gli artisti. Milano. XII u. 144 S. 8° u. 23 Taf.

C. A. v. Nida. Kurzer Lehrgang der geraden Parallelprojektion und Axonometrie für Gewerbe- und Fortbildungsschulen sowie zum Selbstunterricht. Stade: A. Pockwitz. 40 S. gr. 8°.

H. Parent. Perspective élémentaire. Paris: Schmid. 25 S. 8°, 36 Taf.

W. Poezl. Anfangsgründe der darstellenden Geometrie, enthaltend die geradlinigen ebenen Gebilde, zum Schulgebrauche zusammengestellt. 2. Aufl. München: Ackermann. IV u. 58 S. 8°.

W. Poezl. Elemente der darstellenden Geometrie, für höhere Lehranstalten zusammengestellt. Zwei Teile. 2. Aufl. Teil 1: Geradlinige Gebilde. Teil 2: Krummflächige Gebilde. München: Ackermann. VI u. 112, VI u. 111 S. 8°.

O. E. Randall. Shades and shadows and perspective. A text-book based on the principles of descriptive geometry. Boston: Ginn. V u. 64 S.

E. Schlesser. Éléments de géométrie descriptive, à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires. Conilleau. 78 S. 4°.

E. Trutat. Traité général des projections. 2 Vols. Paris. 8°.

J. Wildt. Praktische Beispiele aus der darstellenden Geometrie für Lehranstalten mit bau- und kunstgewerblicher Richtung. Wien: Pichler. 4°.

A. Jagot. Tracé mécanique de la sinussoïde. Revue scient. (4) **17**, 53.

G. Chrystal. Note on the mathematical theory of Miller's trisector, and its relation to other solutions of the problem of trisection. Edinb. R. S. Proc. **24**, 9-16.

G. CHRYSTAL. On the relation of Miller's trisector to the quartic trisectrix, with a description of a seven-bar limaçonograph. Edinb. R. S. Proc. **24**, 17-21.

J. N. MILLER. Application of Miller's trisector to the quinquisection of any angle. Edinb. R. S. Proc. **24**, 302-305.

J. MANDL. Graphische Darstellung von mathematischen Formeln. Wien: L. W. Seidel & Sohn in Komm. 65 S. gr. 8⁰ mit 4 Taf. (Aus: „Allg. Bauzeitg.")

E. WISKOCZIL. Unmittelbare Darstellung der einzelnen Bilder der regelmäßigen Vielflächner. Pr. Iglau. 14 S. 8⁰.

Kapitel 5.

Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

F. AMODEO. Elementi di geometria projettiva, appunti delle lezioni dettate nella R. università di Napoli (2ª Edizione). Napoli: Lorenzo Alrano. VII u. 488 S. 4⁰.

Über die jetzt sogenannten Axiome der Verknüpfung, die Verf. zum Aufbau der projektiven Geometrie benutzt (es sind ihrer 5), vgl. F. d. M. **27**, 420-424, 1896. Sie allein werden in den ersten sieben Paragraphen der Einleitung benutzt, um die einfachsten Begriffe zu erklären und mit einander in Beziehung zu setzen, ferner um, als wichtigste Resultate, den Desarguesschen Lehrsatz über perspektive Dreiecke sowie die Gesetze der Dualität abzuleiten. Es folgt im § 8 die Definition der Reihenfolge und das erste Anordnungspostulat. Dieses sagt aus, daß die Gerade einfach-geschlossen ist. In § 9 folgt die Definition der harmonischen Punktgruppe mittels der Konstruktion des vollständigen Vierecks und der Beweis der Unabhängigkeit von dem zur Konstruktion benutzten Viereck. Es folgt das zweite Anordnungspostulat, das aussagt, daß der zu C in bezug auf A und B harmonisch konstruierte Punkt D von C verschieden und von C durch A und B getrennt ist. Nach Herleitung der elementaren Eigenschaften der harmonischen Quadrupel und einer Definition der Aufgabe der projektiven Geometrie schließt die Einleitung mit 19 Aufgaben. Es folgen in § 1 und 2 von Kap. I die beiden Stetigkeitsaxiome, die dem Archimedischen und Dedekindschen in bekannter Weise entsprechen, und die entsprechende Herleitung des Fundamentalsatzes. In der zweiten Auflage des Werkes (s. das Referat über die erste Auflage F. d. M. **27**, 419-420, 1896) sind größere Partien hinzugekommen, in denen Verf. einen Teil seiner Lezioni sulle omografie binarie (F. d. M. **21**, 603, 1889) verarbeitet: Kap. II: Imaginäre Elemente auf den Grundgebilden erster Stufe: § 1. Produkte und Quotienten von Projektivitäten. § 2. Trans-

formation einer Homographie in sich selbst. Vertauschbare Produkte. § 3. Bündel von Homographien, zusammengehörige Involutionen und Projektivitäten. § 4. Überführung einer Projektivität in die zu ihr inverse. Harmonische Homographien. § 5. Reelle oder imaginäre Paare, die Homographien gemeinsam sind. Kap. III, § 7. Imaginäre Elemente auf Fundamentalgebilden zweiter Stufe. Teil II, Kap. I, § 4. Imaginäre Elemente der Kegelschnitte. Auch sonst finden sich viele Zusätze, unter anderen 15 Aufgaben am Ende von Kap. III. D.

K. Doehlemann. Geometrische Transformationen. I. Teil. Leipzig: G. J. Göschen. VII u. 322 S. 8° (Sammlung Schubert XXVII).

K. Doehlemann. Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. Leipzig: G. J. Göschen. 176 S. 8° (Sammlung Göschen).

Der vorliegende erste Teil der geometrischen Transformationen behandelt die projektiven Transformationen und ihre Anwendungen. Die Darstellung ist im wesentlichen analytisch. Der Verf. geht von den projektiven Koordinaten in den Gebieten erster, zweiter, dritter Stufe aus (Abschnitt 1), die von vornherein in allgemeinster Form definiert werden, so daß auch die allgemeinen projektiven Transformationen von Anbeginn als die naturgemäßen erscheinen. Diese selbst erfahren in drei gesonderten Abschnitten, entsprechend dem binären, ternären und quaternären Gebiet, eine ausführliche Behandlung. Das letzte Kapitel, die Transformationen einer Fläche zweiten Grades in sich behandelnd, weist auf den zweiten Teil des Werkes hin, welcher den in das Gebiet der Funktionentheorie hinübergreifenden Kapiteln der Theorie der geometrischen Transformationen und den Verwandtschaften höheren Grades gewidmet sein soll. Die reichhaltigen Anwendungen, welche der Verf. von der allgemeinen Theorie gibt, beziehen sich auf darstellende Geometrie einschließlich der Reliefperspektive, auf Kristallographie und die Theorie der optischen Instrumente. Apparate zur mechanischen Ausführung der Kollineationen und reliefperspektivischen Modellierungen sind eingehend beschrieben und durch vorzügliche Illustrationen veranschaulicht. — Was die Anordnung des Stoffes und die Form der Darstellung betrifft, so wird sie freilich nicht jedem zusagen. Wer sich für eine Theorie erst dann interessiert, wenn er ihre Notwendigkeit für die Erledigung praktischer Aufgaben erkannt hat, dürfte hier seine Rechnung nicht finden. Es ist aber — trotz gegenteiliger Versicherungen — die Zahl derer nicht gering, die einer solchen äußeren Anregung nicht bedürfen, vielmehr erst für die Anwendungen interessiert sein wollen. Sie werden durch das vorliegende Werk manche Anregung erfahren.

Im gleichen Verlage ist von demselben Verf. ein kleines Werkchen über projektive Geometrie erschienen, welches in leicht faßlicher, für die Einführung geeigneter Weise die Elemente, die Theorie der Kegelschnitte und der Regelflächen zweiten Grades behandelt. Leider ist die Ausführung der Figuren, im Gegensatz zu der in dem andern Werke, recht mangelhaft. Stz.

E. Janisch. Geometrische Mitteilungen. Monatsh. f. Math. 13, 133-155.

I. Zum Apollonischen Problem. II. Über den Zusammenhang des Polarsystems einer positiv gekrümmten Rotationsfläche zweiten Grades mit dem Nullsystem. III. Konstruktion der Haupttangenten der windschiefen Fläche mit zwei Leitgeraden und einer Leitfläche zweiten Grades. IV. Über das Normalenproblem der Kegelschnitte auf Grund räumlicher Betrachtungen. V. Geometrische Aufgaben, welche auf die lineare Differentialgleichung erster Ordnung führen. Stz.

P. Mansion. La géométrie perspective est-elle indépendante de la géométrie métrique? Brux. S. sc. 26A, 143-145.

Der Schursche Beweis (Math. Ann. 39, 113-124, 1891) des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie beruht auf einem metrischen Begriffe, dem des begrenzten Raumes. Mn. (Lp.)

G. Hessenberg. Über Beweise von Schnittpunktsätzen. Arch. d. Math. u. Phys. (3) 3, 121-123.

Verf. gibt einige einfache Beispiele von Schnittpunktsätzen, welche sich sowohl unter alleiniger Anwendung des Desarguesschen, wie unter alleiniger Anwendung des Pascalschen Satzes herleiten lassen. Stz.

V. Weiss. Über eine gewisse projektive Beziehung von vier Strahlenbüscheln erster Ordnung. Wien. Ber. 111, 1066-1073.

Beweis des Satzes: Vier beliebige Strahlenbüschel erster Ordnung des Raumes, welche paarweise keinen Strahl gemein haben, sind projektiv auf einander bezogen, wenn je vier Strahlen aus den vier Büscheln einander als entsprechend zugewiesen werden, die derselben Regelschar angehören. Sk.

V. Weiss. Eine Konstruktion einer quadratischen Verwandtschaft zweier ebenen Punktfelder aus sieben Paaren entsprechender Punkte. Wien. Ber. 111, 1489-1495.

Die Aufgabe wird in Verbindung mit einer andern, der Konstruktion der ∞^1 Korrelationen, für welche die sieben gegebenen Punktepaare Paare konjugierter Punkte darstellen, gelöst. Stz.

L. Klug. Einige Sätze über kollineare und ähnliche Felder. Monatsh. f. Math. 13, 361-368.

Ableitung zweier Sätze über die Flächen solcher geschlossenen Figuren,

die mit zwei ähnlichen oder kongruenten Figuren gleichen oder entgegengesetzten Sinnes zugleich affine Lage haben. Js.

J. Réveille. Note de géométrie. Nouv. Ann. (4) 2, 311-313.

Sind C und C' zwei entsprechende Kurven in zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Systemen mit Ähnlichkeitspunkt O, so ist der Ort der Schnittpunkte der Tangenten von C und C' in entsprechenden Punkten die Fußpunktkurve von O in bezug auf eine zu C und C' ähnliche Kurve. Der Verf. gewinnt hieraus mehrere Örter der Spitzen konstanter Winkel, deren Schenkel auf ähnlichen Kurven (Kreisen, Parabeln, gleichseitigen Hyperbeln) in bestimmter Lage gleiten. Wö.

G. Tarry. Les figures similaires dans le plan et dans l'espace. Liége Mém. (3) 4, 13 S.

Besondere Fälle affiner Figuren. Mn. (Lp.)

N. Solovjöw. Geometrische Definition des ersten Polarsystems eines Poles für n Punkte auf einer Geraden und Konstruktion des Polarsystems für den Fall $n = 3$. Moskau Phys. Sekt. 11, 24-26 (Russisch).

Da die Polarentheorie sich auf quantitative Verhältnisse stützt und also nicht rein geometrisch begründet wird, so will der Verf. den rein geometrischen Beweis für den Satz liefern: „Sind auf der Geraden d drei Punkte A, B, C gegeben, und werden drei beliebige Strahlen durch diese drei Punkte gezogen (nur nicht durch einen und denselben Punkt), so gehen sämtliche Kegelschnitte, welche durch die Durchschnittspunkte dieser drei Geraden gehen und in diesen Punkten den zu O in bezug auf das entsprechende Geradenpaar harmonischen Strahl berühren, durch zwei bestimmte Punkte von d. Si.

V. Jarolímek. Beitrag zur Theorie der imaginären Direktionsgebilde in polaren Systemen. Rozpravy 11, No. 18, 15 S. (Böhmisch).

Der Verf. stellt die imaginäre Direktrix eines ebenen polaren Systems durch eine reelle Ellipse dar, deren polares System in einer einfachen Beziehung mit dem gegebenen Systeme ist, und konstruiert diese Ellipse, sowie auch das stets reelle polare, den beiden Systemen gemeinschaftliche Dreieck. Mit Hülfe der zentralen Projektion erreicht er analoge Resultate, namentlich bei einem räumlichen polaren Systeme mit imaginärer Direktionsfläche. Die Betrachtungen des Verf. beziehen sich ausschließlich auf Flächen und Kurven, deren Gleichungen mit reellen Koeffizienten geschrieben werden können. Sda.

B. Mayor. Sur une représentation plane de l'espace et son application à la statique graphique. C. R. **135**, 1318-1321.

Innerhalb einer Ebene hängt die Lage eines Punktes und die einer Geraden von je zwei Konstanten ab; ein Paar, bestehend aus einer Geraden und einem Punkte, erfordert also vier Konstanten zur völligen Bestimmung, genau wie eine Gerade im Raume. Mit Hülfe der Begriffe der Liniengeometrie und der projektiven Geometrie wird nun eine eindeutige Beziehung zwischen einer Geraden des Raumes und einem derartigen Paar, aus Punkt und Gerade einer Ebene bestehend, hergestellt; später soll diese Darstellung aller Geraden des Raumes durch solche Paare von Punkten und Geraden für die Zwecke der graphischen Statik nutzbar gemacht werden. Lp.

Weitere Literatur.

A. Lewenberg. Projektive Geometrie primitiver Formen. Warschau. XV u. 414 S. (Polnisch).

M. Grossman. Über die metrischen Eigenschaften kollinearer Gebilde. Frauenfeld. 27 S. 4°.

H. B. Newson. Report on the theory of collineations. Proc. Amer. Assoc. Adv. sc. **51**, 305-326.

B. Besondere ebene Gebilde.

L. Ripert. Sur une propriété des coniques. Ens. math. **4**, 34-36.

Handelt von projektiven Eigenschaften der Figuren, die aus dem Pascalschen Sechseck oder Brianchonschen Sechsseit, insbesondere aus dem Fall der Parabel, abgeleitet werden können. Tn.

K. Wolletz. Über die Leitlinie der Kegelschnitte. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **33**, 458-467.

Eine Anzahl von Aufgaben über Kegelschnitte, bei denen die Beziehungen der Brennpunkte zu den zugehörigen Leitlinien in Betracht kommen. Sowohl in englischen wie auch in französischen Lehrbüchern findet man zahlreiche Aufgaben dieser Art. Lp.

G. Monnet. Note sur les coniques. Revue de Math. spéc. **12**, 526-527.

Die Notiz enthält einen elementaren Beweis des Satzes: Die Tangente an einen Kegelschnitt halbiert den Winkel der Brennstrahlen, und seiner Umkehrung: Wenn die Tangente an eine Kurve den Winkel der nach zwei festen Punkten gezogenen Strahlen halbiert, so ist die Kurve

ein Kegelschnitt. Die Umkehrung wird folgendermaßen verallgemeinert: In einer Ebene seien ein fester Punkt F und eine feste Kurve C gegeben. Man betrachte eine Kurve von der Beschaffenheit, daß in jedem ihrer Punkte M die Tangente den Winkel zwischen MF und der an die Kurve C gezogenen Tangente MQ halbiert. Alsdann ist $FM \pm MQ = -\operatorname{arc} OQ + \text{constans}$, wo O ein fester Punkt der Kurve C ist.

Zch.

RICH. MÜLLER. Historische und kritische Bemerkungen über den Begriff der ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitte. Arch. der Math. u. Phys. (3) 2, 342-344.

Aus dem Begriffe der ähnlichen Lage folgt für zwei ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte, daß irgend zwei konjugierte Durchmesser des einen den entsprechenden konjugierten Durchmessern des andern parallel sein müssen. Wird, wie es in einigen Lehrbüchern geschieht, die Umkehrung dieses Satzes zugelassen, so ergibt sich die dem gewöhnlichen Begriffe der Ähnlichkeit widersprechende Folgerung, daß zwei konjugierte Hyperbeln ähnlich seien. Will man dies zulassen, so muß man wenigstens ausdrücklich auf die damit vollzogene Erweiterung des Ähnlichkeitsbegriffes hinweisen.

In einer Fußnote macht Lampe darauf aufmerksam, daß die von dem Verf. gerügte Ungenauigkeit des Ausdrucks vielleicht auf das Bestreben zurückzuführen ist, den Satz, daß parallele Ebenen eine Fläche zweiter Ordnung in ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitten schneiden, ohne Einschränkung aussprechen zu können. Zch.

G. MAJCEN. Über gewisse Scharen homothetischer Kegelschnitte in der Dreiecksgeometrie. Arch. der Math. u. Phys. (3) 4, 76-79.

Ist ein Dreieck ABC gegeben und ein Winkel ω, und zieht man durch die Ecken diejenigen Geradenpaare, welche die gegenüberliegenden Seiten in den Winkeln ω und $\pi - \omega$ schneiden, so sind diese sechs Geraden Tangenten eines Kegelschnitts, und die sechs Schnittpunkte mit den gegenüberliegenden Seiten liegen auf einem zweiten Kegelschnitt k_ω. Wird der Winkel ω variiert, so gelangt man im Falle eines spitzwinkligen Dreiecks zu einer Schar homothetischer Ellipsen, entsprechend im Fall eines stumpfwinkligen zu einer Hyperbelschar mit denselben Asymptoten. Der Untersuchung dieser Scharen ist die Arbeit gewidmet. Stz.

J. SOBOTKA. Zur Konstruktion von Krümmungskreisen und Achsen bei Kegelschnitten, welche durch fünf Punkte oder fünf Tangenten gegeben sind. Prag. Ber. 1902, No. 6, 19 S.

Der Verf. bemerkt zuvörderst, daß der größte Teil der von Rohn (zweite Auflage des ersten Bandes seiner Darstellenden Geometrie) und

von Weiler (Schlömilchs Zeitschrift f. M. u. Ph. 1889) angegebenen Konstruktionen von Krümmungsmittelpunkten bei Kegelschnitten bereits in der Abhandlung von C. Pelz, Wiener Ber. 1879, zu finden sei, und daß sich auch in der seinigen, in den Prag. Berichten 1894 veröffentlichten Arbeit „Über Krümmungs-Mittelpunkts-Eigenschaften der Kegelschnitte", da ihm zur Zeit die Weilersche Arbeit nicht bekannt war, einige schon von Weiler gegebene Konstruktionen wiederfinden.

Ferner behauptet der Verf., daß alle Konstruktionen von Krümmungshalbmessern der Kegelschnitte Korollarien eines Steinerschen Satzes sind, wie er dies teilweise in seiner erwähnten Arbeit 1894 nachgewiesen.

Der Verf. führt nun einen Satz ein, den er in seiner Arbeit 1894 aus jenem Steinerschen abgeleitet hat, und entwickelt in der Folge fünf weitere Sätze, welche ihn zur Lösung der oben angeführten Aufgabe bringen. Von diesen Sätzen sei der folgende angeführt: „Wenn von drei Kegelschnitten, die einander in einem Punkte P berühren, der eine einem Dreieck umbeschrieben, der zweite demselben einbeschrieben, während der dritte zu ihm konjugiert ist, dann liegt für den Punkt P der Krümmungsmittelpunkt des letzten Kegelschnittes in bezug auf P symmetrisch zu demjenigen Punkte, welcher die Entfernung der Krümmungsmittelpunkte für die beiden ersten Kegelschnitte halbiert". Diese Betrachtungen führen den Verf. schließlich noch zu der Lösung der folgenden zwei Aufgaben: „Ein Kegelschnitt ist durch vier Tangenten und den Berührungspunkt einer von ihnen gegeben; es sind die Achsen desselben zu konstruieren." „Von einem Kegelschnitte sind zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten P, P' und der zu P gehörige Krümmungsmittelpunkt K gegeben; es ist der zu P' gehörige Krümmungsmittelpunkt K' zu konstruieren". Sda.

G. Fontené. Correspondances sur coniques; extension des polygones de Poncelet. Revue de Math. spéc. **12**, 545-552.

Drei Kegelschnitte S_1', S_2, S_3' seien einem Vierseit eingeschrieben. Man ordne jedem Punkte A' von S_1' einen Punkt C' von S_3' durch die Bedingung zu, daß die Gerade $A'C'$ S_2 berühre. Die dadurch zwischen den Punkten von S_1' und S_3' hergestellte Beziehung zerfällt in zwei doppelt quadratische Korrespondenzen. Jede Tangente b von S_2 ergibt nämlich auf S_1' zwei Punkte $\pm A'$ und auf S_3' zwei Punkte $\pm C'$, und die eine der beiden Korrespondenzen verbindet die Punkte mit gleichem Vorzeichen, die andere diejenigen mit entgegengesetztem Vorzeichen. Dieser Beziehung steht die folgende dual gegenüber: Drei Kegelschnitte S_1', S_2'', S_3' haben vier Punkte gemein. Man ordnet jeder Tangente a' von S_1' eine Tangente c' von S_3' durch die Bedingung zu, daß der Schnittpunkt (a', c') auf S_2' liege. Diese Korrespondenz zerfällt auch in zwei doppelt quadratische Korrespondenzen.

Es sei nun eine Kette von $2n$ Kegelschnitten

$$S_1' \, S_2 \, S_3' \, S_4 \ldots S_{2n-1}' \, S_{2n}$$

gegeben, die einem und demselben Dreieck konjugiert und so beschaffen sind, daß jeder Kegelschnitt von geradem Index die vier gemeinsamen Tangenten der Nachbarkegelschnitte berührt und jeder Kegelschnitt von ungeradem Index durch die vier gemeinsamen Punkte der Nachbarkurven geht. Die Aufgabe, ein n-Eck $A'_1 a_2 A'_3 a_4 \dots A'_{2n-1} a_{2n}$ zu bestimmen, dessen Ecken A' auf den Kegelschnitten S' liegen und dessen Seiten a die Kegelschnitte S berühren, hat, wie mit Hülfe der oben genannten Korrespondenzen ermittelt wird, im allgemeinen vier Lösungen. Unter einer einzigen Bedingung (Nouv. Ann. 1897, 449) wird die Aufgabe unbestimmt, sodaß man ein bewegliches Polygon erhält, dessen Ecken die Kurven S' beschreiben, während die Seiten auf den Kurven S rollen. Diese Tatsache wird hier nur für den Fall eines Dreiecks verifiziert. Nimmt man A' auf S'_1 beliebig an, so ergeben sich vier Arten von Dreiecken.

Läßt man S'_2 und S'_3 in einen Kegelschnitt S' zusammenfallen, so fallen auch S_1 und S_2 in eine Kurve S zusammen. Man kann dann die Aufgabe stellen: Wenn die Ecken B' und C' eines veränderlichen Dreiecks $A'B'C'$ einen Kegelschnitt S' beschreiben und die Seiten c und b an einem Kegelschnitte S rollen, während A' einen Kegelschnitt S'_1 durchläuft, der zu der durch S' und S bestimmten Schar gehört, so soll die Enveloppe der Seite a gefunden werden. Die Auflösung ergibt ein Paar von Kegelschnitten, welche durch die gemeinsamen Punkte von S' und S gehen. Zch.

G. Fontené. Démonstration pour les polygones de Poncelet. Revue de Math. spéc. 18, 57.

Das Problem, ein n-Eck zu finden, das einem Kegelschnitt S umbeschrieben und einem zweiten Kegelschnitt S' eingeschrieben ist, ist im allgemeinen unlösbar. Der Ort der letzten Ecke eines n-Ecks, das dem Kegelschnitt S umgeschrieben ist, und dessen übrige Ecken einen Kegelschnitt S' beschreiben, ist im allgemeinen ein von S' verschiedener Kegelschnitt S''. Die obige Aufgabe aber wird unbestimmt, sobald S'' mit S' identisch ist. Dazu genügt es, daß die Aufgabe überhaupt eine Lösung habe. Der Beweis wird mittels einer speziellen Annahme über die Lage der Ecken des Polygons geführt. Zch.

C. Grolleau. Note de géométrie sur le problème du Concours général de Mathématiques spéciales en 1896. Revue de Math. spéc. 12, 377-378.

Folgender Satz soll rein geometrisch bewiesen werden:

Ist ABC das gemeinsame Poldreieck zweier Kegelschnitte E und S und PQR ein Dreieck, das dem einen Kegelschnitt ein- und dem andern umgeschrieben ist, so liegen A, B, C, P, Q, R auf einem und demselben Kegelschnitte. Zch.

W. R. Ransom. A mechanical construction of confocal conics. Annals of Math. (2) 3, 164.

E. V. Huntington. Communication concerning Mr. Ransom's mechanical construction of conics. Annals of Math. (2) 4, 50.

Ransom führt um drei in den Brennpunkten und dem Mittelpunkte der konfokalen Kegelschnitte angeordnete Stifte einen nicht geschlossenen Faden, dessen Enden neben einander über den Rand des Zeichenbrettes herabhängen und erhält die bekannte Fadenkonstruktion der Ellipse oder eine analoge der Hyperbel, jenachdem die Fadenenden fest oder lose gehalten werden. — Hungtington teilt hierzu eine Bemerkung eines seiner Hörer (B. M. Kimball) mit, nach welcher vermöge einer unsymmetrischen Fadenführung der mittlere Stift wegfallen kann. Schg.

C. Servais. Sur les faisceaux de coniques. Mathesis (3) 2, Suppl. 2, 1-10.

Aus „Le matematiche pure ed applicate" 1. Bestimmung der gemeinschaftlichen reellen oder imaginären Elemente zweier Kegelschnitte, ohne Zurückgreifen auf das Prinzip der Kontinuität, durch alleinige Benutzung der Theorie des Imaginären bei von Staudt und der reellen Projektivität. Mn. (Lp.)

C. Rodenberg. Über die Schnittpunkte einer Ellipse mit einer ihr koaxialen Ellipse oder Hyperbel. Zeitschr. für Math. u. Phys. 47, 199-200.

Zur konstruktiven Lösung der Aufgabe wird die Ellipse durch affine Transformation in einen dem bleibenden Kegelschnitt konzentrischen Kreis übergeführt. Die Schnittpunkte der reduzierten Kurven ergeben sich durch Bestimmung der zugehörigen Brennstrahlen. Hk.

Ed. Weyr. Zum Normalenproblem der Ellipse. Prag. Berichte 1902, No. 29, 6 S.

Der Verf. behandelt das Problem, ausgehend von der von Steiner herrührenden Bemerkung, daß die Fußpunkte der von einem Punkte p ihrer Ebene auf eine Kurve gefällten Normalen sich auf derjenigen Kurve befinden, in welche die gegebene durch eine unendlich kleine Drehung um p übergeht. Der Verf. gelangt auf diese Weise zu der bekannten Apollonischen Hyperbel, deren Schnittpunkte mit der Ellipse die Fußpunkte der gewünschten Normalen liefern, und zu zwei Parabeln, deren Achsen resp. parallel sind zu den gleichen konjugierten Durchmessern der Ellipse. Diese beiden Durchmesser erkennt der Verf. auch als geometrischen Ort jener Punkte p, für welche diese Aufgabe in quadratische Aufgaben zerfällt, wie dies seinerzeit von Pelz gezeigt wurde.

Unter den Autoren, welche sich um die Lösung des Normalenproblems der Ellipse verdient gemacht haben, sei noch der Name Solin erwähnt, welcher bereits im Jahrgange 1886 des Časopis die direkte konstruktive Auffindung der Fußpunkte der Normalen in elementarer Weise zu Wege brachte. Sda.

L. P. da Motta Pegado. A proposito da uma nota do curso de geometria de Escuela Polytechnica. Lisboa J. (2) **6**.

Dieser Artikel bezieht sich auf eine Stelle in dem Curso de geometria des Verf., über den in F. d. M. **31**, 514, 1900 berichtet ist. Die Bemerkungen betreffen den Beweis einiger Lehrsätze über die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte, insbesondere eines Kegelschnitts und eines Kreises. Tx. (Lp.)

F. J. Studnička. Über die charakteristischen Eigenschaften der sogenannten gleichseitigen Ellipse. Prag. Berichte 1902, No. 23, 4 S.

Unter einer gleichseitigen Ellipse versteht der Verf. jene, für welche $c = b$ besteht, und somit das rechtwinklige Dreieck, dessen rechter Winkel in den Mittelpunkt der Kurve und die Enden der Hypotenuse in den Scheitel der Nebenachse und in den einen der Brennpunkte zu liegen kommen, ein gleichkathetiges wird, analog wie dies bei der gleichseitigen Hyperbel der Fall ist. Sda.

C. Wolletz. Die Parabel als Tangentengebilde. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **33**, 33-46.

Bekanntlich geht jeder Umkreis eines Tangentendreiecks bei der Parabel durch den Brennpunkt. Hält man daher zwei Tangenten fest und konstruiert die Umkreise aller Dreiecke, welche eine variable dritte Tangente mit den beiden festen Tangenten bildet, so erhält man den Kreisbüschel mit dem Schnittpunkte der beiden festen Tangenten und dem Brennpunkte als Basispunkten. Dies ist der Ausgangspunkt des Verf. bei seinen Betrachtungen, die auf die Ableitung einer Reihe bekannter Sätze und Konstruktionen bei der Parabel mit Hülfe der elementaren Geometrie abzielen. Lp.

G. Halley des Fontaines. Sur les cubiques planes. Nouv. Ann. (4) **2**, 132-136.

Eine Kurve dritter Ordnung kann auf unendlich viele Arten erzeugt werden als Ort der Berührungspunkte der Tangenten von einem seiner Punkte ω an die Kegelschnitte des Büschels durch vier seiner Punkte. Die Tangenten in letzteren an die C^3 gehen durch den Punkt ω. Auf Grund eines Satzes von d'Ocagne bestimmt der Verf. die Tangenten an

C^3 in zwei mit ω in gerader Linie liegenden Punkten und zeigt, daß deren Schnittpunkt eine Unikursalkurve vierter Ordnung erzeugt. Wö.

A. SAUVE. Descrizione delle curve con legge derivativa. Rom. Acc. P. d. N. L. Atti 55, 19-39.

Sind $m+n$ gleichartige Gruppen von Elementen vorgelegt, z. B. jede Gruppe bestehend aus h Punkten und k Geraden, und lassen sich nach einem und demselben Gesetze aus irgend welchen m dieser Gruppen die übrigen n ableiten, so spricht der Verf. von einem zwischen diesen Gruppen bestehenden Reziprozitätsgesetz. Liegen alsdann $m+1$ solcher Gruppen vor, so kann man zunächst aus je m unter diesen nach dem vorgeschriebenen Gesetze n weitere ableiten und erhält so zunächst mn neue Gruppen. Indem man denselben Prozeß auf je m der schon vorhandenen Gruppen anwendet, gelangt man im allgemeinen zu ∞ Gruppen. Diese allgemeinen Überlegungen können in vielen Fällen zur Konstruktion von Kurven verwertet werden, wie der Verf. an einer Reihe interessanter Beispiele nachweist, von denen einige hier erwähnt werden mögen. So besteht zwischen den Ecken und dem Höhenpunkt eines Dreiecks ein Reziprozitätsgesetz, wonach jeder der vier Punkte auf dieselbe Weise durch die drei übrigen bestimmt ist. Hier ist $m=3, n=1$, und wenn man, von vier beliebig gegebenen Anfangspunkten ausgehend, aus je drei schon konstruierten Punkten den jedesmaligen vierten ermittelt, so erhält man die Punkte einer gleichseitigen Hyperbel. Ebenso besteht ein Reziprozitätsgesetz $(m=2, n=1)$ zwischen den drei Gruppen, deren jede aus einer Dreiecksseite und dem zugehörigen Mittelpunkte oder auch aus einer Dreiecksecke und der zugehörigen Höhe besteht. Hier wird man von drei beliebigen Gruppen, jede bestehend aus einem Punkt und einer durch ihn gehenden Geraden, ausgehen. In beiden angeführten Fällen liefern die Punkte, zu denen man gelangt, einen Kegelschnitt, die Geraden die Tangenten einer Kurve dritter Ordnung. — In dieselbe Kategorie von Konstruktionen gehört auch die bekannte Schroetersche einer Kurve dritter Ordnung aus drei Paaren konjugierter Punkte. — Diese Beispiele mögen genügen, den Inhalt der Arbeit zu kennzeichnen. Stz.

A. SAUVE. Due proprietà di 9 punti presi ad arbitrario sopra una conica. Rom. Acc. P. d. N. L. Atti 55, 105-110.

Nimmt man auf einem Kegelschnitt sechs Punkte an A, B, C, A', B', C', so sind bekanntlich die Seiten der Dreiecke ABC, $A'B'C'$ Tangenten eines Kegelschnittes. Derselbe sei durch $[ABC, A'B'C']$ bezeichnet. Sind jetzt $A, B, C, A', B', C', A'', B'', C''$ neun beliebige Punkte eines Kegelschnittes, so gelten, wie der Verf. nachweist, die beiden Sätze:

1. Die drei Kegelschnitte

$$[ABC,\ A'B'C'],\ [A'B'C',\ A''B''C''],\ [A''B''C'',\ ABC]$$

haben eine gemeinsame Tangente.

2. Die drei Kegelschnitte

$$[AB'B'', A'A''B], \ [CA'A'', C'C''A], \ [BC'C'', B'B''C]$$

haben drei gemeinsame Tangenten. Stz.

J. THOMAE. Projektiver Beweis einiger elementaren Sätze aus der Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung. Leipz. Ber. 54, 125-135.

Synthetischer Beweis u. a. des Satzes, daß, wenn vier beliebige Punkte O, P, Q, R einer ebenen kubischen Kurve γ^3 die Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels sind, die Kegelschnitte dieses Büschels γ^3 in Punktepaaren schneiden, die auf den Strahlen eines zum Kegelschnittbüschel projektiven Strahlenbüschels (S) liegen, sobald jedem Element des einen Büschels der durch ihn bestimmte Strahl des anderen Büschels zugewiesen wird. Den ersten synthetischen Beweis dieses Satzes hat wohl Reye in der ersten Auflage seiner Geometrie der Lage gegeben. Ein Beweis für die Invarianz des Doppelverhältnisses der vier von einem Punkte von γ^3 an sie gezogenen Tangenten und eine kritische Besprechung der bisherigen Nachweise dieser bemerkenswerten Eigenschaft der Kurve schließt die Abhandlung. Js.

D. N. LEHMER. Constructive theory of the unicursal cubic by synthetic methods. American M. S. Trans. 3, 372-376.

Einfache, meist bekannte, sich auf ebene rationale kubische Kurven beziehende Konstruktionen werden aus ihrer Erzeugung durch einen Strahlenbüschel erster Ordnung und einen zu ihm projektiven Strahlenbüschel zweiter Ordnung hergeleitet. Js.

J. NEUBERG. Sur les quadrangles et les quadrilatères paralogiques. Mathesis (3) 2, 153-158.

Es seien 1, 2, 3, 1′, 2′, 3′ die Punkte, in denen eine Transversale u die Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks und die drei Vektoren AD, BD, CD trifft. Wenn die Seiten $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ eines zweiten Dreiecks bezw. durch die Punkte 1′, 2′, 3′ gehen, so laufen die Geraden $A'1$, $B'2$, $C'3$ durch einen und denselben Punkt D'. Die Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ heißen „paralogisch“, und u ist die „Achse“ der Paralogie. Die Theorie dieser Vierecke berührt sich mit der Theorie der kubischen Kurven nach der Erzeugungsart von Graßmann. Mn. (Lp.)

J. NEUBERG. Sur le complexe de Grassmann. Mathesis (3) 2, 221-225.

Fortsetzung des Artikels über die paralogischen Vierecke. Zahlreiche Eigenschaften eines gewissen Komplexes. Mn. (Lp.)

H. VAN AUBEL. Notes de géométrie. Mathesis (3) 2, 246-250.

J. NEUBERG. Sur quelques particuliers d'un théorème de Grassmann. Mathesis (3) 2, 250-253, 265-266.

Verschiedene Eigenschaften der Kurven dritter Ordnung und dritter Klasse, sowie auch der Kegelschnitte. Mn. (Lp.)

A. M. NESBITT. Question 14927. Ed. Times (2) 2, 25-27.

Eine Kardioide werde als der Ort für die Endpunkte einer Geraden von der Länge $2a$ definiert, die sich so bewegt, daß ihre Mitte einen Kreis vom Durchmesser a beschreibt, während die Gerade beständig durch einen festen Punkt des Kreises geht. Geometrisch zu beweisen: Wenn drei Kreise durch die Spitze einer Kardioide die Kurve berühren, so liegen ihre drei Schnittpunkte in einer Geraden. Lp.

H. M. Sur une application de la théorie des réseaux. Revue de Math. spéc. 12, 499.

Für eine ebene Kurve vierter Ordnung, welche drei Doppelpunkte mit Wendetangenten besitzt, gilt der Satz: Wenn man von einem auf der Kurve liegenden Punkte aus die vier Tangenten zieht, die von der Tangente in dem betrachteten Punkte verschieden sind, so liegen die vier Berührungspunkte in einer geraden Linie. Unter Benutzung einer bekannten quadratischen Verwandtschaft transformiert sich dieser Satz in den folgenden: Konstruiert man diejenigen vier Kegelschnitte, welche durch einen festen Punkt P eines gegebenen Kegelschnitts und durch die Ecken eines Poldreiecks ABC desselben gehen und den Kegelschnitt in einem von P verschiedenen Punkte berühren, so liegen die vier Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte, der dem Dreieck ABC umgeschrieben ist. Dieser transformierte Satz wird mittels eines Kegelschnittnetzes bewiesen. Zch.

J. SOBOTKA. Zur Krümmung der Kegelschnittevoluten und Konstruktion des Kegelschnittes durch fünf benachbarte Punkte einer ebenen Kurve. Prag. Berichte 1902, No. 17, 15 S.

I. Konstruktion von Krümmungsmittelpunkten der Kegelschnittevolute. Ausgehend von der bekannten Konstruktion, die wir Mannheim verdanken, liefert der Verf. eine synthetische Ableitung derselben.

II. Konstruktion von Krümmungsmittelpunkten der Evolute einer Kegelschnittevolute. Auch hier wird von jener Konstruktion ausgegangen, die Mannheim für den Fall der Ellipse mit Hülfe der kinematischen Geometrie geliefert hat; der Verf. entwickelt eine direkte, für sämtliche Kegelschnitte gültige synthetische Lösung des aufgestellten Problems und aus derselben einige bemerkenswerte Beziehungen.

III. Konstruktion des Kegelschnittes durch fünf benachbarte Punkte einer ebenen Kurve. Hierzu bemerkt der Referent, daß eine ähnliche Lösung dieses Problems nebst Lösungen von einer Reihe ähnlicher Probleme bereits im Jahre 1897 von R. Godefroy im Journ. de l'Éc. Polytechn. (2) **2** gegeben wurde. Sda.

R. Blum. Cykloiden und Cykloidalen als Umhüllungskurven und deren Zusammensetzung mit den Fußpunktkurven der Kegelschnitte. Pr. Wilh. Realsch. Stuttgart. 56 S. 4°.

Der Verf. geht von der Definition der Cykloiden und Cykloidalen (Epi- und Hypocykloiden) als Enveloppen einer Geraden aus, welche durch einen auf einem Kreise oder (im Fall der gemeinen Cykloide) einer Geraden sich bewegenden Punkt geht und sich dabei mit einer der Geschwindigkeit des Punktes proportionalen Winkelgeschwindigkeit dreht. Hiernach werden durch elementar-geometrische Betrachtungen die wichtigsten Eigenschaften dieser Kurven, wie ihr Charakter als Rollkurven, die Eigenschaft als Evoluten wieder Cykloidalen zu liefern, entwickelt. Endlich werden auch Scharen von Cykloidalen, welche aus einer durch Rotation um den Mittelpunkt des Bahnkreises hervorgehen, in Betracht gezogen und die Berührungspunktkurven einer solchen Schar, d. h. die Kurven der Berührungspunkte der von einem festen Punkt an die Kurven der Schar gezogenen Tangenten, untersucht. Mit dem Nachweis der Identität dieser Berührungspunktkurven mit den Fußpunktkurven der Kegelschnitte schließt der elementare Teil ab. Es folgt eine analytische Behandlung des Gegenstandes. Stz.

V. Strouhal. Die Lissajousschen Bilder. Časopis **31**, 377-406 (Böhm.).

Versuch einer einheitlichen geometrischen Untersuchung dieser Gebilde, als Kurven einer speziellen Klasse.

Bei dieser Gelegenheit erlaubt sich der Referent, auf einen Mechanismus hinzuweisen, der in der Zeitschrift l'Illustration, 60[e] année (1902) angeführt wurde und eine mechanische Konstruktion dieser Kurven ermöglicht. Sda.

Weitere Literatur.

E. L. Brown. Two notes on the ellipse. Univ. Colorado Studies **1**, 45-48.

H. von Jettmar. Über merkwürdige Punkte und Gerade, welche einem Dreiecke und dem ihm umgeschriebenen, beziehungsweise eingeschriebenen Kegelschnitte zugeordnet sind. Wien. 11 S. 4°.

J. Majcen. Über einige Eigenschaften des Duporcqschen Kegelschnittes. Agram Ak. **149**, 70-88 (Kroatisch).

W. von Miorini. Über eine Erweiterung der Sätze von Pascal und Brianchon. Pr. Wien. 12 S. 8° u. 1 Taf.

J. J. QUINN. A development of the conic sections by kinematic methods. Amer. Math. Monthly 9, 283-285.

C. Besondere räumliche Gebilde.

G. B. MATHEWS. Question 14763. Ed. Times (2) 1, 41-42.

Wenn ein ebener Schnitt eines Kreiskegels orthogonal auf die zur Achse des Kegels senkrechte Ebene durch die Spitze desselben projiziert wird, so ist die Spitze ein Brennpunkt der Projektion. Wenn ferner die Schnitte so gewählt werden, daß die zugehörigen orthogonalen Projektionen konfokal sind, so umhüllen die Ebenen der Schnitte einen parabolischen Zylinder. Lp.

R. GILBERT. Solutions de questions proposées (1927, 1935, 1936). Nouv. Ann. (4) 2, 524-528.

Verf. entwickelt einige Sätze über windschiefe n-Ecke, die zu einer Fläche zweiten Grades konjugiert sind; aus ihnen folgen die drei Lösungen in einheitlicher Weise. R. M.

W. H. BLYTHE. To place „a double six“ in position. Quart. J. 34, 73-74.

Eine Doppelsechs besteht aus zwei Gruppen von sechs geraden Linien, von denen jede Gerade der einen Gruppe fünf der zweiten, aber keine der übrigen Linien schneidet; es werden verschiedene Konstruktionen mit diesen Doppelsechsen angegeben. Sh.

J. THOMAE. Lineare Konstruktion einer Raumkurve dritter Ordnung aus drei Paaren konjugiert imaginärer Punkte. Leipz. Ber. 54, 121-124.

Sind die windschiefen Geraden g_1, g_2, g_3 die Träger elliptischer Punktinvolutionen (g_1), (g_2), (g_3), so gilt der Satz: Projiziert man aus den Punkten z' der Geraden g_1 die Doppelpunkte der drei Involutionen (g_1), (g_2), (g_3) durch Strahlenkegel zweiter Ordnung, so schneidet eine durch g_1 gehende Ebene diese Kegel noch in Strahlen h', die einen zur Punktreihe $g(z', \ldots)$ projektiven Strahlenbüschel zweiter Ordnung bilden. Den Punktepaaren $z'_\lambda, z''_\lambda, \ldots$ einer auf g_1 gelegenen Involution $(g_1)_\lambda$, zu der das Punktepaar P_{11}, P_{13} gehört, entspricht ein von den ihnen entsprechenden Strahlen $h'_\lambda, h''_\lambda, \ldots$ gebildeter involutorischer Strahlenbüschel zweiter Ordnung mit der Involutionsachse h_λ. Eine zweite auf g_1 gelegene, das Punktepaar P_{11}, P_{12} enthaltende Involution $(g_1)_\mu$ bestimmt analog die Involutionsachse h_μ. Der Schnittpunkt (h_λ, h_μ) ist ein Punkt der gesuchten Raumkurve dritter Ordnung. Mit seiner Hülfe lassen sich ihre übrigen reellen Punkte unschwer ermitteln. Js.

G. Majcen. **Über eine einfache konstruktive Ermittlung der cyklischen Ebenen für Kegel und Zylinder.** Arch. der Math. u. Phys. (3) 2, 289-292.

Die Konstruktion der cyklischen Ebenen wird recht anschaulich mit Hülfe der kotierten Projektion durchgeführt, indem bei einem geraden elliptischen Kegel zunächst der durch eine Tangente in einem Nebenscheitelpunkte der Basisellipse gehende Kreisschnitt und diese selbst als zentrisch kollineare Kurven aufgefaßt werden. Als Endergebnis folgt: Trägt man von einem Hauptscheitelpunkte der Basisellipse auf die durch ihn gehende Erzeugende des Kegels die Exzentrizität der Basisellipse auf, so bestimmt ihr Endpunkt mit den beiden Tangenten in den Nebenscheitelpunkten jener Ellipse beide Stellungen der cyklischen Ebenen jenes Kegels. Ein analoger Satz gilt für den Zylinder. Js.

H. S. White. **Note on a twisted curve connected with an involution of pairs of points in a plane.** Annals of Math. (2) 3, 149-153.

Sollen die Zentralprojektionen dreier in einer Ebene beliebig gewählten Punktepaare auf eine Gerade einer quadratischen Involution angehören, so muß das Projektionszentrum einer Bedingung genügen, d. h. auf einer ebenen Kurve liegen. Die analoge Überlegung für Punktepaare im Raume, die auf eine Ebene projiziert werden, führt auf zwei Bedingungen für das Projektionszentrum und auf eine Raumkurve als geometrischen Ort desselben. Diese Erzeugung von Raumkurven wird an zwei Arten der Involution durchgeführt. Die erste wird bestimmt durch zwei Punktepaare, in denen ein Kegelschnitt von zwei Geraden geschnitten wird, die zweite durch fünf harmonisch konjugierte Punktepaare auf den Strahlen eines Büschels in bezug auf ihre Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt. Schg.

C. Rodenberg. **Über die Schnittkurve zweier kongruenten Ringflächen und ihr Zerfallen in Kreise.** Zeitschr. für Math. u. Phys. 47, 196-199.

Verf. gibt einen eleganten Beweis des Satzes, daß eine Ringfläche von einer sie doppelt berührenden Ebene nach zwei Kreisen geschnitten wird: Die Schnittkurve zweier kongruenten Ringflächen mit gemeinsamer Äquatorialebene zerfällt in drei Teile, 1. eine in einer der drei Symmetrieebenen gelegene Kurve vierter Ordnung, 2. den vierfach zählenden imaginären Kugelkreis, 3. eine Restkurve vierter Ordnung. Die letztere ist Basiskurve eines Flächenbüschels zweiter Ordnung, dessen Polartetraeder von den drei Symmetrieebenen und der unendlich fernen Ebene gebildet wird. Da die Schnittpunkte der letzteren mit der Basiskurve auf dem Kugelkreis liegen, so enthält der Büschel eine Kugel mit Mittelpunkt im Schnittpunkt der Symmetrieebenen. Die in Rede stehende Kurve ist demnach ein sphärischer Kegelschnitt, welcher im Falle einer zweimaligen

Berührung der Flächen in zwei Kreise zerfällt. — Schließlich wird noch ein elementarer Beweis des Erkannten nach darstellend-geometrischer Methode gegeben. Hk.

R. Reisenhofer. Die sphärischen Kegelschnitte. Pr. Kremsier. 9 S. 8°.

A. Claeys. Construction du plan tangent à une surface réglée gauche. Mathesis (3) **2**, 193-195.

D. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

P. H. Schoute. Mehrdimensionale Geometrie. I. Teil: Die linearen Räume. Leipzig: G. J. Göschen. VIII u. 295 S. 8° (Sammlung Schubert XXXV).

Der erste Teil der hier angekündigten „Mehrdimensionalen Geometrie" enthält eine auf Euklidischer Grundlage ruhende Bearbeitung der linearen Räume. Bei dieser vom Verf. für den ersten Teil beobachteten Beschränkung genügt es, sich auf eine kurze Angabe des Inhalts zu beschränken. Dieser behandelt folgende Kapitel: Grundbegriffe; Parallelismus; Orthogonalität; Abstand, Projektion und Winkel; Darstellende Geometrie; Analytische Geometrie; Geometrie der Lage; Geometrie der Anzahl; Polygonometrie. Die Hauptsätze der Geometrie der Lage werden wesentlich analytisch mittels der linearen Transformationsformeln abgeleitet. Die Polygonometrie behandelt das vierdimensionale Vierkant und das n-dimensionale n-Kant. Sfs.

P. H. Schoute. Over het verband tusschen de standvlakken van twee door een punt gaande ruimten R_n en incidente ruimte stelsels. Amst. Versl. **11**, 52-56.

Die Arbeit handelt von zwei linearen Räumen n-ter Dimension $R_n^{(1)}$ und $R_n^{(2)}$, welche in einem Raum $2n$-ter Dimension R_{2n} liegen. In ihrem Schnittpunkt bilden sie n im allgemeinen verschiedene Winkel. Dann liegt die unendlich ferne „Gerade" der „Ebene" von jedem dieser Winkel in dem unendlich fernen Raum R_{2n-1} von R_{2n} wieder in vier Räumen R_{n-1}, nämlich in den unendlich fernen Räumen $R_{n-1}^{(1)}$ und $R_{n-1}^{(2)}$ von $R_n^{(1)}$ und $R_n^{(2)}$ und in den dazu senkrecht stehenden $R'^{(1)}_{n-1}$ und $R'^{(2)}_{n-2}$. Steht nun speziell jede Gerade, die auf dreien der $4(n-1)$-dimensionalen Räume senkrecht steht, auch auf der vierten senkrecht, so sind die n Winkel einander gleich, und der geometrische Ort des n-fach unendlichen Systems der unendlich fernen „Geraden" ihrer „Ebenen" ist eine n-dimensionale „Fläche" n-ter Ordnung. Die Fälle $n=2$ und $n=3$ werden besonders untersucht. Wö.

S. L. van Oss. **Vijf rotaties in R_4 in evenwicht.** Amst. Versl. **11**, 424-426.

Die notwendige und hinreichende Bedingung, daß fünf Rotationen im R_n, deren Trägerebenen nicht durch einen Punkt gehen, im Gleichgewicht sind, ist, daß diese Ebenen von drei nicht durch einen Punkt gehenden R_3 nach Strahlen einer linearen Kongruenz geschnitten werden, also assoziiert im Sinne von Segre (Rend. Circ. mat. Palermo **2**) sind.

Wö.

E. Piccioli. **Criterio per riconoscere se siano o no congruenti due figure simmetriche rispetto a un S_k di S_n.** Periodico di Mat. (2) **4**, 313-315.

Beweis des Satzes: Zwei Figuren eines Raumes R_n, die bezüglich eines R_k symmetrisch sind, sind kongruent oder nicht, je nachdem $k + n$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Hieran schließt sich der geometrische Beweis einer Formel der Kombinatorik, wie schon in einer früheren Note des Verf. (F. d. M. **32**, 219, 1901).

Lp.

E. Abzählende Geometrie.

H. Schubert. **Über die Konstantenzahl der n-dimensionalen Verallgemeinerung des Polyeders.** Deutsche Math.-Ver. **11**, 217-223.

Unter der Konstantenzahl c eines n-dimensionalen Gebildes versteht Verf. die Zahl der Bestimmungsstücke, die im allgemeinen ausreicht, um das Gebilde zu bestimmen; z. B. ist die Konstantenzahl eines drei-dimensionalen Polyeders im R_3 gleich der Anzahl der Kanten, vermehrt um die Zahl 6 der Lagekonstanten. Aus den Stringhamschen Sätzen folgt für das n-dimensionale Polyeder

$$c = nz_0 + nz_{n-1} - z_{0,n-1}$$

(z_0: Anzahl der Ecken; z_{n-1}: Anzahl der $(n-1)$-dimensionalen Grenzgebilde; $z_{0,n-1}$: Summe der Eckenanzahlen aller $(n-1)$-dimensionalen Grenzgebilde). Spezielle Beispiele: a) „homogene" Polyeder: 1. Verallgemeinerung des Tetraeders: $c = n(n+1)$. 2. Verallgemeinerung des Hexaeders: $c = 2n^2$. 3. Verallgemeinerung des Oktaeders: $c = 2n^2$. b) Es werden die Konstantenzahlen der regulären Körper des R_4 und c) die Konstantenzahl der Polyederpyramide bestimmt.

D.

G. Z. Giambelli. **Risoluzione del problema degli spazi secanti.** Torino Mem. (2) **52**, 171-211.

In seiner grundlegenden Abhandlung „Lösung der Charakteristiken-Probleme" usw. (F. d. M. **18**, 631, 1886) hat Schubert bewiesen, daß jede algebraische Bedingung, welche einem [s] von [n] auferlegt wird,

durch eine Summe von charakteristischen Bedingungen ausgedrückt werden kann. Daraus folgt die „theoretische Möglichkeit“, das Problem der schneidenden Räume aufzulösen. In einigen besonderen Fällen wurde dieses Problem endgültig durch Schubert selbst gelöst (Math. Ann. **26**; Acta math. **8** und Hamburg. Mitt. 1892; vgl. F. d. M. **17**, 668, 1885; **18**, 632, 1886 und **24**, 628, 1892), ferner durch Castelnuovo (Rom. Acc. L. Rend. (4) **5**; vgl. F. d. M. **21**, 667, 1889) und Pieri (Lomb. Ist. Rend. (2) **26-28**; vgl. F. d. M. **25**, 1038, 1893-94). In diesen Arbeiten werden Methoden gelehrt, das Produkt einer beliebigen Bedingung mit einigen besonderen charakteristischen Bedingungen zu bestimmen; in einer anderen bestimmten dagegen Palatini und Giambelli (Torino Atti **36**; vgl. F. d. M. **32**, 554, 1901) das Produkt zweier charakteristischen Bedingungen in den Fällen, wo es sich um Ebenen handelt. Die Erforschung einer Methode, das Produkt zweier beliebigen Bedingungen zu berechnen, wenn auch sie numerisch gegeben sind, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit. Derselbe wird erreicht durch eine geschickte Anwendung des bekannten symbolischen Kalküls von Schubert und einer ähnlichen vom Verf. ausgebildeten Rechnung. Dadurch werden hier und da einige neue Resultate erhalten und der Zusammenhang aufgedeckt, welcher zwischen der Theorie der symmetrischen Funktionen einer algebraischen Gleichung und dem Problem der schneidenden Räume besteht.

Es verdient bemerkt zu werden, daß aus der vorliegenden Arbeit erhellt, daß sowohl die vornehmsten schon bekannten Formeln, welche dieses Problem betreffen, als auch alle durch den Verf. erhaltenen Resultate von dem Prinzip der Erhaltung der Anzahl ganz unabhängig sind, mit der einzigen Ausnahme der Schubertschen Formel, welche das Produkt einer beliebigen charakteristischen Bedingung mit einer Bedingung von der Dimension Eins ausdrückt. Es wäre sehr wünschenswert, daß sich auch diese Ausnahme beseitigen ließe, da auf solche Weise die wichtigen Giambellischen Untersuchungen von den Einwänden gegen jenes Prinzip vollkommen unberührt bleiben würden. La.

F. Severi. Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio. Torino Mem. (2) **51**, 81-114.

In der vorliegenden Abhandlung hat sich der Verf. die Aufgabe gestellt, für die algebraischen Kurven in einem linearen Raum von r Dimensionen $[r]$ die Fragen zu beantworten, welche analog denjenigen sind, die Cayley in seiner berühmten Arbeit „On skew surfaces otherwise scrolls“ (Phil. Trans. **153**, 1863) und dann Zeuthen (Annali di Mat. (2) **3**, 1869; vgl. F. d. M. **2**, 444, 1869-70), Picquet (S. M. F. Bull. **1**, 1870) und Geiser (Collect. math. 1881; vgl. F. d. M. **13**, 595, 1881) gelöst haben. Das logische Werkzeug, von dem der Verf. vorzüglich Gebrauch macht, ist das Cayley-Brillsche Korrespondenzprinzip bezüglich einer beliebigen algebraischen Kurve, bereichert durch einige nützliche Bemerkungen, welche man als den Ausfluß einer besonderen Anschauung des Prinzips der Er-

haltung der Anzahl ansehen kann, und welche der Verf. in der Einleitung auseinandersetzt.

In dem ersten Teil seiner Arbeit nimmt der Verf. an, daß die betrachteten Kurven die Singularitäten besitzen, welche in den Veroneseschen Formeln erscheinen (vgl. F. d. M. **13**, 485 und 511, 1881). Von jeder betrachtet er daher die Ordnung n, die Klasse m, das Geschlecht p, die $r-2$ Ränge n_i $(i=1,2,\dots,r-2)$, die Zahl d der wirklichen und die Zahl h der scheinbaren Doppelpunkte, die Zahl ϱ der Spitzen und die Zahlen ϱ_i $(i=1,2,\dots,r-1)$ der stationären $[i]$. Die Aufgaben, welche er zuerst löst, sind die folgenden: 1. Ordnung x der Regelfläche, welche aus den Sehnen der Kurve besteht, deren jede in einem der $[r-1]$ liegt, welche die Kurve in einem ihrer Endpunkte berühren:

$$x=2h+m(m-1)\cdot(r-1)n_1-(r-2)\varrho.$$

2. Ordnung y der Regelfläche, welche aus denjenigen Sehnen der Kurve besteht, deren jede in einem der $[n-1]$ liegt, welche die Kurve in einem von den Endpunkten der entsprechenden Sehnen verschiedenen Punkte oskulieren:

$$y=\tfrac{1}{2}\{m(m-1)(n-2r)+2h(m-2r)+r(r-1)n_1+(r-1)(r-2)\varrho\}.$$

3. Zahl der „Hauptsehnen“ der Kurve (bekanntlich ist, nach Bertini, im gewöhnlichen Raum eine Gerade „Hauptsehne“ einer Kurve, wenn sie der Durchschnitt der Oskulationsebenen in ihren Endpunkten ist):

$$\binom{m-r}{2}+\binom{n-3}{2}-p\binom{r+1}{2}-d.$$

4. Besteht eine Korrespondenz T von den Indices (α,β) und der Wertigkeit γ zwischen den Punkten einer Kurve, so ist die Zahl der cyklischen Gruppen von ν Punkten (d. h. solcher Gruppen, daß man durch ν-fache Anwendung von T über einen Punkt der Gruppe zu dem Ausgangspunkte zurückkommt, nachdem man über jeden der anderen durchgegangen ist) gleich

$$\frac{1}{\nu}\left[\{\nu\}-\Sigma\left\{\frac{\nu}{\nu_{i_1}}\right\}+\Sigma\left\{\frac{\nu}{\nu_{i_1}\nu_{i_2}}\right\}-\cdots+(-1)^q\Sigma\left\{\frac{\nu}{\nu_{i_1}\dots\nu_{i_q}}\right\}\right],$$

wo die ν_i die Primzahlen sind, welche Faktoren von ν sind, und im allgemeinen

$$\{q\}=\alpha^q+\beta^q+(-1)^{q+1}2\gamma^q p.$$

Im zweiten Teil beschränkt der Verf. seine Betrachtungen auf die Kurven, welche keinen vielfachen Punkt besitzen, und bestimmt, wenigstens in einigen Fällen, die Zahl $[n,r,k;\ \nu_1,\nu_2,\dots,\nu_t]_p$ der $[k]$, welche mit einer Kurve der Ordnung n und des Geschlechtes p von $[r]$ t Berührungen der Ordnungen $\nu_1-1,\nu_2-1,\dots,\nu_t-1$ haben, vorausgesetzt daß

$$(r-k)\Sigma\nu_i-t=(k+1)(r-k).$$

Der Reihe nach findet er:

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha\,[n, r, r-2;\ \nu_1\,\nu_2]_p = 2\,!\,\nu_1\,\nu_2 \binom{n-r+1}{2} \\ \qquad + \nu_1\,\nu_2\,\{n(r-2) - r(r-1)\}\,p + 8\binom{\nu_1}{2}\binom{\nu_2}{2}\binom{p}{2}, \end{cases}$$

wo $\nu_1 + \nu_2 = r$ und $\alpha = 1$ oder 2 ist, je nachdem ν_1 und ν_2 unter einander verschieden oder gleich sind.

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha\,[n, r, r-3;\ \nu_1, \nu_2, 1]_p = 3\,!\,\nu_1\,\nu_2 \binom{n-r+2}{3} \\ \qquad + \nu_1\,\nu_2\,\{n(n-1)(r-4) - 2n(r-1)(r-3) \\ + r(r-1)(r-2)\}\,p + 4\,\{(n-r+2)\binom{\nu_1}{2}\binom{\nu_2}{2} \\ \qquad - \nu_1\,\nu_2\,(2\,\nu_1\,\nu_2 - r + 2)\}\binom{p}{2}, \end{cases}$$

wo $\nu_1 + \nu_2 = r - 2$; ferner $\alpha = 1$, wenn $\nu_1 \neq \nu_2 \neq 1$; $\alpha = 2$, wenn entweder $\nu_1 = \nu_2$ oder $\nu_1 \neq \nu_2 = 1$; endlich $\alpha = 3$, wenn $\nu_1 = \nu_2 = 1$.

$$(3)\quad \begin{cases} [n, 2r+1, r;\ 2, 1, \ldots, 1]_p \\ = \sum_0 {}_i (-1)^i \frac{(r+1)(r+2) - in}{n-2r-2} \binom{n-r-1-2i}{r+2-2i} \binom{p}{i}, \end{cases}$$

wo hier, wie in den ähnlichen Fällen, die Entwicklung mit den Gliedern endigt, welche $= 0$ sind.

Nachdem der Verf. bewiesen hat, daß die Ordnung z der Mannigfaltigkeit, die aus den $[r]$ besteht, welche eine Kurve der Ordnung n und des Geschlechtes p in $[2r+1]$ in $r+2$ Punkten treffen, durch die Formel

$$z = \sum_0 {}_i (-1)^i \binom{n-r-1-2i}{r+2-2i} \frac{(r+1)(n-2) - in}{n-2r-2} \binom{p}{i}$$

gegeben wird, ist er in der Lage, zu schließen, daß

$$(4)\quad \begin{cases} [n, r, r-2;\ 2, 1, \ldots, 1]_p \\ = 2 \sum_0 {}_i (-1)^i \dfrac{(p+2r-4)\binom{r-i}{2} + i\binom{n-2r+3}{2}}{(r-i)\binom{n-2r+3}{2}} \\ \qquad \times \binom{n-r+1-i}{r-1-i}\binom{n-r-i}{r-1-i}\binom{p}{i}. \end{cases}$$

Im übrigen Teil seiner Abhandlung beschäftigt sich der Verf. ausschließlich mit Gebilden, welche in einem [4] oder [5] enthalten sind.

Vorausgesetzt zuerst, daß der betrachtete Raum ein [4] sei, bestimmt Severi die Ordnungen der Mannigfaltigkeiten, welche die Tan-

gentialebenen oder die Sehnen bilden, die gegebene Bedingungen befriedigen; dann bemerkt er, daß aus seinen eigenen wie aus anderen Untersuchungen die Auflösung aller Fälle des Problems folgt, das in der Bestimmung der Zahlen der Räume besteht, welche vorgeschriebene Berührungen mit einer gegebenen Kurve haben, ebenso auch die Berechnung der Ordnung der Mannigfaltigkeit, welche aus den 5-schneidenden Ebenen der Kurve gebildet wird.

Um die entsprechenden Fragen in einem [5] zu behandeln, erweitert der Verf. die Cayleysche Methode der Funktionalgleichungen; zu diesem Zwecke beweist er den folgenden wichtigen Hülfssatz:

„Wenn eine Funktion φ existiert, welche einer Funktionalgleichung der Form genügt:

$$\varphi(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \ldots, x_n + x'_n) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \varphi(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) + f(x_1 \ldots x_n, x'_1 \ldots x'_n),$$

wo f eine gegebene in Bezug auf die x und x' symmetrische Funktion ist, und die x und x' ganze nicht negative Zahlen bedeuten, so ist sie notwendig von der Form

$$\sum_1^n{}_k c_k x_k + \sum_1^n{}_k \sum_1^{n_k - 1}{}_i f(0, \ldots, 0, 1_k, 0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0, x_k - i\, 0 \ldots 0) + \sum_2^n{}_i f(0, \ldots, 0, x_l, \ldots, x_n; 0, \ldots, 0, x_{i-1}, 0, \ldots, 0),$$

wo die c willkürliche Konstanten sind und das Symbol 1_k bedeutet, daß $x_k = 1$ gesetzt wurde“.

Durch Anwendung dieses Satzes findet der Verf.:

1. die Zahl der [3] von [5], die eine Berührung dritter Ordnung und drei Durchschnitte mit einer Kurve haben;

2. die Ordnung der Mannigfaltigkeit, welche die bitangentialen und sechsschneidenden [3] derselben bilden;

3. welche die Zahl der bitangentialen und bisekanten [3] derselben bilden. Schließlich bemerkt er, daß die Aufgabe, die Zahlen der linearen Räume eines [5] zu bestimmen, welche mit einer Kurve von der Ordnung n und dem Geschlecht p vorausbestimmte Berührungen hat, in allen Fällen schon aufgelöst ist, ebenso auch diejenige, die Ordnung der Mannigfaltigkeit zu finden, welche aus den vierschneidenden [2] oder siebenschneidenden [3] besteht.

Aus dem Vorigen erhellt, daß die Severische Abhandlung wegen der beträchtlichen Zahl und der Allgemeinheit der behandelten Fragen einen bemerkenswerten Beitrag zur abzählenden Geometrie der beliebig ausgedehnten Räume bildet. Daraus rechtfertigt sich die Ausführlichkeit des gegenwärtigen Berichts vollkommen; um so mehr als die erhaltenen Resultate wie auch die angewandten Methoden in Zukunft oft benutzt werden zu sollen scheinen. La.

A. CREPAS. Ricerche sui piani che secano e toccano delle curve algebriche in un iperspazio. Lomb. Ist. Rend. (2) 35, 883-904.

Die im vorliegenden Aufsatze enthaltenen Untersuchungen hängen mit denjenigen von Castelnuovo, Severi und Tanturri zusammen, welche als Zweck die Bestimmung der Zahlen der linearen Räume haben, welche eine oder mehrere gegebene algebraische Kurven schneiden oder berühren, Untersuchungen, über die in den vorigen Bänden der „Fortschritte" berichtet wurde. Der Verf. wendet die Schubertschen Bezeichnungen an; er benutzt ferner die Cayleysche Funktionalgleichungsmethode und die Auflösung der Gleichungen von folgendem Typus

$$\varphi(x_1+x_1', x_2+x_2') = \varphi(x_1, x_2) + \varphi(x_1', x_2') + f(x_1, x_2;\ x_1', x_2'),$$

— wo φ die unbekannte und f eine gegebene Funktion ist —, welche Severi entdeckt hat (s. das vorige Referat), d. h. die Formel

$$\varphi(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + f(0, x_2;\ x_1, 0) + \sum_{i=1}^{i=n_1-1} f(1, 0;\ x_1-1, 0) + \sum_{i=1}^{i=n_2-1} f(0, 1;\ 0, x_2-1),$$

worin c_1 und c_2 Integrationskonstanten bedeuten.

Durch $T_k^n(m, r)$ bezeichnet ferner der Verf. die Zahl der [2] eines Systems $\infty^{k(n-3)}$, welche eine Kurve C_r^m von der Ordnung m und dem Range r k-mal schneiden: der Grund dieser Bezeichnung liegt in der Voraussetzung, welche der Verf. macht, daß jene Zahl nur von den Kurvencharakteren m, r (und den Zahlen k, n) abhängt. Ferner bezeichnet er, wie gewöhnlich, durch $[a_0\, a_1\, a_2]$ das System aller [2] von $[n]$, welche mit einem $[a_0]$ einen [0] und mit einem durch jenen $[a_0]$ gehenden $[a_1]$ einen [1] gemeinschaftlich haben und ferner einem durch $[a_1]$ gehenden und in $[n]$ enthaltenen $[a_2]$ angehören; die Anzahl $(a_0\, a_1\, a_2)$ der Bedingungen, welche einem [2] auferlegt werden, damit er dem System $[a_0\, a_1\, a_2]$ angehöre, wird durch

$$3(n-1) - (a_0 + a_1 + a_2)$$

gegeben.

Alles das vorausgesetzt, findet der Verf. zuerst

$$T_2^n(m, r) = \binom{m}{2}(1, 2, n) + \left(\binom{m}{2} - \frac{r}{2}\right)(0, 3, n),$$

eine allgemeine Formel, von der viele interessante Anwendungen gemacht werden. Durch Benutzung der Formel $r = 2(p+m-1)$ kann man p statt r in $T_k^n(m, r)$, erscheinen lassen; setzt man $T_k^n(m, r) = S_k^n(m, p)$, so gibt die vorige Formel:

$$S_2^n(m, r) = \binom{m}{2}(1, 2, n) + \left(\binom{m-1}{2} - p\right)(0, 3, n),$$

welche auch in der Anwendung sehr nützlich ist.

In bezug auf die Zahl $T_3^n(m, r)$ beweist der Verf., daß

$$T_3^n(m, r) = T_3^5(m, r),$$

d. h.: „wenn $n > 5$ in $[n]$, so ist die Zahl der [2] eines Systems $\infty^{3(n-3)}$, die eine C_r^m dreimal schneiden, von n unabhängig"; daraus fließen zahlreiche Folgerungen, die wir der Kürze wegen übergehen. Die Fälle, wo $n < 5$ ist, sollen direkt behandelt werden; denselben wird der § 2 der vorliegenden Arbeit gewidmet. Hier berechnet der Verf. die Zahl der [2] eines Systems ∞^n, deren jeder zwei gegebene Kurven zweimal schneidet; ferner die Zahlen der [2], welche drei gegebene Kurven zweimal schneiden, oder zwei dreimal schneiden, oder eine sechsmal schneiden; endlich die Ordnung der Mannigfaltigkeit, welche aus den [2] besteht, die eine Kurve zweimal und eine andere dreimal schneiden, oder eine fünfmal schneiden. Der dritte und letzte Paragraph ist den [2] gewidmet, welche Kurven berühren; der Verf. beweist zuerst, daß in $[n]$ die Zahl der [2], welche eine C_r^m berühren und die Bedingung $[0, n-2, n]$ befriedigen, gleich r ist. Dann werden die Zahlen der [2] von $[n]$ berechnet, welche eine C_r^m berühren, dieselbe ein-, zwei- oder dreimal schneiden und eventuell anderen Bedingungen unterworfen sind, oder die Ordnungen der aus ihnen gebildeten Mannigfaltigkeiten.

Wie der Leser leicht einsieht, sind diese Resultate an sich bemerkenswert; wenn auch die angewandten Methoden meistens schon bekannt sind, verdient doch die Arbeit eine ehrenvolle Beachtung. Eins ist zu beklagen, daß das logische Werkzeug, welches der Verf. vornehmlich anwendet, das Prinzip der Erhaltung der Anzahl ist, gegen dessen allgemeine Gültigkeit ernste Einwände neuerdings erhoben wurden. Nur wenn auf diese eine befriedigende Antwort gegeben sein wird, oder wenn bewiesen sein wird, daß jene Einwände die Anwendungen nicht berühren, welche Crepas von jenem Prinzip gemacht hat, so werden die von ihm ausgesprochenen Sätze einen endgültigen Platz in der Wissenschaft erhalten. La.

A. Tanturri. Intorno ad alcune semplici infinità di spazi, e sopra un teorema del Prof. Castelnuovo. Torino Atti **37**, 322-330.

In dem Aufsatze „Una applicazione della geometria enumerativa" (F. d. M. **21**, 674, 1889) hat Castelnuovo den Satz bewiesen: „Die Zahl der $[q-1]$, deren jedes q Erzeugende einer Regelfläche enthält, die von der Ordnung m und dem Geschlecht p ist und einem $[q]$ angehört, ist gleich der Zahl des $[q-2]$, deren jeder q Punkte einer Kurve enthält, welche derselben Ordnung m und desselben Geschlechtes p ist und einem $[q-2]$ angehört; beide Zahlen sind durch

$$\sum_0 {}_i(-1)^i \binom{m-q-2i+1}{q-2i} \binom{p}{i}$$

ausgedrückt." Die Gleichheit der genannten Zahlen war fast durch einen

Zufall entdeckt worden. Nun beweist der Verf. in der vorliegenden Arbeit direkt und allgemeiner: „Ist $h \geqq 0$, $q \geqq 2$, $t = q(h+1)$, so ist die Zahl der $[t-1]$ eines $[t]$, deren jeder $q\,[h+1]$-Erzeugende einer Mannigfaltigkeit enthält, welche der Ordnung m und des Geschlechtes p und Ort von $\infty^1\,[h+1]$ ist, gleich der Zahl der $[t-2]$ eines $[t+q-2]$, deren jeder $q\,[h]$-Erzeugende einer Mannigfaltigkeit enthält, welche derselben Ordnung und desselben Geschlechtes und Ort von $\infty^1\,[h]$ ist." Die erste dieser Zahlen wurde schon durch den Verf. in seinem Aufsatze „Un problema di geometria numerativa" (F. d. M. **31**, 552, 1900) berechnet; daher ist ihr gemeinschaftlicher Wert

$$\sum_0^q i\,(h+1)^i \binom{m-(h+1)(q+p-1)-i}{q-i}\binom{p}{i},$$

in Übereinstimmung mit den Castelnuovoschen Resultaten. So wird auch zugleich ein ausgedehnter Fall des Problems behandelt, die Zahl der Räume zu bestimmen, welche die größte Zahl der erzeugenden Räume einer Mannigfaltigkeit enthalten, die der Ort von ∞^1 linearen Räumen ist.

La.

F. Severi. Sugli spazi plurisecanti di una semplice infinità razionale di spazi. Rom. Acc. L. Rend. (5) **11**$_1$, 52-56.

Ausgangs- und Stützpunkt der vorliegenden Untersuchungen ist eine Formel, welche Segre in seinem Aufsatz „Gli ordini delle varietà che annullano" usw. (vgl. F. d. M. **31**, 550, 1900) aufgestellt hat. Durch Benutzung derselben findet der Verf. in erster Stelle:

„Sind in einem $[d]$ $d-l$ projektive lineare Systeme gegeben, wovon jedes aus $\infty^p\,[d-1]$ besteht, so ist die Zahl der $[l]$, in welchen sich $d-l$ entsprechende $[d-1]$ schneiden und welche einen gegebenen $[\delta]$ nach einem $[\beta]$ schneiden, durch

$$\prod_{i=1}^{i=\delta-\beta} \binom{d+2\beta+i-\delta-l}{d-\delta+\beta-l} : \binom{d-\delta+\beta-l+i-1}{d-\delta+\beta-l}$$

gegeben, vorausgesetzt, daß $p = (\beta+1)(d-\delta-l+\beta)$ sei. Im Falle daß $2\beta+2 \leqq \delta$, wird der vorige Ausdruck

$$\prod_{i=0}^{i=\beta} \binom{d-l+i}{d-\delta+\beta-l} : \binom{d-\delta+\beta-l+i}{d-\delta+\beta-l}\text{"}.$$

Daher schließt der Verf.:

„Ist in einem $[r]$ eine rationale Kurve der Ordnung ν gegeben, so ist die Zahl der $[k]$, deren jeder die Kurve in t Punkten schneidet, gleich

$$\prod_{i=1}^{i=t-k-1} \binom{\nu-t+i}{r-k} : \binom{r-k+i-1}{r-k}\text{"},$$

ein Resultat, welches durch Induktion schon von Fr. Meyer in seinem Buche „Apolarität und rationale Kurven" (Tübingen 1883, S. 363) und

von Tanturri in seinen „Ricerche sugli spazi plurisecanti“ (F. d. M. **31**, 551, 1900) gefunden war.

Durch eine ähnliche Schlußweise bestimmt der Verf. die Zahl der $[k]$, deren jeder die größte Zahl der erzeugenden Räume einer Mannigfaltigkeit ν-ter Ordnung besitzt, die aus einer rationalen Reihe von $\infty^1\,[h]$ von $[r]$ besteht. Setzt man der Kürze halber

$$t=\frac{(k+1)(r-k)}{(h+1)(r-k)-1},$$

so findet man als Ausdruck der genannten Zahl

$$\prod_{i=1}^{i=(h+1)t-(k+1)}\binom{\nu+h-(h+1)t+i}{r-k}:\binom{r-k+i-1}{r-k}.$$

In dem besonderen Falle $k=r-1$ fällt dieser Ausdruck mit einer Formel zusammen, welche Tanturri in seinem Aufsatze „Un problema di geometria numerativa“ (vgl. F. d. M. **31**, 552, 1900) bekannt gemacht hat.

La.

A. Tanturri. In qual modo alcuni numeri, relativi ad infinità ellittiche di spazi, si deducano degli analoghi, relativi ad infinità razionali. Torino Atti **37**, 413-420.

Durch $\Gamma_p^m\,[h+1]$ werde eine Reihe von $\infty^1\,[h]$ bezeichnet, die von der Ordnung m und dem Geschlecht p sei. Sind die Zahlen $h\,(\geqq 0)$, $q\,(\geqq 1)$, $s\,(\geqq 1)$ gegeben, wie viele $[n-s=q\{(h+1)s-1\}-1]$ gibt es, welche sq der $[h]$, die jene Mannigfaltigkeit erzeugen, und einem $[n]$ angehören? Dieses ist die Aufgabe, welche der Verf. sich gestellt hat. Ist $\Psi_p^m\,(h,q,s)$ die gesuchte Zahl, so ist bekanntlich (vergl. das vorige Referat)

$$\Psi_0^m(h,q,s)=\prod_{i=1}^{i=q}\binom{m+h-n+s-i}{s}:\binom{s+q-i}{s};$$

bekannt sind auch die Werte von

$$\Psi_p^m\,(h,1,s),\quad \Psi_p^m\,(h,q,1)$$

(vergl. die vorangehenden Arbeiten des Verf.: „Un problema di geometria numerativa“; vgl. F. d. M. **31**, 552, 1900 und „Intorno ad alcune semplici infinità di spazi; vgl. oben S. 578), wie auch, nach Castelnuovo (s. den Aufsatz: „Una applicazione della geometria enumerativa“, vgl. F. d. M. **21**, 674, 1889), derjenige von

$$\Psi_p^m\,(0,q,2).$$

Ist $p=1$ und $h=0$, so ist das betrachtete Gebilde eine elliptische Kurve; mit Benutzung des Prinzips der Erhaltung der Anzahl ersetzt der Verf. die Kurve durch ein einfaches schiefes m-Eck. So gelangt er zur Gleichung:

$$\Psi_1^m(0, q, s) = \frac{m}{m - sq} \prod_{i=1}^{i=q} \binom{m - n + s - i - 1}{s} : \binom{s + q - i}{s}.$$

Ein ähnlicher Kunstgriff kann für $h > 0$ angewandt werden; in der Tat, handelt es sich um eine $\Gamma_1^m(h, q, s)$, so setze man dafür eine geordnete Reihe von m Büscheln von $[h]$, deren jeder mit dem folgenden und der letzte mit dem ersten einen $[h]$ gemeinschaftlich hat; auf diese Weise erhält Tanturri:

$$\Psi_1^m(h, q, s) = \frac{m}{m - i(h + 1)} \prod_{i=1}^{i=q} \binom{m - n + s - i - 1}{s} : \binom{s + q - i}{s}.$$

La.

P. H. Schoute. Le nombre des points, des droites, des plans etc. contenus dans un hyperespace linéaire. Annuaire des math. 461-464. Vergl. F. d. M. 32, 554, 1901.

Neunter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

Kapitel 1.

Lehrbücher, Koordinaten.

F. KLEIN. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien. Vorlesung, gehalten während des Sommersemesters 1901. Ausgearbeitet von Conr. Müller. Leipzig: B. G. Teubner in Komm. VIII u. 468 S. 4⁰ autogr.

Einleitung. „Durch die neuzeitliche mathematische Literatur geht ein tiefgreifender Zwiespalt, der Ihnen allen entgegengetreten sein muß: die Interessen und Gedankengänge der Theoretiker sind von denjenigen Methoden, deren man sich bei den Anwendungen tatsächlich bedient, außerordentlich verschieden. Hierunter leidet nicht nur die wissenschaftliche Ausbildung des Einzelnen, sondern die Geltung der Wissenschaft selbst. Es scheint außerordentlich wichtig, den hieraus entstehenden Mißständen entgegenzuarbeiten. Die Vorlesung, die ich hier beginne, will einen Beitrag liefern, indem sie darauf ausgeht, die verschiedenen Arten mathematischer Fragestellung, wie sie hier und dort naturgemäß sind, sozusagen vom erkenntnistheoretischen Standpunkt aus, gegen einander in klare Beziehung zu setzen. Sie sollen nach der einen Seite die Interessen der modernen Theoretiker verstehen lernen, nach der anderen Seite aber ein Urteil darüber gewinnen, welche Teile der mathematischen Spekulation für die Anwendungen unmittelbare Bedeutung haben. Ich zweifele nicht, daß Ihnen die Entgegenstellung verschiedener Gesichtspunkte, die solcherweise resultieren wird, interessant und förderlich sein wird; möchte die Vorlesung erreichen, daß die bei Ihnen resultierende Überzeugung sich in die Tat umsetzt, und Sie später wieder an Ihrem Teile beitragen, die arg vereinseitigte Entwicklung unserer Wissenschaft wieder zu einer allseitigen harmonischen zu machen.

Das Programm, das ich hiermit aufstelle, ist allerdings viel zu umfassend, als daß es sich in einem Semester nach allen Seiten hin ent-

wickeln ließe. Ich werde daher wesentlich nur ein Gebiet der Mathematik in den Vordergrund rücken, nämlich die Geometrie. Die Praxis der Geometrie umfaßt das geometrische Zeichnen und das Vermessungswesen, denen nach anderer Seite die von den Griechen begonnene abstrakte Behandlung geometrischer Probleme entgegentritt. Ich werde die auf beiden Seiten in Betracht kommenden Fragen analytisch behandeln. Dies wäre an sich keine Notwendigkeit; man kann auch so vorgehen, daß man nirgends aus dem geometrischen Gebiete als solchem heraustritt. Inzwischen hat sich die Ausbildung der von mir zu besprechenden Fragestellungen wesentlich im Anschluß an die Analysis vollzogen: insbesondere kommt für uns die Entwicklung und Bedeutung der Differential- und Integralrechnung in Betracht. Von hier aus habe ich den Titel der gegenwärtigen Vorlesung gewählt. — In den parallellaufenden Seminarübungen werde ich ausgewählte Kapitel der Geodäsie traktieren, die geeignet scheinen, den mehr allgemein gehaltenen Entwickelungen der Vorlesung als Beispiele rationeller Anwendung an die Seite zu treten."

Inhaltsverzeichnis. I. Von den Funktionen reeller Veränderlicher und ihrer Darstellung im rechtwinkligen Koordinatensystem. 1. Erläuterungen über die einzelne unabhängige Variable x. 2. Funktionen von x. 3. Von der angenäherten Darstellung der Funktionen. 4. Nähere Ausführungen zur trigonometrischen Darstellung der Funktionen. 5. Funktionen zweier Veränderlicher.

II. Freie Geometrie. Präzisionstheoretische Betrachtungen zur ebenen Geometrie. 2. Fortsetzung. 3. Übergang zur praktischen Geometrie: A) Geodäsie. 4. Fortsetzung: B) Zeichnende Geometrie.

III. Anhang: Von der Versinnlichung idealer Gebilde durch Zeichnungen und Modelle.

Schluß: Appell zu immer erneuter Korrektur des traditionellen Wissenschaftsbetriebes durch Naturbeobachtung. „Ich habe in der Vorlesung allerlei vorgetragen, was gewöhnlich nicht in den Lehrbüchern über die behandelten Gegenstände zu finden ist, was aber die Voraussetzung und stillschweigende Annahme der gewöhnlichen Entwickelungen bildet. Ich wollte Sie damit veranlassen, mit freiem Blick und unabhängigem Urteil die Dinge selbst zu erfassen. Denken Sie etwa an das, was ich über die empirische Kurve oder Fläche sagte, und an die konventionelle Beschränkung der Betrachtung auf analytische Gebilde.

Mit der Mathematik ist es wie mit der bildenden Kunst. Es ist nicht nur nützlich, sondern durchaus notwendig, daß man von seinen Vorgängern lernt. Wenn man sich aber ausschließlich auf das Studium des Überkommenen beschränkt, also nur auf dem weiterbaut, was man in den Büchern liest, so entsteht das, was ich als scholastisches System bezeichne. Hiergegen ergeht dann die Mahnung: Zurück zur eigenen lebendigen Auffassung, zurück zur Natur, welche die nächste Lehrmeisterin bleibt!" Lp.

O. Dziobek. Lehrbuch der analytischen Geometrie. Zweiter Teil: Analytische Geometrie des Raumes. Braunschweig: A. Graff. VIII u. 314 S. 8°.

Der erste Teil dieses Lehrbuches hat vielfache Anerkennung gefunden, und seine Vorzüge sind auch in F. d. M. **31**, 555, 1900 gewürdigt worden. Im vorliegenden zweiten Teile sind die Gesichtspunkte und die Darstellung des Verfassers dieselben geblieben. Recht erfreulich ist wiederum die breite Ausführung der Grundlagen (die Figuren könnten freilich gerade hier plastischer sein) und die übersichtliche Anordnung der vom Studierenden häufiger gebrauchten Methoden und Formeln. Die Geometrie der geraden Linie umfaßt allein 48 Seiten; außer den allgemein üblichen Entwicklungen werden hier nämlich die Plückerschen Koordinaten und die Komplexe ersten Grades (Nullsystem) im engen Anschluß an die Mechanik vorgetragen. Die Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades wird durch ein numerisches Beispiel illustriert und durch eine gute Übersicht der möglichen Fälle erleichtert. Die Frage nach den berührenden geraden Kreiskegeln leitet eine ausgedehnte Behandlung der konfokalen Flächen ein. Den Schluß bildet eine kurze Übersicht über die projektiven Erzeugungsweisen der Flächen und Raumkurven.

Referent möchte freilich glauben, daß ein so weites Gebiet ein umfangreicheres Buch erfordert hätte. Darauf mußte der Verfasser wohl aus äußeren Rücksichten verzichten, und man kann sich daher nicht wundern, daß häufig flüchtige und dem Studierenden vielleicht wenig sagende Andeutungen an die Stelle der Ausführung treten mußten, und daß manche Theorie da abgebrochen werden mußte, wo die schönsten Früchte noch zu ernten sind. Möchte das Buch viele Leser finden, die nachher zu höheren Quellen aufsteigen! R. M.

E. Weinnoldt. Leitfaden der analytischen Geometrie. Leipzig: B. G. Teubner. VI u. 80 S. 8°.

Dieser Leitfaden ist auf Veranlassung der kaiserlichen Inspektion des Bildungswesens der Marine verfaßt und den Anforderungen der Seeoffiziersprüfung angepaßt. Er beschränkt sich daher auf die ersten Elemente und ist ungemein klar geschrieben, sodaß er zum Selbststudium empfohlen werden kann. Die Beispiele sind mit großem Geschick dem Gedankenkreis des Seemannes entnommen; so finden wir Temperaturkurve, Deviationskurve, die gleichseitige Hyperbel als Mariottesche Kurve, die Poissonsche Kurve, Besteckrechnung, Geschoßbahn, Scheinwerfer, geographische und geozentrische Breite, Erdbahn, Simpsonsche Regel, geographische und astronomische Kugelkoordinaten usw. behandelt. R. M.

F. Rudio. Die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Zweiter Teil: Die analytische

Geometrie des Raumes. Dritte verbesserte Auflage. Leipzig: B. G. Teubner. X u. 186 S. gr. 8°.

Die vorliegende Auflage des mit Recht beliebten Lehrbuchs behandelt die Theorie der Flächen zweiten Grades etwas ausführlicher als früher; außerdem hat der Verf. eine sorgfältige Durcharbeitung des Textes vorgenommen. Lp.

E. Huebner. Auswahl mathematischer Aufgaben für Prima. Teil I. Pr. Kneiphöfisches Gymn. Königsberg (Ostpr.).

Die vorliegende Auswahl mathematischer Aufgaben ist die erste Hälfte einer Zusammenstellung solcher Aufgaben, die seit 1885 in der Prima des Kneiphöfischen Gymnasiums behandelt worden sind. Sie enthält etwa zu einem Viertel arithmetische Aufgaben und zu drei Vierteln Aufgaben aus der analytischen Geometrie.

Der größere geometrische Teil enthält zunächst Aufgaben über Punkte und gerade Linien, Berechnung von Dreiecken und Vierecken, über den Kreis und die Beziehung eines Kreises zu einer Geraden. Darauf folgen Berechnungen von Parabelsegmenten, Aufgaben über Kreis und Parabel, über die Ellipse und ihre Beziehung zu ein- und umgeschriebenen Figuren. Bei den meisten Aufgaben ist auf eine genaue und erschöpfende Diskussion Wert gelegt. Eine weitere Gruppe von Aufgaben bezieht sich auf die Gestalt der Erde: Die Beziehung zwischen der geographischen und der geozentrischen Breite, die Berechnung des Erdradius für verschiedene geographische Breiten. Die nächsten Aufgaben behandeln die Beziehungen zwischen einer Ellipse und einem Kreise, insbesondere den Oskulationskreis, ferner zwischen einer Ellipse und einer Parabel und zwischen zwei konjugierten Hyperbeln. Sodann folgen Aufgaben über die Gestalt der Schnitte, die in bestimmten Richtungen durch einen geraden Kreiskegel gelegt werden. Darauf wird gezeigt, daß die Bestimmung des Ortes der Mittelpunkte von Berührungskreisen zweier gegebenen Kreise, von denen der eine auch in einen Punkt oder eine Gerade ausarten kann, auf Kegelschnitte führt. Schließlich werden die geometrischen Örter der Punkte untersucht, deren Abstände von zwei festen Punkten (oder von zwei festen Geraden oder von einem festen Punkte und einer festen Geraden) eine gegebene Summe oder Differenz, ein gegebenes Produkt oder Verhältnis oder endlich eine gegebene Summe oder Differenz der Quadrate haben. Zch.

M. Schmidt. Analogien in der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes. Pr. Gymn. Kempten. 50 S. 9 Taf. 8°.

Verf. macht den nicht uninteressanten Versuch, auch für Anfänger in der analytischen Geometrie Ebene und Raum gleichzeitig und analog zu behandeln; freilich kommt er damit bloß bis zu den Rotationsflächen zweiten Grades, und schon die Tangentialebene der Kugel gewinnt er auf anderem Wege als die Tangente des Kreises. R. M.

TH. STEININGER. Studien zu Hesses analytischer Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. Pr. Gymn. Rosenheim. 39 S. 8⁰ (1 Tafel).

E. HUMBERT. Lieux géométriques. Revue de Math. spéc. 12, 401-410.

Die geometrische Bedingung, der die Punkte eines Ortes genügen müssen, wird meistens derartig ausgedrückt, daß der Ort von dem Schnittpunkte zweier nach gegebenen Gesetzen sich bewegenden veränderlichen Kurven beschrieben wird, welche jede einer bestimmten Art von Linien angehören. Der allgemeinste analytische Ausdruck für diese Bedingung ist ein System von zwei Gleichungen, in denen außer den Koordinaten x, y des beweglichen Punktes n Parameter vorkommen, die ihrerseits durch $n - 1$ Gleichungen mit einander verknüpft sind.

An diese allgemeinen Erörterungen schließen sich einige durch Beispiele erläuterte besondere Bemerkungen. Es kann vorkommen, daß nur gewisse Teile des Ortes der rein geometrischen Definition genügen, und daß für andere Teile die geforderten geometrischen Konstruktionen versagen. Die Analysis zeigt, daß in solchen Fällen gewisse Elemente dieser Konstruktionen von einer bestimmten Grenze ab imaginär werden. Die beiden nächsten Bemerkungen beziehen sich auf mehrfache Punkte des Ortes. Ferner wird auf den Fall hingewiesen, daß für gewisse Werte der Parameter die beiden veränderlichen Kurven zusammenfallen können. Diese besonderen Lagen der Kurven bilden dann einen uneigentlichen Teil des wahren Ortes. Endlich kann man bei der Aufstellung der Ortsgleichung zu Linien kommen, die mit der eigentlichen geometrischen Aufgabe gar nichts zu tun haben. Das kann einerseits dadurch geschehen, daß bei der Elimination der Parameter fremde Faktoren in die Resultante eingeführt werden, andererseits dadurch, daß anstelle der ursprünglich geforderten geometrischen Eigenschaft eine andere, umfassendere gesetzt wird, die auch auf andere als die in Rede stehenden geometrischen Elemente paßt. Wenn man z. B. eine Tangente als eine Gerade definiert, die eine Kurve in zwei zusammenfallenden Punkten trifft, so umfaßt diese Definition bei einer Kurve mit Doppelpunkt auch Linien, die die Kurve nicht berühren. Zch.

NEUFER. Elementare ebene Örter. Pr. Realgymn. Ulm. 64 S. 4⁰.

Als Ausgangspunkt und Grundlage der Untersuchungen der vorliegenden Arbeit dient die Begriffsbestimmung des geometrischen Ortes: „Ort eines Punktes ist die Gesamtheit der Lagen, in denen der Punkt bestimmte unveränderliche, aber durch bewegliche Gebilde vermittelte Beziehungen zu gegebenen festen Gebilden hat.“ Aus dieser Definition ergeben sich dreierlei bestimmende Elemente eines Ortes: 1. Feste Elemente, 2. bewegliche Gebilde und 3. unveränderliche Beziehungen. Bei ebenen Örtern sind die beweglichen und die festen Elemente Punkte und Linien.

Die Untersuchungen über Bau und Bildung der Örter ermöglichen eine Klassifizierung der ebenen Örter. Zunächst werden nach der Zahl der bestimmenden festen Elemente Klassen gebildet. Jede Klasse zerfällt dann in mehrere Unterklassen nach der Art der festen Gebilde. Z. B. zerfällt die Klasse III (drei feste Gebilde) in vier Unterklassen, je nachdem die festen Gebilde drei Punkte, oder zwei Punkte und eine Linie, oder ein Punkt und zwei Linien, oder endlich drei Linien sind. Ferner werden in jeder Unterklasse drei Stufen unterschieden. Auf der ersten und zweiten Stufe bestehen die verbindenden Züge nur aus Punkten und Geraden, auf der dritten Stufe kommen auch Kurven zweiter Ordnung vor. Auf der ersten Stufe ist die Zahl der beweglichen Gebilde gleich der Normalzahl, auf der zweiten ist sie größer als diese. Auf jeder Stufe kann man ferner Gruppen von Örtern aufstellen, die gleiche verbindende Gebilde, und innerhalb jeder Gruppe Untergruppen, deren Örter jene Gebilde zu denselben charakteristischen Zügen oder Typen zusammengesetzt enthalten. Innerhalb der Untergruppen kann man endlich noch Örter mit Lagebeziehungen, Örter mit Größenbeziehungen und Örter mit gemischten Beziehungen unterscheiden. Jeder ebene Ort findet in dem Fachwerk dieses Systems seine bestimmte Stelle.

Auf diese einleitenden Betrachtungen folgt nun eine umfangreiche Zusammenstellung von elementaren ebenen Örtern in einheitlich-stufenmäßiger Ordnung. Während die drei ersten Klassen getrennt behandelt werden, sind die Örter der vierten und aller folgenden Klassen in einem einzigen Abschnitt zusammengefaßt. Bei jedem einzelnen Orte ist durch römische Ziffern (I, II) der Grad der Ortskurve angegeben. Als Aufgabensammlung für den Unterricht in der analytischen Geometrie wird diese Zusammenstellung infolge ihrer Reichhaltigkeit und ihrer übersichtlichen Anordnung gute Dienste leisten. Zch.

J. Adamczik. Über Koordinaten-Systeme. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **33**, 246-247.

Befürwortet diejenige Annahme der positiven x- und y-Achse, bei der die x-Achse durch Drehung in der Uhrzeigerbewegung um einen rechten Winkel in die y-Achse übergeführt wird. Die Rücksicht auf die ersten graphischen Darstellungen wird jedoch übersehen. Lp.

C. Cailler. Une leçon de géométrie analytique sur les axes obliques dans l'espace. Ens. math. **4**, 272-283.

Um zu zeigen, daß der Gebrauch schiefwinkliger Koordinaten in der analytischen Geometrie des Raumes durchaus nicht der Eleganz ermangelt und viele Gesichtspunkte bietet, die bei Annahme rechtwinkliger Achsen übersehen werden, gibt der Verf. die Grundformeln nach dem Verfahren, das er bei seinen Vorlesungen an der Genfer Universität innezuhalten pflegt. Lp.

G. Cesàro. Généralisation des formules d'Euler. Liége Mém. (3) 4. 6 S.

Allgemeine Formeln zur Transformation der Koordinaten.

Mn. (Lp.)

G. Loria. Transformations des coordonnées projectives. Ens. math. 4, 323-326.

Die von Laisant in Bd. 3 derselben Zeitschrift behandelte Transformation baryzentrischer Koordinaten ist ein spezieller Fall der Transformation beliebiger projektivischer Koordinaten, welche sich für homogene Koordinaten mittels einer vom Verf. in sehr einfacher Weise abgeleiteten Formelgruppe vollzieht. Schg.

G. Delitala. Su di un sistema di coordinate trilineari. Mat. pure ed. appl. 2, 154-157.

Die in der Überschrift erwähnten Koordinaten, vom Verf. Cevasche Koordinaten genannt, hängen trigonometrisch mit den Winkelkoordinaten zusammen, d. h. mit den drei Winkeln, unter denen die drei Seiten des Fundamentaldreiecks von einem Punkte aus erscheinen. Es werden auch umgekehrt die Winkelkoordinaten durch die Cevaschen Koordinaten berechnet. Anwendung auf den Ptolemäischen Lehrsatz. Lwt.

M. J. van Uven. Su di un sistema particolare di coordinate tangenziali. Mat. pure ed appl. 2, 145-154.

In den Punkten X, Y einer Geraden o errichte man die Lote XX', YY'. Als Koordinaten einer Geraden betrachte man die Abschnitte

$$XG = x,\ YH = y$$

der Geraden auf XX' und YY'. Jede lineare Gleichung zwischen x, y stellt einen bestimmten Punkt des Systems dar. Dem Punkte $Ax + By + C = 0$ des Systems (System II) entspricht die gerade Linie $Ax + By + C = 0$ des Systems I, in dem x, y als rechtwinklige Koordinaten aufgefaßt sind. Bei dieser Zuordnung entsprechen vier harmonischen Strahlen der einen Ebene vier in gerader Linie liegende harmonische Punkte der andern. Das Bild eines Kegelschnitts ist ein Kegelschnitt. Nähere Ausführungen über Art und Lage der Kegelschnitte und über die Kegelschnittsysteme, die Kreisscharen entsprechen, findet man in der Arbeit. Zum Schluß werden Beziehungen zwischen der Evolute einer Ellipse, Hyperbel, Parabel im System II und ihrem Bilde im System I abgeleitet. Lwt.

W. Burnside. On the four rotations which displace one orthogonal system of axes into another. Acta Math. 25, 291-296.

Die von Lipschitz (Acta Math. 24, S. 123) gegebene analytische Behandlung des im Titel genannten Gegenstandes wird durch eine kine-

matische ersetzt, auf Grund eines in Hamiltons „Lectures on Quaternions" (S. 267) enthaltenen Satzes. Schg.

E. Mathy. Distanza dall' origine ad un punto (u, v, w) in coordinate ellittiche. Mat. pure ed appl. 2, 160.

Setzt man die elliptischen Koordinaten eines Punktes im Raume gleich $\wp u, \wp v, \wp w$, so ergibt sich durch einfache Rechnung aus den bekannten Relationen zwischen den elliptischen Koordinaten und den rechtwinkligen Koordinaten x_1, x_2, x_3 die Gleichung:

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \wp u + \wp v + \wp w.$$

Lwt.

M. Bôcher. Some applications of the method of abridged notation. Annals of Math. (2) 3, 45-54.

Wenn Gleichungen von der Form $u = 0$ als Abkürzungen der Gleichungen von geraden Linien in der Normalform gedeutet werden, so ist eine aus solchen Gleichungen abgeleitete Identität der Ausdruck eines Satzes aus der Geometrie der Geraden. Man kann aber dieselben Gleichungen auch als Abkürzungen der Gleichungen von Kreisen, Kugeln, Kurven und Flächen beliebiger Ordnung ansehen und auf demselben Wege wie vorher entsprechende Sätze aus der Geometrie dieser Gebilde erhalten. Diese Methode wird an den Sätzen über die Winkelhalbierenden des Dreiecks, die Diagonalen des vollständigen Vierecks und an dem Satze von Desargues erläutert. Besonders leicht lassen sich auch geeignete Sätze über Kegelschnitte auf Flächen zweiter Ordnung übertragen.

Schg.

J. Sibe. Note sur les invariants ponctuels et tangentiels. Revue de Math. spéc. 12, 425-430, 454-458, 476-479.

Als eine Punktinvariante der sechs Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_6$ einer Ebene wird der Ausdruck

$$\frac{(A_1 A_2 A_5)}{(A_1 A_2 A_6)} : \frac{(A_3 A_4 A_5)}{(A_3 A_4 A_6)} = (A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6)$$

bezeichnet, in welchem $(A_p A_q A_r)$ den Inhalt des Dreiecks $A_p A_q A_r$ bedeutet. Wenn man die Schnittpunkte der Geraden $A_5 A_6$ mit $A_1 A_2$ einerseits und mit $A_3 A_4$ andrerseits P und Q nennt, so ergibt sich $(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6) = (PA_5 : QA_5) : (PA_6 : QA_6)$. Die Punktinvarianten sind also identisch mit den gewöhnlichen Doppelverhältnissen von vier Punkten.

Mit Hülfe von Determinantenumformungen wird nun gezeigt, daß die Punktinvariante der Pole von sechs Geraden einer Ebene in bezug auf einen beliebigen Kegelschnitt von der Wahl dieses Kegelschnitts unabhängig ist, ein Resultat, welches sich ohne jede Rechnung aus der ein-

fachen Bemerkung ableiten läßt, daß die Pole aller Geraden einer Ebene bezüglich zweier Kegelschnitte zwei kollineare Systeme bilden. Jene Punktinvariante der Pole wird als Tangentialinvariante der sechs Geraden bezeichnet. Wie die Punktinvariante durch die homogenen Koordinaten der Punkte, so läßt sich die Tangentialinvariante $(D_1 D_2 D_3 D_4 D_5 D_6)$ durch die Koordinaten der geraden Linien $D_1, D_2, \ldots, D_6$ ausdrücken. Ist a der Schnittpunkt von D_1 und D_2, b derjenige von D_3 und D_4 und O derjenige von D_5 und D_6, so ist $(D_1 D_2 D_3 D_4 D_5 D_6)$ gleich dem Doppelverhältnis der Strahlen Oa, Ob, D_5, D_6.

Wenn $f_1 = 0, f_2 = 0$ und $f_3 = 0$ die Gleichungen von irgend drei Kegelschnitten einer Ebene bedeuten, die nicht einem Büschel angehören, so bestimmen sie ein Kegelschnittnetz $uf_1 + vf_2 + wf_3 = 0$. Bestimmt man nun die Polaren irgend eines Punktes der Ebene in bezug auf sechs Kegelschnitte des Netzes, so zeigt sich die Tangentialinvariante der Polaren unabhängig von der Wahl des Punktes; diese Invariante wird Punktinvariante der sechs Kegelschnitte genannt. Ordnet man jedem Kegelschnitte des Netzes diejenige Gerade $ux + vy + wz = 0$ zu, deren Koordinaten u, v, w mit den Parametern des Kegelschnitts übereinstimmen, so ist die Invariante von irgend sechs Kegelschnitten identisch mit der Invariante der zugeordneten Geraden.

Die Anwendung des Begriffs der Punktinvariante auf räumliche Gebilde ermöglicht der folgende, geometrisch evidente Satz: Werden sechs Strahlen eines Bündels von einer Ebene geschnitten, so ist die Invariante der Schnittpunkte von der Lage der Ebene unabhängig. Sie kann daher als Invariante der sechs Strahlen bezeichnet werden. Auch sie läßt sich leicht als Doppelverhältnis von vier Strahlen eines Büschels deuten. Beachtet man dies, so erscheinen die vom Verf. analytisch bewiesenen Sätze von der Raumkurve dritter Ordnung und vom einschaligen Hyperboloid als einfache Folgerungen aus den bekannten projektivischen Erzeugungen dieser Gebilde.

Der Begriff der Invariante von sechs Ebenen eines Bündels ergibt sich, indem gezeigt wird, daß die Invariante der sechs Geraden, in denen die Ebenen des Bündels von irgend einer andern Ebene geschnitten werden, von der Lage dieser Ebene unabhängig ist. Die Invariante von sechs Flächen zweiter Ordnung, die einem Netze angehören, wird definiert auf Grund des Satzes, daß die Invariante der Polarebenen irgend eines Punktes in bezug auf jene sechs Flächen von der Wahl des Punktes unabhängig ist. Auch dieser Satz ließe sich ohne Rechnung aus der bekannten Tatsache folgern, daß jeder Bündel von Flächen zweiter Ordnung auf den Bündel der Polarebenen irgend eines Punktes projektivisch bezogen werden kann.

Als konjugiert bezüglich einer Raumkurve vierter Ordnung werden zwei solche Punkte bezeichnet, die in bezug auf den durch die Kurve gehenden Büschel von Flächen zweiter Ordnung konjugiert sind. Es ergibt sich dann ohne weiteres: Die Polare eines Punktes in bezug auf eine Raumkurve vierter Ordnung ist eine Gerade. Wenn ein Punkt eine Gerade durchläuft, so beschreibt seine Polare eine Fläche zweiter Ordnung. Den

Strahlen eines Bündels entsprechen bezüglich der Raumkurve vierter Ordnung alle Flächen zweiter Ordnung eines Netzes, und die Invariante von sechs Flächen des Netzes ist gleich der Invariante der sechs entsprechenden Strahlen des Bündels. Zch.

P. F. Smith. On Sophus Lie's representation of imaginaries in plane geometry. Annals of Math. (2) 3, 165-179.

In dieser Arbeit werden die wesentlichsten Resultate der Lieschen Darstellung des Imaginären (1869) unter Berücksichtigung der v. Staudtschen Behandlung desselben Gegenstandes in teilweise neuer Form dargestellt. Dabei werden die Vorzüge beider Theorien gegen einander abgewogen. Die Darstellung des Imaginären wird zuerst in projektivischer Form definiert, und hieraus wird die von Lie analytisch begründete Darstellung als spezieller metrischer Fall abgeleitet. Als imaginäre Elemente im Raume treten ebenso in Übereinstimmung mit v. Staudts System, wie nach den Anforderungen der Gleichungen mit komplexen Koeffizienten, folgende Gebilde auf: Der imaginäre Punkt auf der reellen Geraden, die imaginäre Ebene mit einer reellen Geraden, die imaginäre Gerade erster oder zweiter Art, jenachdem sie gleichzeitig einen reellen Punkt enthält und in einer reellen Ebene liegt oder nicht. Der Verf. leitet dann aus der Lieschen Darstellung eine Punkt-Linientransformation des Raumes ab, die einer Korrelation in der Ebene entspricht, gelangt zu der durch zwei bilineare Gleichungen definierten Dualität zweier Räume und erörtert zuletzt das Verhältnis der vorgetragenen Theorie zur allgemeinen Punkt-Linientransformation. Schg.

A. Thue. Om en pseudomekanisk methode i geometrien. Christiania. Vidensk. Forh. 1902, No. 4, 112 S.

In der vorliegenden Abhandlung entwickelt der Verf. eine Vektoren-Theorie für Flächen konstanter Krümmung. Er zeigt, wie man mittels eines Theorems, analog dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, die ersten Fundamentalsätze der absoluten Geometrie ableiten kann. Ferner zeigt er, wie man durch spezielle Betrachtungen oben genannter Art eine Reihe Sätze descriptiver Natur beweisen kann. Als Beispiel können wir seine Vektorenbeweise erwähnen dafür, daß der Pascalsche Satz auch für geodätische Ellipsen und Hyperbeln auf Flächen konstanter Krümmung ausgedehnt werden kann; wie auch sein Beweis des folgenden Theorems: Es seien auf einer Fläche konstanter Krümmung L, L_0, L_1 drei gegebene geodätische Linien durch denselben Punkt A, B und C zwei von A verschiedene beliebig gegebene Punkte auf L. Ferner sei D ein gegebener Punkt auf der Fläche und G eine variable geodätische Linie durch D. Schneidet nun G die Linien L_0 und L_1 respektive in den Punkten E und F, so ist der geometrische Ort für den Schnittpunkt P zwischen den geodätischen Linien BE und CF wieder eine geodätische Linie.

Ferner findet man auch eine Ausdehnung des Satzes der Poncelet-schen Polygone für Flächen konstanter Krümmung und weiter eine Reihe räumlicher Sätze, von welchen wir den folgenden erwähnen: Hat man aus jedem von fünf beliebig gegebenen Punkten a, b, c, d, e auf einer Fläche zweiten Grades gerade Linien nach fünf anderen beliebigen Punkten A, B, C, D, E auf der Fläche gezogen, so kann man in jede von diesen 25 Verbindungslinien eine solche Kraft legen, daß die fünf Kräfte, die auf diese Weise jedem der zehn Punkte entsprechen, sich Gleichgewicht halten. Gbg.

E. Carvallo. Conférence sur les notions de calcul géométrique utilisées en mécanique et en physique. Nouv. Ann. (4) 2, 433-442.

Die neuere mathematische Physik, speziell die Maxwellsche Elektrizitätslehre, operiert mit den Begriffen des Vektors und der aus zwei oder drei Faktoren bestehenden Vektorprodukte. Der Verf. zeigt nun, wie die Graßmannschen Bezeichnungen ausreichen, um diese Produkte und die ihnen entsprechenden fundamentalen Begriffe und Beziehungen der mathematischen Physik mit aller Schärfe und unvergleichlich einfacher darzustellen, als es mit Hülfe der von Maxwell gewählten Bezeichnungen der Quaternionenlehre geschieht. Durch einfache Formeln vollzieht sich auch in jedem Stadium der Rechnung der etwa gewünschte Übergang zu rechtwinkligen Koordinaten. Die Vereinfachung erstreckt sich auch auf die Formeln der Differentialgeometrie. Schg.

E. Correale. Alcune proprietà relative a sistemi equivalenti di vettori. Batt. G. 40, 281-296.

Einer von Appell in seinem Werke „Traité de Mécanique rationnelle T. I" gegebenen Anregung folgend, untersucht der Verf. ein System S_1 von Vektoren $(P_1, \ldots, P_n)$, dessen resultierendes Moment in bezug auf drei Punkte O_1, O_2, O_3 gleich Null ist. Es besteht zunächst eine einfache Beziehung zwischen den Vektoren $P_1, P_2, \ldots$ und den Momenten M_1, $M_2, \ldots$ eines zweiten Systems S in bezug auf die Achsen $P_1, P_2, \ldots$. Das System S_1 kann auf drei Vektoren R_1, R_2, R_3 reduziert werden, welche durch die Punkte O_1, O_2, O_3 gehen, und diese Vektoren wieder auf zwei andere, wenn dieselben gewisse Bedingungen erfüllen. Die Punkte O_1, O_2, O_3 können zusammen mit einem beliebigen Punkte S als Ecken eines Tetraeders betrachtet werden, und es kann jeder der drei Vektoren R_1, R_2, R_3 in drei Vektoren zerlegt werden längs der drei Kanten des Tetraeders, welche von dem auf ihm liegenden Punkte O ausgehen. So entsteht ein äquivalentes System von sechs längs der Kanten des Tetraeders angeordneten Vektoren. Zwischen der Invariante dieses Systems und dem Volumen des Tetraeders besteht ein einfacher Zusammenhang. — Die Auffassung des Kräftepaares als spezieller Fall eines Vektorensystems und einer Torsion als System von drei Vektoren führt zu weiteren Ergebnissen über die Äquivalenz einer Gruppe von

Torsionen mit einem Systeme von Vektoren. Schließlich wird der geometrische Ort gewisser mit der Zusammensetzung zweier Torsionen zusammenhängender Geraden bestimmt und die Differentialgleichung derjenigen Gruppe von Raumkurven aufgestellt, deren Tangenten Gerade mit verschwindendem Momente sind. Schg.

A. C. Dixon. On the geometrical interpretation of a quaternion. Quart. J. 33, 271-273.

In der Form $(\beta \cdot OB):(\alpha \cdot OA)$ kann eine Quaternion als Operation gedeutet werden, welche einen Kugelradius OA nach OB dreht und gleichzeitig die Länge α einer auf OA liegenden Strecke in β verwandelt. In der Form $x + i\lambda + j\mu + k\nu$ wird sie durch eine gewisse Matrix dargestellt, die mit ihr dasselbe Multiplikationsgesetz besitzt. In der Form einer anderen Matrix stellt sie eine Transformation im R_4 dar, die aus einer Streckung und zwei Rotationen um denselben Winkel zusammengesetzt ist. Schg.

A. S. Hathaway. Quaternion space. American M. S. Trans. 3, 46-59.

Die geometrischen Anwendungen der Quaternionenrechnung erhält Stringham durch Deutung der Quaternionen-Gleichungen, während der Verf. mehr synthetisch die Quaternionensymbole selbst zu interpretieren sucht. Von Cliffords Standpunkte weicht er darin ab, daß er von der Regel, die Produktsymbole als Operationen, statt als konkrete Größen aufzufassen, nicht, wie Clifford, eine einzige, sondern mehrere Ausnahmen zuläßt. Hierdurch erübrigt sich die Notwendigkeit, zwei Arten von Quaternionen-Systemen aufzustellen. Im übrigen unterscheiden sich die vom Verf. schon früher aufgestellten Begriffe nur in der Benennung von denen Cliffords. Auf diese Vorbemerkungen folgt eine kurze Übersicht über die Grundbegriffe der Geometrie des R_n, wobei die hyperkomplexen Zahlen synthetisch als konkrete Elemente gedeutet werden, die den geometrischen Elementen entsprechen. Speziell kommt dabei ein genaues Entsprechen zwischen der Hypersphäre und dem euklidischen Raume zum Ausdruck. In dem Hauptteile der Arbeit kommen zur Sprache: rechts- und linksseitige Drehungen, die Doppeldrehung um zwei Achsen, Winkel zwischen Ebenen, orthogonale Projektion eines Flächenstücks usw. Zahlreiche Hinweise auf die von Stringham und Clifford gebrauchten Benennungen und Anwendungen der gefundenen Resultate auf die Geometrie der Hypersphäre zeigen die Übereinstimmung der vom Verf. mit den von den anderen Autoren gefundenen Resultaten. Schg.

Weitere Literatur.

A. Clebsch. Leçons sur la géométrie, recueillies et complétées par F. Lindemann et traduites par A. Benoist. (En 3 volumes.) Vol. 1: Traité des sections coniques et introduction à la théorie des formes algébriques. Nouveau tirage. Paris: Gauthier-Villars. 8° (1903).

E. DESSENON. Éléments de géométrie analytique, à l'usage des candidats à l'École centrale et des élèves de première année de la classe de mathématiques spéciales. 3e édition. Paris: Hachette. 523 S. 8°.

J. VON EYSANCK. Einige Aufgaben aus der analytischen Geometrie. Pr. Wien. 25 S. 8°.

R. GEIGENMÜLLER. Leitfaden und Aufgabensammlung zur höheren Mathematik. Für technische Lehranstalten und den Selbstunterricht bearbeitet. 1. Band: Die analytische Geometrie der Ebene und die algebraische Analysis. 6. Auflage. Mittweida: Polytechn. Buchhandlung. VII u. 302 S. gr. 8°.

J. H. GRACE and F. ROSENBERG. The elements of coordinate geometry. Part 2: The conics. Second edition. London: Clive. 338 S. 8°.

E. D'OVIDIO. Geometria analitica. Terza edizione riveduta e corretta. Torino: Bocca. XV + 520 S. 8° (1903).

J. PETERSEN. Analytisk plangeometri. 4te udgave. Del I. Kjöbenhavn. S. 1-96. 8°.

G. SALMON. Trattato analitico delle sezioni coniche, contenente un cenno dei più importanti metodi moderni algebrici e geometrici. Versione italiana da N. S. Dino. 6a edizione. Napoli. 641 S. 8°.

G. SCHEFFERS. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Band II: Einführung in die Theorie der Flächen. Leipzig: Veit. X u. 518 S. gr. 8°.

J. W. SOCHOTZKY. Lehrgang der analytischen Geometrie. Nach dessen Vorlesungen herausgegeben von W. Starostin. St. Petersburg. 248 S. 8° (Russisch).

G. N. BATES. Tripolar coordinates. Math. Gazette 2, 183-188.

G. COMBEBIAC. Calcul des triquaternions. Nouvelle analyse géométrique. J. de l'Éc. Pol. (2) 7, 101-219.

Das Referat s. unter II, 1 S. 98. Schg.

W. PEDDIE. On the use of quaternions in the theory of screws. Edinb. R. S. Proc. 24, 314-320.

Kapitel 2.

Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Kurven.

G. LORIA. Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fr. Schütte. Leipzig: B. G. Teubner. XXI u. 744 S. Mit 17 lithographierten Tafeln.

Die K. Akademie der Wissenschaften zu Madrid stellte für die am 31. Dezember 1894 fällige und dann nach drei Jahren wiederholte Preis-

aufgabe die Ausarbeitung „eines geordneten Verzeichnisses aller Kurven jeglicher Art, die einen speziellen Namen erhalten haben, mit kurzen Angaben über ihre Gestalt, ihre Gleichung, ihre Erfinder". Ein ähnliches Thema schlug Hâton de la Goupillière im Intermédiaire des Math. **1**, 37, 1894 vor. Über die hierdurch veranlaßten wertvollen „Notes et bibliographie des courbes géométriques" von H. Brocard, Bar-le-Duc 1897 und 1899, haben wir schon früher berichtet (vgl. F. d. M. **28**, 46, 1897 und **30**, 53, 1899). Der gleichen Anregung verdanken wir das vorliegende ausgezeichnete Werk von Loria. Mit peinlichster Sorgfalt hat der Verf. das ungeheure Material gesammelt und gesichtet. Das Werk umfaßt alle algebraischen und transzendenten ebenen Kurven, sowohl die, welche einen besonderen Namen erhalten haben, als auch manche anderen, welche, obgleich namenlos, doch eine bestimmte Rolle in der Entwicklung der Wissenschaft spielen. Soweit es möglich war, ist der Ursprung der Kurven erforscht, sind ihre wichtigsten Eigenschaften dargestellt und die besten Untersuchungsmethoden der Kurven angeführt. Erstaunlich ist die Fülle der literarischen Angaben, wenn auch nicht beabsichtigt war, eine vollständige Bibliographie zu geben. Eine Ergänzung der historisch-literarischen Angaben hätte mehreren Artikeln des Klügelschen Wörterbuches entnommen werden können, das jetzt leider vielfach in Vergessenheit geraten ist.

Die Untersuchungen über spezielle ebene Kurven reichen zwei Jahrtausende zurück. Loria hat nun, um diese Untersuchungen in eine logische Ordnung zu bringen, die chronologische Anordnung häufig verlassen müssen. Das Einteilungsprinzip für seine sieben Abschnitte wurde ihm besser durch die Natur der untersuchten Kurven gegeben. So enthalten die vier ersten Abschnitte die algebraischen Kurven von bestimmter Ordnung, der fünfte algebraische Kurven von beliebiger Ordnung, Abschnitt VI transzendente Kurven und der letzte Abschnitt abgeleitete Kurven. Innerhalb der einzelnen Kapitel wurde im Prinzip die historische Reihenfolge gewahrt. Im letzten Abschnitt werden die Gesetze dargestellt, nach denen aus einer gegebenen Kurve andere geometrische Kurven abgeleitet werden können. Es enthält daher dieses Kapitel die Verfolgungskurven, Evoluten und Evolventen mit ihren Verallgemeinerungen, Parallelkurven, Radialen (nach Tucker), Brennlinien, Fußpunktkurven, isoptische und orthoptische Kurven, Differential- und Integralkurven und die von Kurvengruppen abgeleiteten Kurven. Im Nachwort (S. 717-730) wird ein Rückblick über die historische Entwicklung der ebenen Kurven gegeben. Den Schluß des Nachwortes bildet eine Reihe von Sätzen über die sogenannten panalgebraischen Kurven, womit Loria Kurven bezeichnet von der Eigenschaft, daß für jeden Punkt derselben der Neigungskoeffizient der Tangente $\frac{dy}{dx}$ die Wurzel einer algebraischen Gleichung ist, deren Koeffizienten ganze Polynome in x, y sind (vergl. unten S. 603).

Schon ein Blick in das sorgfältig angelegte Sachregister, wie auch in das umfangreiche Namenregister, überzeugt uns von der Reichhaltigkeit

des Werkes, das allen, die sich für die Geschichte und Theorie der ebenen Kurven interessieren, unentbehrlich ist. M.

G. Loria. Intorno alle radiali delle curve piane. Palermo Rend. **16**, 46-56.

Zieht man von einem festen Punkte aus Strecken, welche nach Länge und Richtung mit den Krümmungsradien einer gegebenen Kurve C übereinstimmen, so ist der Ort der Endpunkte dieser Strecken eine Kurve R, welche nach Tucker die Radiale von C heißt. Verf. beweist zunächst, daß die Radiale einer algebraischen Kurve C_n im allgemeinen von der Ordnung $3n(n-1)$ ist, und untersucht, um wieviel sich diese Zahl durch vielfache Punkte der C_n erniedrigt. Dann aber zeigt er, wie man die Gleichung der R in Polarkoordinaten aufstellen kann, sobald die Gleichung der C in natürlichen Koordinaten gegeben ist, und führt mehrere Beispiele näher aus. Endlich aber stellt er das Problem auf, zur gegebenen R die „Antiradiale" C zu finden, und löst es für den Fall der geradlinigen R (vergl. F. d. M. **32**, 577, 1901). R. M.

C. Burali-Forti. Sulle radiali. Palermo Rend. **16**, 185-191.

Verf. betont im Anschluß an die oben angezeigte Arbeit den Nachteil der Koordinaten- und die Überlegenheit der Graßmannschen Methode, und zeigt die Möglichkeit, den Begriff der Radialen auf Raumkurven und Flächen auszudehnen. R. M.

M. d'Ocagne. Sur la courbe radiale de Hoüel. Nouv. Ann. (4) **2**, 112-114.

Der Verf. teilt für die Konstruktion der Normale und des Krümmungszentrums der Radiale weit einfachere Konstruktionen mit als diejenige, welche Sucharda (Vjestnik Ak. Prag **4**, 100, 1897) angegeben hatte, und zeigt, wie umgekehrt mit Hülfe der Radiale das erste, zweite und dritte Krümmungszentrum der Grundkurve gefunden werden kann. Ist die Radiale ein Kreis, so sind die Radien der ersten und dritten Krümmung gleich und gleich gerichtet (vergl. F. d. M. **28**, 485, 1897). Wö.

P. Vandeuren. Étude géométrique des lignes et des surfaces en un point ordinaire. Représentation géométrique des dérivées. Brüssel: J. Lebègue. 40 S. 8°.

Der hier durchgeführte Versuch, Differentialquotienten geometrisch durch Längengrößen darzustellen, will der Infinitesimalgeometrie ein Unterstützungsmittel für die Ableitung oder Veranschaulichung von Lehrsätzen liefern. Daß dies gelungen sei, kann nicht ohne weiteres zugegeben werden; wenigstens dürfte der Anfänger durch die Kenntnis

solcher Interpretationsversuche, denen der Vorwurf einer gewissen Künstelei nicht erspart bleiben wird, eher verwirrt als gefördert werden. Z.

D. SINTZOW. Zur Theorie der Krümmung der Kurven. Kasan. Ges. (2) 12, No. 4, 71-84 (Russisch).

Einfache geometrische Ableitung der bekannten Formeln. Si.

C. C. ENGBERG. An extension of the theory of the characteristics of evolutes. Graduate Bull. 1, 23-30.

Die von Salmon in seinen „Higher plane curves" vermittelst geometrischer Methoden behandelte Theorie der Charakteristiken von Evoluten wird auf Kurven, welche gewöhnliche Kuspidal- oder Inflexionssingularitäten im Unendlichen besitzen, ausgedehnt, wobei acht typische Fälle unterschieden werden. Die Ergebnisse werden durch Zahlenbeispiele und einige Figuren erläutert. Z.

G. PIRONDINI. Proprietà caratteristiche di alcune linee piane o a doppia curvatura. Mat. pure ed appl. 2, 227-243, 265-271.

Bedeuten H_1, H_2, H_0 die Werte einer Funktion H, wenn der unabhängigen Variable t die Werte $t_1, t_2, t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$ beigelegt werden so ist die Funktion H leicht zu bestimmen, die einer der folgenden Bedingungen genügt: H_0 ist arithmetisches oder geometrisches oder harmonisches Mittel zwischen H_1 und H_2;

$$(H_0 - H_1):(H_2 - H_0) = t_2 : t_1,$$
$$(H_0 - H_1):(H_2 - H_0) = t_1 : t_2.$$

In letzterem Fall existiert keine Funktion H, ein Umstand, der in der Folge zu einigen negativen Sätzen Veranlassung gibt. Indem H und t als Koordinaten einer Kurve gedeutet werden, ergeben sich leicht auszusprechende Sätze über eine Reihe von Kurven. Als Koordinaten werden natürliche Koordinaten, Polarkoordinaten, gewisse mit der Kurve in Zusammenhang stehende Flächeninhalte u. ä. benutzt.

Gleichzeitig mit der Kurve, deren Gleichung in natürlichen Koordinaten $\varrho = f(s)$ ist, betrachtet der Verf. die „Pseudoradialkurve" $R = f(s)$, wobei R den Radiusvector in bezug auf einen beliebigen Pol bezeichnet. Zwischen den cykloidalen Kurven $\varrho = \sqrt{as^2 + 2bs + c}$ und ihren Pseudoradialen bestehen einfache Beziehungen. Die oben eingeführten Funktionen H eignen sich zur Ableitung verschiedener charakteristischer Eigenschaften der Kurven $R = \sqrt{as^2 + 2bs + c}$, insofern es gelingt, verschiedene Eigenschaften der Kurven $H = H(t)$ durch die Gleichung

$R = \sqrt{as^2 + 2bs + c}$ zum Ausdruck zu bringen. Einige der Aussagen beziehen sich auf Kurven, die aus den ebenen Kurven

$$R = \sqrt{as^2 + 2bs + c}$$

dadurch hervorgehen, daß man die Ebene der Kurve auf einen Kegel abwickelt, dessen Spitze im Pol der Kurve liegt, und auf dem die abgewickelte Kurve als sphärische Kurve erscheint.

Auch für andere Kurven $R = f(s)$ werden mehrere charakteristische Eigenschaften aufgestellt. Eines der Ergebnisse führt zu der Frage nach allen Kurven, die der folgenden Bedingung genügen: Unterwirft man die ebene Kurve einer Translation in ihrer Ebene, so sollen die orthogonalen Trajektorien Kreise von gleichem Radius sein. Der schon Beltrami bekannte Fall der Traktrix, die sich in Richtung ihrer Asymptote verschiebt, ist im wesentlichen die einzige Lösung. Eine Fortsetzung der Arbeit soll folgen. Lwt.

M. d'Ocagne. Sur les adjointes des directions normales d'une conique. Nouv. Ann. (4) 2, 204-205.

Wenn in der Ebene einer Kurve C zwei feste Pole V und N gegeben sind, so suche man zu jedem Punkte P von C einen adjungierten P', indem man den Fahrstrahl VP zum Schnitt bringt mit der durch N gehenden Parallele zur Kurvennormale des Punktes P. Verf. fordert auf, den Ort von P' bei den Kegelschnitten für verschiedene Lagen der beiden Pole zu studieren und insbesondere Fälle zu finden, wo der Ort ein Kreis ist. R. M.

Éd. Collignon. Problème de géométrie. Assoc. Franç. Ajaccio (1901) 30, 1-24.

Zwischen dem Krümmungsradius ϱ und der Normale N (zwischen Kurvenpunkt und Abszissenachse) bestehe eine Gleichung $\varrho = f(N)$; die Gleichung der Kurve zu finden. Es handelt sich also um eine Aufgabe, von der die interessanteren Fälle in vielen Lehrbüchern und Aufgabensammlungen (z. B. in Sohncke-Amstein) durchgeführt sind. Setzt man $dy/dx = \operatorname{tg}\alpha$, $\cos\alpha = u$, $N = v$, so geht die Gleichung $\varrho = f(N)$ über in

$$\frac{du}{u} + \frac{dv}{v + f(v)} = 0.$$

Daher folgt

$$u = Ce^{-\int \frac{dv}{v+f(v)}}, \quad y = uv.$$

Als Beispiele werden durchgerechnet $\varrho = v^p/a^{p-1}$, $\varrho = a^{p+1}/v^p$, $\varrho = \pm a^2/v$, $\varrho = \sqrt{a^2 + v^2} - v$, $\varrho = kv$. Der letzte Fall ist derjenige, der in der Sohnckeschen Aufgabensammlung ausführlich erledigt ist. Lp.

J. Lubin. Quelques questions mathématiques. Revue scient. (4) **17**, 102-109.

Betrachtungen über ausgezeichnete Punkte von Kurven. Lp.

A. Hurwitz. Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **19**, 357-408.

Ist $f(x)$ eine begrenzte und zwischen 0 und 2π integrierbare Funktion, so existieren die Fourierschen Konstanten

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx,\quad a_k' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx,$$

und wenn $f(x)$ in eine Fouriersche Reihe entwickelbar ist, so lautet die Entwicklung

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + (a_1\cos x + a_1'\sin x) + (a_2\cos 2x + a_2'\sin 2x) + \cdots.$$

Aber auch wenn eine solche Entwicklung nicht existiert, lassen sich gewisse formale Operationen mit solchen Reihen vornehmen, weshalb der Verf. in jedem Falle von einer Äquivalenz der Funktion $f(x)$ und der Reihe $(f(x) \backsim \frac{1}{2}a_0 + \cdots)$ spricht. Die Möglichkeit der angedeuteten Operationen beruht auf einem Fundamentalsatze, den Verf. an die Spitze der Arbeit stellt, und dessen Beweis ziemlich komplizierte Betrachtungen erfordert. Er lautet: Sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei begrenzte und zwischen 0 und 2π integrierbare Funktionen, sodaß also die Fourierschen Konstanten

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx,\quad a_k' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\cos kx\,dx,\quad b_k' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\sin kx\,dx$$

existieren, so konvergiert die Reihe

$$\varphi = \tfrac{1}{2}a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k b_k + a_k' b_k'),$$

und es gilt die Gleichung

$$\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Auf Grund dieses Satzes gelingt es u. a., die Koeffizienten der dem Produkt zweier Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$ äquivalenten Reihenentwicklung aus den zu f und φ gehörigen zu berechnen. Desgleichen ergibt sich in einfacher Weise aus der zu einer Funktion f gehörigen Reihe diejenige für die Integralfunktion $F = \int_0^x f(u)\,du$, und da die letztere

zufolge bekannter Sätze eine Fouriersche Reihenentwicklung zuläßt, so geht für sie die Äquivalenz in eine wirkliche Gleichung über. — Die geometrischen Anwendungen, welche Verf. von diesen analytischen Sätzen macht, erstrecken sich zunächst auf die Theorie der konvexen ebenen Kurven. Es werde eine solche Kurve von einem Punkte P in positivem Sinne durchlaufen und mit u der Winkel bezeichnet, den die Tangente in P mit einer fest angenommenen Richtung (x-Achsenrichtung) bildet. Wenn in jedem Punkte ein bestimmter begrenzter Krümmungsradius ϱ existiert und, als Funktion von u betrachtet, sich als integrabel erweist, so hat man für ϱ eine Äquivalenz von der Form

$$\varrho \sim \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{1}^{\infty} (a_k \cos ku + a'_k \sin ku) \qquad (a_1 = 0,\ a'_1 = 0),$$

während sich für die Koordinaten x, y der Kurvenpunkte, als Funktionen von u betrachtet, Fouriersche Reihenentwicklungen, und zwar Gleichungen, nicht nur Äquivalenzen, ergeben, deren Koeffizienten, abgesehen vom konstanten Gliede, durch die a_k, a'_k bestimmt und in einfachster Weise ausdrückbar sind. Durch die Koeffizienten a_k, a'_k werden Länge L und Inhalt F der Kurve wie folgt dargestellt:

$$L = \pi a_0, \quad F = -\frac{\pi}{4}\left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k^2 + a_k'^2}{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^2 + a_k'^2}{k+1}\right).$$

Aus beiden Formeln folgt

$$\frac{L^2}{4\pi} - F = \frac{\pi}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k^2 + a_k'^2}{k^2 - 1},$$

also $L^2 \geqq 4\pi F$, wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn alle $a_k, a'_k \ (k > 0)$ verschwinden. Man erkennt leicht, daß dies nur im Falle des Kreises eintritt, und hat somit einen Beweis des isoperimetrischen Satzes. Für den Fall, daß ϱ, als Funktion von u betrachtet, eine endliche, integrierbare Ableitung besitzt, ergibt sich eine explizite Formel für den Inhalt E der Evolute der zugrunde gelegten Kurve (wobei der Inhaltsbegriff in bekannter Weise auch für den Fall, daß diese Kurve sich selbst schneidet, zu verstehen ist). Es wird nämlich

$$E = -\frac{\pi}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 - 1} (a_k^2 + a_k'^2).$$

Die Formel zeigt, daß der Inhalt der Evolute wesentlich negativ und nur im Falle des Kreises Null ist. — Während bei gegebener Länge L der Grundkurve die Formel $F \leqq \frac{L^2}{2\pi}$ eine obere Grenze für ihren Inhalt liefert, wird, wenn noch der Inhalt $|E|$ der Evolute als gegeben betrachtet wird, wie Verf. zeigt, durch die Formel

$$F + \tfrac{1}{2}|E| \geqq \frac{L^2}{4\pi}$$

eine untere Grenze für F geliefert. Erreicht wird diese untere Grenze

von den Parallelkurven der Astroide. — Zu der zugrunde gelegten konvexen Kurve C gehört eine Schar von Kurven C_ϑ, deren jede aus den Punkten besteht, von denen aus C unter einem gegebenen Winkel $\pi - \vartheta$ erscheint. ϑ variiert von 0 bis π. Für $\vartheta = 0$ erhält man die Kurve C selbst. Indem ϑ bis π wächst, dehnt sich C_ϑ ins Unendliche aus. Der Flächeninhalt F_ϑ von C_ϑ wächst dabei in der Weise ins Unendliche, daß das Produkt $\sin^2 \vartheta\, F_\vartheta$ dem endlichen Grenzwerte

$$A = \frac{L^2}{\pi} + 2\pi \sum_1^\infty \frac{a_{2k}^2 + a_{2k}'^2}{(4k^2-1)^2}$$

zustrebt. — Zu jeder Tangente von C gehört eine parallele entgegengesetzt gerichtete, sodaß, wenn u der Richtungswinkel der einen ist, derjenige der andern durch $u + \pi$ bezeichnet wird. Bezeichnet $P(u)$ den Abstand der beiden Tangenten, so stellt $P(u)$ eine Funktion mit der Periode π dar. $P(u)$ stellt zugleich die Projektion von C auf eine zur Richtung u senkrechte Gerade dar. Für das arithmetische Mittel der Funktion $P^2(u)$, d. h. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [P(u)]^2\, du$, findet Verf. den Wert

$$\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 + 2 \sum_1^\infty \frac{a_{2k}^2 + a_{2k}'^2}{(4k^2-1)^2}.$$

Wenn daher nicht alle a_{2k}, a_{2k}' Null sind, so gibt es Kurvenprojektionen, die größer als $\frac{L}{\pi}$ sind, d. h. größer als die Projektion eines Kreises von gleichem Umfange. Wenn aber alle a_{2k}, a_{2k}' Null sind, so geht die allgemein für $P(u)$ geltende Formel

$$P(u) = \frac{L}{\pi} - \sum_1^\infty \frac{2}{4k^2-1} (a_{2k} \cos 2ku + a_{2k}' \sin 2ku)$$

über in $P(u) = \frac{L}{\pi}$. Die Kurve besitzt daher in allen Richtungen dieselbe orthogonale Projektion. Diese Eigenschaft kommt demnach allen den Kurven zu, für welche die zu ϱ gehörige Äquivalenz die Form

$$\varrho(u) \backsim \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^\infty (a_{2k+1} \cos (2k+1) u + a_{2k+1}' \sin (2k+1) u)$$

hat. Unter der Voraussetzung, daß diese Äquivalenz durch eine Gleichung ersetzt werden kann, lässt sich eine Reihe weiterer Schlüsse ziehen. So zeigt sich, daß die Evolute einer Kurve C von konstanter Projektion eine Doppelkurve ist, indem zu zwei entgegengesetzten Punkten von C (d. h. solchen mit entgegengesetzten Tangenten) derselbe Krümmungsmittelpunkt gehört. Aus dem Umstande, daß der Ausdruck für ϱ seine Form nicht ändert, wenn man die Konstante a_0 variiert, ergibt sich, daß die Parallelkurven einer Kurve von konstanter Projektion dieselbe Eigenschaft besitzen. Nimmt man insbesondere $a_0 = 0$, so wird die Kurve

(die dann natürlich nicht mehr konvex ist) eine Doppelkurve, indem jeder Punkt mit dem entgegengesetzten zusammenfällt. Hiervon ausgehend, kann man leicht einfache Kurven dieser Art herstellen.

Unter Übergehung einiger weiterer Anwendungen auf die Theorie der ebenen Kurven sei noch auf die Untersuchungen des Verf. über die Flächen kurz eingegangen. Sie beziehen sich auf solche (konvexen) Flächen, welche in jeder Richtung eine und nur eine äußere Normale haben, und liefern als wichtigste Resultate neue Beweise für einige von Minkowski gefundene Sätze. Hierher gehört der Satz, daß, wenn für jede Normalenrichtung die Summe der Hauptkrümmungsradien gegeben ist, die Fläche bis auf eine Parallelverschiebung bestimmt ist, ferner der Nachweis der Ungleichung

$$M^2 \geqq 2\pi O,$$

wo O die Oberfläche und M das arithmetische Mittel aus der mittleren Krümmung, d. i. den Ausdruck $\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right) d\sigma$, bezeichnet. Der Nachweis der der Ungleichung $F \leqq \frac{L^2}{4\pi}$ entsprechenden Formel im Raume $V^2 \leqq \frac{O^3}{36\pi}$ ist auf dem hier eingeschlagenen Wege noch nicht gelungen; doch dürften die bisherigen Resultate genügen, um darzutun, daß die in dieser Arbeit begonnenen Untersuchungen der weiteren Forschung aussichtsreiche Wege eröffnen. Stz.

B. Theorie der algebraischen Kurven.

P. Sauerbeck. Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven nach den Methoden von Jean Paul de Gua de Malves. Ein Beitrag zur Kurvendiskussion. Leipzig: B. G. Teubner. VI u. 166 S. 8°.

Ein Mathematiker, dessen bis dahin fast ganz in Vergessenheit geratene Verdienste auf dem Gebiet der analytischen Geometrie neuerdings durch Brill nachdrücklich betont wurden, nämlich der Abbé Jean Paul de Gua de Malves, hat 1740 in Paris in Duodezformat ein 457 Seiten starkes Werk erscheinen lassen: „Usages de l'analyse de Descartes pour découvrir sans le concours du calcul différentiel les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres.“ Die in diesem Buche enthaltenen originellen Gedanken und Methoden zum Gemeingut der heutigen Mathematiker zu machen, ist der Zweck der vorliegenden Schrift. Sie beginnt mit einem historischen Überblick über die Entwicklung der Kurvendiskussion von Descartes bis de Gua, gibt dann nach einigen Hülfsbetrachtungen eine allgemeine Theorie der algebraischen Kurven und ihrer möglichen Singularitäten, illustriert sie durch mehrere Übungsbeispiele und schließt mit kurzen biographischen Notizen über die Mathe-

matiker jener Zeit. Es sei gestattet, folgendes Satzungeheuer abzudrucken, in welchem der Verf. die Bedeutung de Guas klar zu legen glaubt: „(S. 12-13) Zum Unterschied gegen sämtliche frühere Auffassungen, die einesteils der analytischen Kurventheorie die Rolle einer Hülfswissenschaft der Algebra zuweisen, indem die Kenntnis der Kurven nur dazu diene, Probleme, d. h. höhere algebraische Gleichungen aufzulösen (graphische Methode), eine Ansicht, die noch Newton mit Descartes teilt (Enumeratio Cap. VII: Constructio aequationum per descriptionem curvarum), anderenteils durch die Künstlichkeit der Methoden oder deren Schwerfälligkeit und die damit bedingte Einseitigkeit der Anwendung den inneren Zusammenhang zwischen algebraischer Form und geometrischer Gestalt nur unvollständig klar legen, begründet de Gua dadurch, daß er erstmals an Stelle der seitherigen Einzeluntersuchungen bestimmter Kurvenordnungen die Gleichung n-ten Grades in x und y diskutiert, eine allgemeine analytische Geometrie der algebraischen Kurven als eines Wissenszweiges für sich und charakterisiert zugleich durch die bloße Anwendung der Analysis des Descartes diese Methode als die natürlichste nicht nur insofern, als sie überhaupt genügt, die Kriterien für sämtliche gestaltliche Eigenschaften eindeutig mit Schärfe und Klarheit aufzustellen, sondern vor allem, weil sie ihre Ergebnisse aus der Form der Gleichung direkt entnimmt und hierdurch Algebra und Geometrie in unmittelbare Wechselbeziehung setzt.“

So schreibt ein Gymnasiallehrer! Referent bekennt, daß es ihm unmöglich ist, ein in diesem Stile verfaßtes Buch zu lesen; wer sich daran nicht stößt, wird gewiß vieles daraus lernen können. R. M.

G. Loria. Le curve panalgebriche. Mat. pure ed. appl. 2, 73-96.

Die ebenen Kurven teilt man ein in algebraische und transzendente Kurven. Während die Theorie der algebraischen Kurven einen hohen Grad der Vollkommenheit erreicht hat, läßt die Behandlung der transzendenten Kurven die Einheitlichkeit vermissen. Der Verf. sucht dem Übelstande durch ein neues Einteilungsprinzip zu begegnen: er unterscheidet panalgebraische Kurven und nicht-panalgebraische Kurven. Zum ersteren Typus gehören fast alle genauer untersuchten Kurven (vgl. die Tabelle in No. III der Arbeit). Die nicht-panalgebraischen Kurven zu ordnen, liegt zur Zeit kein Bedürfnis vor: wie man dabei etwa vorgehen könnte, wird am Schluß der Arbeit angedeutet.

Die panalgebraischen Kurven werden als Integralkurven einer irreduziblen Differentialgleichung von der Form

$$F(x, y, y') \equiv \sum_{r=0}^{r=n} f_r(x, y)\, y'^{\,n-r} = 0$$

definiert, worin die f_r ganze rationale Funktionen sind. n heißt der Grad der Kurve, ν ihr Rang, wenn ν der höchste Grad der Koeffizienten

f_r ist. Die Zahlen n und ν besitzen ähnliche Bedeutung wie die entsprechenden Größen für algebraische Funktionen.

Die Eigenschaften der panalgebraischen Kurven sind in einer Reihe von Theoremen entwickelt. Die algebraischen Kurven sowie ihre Tractrices sind panalgebraisch. Eine in Punktkoordinaten panalgebraische Kurve ist auch in Linienkoordinaten panalgebraisch. Dieser Dualität entspricht das Auftreten von Doppelsätzen, z. B.: Die Spitzen einer panalgebraischen Kurve liegen auf einer algebraischen Kurve; die Wendetangenten einer panalgebraischen Kurve berühren eine algebraische Kurve. — Eine algebraische Berührungstransformation ändert den panalgebraischen Charakter einer Kurve nicht usw.

Genau so wie die Polare der algebraischen Kurven wird hier die „Parapolare" eines Punktes in bezug auf eine panalgebraische Kurve eingeführt. Damit eine Kurve panalgebraisch sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Parapolare algebraisch ist. Dieses Kriterium gestattet oft, zu entscheiden, ob eine in Polarkoordinaten vorliegende Kurve panalgebraisch ist oder nicht, ohne daß man erst die Transformation in kartesische Koordinaten vorzunehmen brauchte.

Die Hessesche und die Steinersche Kurve finden ihr genaues Gegenstück bei den panalgebraischen Kurven: sie stellen sich als algebraische Gebilde heraus. Schließlich enthält die Arbeit noch einige auf die Normalen panalgebraischer Kurven bezügliche Sätze. Lwt.

G. B. Guccia. Sulle curve algebriche piane. Sulle superficie algebriche. Palermo Rend. **16**, 286-293.

Hat man in einer Ebene einen Punkt P und eine nicht durch ihn gehende Gerade R (wobei $R = 0$ die Gleichung dieser Geraden sei), bezeichnet ferner $G_j\,(j = k, k+1, \ldots, n)$ ein beliebiges System von j durch P gehenden Geraden, so bestimmen

$$R^{n-k}\,G_k,\, R^{n-k-1}\,G_{k+1}, \ldots, R\,G_{n-1},\, G_n$$

eine lineare Kurvenschar der Dimension $n - k$. Die Kurven dieser Schar sind von der n-ten Ordnung und haben in P einen k-fachen Punkt. Ist umgekehrt P und R und eine Kurve n-ter Ordnung $C_n^{(k)}$ mit einem k-fachen Punkte in P gegeben, so kann man im allgemeinen auf eine Weise die Strahlengruppen $G_k, \ldots, G_n$ so bestimmen, daß die gegebene $C_n^{(k)}$ in der durch $R^{n-k}\,G_k, \ldots, G_n$ bestimmten Schar enthalten ist. Die Punkte, in denen die $(n-j)$-te Polare von P bezüglich der Kurve $C_n^{(k)}$ die Gerade R schneidet, sind identisch mit den Punkten, in denen diese Gerade von G_j getroffen wird. Durch die Kurve $C_n^{(k)}$ sind weitere Kurven $C_n^{(k+1)}, \ldots, C_n^{(n)}$ bestimmt, welche Verf. als konjugierte Kurven der ersten Art bezeichnet, und welche so definiert sind, daß

$$C_n^{(j)}\,(j = k + 1, \ldots, n)$$

die einzige Kurve des Büschels $[R^{n-j+1} G_{j-1}, C_n^{(j-1)}]$ ist, welche in P einen j-fachen Punkt besitzt. Ferner gehören zu $C_n^{(k)}$ konjugierte Kurven der zweiten Art $C_{n-1}^{(k)}, C_{n-2}^{(k)}, \ldots, C_k^{(k)}$; hierbei bezeichnet $C_j^{(k)}$ eine dem Büschel $[C_{j+1}^{(k)}, G_{j+1}]$ angehörige Kurve, deren Schnittpunkte mit R mit denen von G_j übereinstimmen. Die j Tangenten, welche $C_n^{(j)}$ $(k \leqq j \leqq n)$ im Punkte P besitzt, schneiden auf R dieselben Punkte aus wie die Kurve $C_j^{(k)}$ etc. Dieselben Untersuchungen hat der Verf. auf den Raum ausgedehnt. Stz.

M. d'Ocagne. Sur les barycentres cycliques dans les courbes algébriques. S. M. F. Bull. **30**, 83-91.

Es sei eine algebraische Kurve vorgelegt. Dann haben die Punkte, in welchen die Kurve von einem Kreise mit dem Mittelpunkte C geschnitten wird, einen vom Radius des Kreises unabhängigen Schwerpunkt G. So entspricht jedem Punkte C der Ebene ein zweiter Punkt G, sein „cyklischer Schwerpunkt" (barycentre cyclique). Die hier statuierte Verwandtschaft erweist sich als eine Affinität, ist also auch eindeutig umkehrbar. In besonderen Fällen kann jedoch die Verwandtschaft ausarten, sodaß sich die den sämtlichen Punkten der Ebene entsprechenden cyklischen Schwerpunkte auf eine einzige Gerade konzentrieren. Der Verf. hat die Bedingung für diese „singulären Kurven" analytisch formuliert, ohne das Resultat allgemein geometrisch zu diskutieren. Dagegen gibt er einige ausgedehnte Klassen singulärer Kurven an. Zu ihnen gehören z. B. die Parabeln der verschiedenen Ordnungen. Bei der gewöhnlichen Parabel, dem einzigen singulären Kegelschnitt, erfüllen die cyklischen Schwerpunkte die Achse. Zuletzt wird die Frage aufgeworfen, ob es Kurven gibt, bei denen jeder Punkt mit seinem cyklischen Schwerpunkte zusammenfällt. Sie wird in verneinendem Sinne entschieden. Stz.

H. B. Newson. A new theory of collineations and their Lie groups. American J. **24**, 109-172.

Seit längerer Zeit hat sich der Verf. damit beschäftigt, die Liesche analytische Theorie der ternären projektiven Gruppen und ihrer Untergruppen auf synthetischem Wege zu begründen. Nunmehr liegt eine zusammenfassende Darstellung seiner Untersuchungen vor. Der Verf. verwahrt sich dagegen, als ob er nur einen Beitrag zur Lieschen Theorie geben wolle, sondern er will seine geometrische Theorie als eine selbständige aufgefaßt wissen. Er benutzt nur die Begriffe der kontinuierlichen Transformation und Gruppe, aber nicht den der infinitesimalen Transformation.

Den Ausgang bilden die perspektiven Kollineationen S der Ebene und ihre Gruppen. Man denke sich erst von irgend einem Raumpunkte O aus die Punkte einer Hülfsebene p' auf die Grundebene p projiziert, und sodann die Ebene p' mit der Ebene p durch Drehung um die ge-

meinsame Achse zur Deckung gebracht. Dadurch ist eine perspektive Kollineation S in der Grundebene hergestellt; wie bekannt und leicht zu erkennen, läßt S eine sich selbst dualistische Figur invariant, bestehend aus jeder Geraden durch einen festen Punkt (Scheitel) A und jedem Punkte auf einer festen Geraden (Achse) l. Auf irgend einer Geraden g durch A, die l in A' treffen möge, bildet das Punktepaar AA' mit irgend einem Paar vermöge S sich entsprechender Punkte ein festes Doppelverhältnis K (und entsprechend dualistisch dasselbe Doppelverhältnis). Umgekehrt ist die perspektive Kollineation S durch ihre invariante Figur (A, l) und ihr Doppelverhältnis K völlig bestimmt.

Die Zusammensetzung irgend zweier perspektiven Kollineationen S, S_1 mit derselben invarianten Figur (A, l), aber verschiedenen Doppelverhältnissen K, K_1 liefert eine ebensolche Kollineation S_2. Die zur invarianten Figur (A, l) gehörigen perspektiven Kollineationen S bilden daher eine eingliedrige kontinuierliche Gruppe $H_1(A, l)$ mit dem Parameter K (exkl. $K = 0, \infty$). Ist K_2 der zu S_2 gehörige Wert von K, so hat man einfach $K_2 = KK_1$.

Wenn im besonderen der Punkt A auf der Geraden l liegt, so wird die perspektive Kollineation zu einer „Elation". Auch eine Elation ist völlig bestimmt durch ihre invariante Figur und eine charakteristische Konstante α; alle Elationen mit der invarianten Figur (A, l) bilden eine Gruppe $H'_1(A, l)$, wo nur der Fall $\alpha = \infty$ auszuschließen ist.

Offenbar gibt es ∞^4 Gruppen H_1 von perspektiven Kollineationen und ∞^3 Gruppen H'_1 von Elationen; andererseits ∞^5 perspektive Kollineationen und ∞^4 Elationen.

Ferner bilden alle ∞^2 koaxialen Elationen (i. e. mit gemeinsamer fester Achse l) eine zweigliedrige Gruppe $H'_2(l)$, und dualistisch alle ∞^2 Elationen mit gemeinsamem festem Scheitel A eine zweigliedrige Gruppe $H'_2(A)$, während andere Gruppen von Elationen nicht existieren. Alle ∞^3 koaxialen perspektiven Kollineationen bilden eine dreigliedrige Gruppe $H_3(l)$, und unter diesen Kollineationen alle ∞^2 mit kollinearen Scheiteln eine zweigliedrige Gruppe $H_2(lBl')$. Rechnet man zu diesen beiden Gruppen noch die beiden dualistischen, so hat man die Gesamtheit aller Gruppen von perspektiven Kollineationen.

Der Verf. wendet sich nunmehr zu den ∞^2 Kollineationen mit invariantem Dreieck (ABC). Sie konstituieren ersichtlich eine zweigliedrige Gruppe $G_2(ABC)$.

Auf jeder Seite des Dreiecks ABC bilden die Ecken mit irgend einem Paar korrespondierender Punkte ein festes Doppelverhältnis. Die so entstehenden drei Doppelverhältnisse sind aber durch die Relation verbunden, daß ihr Produkt gleich der Einheit ist, und repräsentieren so die zwei Parameter der Gruppe G_2. Von der Gruppe G_2 lassen sich ohne Mühe ihre Untergruppen ermitteln. Andererseits lassen sich aber auch — immer auf Grund des Prinzips, daß alle Kollineationen, die eine gewisse Figur invariant lassen, notwendig eine Gruppe erzeugen — alle Untergruppen der allgemeinen projektiven Gruppe G_8 aufstellen, die sich aus Gruppen G_2 zusammensetzen lassen. Eine andere Klasse von

Gruppen resultiert, wenn man einer gewissen Konstante r einen festen Wert beilegt; eine dritte Klasse bilden solche, deren Bahnkurven Kegelschnitte sind.

Die bisher betrachteten Kollineationsgruppen mit invariantem Dreieck gehören zusammen einem ersten Typus an. Ein wesentlich anderer Typus entsteht durch Zusammensetzung von perspektiven Kollineationen mit Elationen, und dieser Typus zerfällt wiederum in zwei verschiedene Klassen. Zu einem dritten Typus gelangt man durch Zusammensetzung zweier Elationen, deren invariante Figuren (A, l) und (A_1, l_1) in der Beziehung stehen, daß l_1 durch A hindurchgeht.

Auf diesem Wege gelangt der Verf. nicht nur zu der zuerst von Lie aufgestellten Tafel von Kollineationsgruppen der Ebene; er weist auch ihre Vollständigkeit nach und dringt in die geometrische Struktur der einzelnen Gruppen tiefer ein. My.

Ch. A. Scott. On a recent method for dealing with the intersection of plane curves. American M. S. Trans. 3, 216-263.

Die Verf. untersucht die geometrische Bedeutung der Bedingungen des Noetherschen Fundamentalsatzes für ebene algebraische Kurven. Danach wird das Kriterium für die Darstellung einer Kurve $F = 0$ in der Gestalt $Pu + Qv = 0$, wo $u = 0$, $v = 0$ gegebene Kurven bedeuten, erhalten, wenn man für irgend einen gemeinsamen Punkt ($x = a$, $y = b$) der Kurven $u = 0$, $v = 0$ sowohl F als $Pu + Qv$ nach Potenzen von $x - a$ und $y - b$ entwickelt und dann die beiderseitigen Koeffizienten bis zu einer gewissen Ordnung vergleicht.

Solange der betrachtete gemeinsame Punkt von $u = 0$, $v = 0$ je ein vielfacher Punkt ist, sodaß die Tangenten desselben für jeden Punkt getrennt sind und auch beiderseits mit einander nicht koinzidieren, ist auch die geometrische Bedingung für $F = 0$ leicht auszusprechen: F muß daselbst ebenfalls einen vielfachen Punkt bestimmter Ordnung mit getrennten Tangenten besitzen.

Wie ist es aber im „allgemeinen" Fall, wenn die Tangenten beider Punkte an der betrachteten Stelle irgendwie zusammenfallen?

Eine algebraische Konstruktion dieser Bedingungen rührt von Macaulay her (F. d. M. **30**, 509, 1899; **31**, 573, 1900). Man bilde zunächst, indem man sich den fraglichen Schnittpunkt in den Anfangspunkt O verlegt denkt, eine gewisse lineare Funktion der Koeffizienten, sodann aus dieser eine Reihe weiterer durch einen einfachen Ableitungsprozeß. Bezeichnet man den Koeffizienten von $x^{p-q} y^q$ mit $z_{p,q}$ und versteht unter D_x den Prozeß der Verminderung jedes Index p um eine Einheit, unter D_y den nämlichen Prozeß, begleitet von einer Vermehrung jedes Index q um eine Einheit (wobei $z_{p,q}$ für $p < q$ gleich Null zu setzen ist), so liefert Wiederholung und Kombination der Prozesse D_x und D_y die gemeinte Reihe weiterer Funktionen, die zugleich mit der ursprünglichen alle verschwinden müssen.

In diesem Falle spricht **Macaulay** von einer Primbedingung und von einem einreihigen System von Bedingungen, sowie einem einreihigen Punkte O; sind dagegen t Primbedingungen zur Charakterisierung des Punktes O nötig, von einem t-reihigen Punkte. Ein solcher entsteht, wenn sich $t+1$ Kurven in O schneiden, für $t=1$ also stets nur ein einreihiges System. Die Anzahl der in O fallenden gemeinsamen Schnittpunkte von zwei Kurven u, v ist genau so groß, wie die Anzahl der Gleichungen des zugehörigen einreihigen Systems. Diese **Macaulayschen** Sätze werden nun hier auf wesentlich einfachere Art bewiesen, so daß die einzelnen Schritte des Beweises stets geometrisch durchsichtig sind. Die Aufgabe wird allgemein so gestellt, die Gleichung einer Kurve $u=0$ in die Gestalt $X_0 u_0 + X_1 u_1 + X_2 u_2 + \cdots = 0$ zu bringen, wo die Kurven $u=0$, $u_0=0$, $u_1=0$, $u_2=0$, ... den Ursprung O als gemeinsamen Punkt besitzen. Man schließt zunächst, daß die Bedingungen für die Koeffizienten von u homogen und linear sind. Da die reduzible Kurve $Xu=0$ dieselben Zweige in O besitzt, wie $u=0$ (ev. noch einige weitere), so ergibt sich, wenn man X speziell durch $x^h y^k$ ersetzt, daß jede durch die Koeffizienten von u bezüglich O erfüllte Gleichung $E \equiv \sum \lambda_{p,q} z_{p,q} = 0$ auch durch die entsprechenden Koeffizienten von $x^h y^k u$ befriedigt werden muß. Für $h, k = 1, 0$ resp. $0, 1$ resultieren die oben erwähnten Prozesse $E_0^1 \equiv D_x E = 0$, $E_1^1 \equiv D_y E = 0$, aus denen sich $D_x^h D_y^k E$ zusammensetzt. Der höchste Index p, der in einer Gleichung auftritt, heißt der Grad der Gleichung.

Ferner ist zu beachten, daß eine Gleichung, die für einen Basispunkt eine Primgleichung ist, bei Erweiterung des Basispunktes als abgeleitete Gleichung auftreten kann. So z. B. wird auf der Kurve

$$x + y + x^2 + 3xy + 4y^2 + x^3 + 2x^4 + y^4 + \cdots = 0$$

durch die Kurve

$$x + y + 2x^2 + 4x^3 + y^3 + 6x^4 + \cdots = 0$$

ein einreihiger Basispunkt bestimmt mit der Primgleichung

$$z_{02} - z_{12} + z_{22} - 2z_{01} = 0;$$

dagegen durch die Kurve

$$x + y + x^2 + y^2 - 7y^3 + 5x^4 + 2y^4 + \cdots = 0$$

ein einreihiger Basispunkt mit der Primgleichung

$$z_{03} - z_{13} + z_{23} - z_{33} - 2z_{02} + 2z_{22} - 7z_{01} = 0,$$

und deren x-Abgeleitete ist wiederum

$$z_{02} - z_{12} + z_{22} - 2z_{01} = 0.$$

Sodann ist ersichtlich, daß die Anzahl der zu irgend einem Grad gehörigen Ableitungsgleichungen um eine Einheit wächst, wenn der Grad um eine Einheit abnimmt. Die Grundlage des Weiteren ist der Satz, daß, wenn — für einen einreihigen oder mehrreihigen Basispunkt — die größte für irgend einen Grad vorhandene Anzahl von Gleichungen k ist,

der Punkt ein vielfacher Punkt von der Ordnung k ist. Der Beweis wird mittels geeigneter Kombinierung der Ableitungsgleichungen geführt.

Die Verfasserin stellt nunmehr ihr Haupttheorem auf, das sie „theorem of ascent“ nennt. Zuvor wird der Hülfssatz bewiesen, daß zwei Kurven u, v mit einem k-fachen Punkte im Ursprung entweder $k-1$ oder k Gleichungen vom Grade k, oder aber $k-2$ oder $k-1$ oder k Gleichungen vom Grade $k+1$ genügen. Der Beweis beruht darauf, daß die fraglichen Bedingungsgleichungen durch das Verschwinden aller Determinanten einer gewissen Matrix dargestellt werden.

Aus obigem Hülfssatz fließt das „theorem of ascent“: „Wenn zwei Gleichungen, die durch die Koeffizienten von zwei Kurven befriedigt werden, eine gemeinsame Ableitungsgleichung besitzen, so haben sie auch eine gemeinsame Primgleichung.“

Mit Hülfe dieses Theorems wird die Aufstellung der Bedingungsgleichungen für gegebene Kurven, die in vorgeschriebener Art durch den Ursprung gehen sollen, wesentlich erleichtert, namentlich beim „Aufsteigen“ zu höheren Graden. Darüber hinaus hat aber nunmehr der Beweis der oben angeführten Macaulayschen Sätze keine prinzipielle Schwierigkeit mehr, und man erkennt deutlich ihren gegenseitigen Zusammenhang.

My.

Ch. A. Scott. On the circuits of plane curves. American M. S. Trans. 3, 388-398.

Die bisherigen Untersuchungen über die Realität von Zügen ebener algebraischer Kurven lassen vermuten, daß ein allgemeiner Satz besteht über die Existenz von Zügen, die nicht in ein endliches Gebiet der Ebene projiziert werden können, oder, was dasselbe ist, für die die Realität einer gewissen Anzahl ihrer Asymptoten durch Projektion unzerstörbar ist.

Versteht man unter Ordnung eines Zuges die Maximalzahl von Schnittpunkten mit einer Geraden, entsprechend unter Index die Minimalzahl, so ist klar, daß die Ordnung, vermindert um den Index, eine gerade Zahl liefert, die mindestens gleich Zwei ist.

Der allgemeine Satz sagt dann aus, daß für jede Ordnung n Kurven (vom Geschlecht 0 oder 1) existieren, die aus einem einzigen Zuge vom Index $n-2r$ bestehen, wo r irgend einen ganzzahligen Wert von 1 bis zu $\frac{n}{2}$, resp. $\frac{n-1}{2}$ hat, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Der Satz gilt auch noch für $r=0$, nur daß dann für $p=1$ noch ein zweiter Zug existieren darf.

Der Beweis wird wesentlich mit Hülfe von quadratischen Cremonatransformationen geführt, die dazu dienen, unpaare Züge in paare zu transformieren. Es sei erwähnt, daß dieses wichtige Hülfsmittel zuerst vom Referenten eingeführt worden ist behufs Bestimmung der verschiedenen Typen von Kurven fünfter Ordnung mit sechs eigentlichen Doppelpunkten (F. d. M. **10**, 467, 1878). Eine Tafel veranschaulicht eine Reihe charakteristischer Typen von Zügen.

My.

Ch. A. Scott. Note on the real inflexions of plane curves. American M. S. Trans. 8, 399-400.

Ist $u = 0$ die Gleichung einer ebenen Kurve,

$$u_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad u_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

so können die reellen Wendepunkte der Kurve u nur in einem Gebiete liegen, wo der Ausdruck $G \equiv u_{11}\, u_{22} - u_{12}^2$ nicht positiv ausfällt. Dieser Ausdruck G hängt ab von der Beziehung der Kurve u zur unendlich fernen Geraden $z = 0$. Ein entsprechender Ausdruck wird in Beziehung zu jeder beliebigen Geraden erhalten (d. h. G ist eine Differentialinvariante), und für einen reellen Wendepunkt dürfen alle diese Ausdrücke nicht positiv werden.

Gewöhnlich wird der Ausdruck G nur benutzt, um reelle und imaginäre Tangenten eines vielfachen Punktes zu unterscheiden.

Die Kurve $G = 0$, die „diacritic“ genannt wird, ist der Ort der Punkte, deren Polarkegelschnitte die fragliche Gerade berühren. My.

P. Appell. Sur le degré de réalité d'une courbe algébrique à coefficients réels. Arch. der Math. u. Phys. (3) 4, 20-21.

Einige allgemeine und spezielle Bemerkungen über die Möglichkeit, eine Definition einer Zahl zu geben, welche die Realität einer algebraischen Kurve charakterisiert. R. M.

W. A. Anissimow. Die Gleichung der Asymptoten einer algebraischen Plankurve. Mosk. Math. Samml. 22, 577-579 (Russisch).

Wird der linken Seite der Gleichung $C_n = 0$ der algebraischen Plankurve solch ein Polynom C_{n-2} vom $(n-2)$-ten Grade hinzugefügt, daß $C_n' = C_n + C_{n-2}$ in n lineare Faktoren zerfällt, so ist $C_n' = 0$, wie bekannt, die Gleichung der Asymptoten der Kurve $C_n = 0$. Si.

J. N. Panfiloff. Zwei Sätze über unikursale Kurven. Kiew. Univ. No. 2, 1-8 (Bericht Kiew. Ges. 1900, 63-70. Russisch).

Auf Grund des Satzes von Cramer werden die bekannten Grundeigenschaften der unikursalen Kurve [die Koordinaten des Punktes einer unikursalen Kurve sind rational durch einen Parameter darstellbar, und umgekehrt] sehr einfach bewiesen. Si.

Ch. Tweedie. Anallagmatic curves I. Edinb. M. S. Proc. 20, 76-82.

In der englischen mathematischen Literatur sind die Eigenschaften

der anallagmatischen Kurven wenig bekannt. Der Artikel gibt einen kurzen Bericht über die Grundeigenschaften unter Anführung der Quellen.

Gbs. (Lp.)

G. Fontené. Théorèmes sur des courbes planes de genre un ou zéro. Nouv. Ann. (4) 2, 34-39.

Es seien P und Q die beiden Doppelpunkte einer Kurve vierter Ordnung vom Geschlechte 1, oder zwei beliebige Punkte einer Kurve dritter Ordnung, oder zwei in der Ebene eines Kegelschnittes gelegene Punkte; bezeichnet man einen Kegelschnitt, der durch die beiden Punkte P, Q hindurchgeht, als einen der betrachteten Kurve assoziierten Kegelschnitt, so gilt der Satz: Wählt man auf der Kurve die Punkte $A_1, \dots, A_4$, $B_1, \dots, B_4$, $C_1, \dots, C_4$, $D_1, \dots, D_4$ so, daß die vier Punkte A auf einem, die vier Punkte B auf einem zweiten, die vier Punkte C auf einem dritten, die vier mit gleichem Index i (für $i = 1, 2, 3, 4$) bezeichneten Punkte A, B, C, D auf vier weiteren der Kurve assoziierten Kegelschnitten liegen, so liegen auch die vier Punkte D auf einem der Kurve assoziierten Kegelschnitt.

Der Sonderfall, daß die Doppelpunkte die imaginären unendlich fernen Kreispunkte sind, liefert einen Satz, der als Verallgemeinerung eines Joachimsthalschen Satzes angesehen werden kann: Konstruiert man in den vier Punkten, in denen ein Kreis eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung oder eine zirkulare Kurve dritter Ordnung oder einen Kegelschnitt schneidet, die vier Oskulationskreise, so schneiden diese die Kurve noch einmal in vier Punkten, welche auf einem Kreise liegen.

Ein dem ersten analoger Satz über drei Punkte P, Q, R einer Kurve sechster oder niedrigerer Ordnung und drei Punktetripel $A_1, \dots, C_3$, sowie ein geometrischer Beweis des ersten Satzes für den Fall eines Kegelschnitts bilden den Schluß der Arbeit. Z.

G. Ferretti. Sulla riduzione all' ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane irriducibili di genere p; in particolare per i valori 0, 1, 2 del genere. Palermo Rend. 16, 236-279.

Eine wichtige Aufgabe in der Theorie der birationalen Transformationen besteht in der Aufsuchung der Kurven niedrigster Ordnung, denen eine gegebene Kurve birational äquivalent ist. Treten an die Stelle einzelner Kurven vollständige lineare Kurvensysteme, d. h. solche linearen Systeme, welche durch die Basispunkte in der Weise bestimmt sind, daß sie die Gesamtheit aller Kurven umfassen, welche jeden dieser Punkte in vorgeschriebener Vielfachheit enthalten, und handelt es sich darum, ein solches Kurvensystem durch ein-eindeutige Transformation auf eine möglichst niedrige Ordnung zu bringen, so sind statt der nur von Kurve zu Kurve eindeutigen Transformationen die Cremonaschen in Anwendung zu bringen, welche sich auf die ganze Ebene erstrecken. Die hauptsächlichsten

Schwierigkeiten in diesen Untersuchungen bieten die besonderen Fälle, und erst nach und nach werden für die hierher gehörigen Sätze ausnahmslos gültige Beweise geliefert, wie z. B. erst Castelnuovo 1891 einen solchen für die Möglichkeit der Zusammensetzung jeder Cremonaschen Transformation aus quadratischen gab. Die gegenwärtige Arbeit schließt sich an diejenigen von Castelnuovo und C. Segre an.

Für die Untersuchung der irreduziblen linearen Kurvensysteme kommen außer der Ordnung n und dem Geschlechte p des Systems hauptsächlich in Betracht: der Grad D, die (wirkliche) Dimension (dimensione effettiva) K, die virtuelle Dimension (dimensione virtuale) K, ferner die Systeme der adjungierten Kurven der verschiedenen Indizes. Bezeichnen $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ die Anzahlen der einfachen, doppelten, ..., ϱ-fachen Basispunkte des vorgelegten Kurvensystems, so berechnet sich der Grad D nach der Formel $D = n^2 - \sum_{t=1}^{\varrho} t^2 a_t$; er stellt die Anzahl der Schnittpunkte dar, welche zwei Kurven des linearen Systems, abgesehen von den Basispunkten, gemein haben. Da ferner $\frac{1}{2} n(n+3)$ die Dimension des Systems aller Kurven n-ter Ordnung ist, die Bestimmung, einen gegebenen Punkt als t-fachen zu enthalten, $= \frac{1}{2} t(t+1)$ Bedingungen zählt, so würde, falls die durch die vorgeschriebenen Vielfachheiten auferlegten Bedingungen von einander unabhängig wären, die Dimension des Kurvensystems durch den Ausdruck $\frac{1}{2} n(n+3) - \sum_{t=1}^{\varrho} \frac{1}{2} t(t+1) a_t$ dargestellt werden. Die wirkliche Dimension kann jedoch auch größer sein als diese Zahl, welche der Verf. „virtuelle Dimension“ nennt. Das Geschlecht p endlich wird durch die Formel $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \sum_{t=1}^{\varrho} \frac{1}{2} t(t-1) a_t$ gegeben. Als adjungierte Kurven vom Index j bezeichnet der Verf. diejenigen Kurven der Ordnung $n-3j$, welche jeden r-fachen Basispunkt $(r-j)$-mal enthalten. Die Anzahlen der Schnittpunkte, welche von den adjungierten Kurven der Indizes $1, 2, \ldots$ auf einer allgemeinen Systemkurve (von den Basispunkten abgesehen) ausgeschnitten werden, bilden eine Folge, in der jedes Glied um mindestens $D - 2p + 2$ (im algebraischen Sinne) kleiner ist als das vorhergehende. Aus diesem ersten Fundamentaltheorem ergibt sich eine Reihe wichtiger Folgerungen: Daß bei einem System vom Geschlechte 0 schon adjungierte Kurven vom Index 1 nicht mehr vorhanden sind, daß bei einem solchen vom Geschlechte 1 und einer Dimension $\geqq 2$ eine einzige adjungierte Fundamentalkurve vom Index 1 existiert, während die mit höherem Index fehlen, daß endlich allgemein bei einem System vom Geschlechte $p \geqq 1$, wenn es regulär ist, d. h. virtuelle und wirkliche Dimension übereinstimmen, adjungierte Kurven von größerem Index als ω nicht existieren können, sobald

$$p - 1 + \frac{2p-1}{\omega} \leqq K$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, $\omega(D - 2p + 2) > 2p - 2$ ist.

Für die Untersuchung, ob ein lineares irreduzibles Kurvensystem durch Cremonasche Transformationen eine Erniedrigung des Grades erfahren kann, ist die Bestimmung des kleinsten Index, von welchem an keine adjungierten Kurven mehr existieren, von größter Wichtigkeit. Ist j dieser Index und die Ordnung des Systems durch Cremonasche Transformationen nicht mehr zu erniedrigen, so muß entweder $n \leqq 3j - 1$ sein, oder aber das System muß wenigstens einen Punkt besitzen, dessen Vielfachheit $\geqq n - 2j + 1$ ist. Noch bestimmtere Bedingungen lassen sich angeben, falls man außerdem weiß, daß adjungierte Kurven vom Index $j - 1$ existieren. Alsdann muß entweder $2j - 3 \leqq n \leqq 3j - 1$ sein, oder es muß mindestens ein genau $(n - 2j + 1)$- oder $(n - 2j + 2)$-facher Punkt existieren. Auf Grund dieser allgemeinen Untersuchungen und solcher, welche sich ihnen unmittelbar anschließen, lassen sich die Kurvensysteme von kleiner Geschlechtszahl sehr übersichtlich behandeln. Unter den Systemen vom Geschlechte 0 sind von niedrigster Ordnung nur: die einzelne Gerade, der gewöhnliche Strahlenbüschel, das Netz aller Geraden der Ebene, die Kegelschnittsysteme ohne gemeinsame Punkte, die linearen Systeme von Kurven n-ter Ordnung $(n \geqq 2)$, welche einen $(n - 1)$-fachen Basispunkt und eventuell noch andere einfache Basispunkte besitzen. Auf irgend eines dieser Systeme läßt sich also jedes System vom Geschlechte 0 transformieren, wobei in dem zuletzt angeführten Falle noch bezüglich der Basispunkte und ihrer Tangenten gewisse Bedingungen erfüllt werden können. Bezüglich der Kurvensysteme vom Geschlechte 1 gilt, soweit ihre Dimension $\geqq 2$ ist, der Satz, daß sie sich entweder auf lineare Systeme dritter Ordnung mit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 einfachen Basispunkten oder auf Systeme vierter Ordnung mit zwei doppelten Basispunkten reduzieren lassen. Der Fall eines Büschels von Kurven des Geschlechts 1 findet seine besondere Erledigung. Auch für $p = 2$ hat der Verf. alle Systeme niedrigster Ordnung aufgestellt. Stz.

E. Duporcq. Sur certaines extensions du théorème de Poncelet. Nouv. Ann. (4) 2, 161-169.

Werden die Koordinaten der Punkte eines Kegelschnitts als rationale Funktionen eines Parameters t dargestellt, so bestimmt jede Gleichung m-ten Grades $f_1(t) = 0$ auf dem Kegelschnitt m Punkte und durch die zu ihnen gehörigen Tangenten ein vollständiges m-Eck. Aus zwei Gleichungen $f_1(t) = 0$, $f_2(t) = 0$ entspringt eine Schar von Gleichungen

$$\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) = 0,$$

und die zugehörigen vollständigen m-Ecke erfüllen mit ihren Ecken eine Kurve $(m - 1)$-ter Ordnung Γ (Darboux). Geht man von drei dem Kegelschnitt C umbeschriebenen m-Ecken P_1, P_2, P_3 oder den zugehörigen Gleichungen $f_1(t) = 0$, $f_2(t) = 0$, $f_3(t) = 0$ aus, so entspringt aus ihnen ein lineares System von ∞^2 Gleichungen

$$\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + \lambda_3 f_3(t) = 0.$$

Jeder einzelnen Gleichung entspricht ein C umbeschriebenes Polygon P, jedem im System enthaltenen linearen System von ∞^1 Gleichungen eine Kurve $(m-1)$-ter Ordnung Γ. Die sämtlichen ∞^2 Kurven Γ bilden ein lineares Netz mit $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ Schnittpunkten. Hiernach erhält man leicht eine ein-eindeutige Korrespondenz, bei welcher jeder Geraden ein Polygon P, jedem Punkte eine Kurve Γ entspricht. Ähnliche Betrachtungen gelten im Raume, wenn man den Kegelschnitt und seine Tangenten durch eine Kurve dritter Ordnung und ihre Schmiegungsebenen ersetzt. Der Verfasser beschränkt sich auf die Betrachtung der aus diesen gebildeten Tetraeder. Aus drei solchen Tetraedern entspringt ein System von ∞^2, ihre Ecken erfüllen eine Fläche zweiter Ordnung. Geht man von vier Tetraedern aus, so gelangt man zu ∞^3 solchen Flächen, deren je zwei eine Erzeugende gemein haben. Stz.

A. Mannheim. Note de géométrie. Nouv. Ann. (4) **2**, 337-343.

Der Verf. gibt die von Duporcq (Referat vorstehend) untersuchten Kurven (m), welche auf einer festen Geraden Strecken proportional den Bogenlängen abschneiden, eine Konstruktion des Krümmungsradius an, aus welcher folgt, daß beim Rollen einer Kurve (r), für deren Punkte m' der Radiusvektor mm' zum Krümmungsradius $m'c$ proportional ist, auf einer Geraden der Punkt m eine solche Kurve (m) beschreibt. Der Verf. gibt weiter zwei Konstruktionen für das Krümmungszentrum c' der Evolute von (r) und zeigt, daß die Krümmungsradien dieser Evolute zu den Längen der Tangenten von den Kurvenpunkten an einen festen Kreis proportional sind. Die Parallele zum Radiusvektor mm' durch c' schneidet den Krümmungsradius $m'c$ von (r) in einem Punkte n, dessen Ort eine Parallelkurve von (r) ist. Zum Schluß beweist der Verf. den von Duporcq in der oben erwähnten Arbeit für die Kurven (m) aufgestellten Satz. Wö.

A. Mannheim. Complément à la note de la page 337. Nouv. Ann. (4) **2**, 481-482.

Behält man die Bezeichnungen des vorigen Referats bei, und ist g der Fußpunkt des Lotes von c auf mm', h der Schnittpunkt der Parallele durch g zu $m'c$ mit mc, so ist das Lot von h auf mm' Normale des Ortes (h) von h und trifft die Parallele durch m zu cm' im Krümmungsmittelpunkte von (h) für den Punkt h. Der Ort von g ist ein Kreis, (h) ist eine Evolvente der Polarreziproken von (r) in bezug auf diesen Kreis. Wö.

F. Amodeo. Appunti e risposte. Lettera aperta ad un geometra italiano. Batt. G. **40**, 297-306.

Der Verf. verteidigt sich gegen die Kritik, welche ein ungenannter italienischer Geometer im Bolletino della Pubblica Istruzione (1901,

S. 1577) an seinen Arbeiten über Gonalität der Kurven geübt hatte, und führt die Einwände seines Gegners im wesentlichen auf Mißverständnisse zurück. Nur die Bemerkung des Kritikers, daß in der Note „Curve k-gonali di 1ª e 2ª specie“ (Annali di Mat. **24**, 1-22; F. d. M. **26**, 656, 1895) die Berechnung der Basispunkte in der letzten Regel der S. 6 nicht stimmt, und daß daher der erste Lehrsatz der S. 7 unrichtig ist, erkennt der Verf. als zutreffend an; ebenso den Einwand gegen die dritte Definition der Gonalität in der Arbeit „Uno sguardo alle curve algebriche“ (F. d. M. **31**, 575, 1900). Wö.

E. J. Nanson. The pedal equation of a plane curve, with two geometrical interpretations for the power of a point with respect to a curve. Messenger (2) **32**, 64-66.

Für einen willkürlich genommenen Anfangspunkt O sei r der Radius, p das Lot zur Tangente von O. In Quart. J. **13**, 16-18 (F. d. M. **6**, 424, 1874) hatte Warren behauptet, daß bei beliebiger Lage von O gegen einen Kegelschnitt zwischen r und p die Gleichung bestehe $(1, r^2, r^4)(1, p^2, p^4) = 0$. Dagegen beweist jetzt Nanson, daß bei einer Kurve n-ter Ordnung und m-ter Klasse $[m = n(n-1)]$, die „Pedalgleichung“ von der Form ist:

$$r^{4m} f_0(p^2) + r^{4m-2} f_1(p^2) + \cdots + f_{2m}(p^2) = 0,$$

wo $f_k(p^2)$ von der Ordnung $2n$ in p^2 ist. Daher müsse die Warrensche Gleichung ersetzt werden durch:

$$(r^8, r^6, r^4, r^2, 1)\ (p^8, p^6, p^4, p^2, 1) = 0.$$

Sind N, T, A bezw. die Produkte der Normalen, Tangenten, Lote auf die Asymptoten von dem willkürlichen Nullpunkte, so ist immer $N = AT$. Dies führt zu zwei geometrischen Deutungen für den algebraischen Ausdruck, der, gleich Null gesetzt, die Gleichung der Kurve darstellt. Nennt man diesen Ausdruck die Potenz eines Punktes bezüglich der Kurve, so sind N/F und AT/F beide gleich der Potenz des Punktes (ξ, η), von dem die Tangenten, Normalen, Asymptotenlote gezogen sind, aber noch multipliziert mit einer Konstante. F ist das Produkt der Fokaldistanzen des Ursprungs. Lp.

J. Neuberg. Die Verwandtschaft zwischen einer Geraden und ihrem Lotpunkt in bezug auf ein Dreieck. Arch. der Math. u. Phys. (3) **3**, 89-93.

Verf. gibt infolge des neuerlichen Interesses für das Problem mit einigen Zusätzen die Resultate seiner Arbeit Nouv. Corresp. mathém. **4** (1878) wieder. Über die Definition des Lotpunkts M einer Geraden m in bezug auf ein Dreieck vgl. Cwojdziński (Archiv (3) **1**; F. d. M. **32**, 580, 1901). Von den Resultaten führen wir an: 1. Die Verwandtschaft (m, M) ist dreieindeutig; 2. bewegt sich M auf einer Geraden n,

so umhüllt m eine Parabel, deren Leitlinie zu n parallel ist; 3. Eigenschaft der vier einem Vierseit angehörenden Lotpunkte. Verf. bringt ferner seine synthetischen Untersuchungen mit den Gleichungen von Cwojdziński in Zusammenhang. D.

A. Emch. Applications of elliptic functions to problems of closure. Univ. Colorado Studies 1, 81-133.

R. Zahler. Das Abelsche Theorem für Grundkurven, die in Gerade und Kegelschnitte zerfallen. Diss. München.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

L. Ripert. Notes sur le quadrilatère. Assoc. Franç. Ajaccio (1901) 30, 106-118.

„Die recht zahlreichen Sätze, die über das vollständige Viereck bekannt sind, werden im allgemeinen als zu dem Gebiete der Elementargeometrie gehörig betrachtet. Bei ihrer analytischen Untersuchung erkennt man, daß sie zahlreiche Zusätze haben, und daß man viele neue oder wenig bekannte, interessante Eigenschaften mit ihnen in Zusammenhang bringen kann. Um ein Beispiel anzuführen, so ist bekanntlich der Miquelsche Kreis derjenige, welcher durch die Mittelpunkte der vier Umkreise der von den Seiten des Vierseits gebildeten vier Dreiecke und den diesen vier Kreisen gemeinschaftlichen Punkt geht. Die geometrische Bestimmung anderer merkwürdiger Punkte dieses Kreises scheint schwierig zu sein; analytisch vorgehend, bemerkt man jedoch leicht noch 14 Punkte, so daß dieser Kreis ein Kreis der 19 Punkte wird. Die Gesamtheit der Eigenschaften aller Art beginnt ein Gebiet zu bilden, das man die Geometrie des Vierseits nennen könnte. Der Zweck unserer Note ist die Darlegung des Standes der Frage.“ Lp.

Ch. Ibrügger. Ableitung einiger Eigenschaften der Kegelschnitte im Anschluß an die bei der Dreiecksberechnung vorkommenden Formeln. Festschrift des Friedr. Wilhelms-Gymn. Greifenberg i. Pom. 15 S. 1 Tafel. 8°.

Um dem Schüler des humanistischen Gymnasiums, dem ein systematischer Unterricht in der analytischen Geometrie nicht zuteil wird, die von den Lehrplänen geforderte „möglichst einfach gehaltene Darstellung einiger Grundeigenschaften der Kegelschnitte“ durch Anknüpfung an Bekanntes zu vermitteln, behandelt Verf. die Kegelschnittlehre als Anwendung der dem Gymnasialprimaner geläufigen Trigonometrie. Durch die ganze

Darstellung schimmern die zwischen konfokalen Kegelschnitten bestehenden Beziehungen hindurch.

Der Ausdruck „Konjugationswinkel“ für den von zwei konjugierten Durchmessern gebildeten Winkel ist wohl neu. Z.

A. Thaer. Bestimmung von Gestalt und Lage eines Kegelschnitts aus einer Gleichung zweiter Ordnung ohne Koordinatentransformation. Pr. Oberrealschule vor dem Holstentor. Hamburg. 39 S. 8°. 1 Tafel.

Die Arbeit gibt eine für die Schule berechnete Darstellung der Umformung der gegebenen Gleichung in Quadrate linearer Ausdrücke, aus denen konjugierte Durchmesser, Achsen, Mittelpunkt usw. berechnet werden; ausführliche numerische Beispiele für jeden möglichen Fall gehen der allgemeinen Entwicklung voran. R. M.

F. J. Studnička. Eine neue analytische Lösung des Achsenproblems der Kegelschnitte. Prag. Ber. 1902, No. 45, 4 S.

Um die Mittelpunktsgleichung eines Kegelschnittes

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + \frac{H_3}{H_2} = 0,$$

wobei unter H_3 und H_2 Hessianen der bezüglichen ternären quadratischen Form zu verstehen sind, auf die Achsenform zu bringen, benutzt der Verf. die bekannten, durch bloße Drehung der Koordinatenachsen um den Winkel α bedingten drei Transformationsformeln:

$$\frac{\cos^2\alpha}{a_0^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b_0^2} = a, \quad -\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{a_0^2} + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{b_0^2} = b,$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{a_0^2} + \frac{\cos^2\alpha}{b_0^2} = c,$$

aus welchen sowohl der Wert für $\cos 2\alpha$, als auch a_0 und b_0 einfach bestimmt werden können und schließlich für die gewünschten Halbachsen die Werte

$$a_1^2 = -\frac{H_3}{H_2}a_0^2, \quad b_1^2 = -\frac{H_3}{H_2}b_0^2$$

hervorgehen. Sda.

G. Fontené. Sur deux coniques ayant en commun un point connu. Revue de Math. spéc. 12, 497.

Sind $U = 0$ und $V = 0$ die Gleichungen zweier Kegelschnitte, die den gegebenen Punkt (p, q, r) gemein haben, so findet man als Gleichung eines Kegelschnittes, der durch die drei andern gemeinsamen Punkte der beiden ersten Kegelschnitte geht:

$$\begin{vmatrix} rU'_x + zU'_p & rU'_y + zU'_q \\ rV'_x + zV'_p & rV'_y + zV'_q \end{vmatrix} + \lambda U + \mu V = 0.$$

Zch.

A. M. Nesbitt. Question 14917. Ed. Times (2) 2, 105-107.

Drei Kegelschnitte S_1, S_2, S_3 haben einen gemeinschaftlichen Punkt O. Die drei anderen Schnittpunkte von S_2 und S_3 sind die Ecken eines Dreiecks Δ_1, von S_3 und S_1 die eines Dreiecks Δ_2, von S_1 und S_2 die eines Dreiecks Δ_3. Die neun Seiten der drei Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ berühren einen und denselben Kegelschnitt. Lp.

A. Schwarz. Untersuchungen über die Krümmung der Kegelschnitte. Monatsh. f. Math. 13, 185-293.

Auf einem Kegelschnitt wird durch das Gebüsch der Kreise der Ebene eine Involution vierter Ordnung und dritter Stufe ausgeschnitten. Nimmt man die Gleichungen der Kegelschnitte in der Form

$$E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \; H \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \; P \equiv y^2 - 2px = 0$$

an, und geht man von dieser zur Parameterdarstellung

$$E \rightsquigarrow \left[x = \frac{a}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right), \; y = \frac{b}{2i}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\right],$$

$$H \rightsquigarrow \left[x = \frac{a}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right), y = \frac{b}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\right], \; P \rightsquigarrow \left[x = \frac{\lambda^2}{2p}, \; y = \lambda\right]$$

über, so besteht zwischen den zu den vier Schnittpunkten mit einem Kreise gehörigen Parameterarten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ in den beiden ersten Fällen die Relation $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = 1$, im letzten die Relation $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$. Ausgehend von dieser Darstellung, erhält man leicht den Satz, daß die Verbindungslinie zweier der vier Punkte und das Spiegelbild der Verbindungslinie der beiden übrigen rücksichtlich einer Symmetrieachse des Kegelschnittes einander parallel sein müssen. Hieraus ergibt sich für den Krümmungskreis, für welchen drei der Punkte zusammenfallen, die einfache Konstruktion: Man suche zu dem Punkte P des Kegelschnittes den bezüglich einer Achse symmetrischen P', ziehe die Tangente in P', zu ihr die Parallele durch P. Die letztere trifft den Kegelschnitt in demjenigen Punkte Q, in welchem er vom Krümmungskreis von P zum zweiten Male getroffen wird, wonach dieser sich unmittelbar konstruieren läßt. Jedem Punkte P des Kegelschnittes entspricht in dieser Weise eindeutig ein Punkt Q, und diese Beziehung ist, wie sich aus den angegebenen Relationen zwischen den Parametern $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ der Schnittpunkte mit einem Kreise unmittelbar ergibt, für den Fall

der Parabel eindeutig umkehrbar. In diesem Falle ist die Enveloppe der Verbindungsgeraden PQ wiederum eine Parabel. Im Falle der Ellipse, welchen der Verf. besonders ausführlich behandelt (und ebenso im Falle der Hyperbel), entsprechen jedem Punkte Q drei Punkte P, die Enveloppe $\mathfrak{E}$ der Verbindungsgeraden muß natürlich wiederum eine rationale Kurve sein, da ihre Punkte $\mathfrak{P}$ den Punkten P der Ellipse E eindeutig zugeordnet sind. $\mathfrak{E}$ ist eine Kurve sechster Ordnung und vierter Klasse, von ihren zehn Doppelpunkten sind vier gewöhnliche und sechs Spitzen. Unter den letzteren befinden sich auch die imaginären unendlich fernen Punkte der Ellipse. Was die Gestalt von $\mathfrak{E}$ anlangt, so ergibt sich, daß die Kurve ganz im Endlichen verläuft, für den Inhalt der von ihr eingeschlossenen Fläche ergibt sich der Wert $f = \frac{3}{8} ab\pi$. (Vergl. Tisserand: Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal. Probl. 46. Daselbst ist die Kurve abgebildet. Erste Aufl. 1876. Lp.) Dagegen führt die Rektifikation auf elliptische Integrale. Aber auch die Aufgabe der Rektifikation gestaltet sich sehr einfach, wenn man statt der gewöhnlichen eine Cayleysche Maßbestimmung zugrunde legt. Man wende nämlich auf die Ebene diejenige affine Transformation T an, welche die Punkte der großen Ellipsenachse festhält, die Ellipse selbst aber in den über ihrer großen Achse errichteten Kreis K überführt. Wird dann als Cayleysches Maß einer Strecke das gewöhnliche Maß derjenigen Strecke genommen, in welche sie durch T übergeführt wird, so wird die Länge von $\mathfrak{E} = 12a$. Die Transformation T spielt auch in den folgenden Untersuchungen eine wichtige Rolle, welche sich auf die der Ellipse E einbeschriebenen Dreiecke (Tripeldreiecke) beziehen, deren drei Ecken P_1, P_2, P_3 nach der in diesem Referat gebrauchten Bezeichnung demselben Punkte Q entsprechen. Die Punkttripel P_1, P_2, P_3 bilden eine Involution dritter Ordnung und erster Stufe. Für jedes Tripeldreieck $P_1 P_2 P_3$ gilt: 1. der Schwerpunkt fällt in den Ellipsenmittelpunkt, 2. der Flächeninhalt ist $= \frac{3}{4} ab\sqrt{3}$. Die hier angegebenen invarianten Eigenschaften der Tripeldreiecke sind die einzigen unabhängigen. Maxima und Minima des Umfangs erhält man für diejenigen (gleichschenkligen) Tripeldreiecke, deren Spitze in einen Ellipsenscheitel fällt. Die Tripeldreiecke sind Poldreiecke bezüglich eines imaginären Kegelschnittes, die Mittelpunkte ihrer Umkreise erfüllen eine zu E homothetische Ellipse mit den Halbachsen $(a^2 - b^2)/4b$ und $(a^2 - b^2)/4a$. Durch die Transformation T werden die Tripeldreiecke in die gleichseitigen, dem Kreise K einbeschriebenen Dreiecke übergeführt, wonach ein Teil der angeführten Eigenschaften in Evidenz tritt. Da zwischen den Punkten P von E und den Punkten $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{E}$ eine ein-eindeutige Beziehung statthat, so erhält man, entsprechend dem System der Tripeldreiecke auf E, ein solches auf $\mathfrak{E}$. Für diese Dreiecke gilt: 1. ihre Schwerpunkte erfüllen die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{4}$, 2. ihr Inhalt hat den konstanten Wert $\frac{27\sqrt{3}}{16} ab$.

Wählt man für die Ellipse die Parameterdarstellung $x = a \cos\varphi$, $y = b \sin\varphi$, so kann man die Kotangenten der Winkel eines Tripel-

dreiecks von E und ebenso die Quadrate ihrer Seiten als Funktionen von φ darstellen. Alle diese Funktionen genügen der Differentialgleichung $\frac{d^2v}{d\varphi^2}+4\frac{dv}{d\varphi}=0$, und zwar bilden sowohl die Kotangenten der drei Winkel, als auch die Quadrate der drei Seiten je ein Fundamentalsystem von Integralen dieser Gleichung. Die Gleichung besitzt eine kontinuierliche, eingliedrige Transformationsgruppe, welche der Verf. aufstellt.

Stz.

R. F. Davis. Question 14492. Ed. Times (2) 1, 28-29.

Die Tangente in einem beliebigen Punkte P des Kegelschnitts

$$ax^2+2hxy+by^2+2fy=0$$

treffe die x-Achse in T, und auf PT werde der Punkt Q so angenommen, daß Winkel $QOT=2POT$. Dann ist der Ort von Q eine Gerade. Der Satz verallgemeinert das Theorem von Frégier.

Lp.

E. N. Barisien, G. Longobardi. Quistioni 608, 609. Periodico di Mat. (2) 5, 144-146.

608. Ort der Brennpunkte und der Scheitel der Kegelschnitte, die zwei gegebene Geraden in zwei gegebenen Punkten berühren.

609. Ort der Scheitel der Hyperbeln, welche eine feste Asymptote haben und eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren. — Beide Örter werden als Kurven vierter Ordnung bestimmt. Lp.

R. E. Allardice. On some systems of conics connected with the triangle. Edinb. M. S. Proc. 20, 40-43.

Zuerst werden die Bedingungen dafür aufgesucht, daß ein Kegelschnitt ein Paar isotomischer Linien zu Asymptoten hat, oder daß er mit irgend einem umbeschriebenen Kegelschnitte ähnlich, ähnlich liegend und konzentrisch ist. Die einzigen nicht ausgearteten ein- und umbeschriebenen Kegelschnitte, die ähnlich, ähnlich liegend und konzentrisch sind, werden durch die größten und kleinsten ein- und umbeschriebenen Ellipsen gegeben. Danach werden die Bedingungen dafür gefunden, daß ein Kegelschnitt mit irgend einem einbeschriebenen Kegelschnitte konfokal ist oder ein Paar isogonaler Punkte zu Brennpunkten hat; auch wird die Gleichung des Systems von Kegelschnitten aufgestellt, die mit einem gegebenen einbeschriebenen Kegelschnitt konfokal sind. Einige besondere Fälle werden erörtert. Gbs. (Lp.)

J. Duran Loriga. Sopra una trasformazione per rette isobariche. Mat. pure ed appl. 2, 121-129.

Gegenstand der Untersuchung ist die Transformation, bei der einer in baryzentrischen Koordinaten gegebenen Geraden $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ der Schnittpunkt α, β, γ der beiden isobarischen Geraden:

$$m\alpha + n\beta + l\gamma = 0, \quad n\alpha + l\beta + m\gamma = 0$$

zugeordnet wird. Einer Kurve n-ter Ordnung entspricht eine Kurve $2n$-ter Klasse, einer Kurve n-ter Klasse eine Kurve $2n$-ter Ordnung. Dem näheren Studium der Geraden und spezieller Kegelschnitte sowie ihrer Transformierten ist die erste Hälfte der Arbeit gewidmet. Es ergeben sich Beziehungen zum Lemoineschen Punkte eines Dreiecks, zu der dem Dreieck einbeschriebenen und umbeschriebenen Steinerschen Ellipse usf. Dieselben und einige andere Ergebnisse werden in der zweiten Hälfte als Folgerungen aus allgemeineren Eigenschaften der Transformation mittels isobarischer Geraden erhalten. Lwt.

W. Stegemann, Ed. Janisch. Lösung einer Aufgabe. Arch. der Math. u. Phys. (3) 8, 81-82.

Beweis eines von Janisch mitgeteilten Satzes über zwei perspektive Indreiecke, bezw. Umdreiecke eines Kegelschnitts durch Stegemann, der den Satz bereits früher an anderer Stelle veröffentlicht hat. Jhk.

E.-N. Barisien. Solution de la question proposée 1893. Nouv. Ann. (4) 2, 232.

Es werden alle Parabeln untersucht, welche die x-Achse im Nullpunkte berühren, und deren Leitgerade Tangenten der festen Parabel $y^2 = 2px$ sind. R. M.

W. J. Greenstreet. Question 13474. Ed. Times (2) 1, 105-107.

Die Normalen PA, PB, PC von P auf eine Parabel schneiden die Kurve zum zweiten Male in A', B', C'. Die Umkreise von ABC, $A'B'C'$ seien S und S'. Den Ort von P zu bestimmen, wenn 1. das Inkreiszentrum von S' auf der x-Achse liegt, 2. auf der y-Achse, 3. im Scheitel, 4. $A'B'C'$ gleichseitig ist, 5. der Schwerpunkt von $A'B'C'$ auf der x-Achse liegt, 6. S' durch den Scheitel geht, 7. a) S und S' sich berühren, b) sich rechtwinklig schneiden, 8. die gemeinschaftliche Sehne von S und S' die x-Achse oder die y-Achse ist. Im Falle der Ellipse den Ort von P zu finden, wenn 1. $A'B'C'D'$ ein Kreisviereck ist, 2. die Tangenten in A', B', C', D' Tangenten eines Kreises S'' sind. Den Ort der Mittelpunkte von S' und S'' zu finden. Für alle konfokalen Ellipsen ist der Ort von P in 2. und der von S'' unveränderlich. Lp.

R. F. Davis. Question 14661. Ed. Times (2) **1**, 50.

Die Brennpunkte einer Ellipse $\sqrt{l\alpha}+\sqrt{m\beta}+\sqrt{n\gamma}=0$ werden durch die Gleichungen:

$$\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}=lt-2\cos A,\ \frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}=mt-2\cos B,$$
$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=nt-2\cos C,$$
$$lmnt^2-t(l^2+\cdots+2mn\cos A+\cdots)+4\,(l\sin B\sin C+\cdots)=0$$

gegeben und liegen auf dem Kegelschnitte:

$$\alpha\,\{l\alpha-(m+n\cos A)\,\beta-(m\cos A+n)\,\gamma\}+l\beta\gamma\cos A:\cdots:\cdots$$
$$=\sin A:\sin B:\sin C.$$

Lp.

L. S. de la Campa. Investigación de un lugar geométrico. Revista trim. de mat. **2**, 97-103.

Lösung der folgenden, von Barisien gestellten Frage (Interméd. **9**, 252, 1902). Von einem beliebigen Punkte T eines zu einer Ellipse konzentrischen Kreises ziehe man die Tangenten an die Ellipse; die Berührungspunkte seien A, B. Welches ist der Ort der vierten Ecke jedes der drei Parallelogramme, von denen A, B, T drei Ecken sind? Für den Ort derjenigen Ecke, die innerhalb des Winkels ATB liegt, ergibt sich $R\varrho=2r^2-R^2$; hierin bezeichnet R den Radius des gegebenen Kreises, r und ϱ Vektoren der Punkte der Kurve und der Ellipse, die zu demselben Winkel mit der Achse gehören und vom Mittelpunkte der Ellipse ausgehen. Tx. (Lp.)

E. N. Barisien. Quistione 601. Periodico di Mat. (2) **4**, 329-330.

ABC sei ein gegebenes Dreieck. Man zeichne die Ellipse E mit den Brennpunkten B, C und der großen Achse $2a$, ebenso die Ellipse E' mit den Brennpunkten C, A und der großen Achse $2a$. Läßt man a sich ändern, so ist der Ort zweier Schnittpunkte der Ellipsen E und E' eine Gerade, und die Verbindungslinie der beiden anderen Schnittpunkte ist einer gegebenen Geraden parallel. — Beweis und Verallgemeinerung von Rozzolino. Lp.

G. Biasi. Quistione 594. Periodico di Mat. (2) **4**, 281-282.

Wenn durch einen Punkt der Steinerschen Ellipse eines Dreiecks (umbeschriebene Ellipse mit Schwerpunkt des Dreiecks als Mittelpunkt) die Parallelen zu den Seiten und den Medianen des Dreiecks gezogen werden, so liegen die 18 Schnittpunkte dieser Geraden mit jenen Seiten zu je dreien in sechs Geraden (mit Einschluß der Geraden im Unend-

lichen), welche nebst den Seiten Tangenten einer und derselben Parabel sind. Beweis von Gabrielina Longobardi. Lp.

ZÜGE. Gleichung und Kurve der harmonischen Teilung. Unterrichtsbl. f. Math. 8, 39.

Benutzt zur Darstellung die gleichseitige Hyperbel $\xi\eta = f^2$ ein Koordinatensystem mit dem Anfangspunkte $-f, -f$, für das dann die Gleichung gilt:

$$\frac{1}{f+\xi} + \frac{1}{f+\eta} = \frac{1}{f}.$$

Lp.

R. TH. VAHLEN. Über kubische Konstruktionen. Arch. der Math. u. Phys. (3) 8, 112-120.

Daß jede kubische Konstruktionsaufgabe mittels des Zirkels, Lineals und einer beliebigen festen Parabel lösbar ist, zeigte schon Descartes, wie aus der ausführlichen historischen Übersicht des Verf. zu entnehmen ist. Daß an Stelle der Parabel ein beliebiger fester Kegelschnitt treten kann, bewiesen rein geometrisch zuerst Smith und Kortum. Verf. gibt hierfür einen analytisch-geometrischen Beweis. Man erhält durch die besondere Form der aufzulösenden Gleichungen (wie entsprechend auch schon bei der Parabel) unmittelbar die Bedingung dafür, daß vier Punkte einer Ellipse, resp. einer Hyperbel auf einem Kreise liegen. Daß, um die Konstruktion zu ermöglichen, nur ein Stück des Kegelschnittes gegeben zu werden braucht, zeigte für die Parabel Descartes, für Ellipse und Hyperbel wieder rein geometrisch Smith. Verf. gibt auch hierfür den analytischen Beweis. Als Beispiele werden behandelt 1. das Normalenproblem, besonders bei der Parabel (anschließend Diskussion der biquadratischen Gleichung); 2. die Konstruktion des regulären Siebenecks.

D.

R. E. ALLARDICE. On some curves connected with a system of similar conics. Annals of Math. (2) 8, 154-160.

Schoute hat in einer Arbeit „Application de la transformation par droites symétriques à un problème de Steiner“ (F. d. M. 15, 538, 1883) auf geometrischem Wege die Kurven bestimmt, auf welchen die Mittelpunkte, Brennpunkte und Scheitelpunkte eines Systems ähnlicher, einem Dreieck umbeschriebener Kegelschnitte liegen, sowie die von den Asymptoten, Achsen, und Direktrixlinien umhüllten Kurven. In der vorliegenden Arbeit werden die Gleichungen einiger von diesen Kurven analytisch bestimmt, wobei auch das Zerfallen der von den Asymptoten umhüllten Kurve sechster Klasse in zwei Kurven dritter Klasse festgestellt und begründet wird. Schg.

Weitere Literatur.

E. N. Barisien. Sur une transformation par rapport à une conique. Mathesis (3) 2, 134-135.

T. J. I'A. Bromwich. Notes on conics in areals. Math. Gazette 2, 175-179.

J. Linneborn. Die Fokaleigenschaften der Gebilde zweiter Ordnung in der Riemannschen Raumform. Diss. Münster. 26 S. 8°.

A. Mineur. Un théorème de M. Appell. Mathesis (3) 2, 13-14. Mn.

A. Pilgram. Die Scharschar der Kegelschnitte, die ein gegebenes Tangentendreieck haben. Diss. Erlangen. 27 S. 8° u. 1 Taf.

D. Andere spezielle Kurven.

A. C. Dixon. On plane cubics. London M. S. Proc. 34, 291-296.

Einige Ergänzungen zur Salmonschen Darstellung der korrespondierenden Punkte auf der ebenen Kurve dritter Ordnung leitet Verf. ein durch die Lösung des Problems, vier Gerade zu finden, deren sechs Schnittpunkte auf der Kurve liegen. Es ergeben sich drei Serien von je ∞^2 einbeschriebenen vollständigen Vierseiten; die acht Seiten zweier Vierseite derselben Serie berühren einen Kegelschnitt; je zwei Gegenecken sind korrespondierende Punkte. R. M.

R. A. Roberts. On certain properties of the plane cubic curves in relation to the circular points at infinity. American J. 24, 61-86.

Verf. leitet eine große Reihe von Sonderkurven ab, die in ihren Schnittpunkten einfache Winkelbeziehungen ergeben. R. M.

H. F. Stecker. Non-Euclidean properties of plane cubics and of their first and second polars. American J. 24, 399-408.

Fortsetzung der F. d. M. 31, 593, 1900 angezeigten Arbeit desselben Verf. R. M.

P. Sauerbeck. Der Satz von de Gua über die Wendepunkte der Kurven dritter Ordnung. Pr. Gymn. Reutlingen. 8 S. 8° (Sonderabdr.).

Der Beweis des Satzes, daß eine durch zwei Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung gehende Gerade die Kurve noch in einem dritten Wendepunkte schneidet, wird nach Angaben seines Entdeckers entwickelt. Js.

T. J. I'A. BROMWICH. The line of inflexions of a plane unicursal cubic. Messenger (2) 32, 113-115.

Eine unikursale kubische Kurve werde durch die Gleichungen dargestellt:

$$\lambda x_r = a_r t^3 + b_r t^2 + c_r t + d_r = 0 \qquad (r = 1, 2, 3).$$

Dann liegen die drei Wendepunkte auf der Geraden:

$$\left\{\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} d_3 & a_2 \\ d_2 & a_3 \end{vmatrix}\right\} x_1 + \left\{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix}\right\} x_2$$
$$+ \left\{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix}\right\} x_3 = 0.$$

Hat die Kurve, auf den Doppelpunkt als Ursprung bezogen, die Gleichung:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3 + fx^2y + gxy^2 + hy^3 = 0,$$

so erhält man als Gleichung der gesuchten Geraden:

$$(3cd - bf + ag)\,x + (3ah - bg + cf)\,y + 4ac - b^2 = 0.$$

Lp.

J. GRIFFITHS. Question 10198. Ed. Times (2) 2, 109-111.

Wenn die Koordinaten x, y, z eines Punktes P seinen Abständen von den Seiten des Bezugsdreiecks proportional sind, so ist der Ort eines Punktes P, dessen Fußpunktkreis den Neunpunktekreis berührt, die kubische Kurve:

$$x(y^2 - z^2)\cos A + y(z^2 - x^2)\cos B + z(x^2 - y^2)\cos C = 0.$$

Tucker macht darauf aufmerksam, daß diese Frage fast genau übereinstimmt mit einer von F. D. Thomson, gelöst von Hirst in Ed. Times 2, 57 (1864). Lp.

M. J. VAN UVEN. Quelques remarques sur la strophoïde oblique. Archives du Musée Teyler (2) 8, 1-12.

Beweis des Satzes: Wenn in einer Ebene drei Punkte $\varDelta$, D_1, D_2 angenommen werden, so beschreibt ein unter der Voraussetzung $\angle D_1 P \varDelta = \angle \varDelta P D_2$ beweglicher Punkt P eine schiefe Strophoide. Weiter ergibt sich, daß für jede zirkulare kubische Kurve mit einem Doppelpunkte eine Erzeugungsweise auf diesen Satz gegründet werden kann.

Kl.

G. MANFREDINI. Sui pentagoni conjugati ad una quartica e sugli esagoni conjugati ad una quintica. Batt. G. 40, 16-25.

In einer voraufgegangenen Arbeit (F. d. M. 32, 595, 1901) hatte der Verf. die Polvierecke einer ebenen Kurve dritter Ordnung unter-

sucht; er wendet sich nunmehr zu den Polfünfecken einer Kurve vierter Ordnung C_4 und den Polsechsecken einer Kurve fünfter Ordnung C_5.

Es gibt ∞^5 Polfünfecke einer C_4; hält man daher zwei Ecken A_1, A_2 eines solchen fest, so beschreiben die drei übrigen Ecken A_3, A_4, A_5 eine durch A_1, A_2 gehende C_5, wie leicht daraus folgt, daß A_3, A_4, A_5 ein Poldreieck bilden in bezug auf die gemischte konische Polare von A_1, A_2. Das Punktepaar A_1, A_2 beschreibt die kovariante Kurve $S = 0$. Hält man dagegen nur eine Ecke A_1 fest, so sind die Vierecke $A_2 A_3 A_4 A_5$ der vier übrigen Punkte zwei völlig verschiedenen Kegelschnittnetzen einbeschrieben, und zwar geht durch jedes Viereck im allgemeinen ein Kegelschnitt beider Netze, während umgekehrt jeder Kegelschnitt noch ∞^1 solcher Vierecke enthält, die auf ihm eine biquadratische Involution bilden.

Zu einer C_6 gehören ∞^6 Polsechsecke. Hält man drei Ecken fest, so gibt es noch fünf Polsechsecke. Bei zwei festen Ecken sind die ∞^2 Restvierecke wiederum zwei Kegelschnittnetzen einbeschrieben; durch jedes Viereck geht je ein Kegelschnitt, und jeder Kegelschnitt enthält vier solcher Vierecke. My.

E. N. Barisien. Sur une génération du limaçon de Pascal. Assoc. Franç. Ajaccio (1901) **30**, 124-151.

Der Verf. geht von der folgenden bekannten Erzeugung aus: Sind zwei Kreise um C und C' als Mittelpunkte gegeben, so besteht der Ort des Schnittpunktes zweier zueinander senkrechten Geraden, von denen die eine den ersten, die andere den zweiten Kreis berührt, aus zwei Pascalschen Schnecken, die zu der Zentrale CC' beider Kreise symmetrisch liegen. Der Doppelpunkt J der Schnecke liegt auf dem Kreise, der CC' zum Durchmesser hat; die Symmetrieachse der Schnecke ist die Verbindungslinie des Mittelpunktes von CC' mit J. Jeder der Kreise um C und C' berührt die Schnecke zweimal; die vier Berührungspunkte liegen auf einer Parallele zu CC', die OJ in S treffe. Die Radien der beiden gegebenen Kreise seien R und R', $CC' = 2a$. Ist $R^2 + R'^2 = 4a^2$, so wird die Schnecke eine Kardioide. Eine große Anzahl von Örtern für J, S und die Scheitel der Schnecke werden untersucht, wenn die Punkte C und C' fest bleiben, dagegen R und R' variieren, nämlich so, daß:

$$R \pm R' = K,\ RR' = K^2,\ R^2 \pm R'^2 = K^2,\ R'/R = K,$$
$$R = K,\ 1/R \pm 1/R' = 1/K,\ 1/R^2 \pm 1/R'^2 = 1/K^2,$$

wo K immer eine Konstante bezeichnet. Umgekehrt werden dann zu einer gegebenen Schnecke die beiden Kreise C und C' konstruiert und zur Herleitung von Eigenschaften der Pascalschen Schnecke benutzt. Während die letztere Kurve als orthoptische Kurve zweier Kreise hiernach allseitig durchgearbeitet erscheint, wird zuletzt noch gezeigt, daß sie auch allgemein die isoptische Kurve zweier Kreise ist; doch wird dieser Gedanke

nicht weiter verfolgt, „weil diese Untersuchung ziemlich verwickelt werden zu müssen scheint". Lp.

E. N. Barisien. Contributo allo studio delle quartiche binodali. Mat. pure ed appl. 2, 129-137.

Zieht man im Punkte P an die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

die Tangente und beschreibt um P mit dem Brennstrahl PF den Kreis, so besteht der geometrische Ort der Schnittpunkte dieses Kreises mit der Tangente aus zwei Ovalen, die zusammen eine spezielle Kurve vierter Ordnung bilden, — nicht, wie es zunächst scheint, eine Kurve sechster Ordnung. Die Kurve wird diskutiert, die Konstruktion der ausgezeichneten Punkte und der zugehörigen Tangenten angegeben. Der Flächeninhalt jedes der beiden Ovale ist $2\pi a^2$. Lwt.

H. Lez. Solution d'une question proposée (1505). Nouv. Ann. (4) 2, 566-574.

Geometrischer Ort der Projektion eines Punktes des Dreiecksumkreises auf die ihm zugehörige Simpsonsche Gerade ist eine Unikursalkurve vierter Ordnung, und Einhüllende des projizierenden Lotes ist die dreispitzige Hypocykloide, die den Umkreis dreifach berührt. R. M.

W. R. Westropp Roberts. Some properties of a certain quintic curve. Dublin Proc. 24 (A), 34-46.

Der Artikel beschäftigt sich zuerst mit einigen allgemeinen Beziehungen, die für Kurven fünfter Ordnung mit einem dreifachen Punkte gelten. Die Gleichung hat die Gestalt $Az^2-2Bz+C=0$; dabei ist der dreifache Punkt O der Schnittpunkt der x- und der y-Achse, A eine binäre kubische Form in x und y, B eine binäre Form vierten, C fünften Grades in denselben Variabeln, z eine Linie, welche durch die Punkte geht, in denen die fünf Linien durch O, deren Gleichung $C=0$ ist, die Kurve treffen. Die Koordinaten eines Punktes werden zuerst in Gliedern mit einem Parameter θ ausgedrückt, und die Beziehungen zwischen den Werten von θ für die Punkte, in denen eine beliebige Linie $z=lx+my$ die Kurve trifft, werden aufgestellt. Die Parameter der sieben Punkte (außerhalb O), in denen ein beliebiger Kegelschnitt durch den dreifachen Punkt O der Kurve fünfter Ordnung begegnet, befriedigen dieselben Beziehungen, und es wird ermittelt, daß für solche Kurven fünfter Ordnung eine Theorie der Residuen besteht, ähnlich wie die Sylvestersche Residuentheorie für die kubische Kurve. Dann wird der besondere Fall behandelt, bei welchem die Gleichung

von der Gestalt ist: $Az^2 - 2Bz + AQ = 0$. Die Tangenten in dem dreifachen Punkte treffen die Kurve nochmals in drei Punkten einer Geraden, die A-Punkte genannt werden. Die Gerade, auf der die A-Punkte liegen, schneidet die Kurve noch in zwei Punkten, die Q-Punkte heißen. Die zur Erörterung kommenden Sätze beziehen sich hauptsächlich auf die Q-Punkte. Gbs. (Lp.)

J. Cardinaal. La conchoïde elliptique et les courbes qui en dérivent. Arch. du Musée Teyler (2) 8, 165-197.

Der Verf. beabsichtigt, in einem speziellen Falle unter Zuhülfenahme kinematischer Methoden darzulegen, in welcher Weise ein verwickelter singulärer Punkt einer algebraischen Kurve aus einfacheren Singularitäten entstehen kann. Er betrachtet die elliptische Konchoide, eine Kurve, welche erzeugt wird, wenn man in der Konstruktion der gewöhnlichen Konchoide die feste Gerade durch eine Ellipse (später auch durch eine Hyperbel oder Parabel) ersetzt. Der Drehpunkt des beweglichen Strahles wird in dem einen der beiden Scheitel der kleinen Achse angenommen, und daselbst erhält nun die Konchoide einen vierfachen Punkt, welcher je nach dem Achsenverhältnis und nach der Länge der auf dem Vektor abzutragenden Strecke einen bestimmten Charakter aufweist. Der Verf. denkt sich nun ein mit dem beweglichen Vektor fest verbundenes, ebenes System, und aus dem Bewegungsverhältnisse dieses Systems leitet er die verschiedenen Gestaltungen des singulären Punktes ab (vgl. F. d. M. **32**, 601, 1901). Kl.

M. Fréchet. Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois rebroussements. Nouv. Ann. (4) 2, 206-217.

Eine dreispitzige Hypocykloide besitzt ∞^2 Kegelschnitte, von denen sie dreifach berührt wird; Verf. entwickelt einige Sätze über Lage und Größe dieser Kegelschnitte in Beziehung zum Dreieck ihrer drei gemeinsamen Tangenten. R. M.

A. Gob. Note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. Liége Mém. (3) 4, 8 S.

Ort für die Mittelpunkte und die Brennpunkte der Kegelschnitte, welche eine Berührung höherer Ordnung mit der Kurve haben.

Mn. (Lp.)

H. A. Converse. On the hypocycloids of class three inscribed in a 3-line. Johns Hopkins Univ. Circ. **22**, 1-3.

Fällt man von einem Punkte eines Kreises auf die Seiten eines eingeschriebenen Dreiecks Lote, so liegen bekanntlich die drei Fußpunkte der Lote in einer Geraden, und die auf diese Weise den sämtlichen Kreispunkten entsprechenden Lote umhüllen eine — hier als Deltoid be-

zeichnete — Hypocykloide, welche man auch durch Abrollen eines Kreises im Innern eines anderen von dreimal so großem Radius erhalten kann. Der Verf. zeigt, daß dieses Steinersche Theorem auch dann gilt, wenn an die Stelle der Lote drei Linien treten, welche mit den Dreiecksseiten denselben Winkel ϑ bilden. Jedem Winkel ϑ entspricht ein Deltoid und die ∞^1 Deltoide, welche man auf diese Weise erhält, sind sämtlich dem Dreieck einbeschrieben. Der Ort der drei Spitzen dieser Deltoide ist eine rationale Kurve dritter Ordnung, die Dreiecksseiten sind ihre Wendetangenten, jeder Ecke des Dreiecks entspricht ein auf der gegenüberliegenden Seite gelegener Wendepunkt, und die Gerade, auf welcher diese Wendepunkte liegen, ist zur Eulerschen Geraden des Dreiecks (der Geraden, auf welcher Höhepunkt, Schwerpunkt und Mittelpunkt des Umkreises liegen) senkrecht. Zieht man in einer gegebenen Richtung die Tangenten an die ∞^1 dem Dreieck eingeschriebenen Deltoide, so ist der geometrische Ort der Berührungspunkte eine Gerade, und zwar eine Tangente der erwähnten Kurve dritter Ordnung.

Stz.

H. A. Converse. On a system of hypocycloids of class three. Johns Hopkins Univ. Circ. **22**, 4-5.

Die Enveloppe der Asymptoten eines Systems ähnlicher Kegelschnitte, welche einem Dreieck umbeschrieben sind, besteht aus zwei dem Dreieck einbeschriebenen Deltoiden (vergl. das vorstehende Referat). Die einem Dreieck einbeschriebenen Deltoide sind dadurch paarweise einander zugeordnet. Je zwei entsprechende Deltoide sind gleich groß, und ihre Mittelpunkte liegen symmetrisch bezüglich der Eulerschen Geraden. Umgekehrt gehört zu irgend zwei kongruenten Deltoiden einer Ebene ein bestimmtes Dreieck — das Dreieck ihrer gemeinsamen Tangenten —, rücksichtlich dessen sie einander in der beschriebenen Weise zugeordnet sind.

Stz.

F. Gomes Teixeira. Sur la courbe équipotentielle. Arch. der Math. u. Phys. (3) **8**, 132-135.

Die auf geometrischem Wege von Cayley untersuchten Gestaltungen der Kurve $m/\varrho + m'/\varrho' = k/a$, in der ϱ, ϱ' die bipolaren Koordinaten eines Punktes für zwei Brennpunkte sind, deren Entfernung a ist, bestimmt Verf. aus analytischen Entwicklungen und findet dabei einige Sätze über die Konstanz von Summe oder Produkt solcher Radien, die zu den Schnittpunkten einer Geraden gehören.

R. M.

Reinh. Müller. Zur Theorie der doppeltgestreckten Koppelkurve: Die „Krümmung" der Kurve in den Punkten mit sechspunktig berührender Tangente. Zs. für Math. u. Phys. **48**, 208-219.

Die Koppelkurve mit sechspunktig berührender Tangente ist vom Verf. in derselben Zeitschrift, Bd. 46 (s. F. d. M. **32**, 704, 1901), unter-

sucht worden. Die enge Anschmiegung der Kurve an diese Tangente gibt dem die Kurve erzeugenden Mechanismus den Wert einer Geradführung. Die Genauigkeit derselben wird in der vorliegenden Arbeit durch Berechnung der Krümmung fünfter Ordnung (im Sinne Mehmkes) im Berührungspunkte festgestellt, und zwar für den Spezialfall, daß der beschreibende Punkt K auf der Koppelgeraden selbst liegt. In diesem Falle besitzt die Kurve zwei sechspunktig berührende Tangenten und kann daher als doppelt gestreckte Koppelkurve bezeichnet werden.

Schg.

C. Burali-Forti. Antwort auf eine Frage des Herrn E. N. Barisien im Intermédiaire des Mathématiciens 2270 (1902). Arch. der Math. u. Phys. (3) 4, 181-184.

Es handelt sich darum, die Koordinaten für die Rückkehrpunkte erstens der Parallelkurve zur Ellipse (Toroide), zweitens der ersten negativen Fußpunktkurve der Ellipse in bezug auf ihren Mittelpunkt (Talbotsche Kurve) zu bestimmen. Dies geschieht mit Hülfe des Vektorkalkuls.

Jhk.

R. F. Davis. Question 14686. Ed. Times (2) 1, 29-30.

Es sei S ein gegebener Punkt, KK' eine gegebene Gerade, P ein beweglicher Punkt, für den $SP^n \cdot PM$ konstant ist, wo PM das Lot von P auf KK' ist. Dann gilt die folgende Tangentenkonstruktion in P: Man verlängere SP bis Q, so daß $SP = n \cdot PQ$, ziehe QR senkrecht gegen SP, wo R den Schnittpunkt mit KK' bezeichnet. Dann ist PR die Tangente in P.

Lp.

V. Strouhal. Analytische Darstellung der Lissajousschen Figuren. Prag. Berichte 1902, No. 9, 26 S.

Der Verf. beklagt, daß man in analytischer Beziehung eine befriedigende einheitliche Behandlung dieser Figuren vermisse, nämlich eine Behandlung, durch welche die Eigenheiten nicht der einen oder der anderen speziellen Figur, sondern aller Figuren, welche überhaupt entstehen können, hervortreten würde. Diesem Übelstande abzuhelfen und namentlich zu zeigen, daß gewisse Grundzüge allen noch so komplizierten Gleichungen gemeinschaftlich sind, ist der Zweck dieser, durch mehrere geeignete Bilder vervollständigten Arbeit. Referent erwähnt bei dieser Gelegenheit, daß im laufenden Jahre in der Zeitschrift l'Illustration (Journal universel, 60e année) eine Vorrichtung angekündigt wurde, welche sich zur mechanischen Darstellung dieser Kurven eignet. Sda.

N.-J. Hatzidakis. Remarque sur la cycloïde. Ens. math. 4, 130-132.

Betrachtet die Cykloide als durch Bewegung eines gelenkigen

Parallelogramms entstehend und leitet die entsprechenden Kurvengleichungen ab. Tn.

E. N. Barisien. Note sur certaines courbes dérivées de la cycloïde. Teixeira J. **15**, 47-78.

In der Arbeit betrachtet der Verf.: 1. die Fußpunktenkurve der Cykloide in bezug auf einen beliebigen Punkt, 2. die Parallelkurven der Cykloide, 3. die Fußpunktenkurven dieser Kurven in bezug auf einen beliebigen Punkt, 4. die der Reihe nach sich folgenden Evolventen der Cykloide, 5. die äquitangentialen Kurven der Cykloide, 6. die schiefen Evoluten der Cykloide. Er bestimmt die Flächeninhalte aller dieser Kurven, die Länge ihrer Bogen usw. Tx. (Lp.)

E. Wölffing. Über eine besondere Klasse transzendenter Kurven. Arch. der Math. u. Phys. (3) **4**, 117-123.

Für einen Kurvenpunkt bezeichne ϱ den Krümmungsradius, p den Abstand der Tangente vom Koordinatenanfang und r den Radiusvektor; die vom Verf. betrachteten Kurven sind dann durch jede der beiden Gleichungen definiert:

$$r^\lambda + \alpha p^\lambda = \beta^\lambda;\ \varrho = \alpha r^{2-\lambda} p^{\lambda-1}.$$

Verf. bespricht bemerkenswerte Unterfamilien und weist im besonderen nach, daß die für $\lambda = 1$ erhaltenen Kurven sämtlich Evolventen cyklischer Kurven sind. R. M.

F. J. Studnička. Einführung in die analytische Geometrie der Ebene. Prag: Verl. d. Vereins böhm. Mathematiker. 242 S. (Böhmisch).

Der Verf. entwickelt, hauptsächlich zum Gebrauche seiner Schüler, die Grundzüge der analytischen Geometrie der Ebene. Er bedient sich ausschließlich der rechtwinkligen Koordinaten und behandelt den gebräuchlichen Lehrstoff, einschließlich die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades. Das Werkchen zeichnet sich durch mannigfaltige Anwendungen der Determinanten, ferner an manchen Stellen entweder durch eine neue Behandlungsform, oder aber durch neue elementare Untersuchungen des Verf. aus. Das Buch ist in sieben Kapitel eingeteilt und von 62 Figuren begleitet. Sda.

Weitere Literatur.

A. Gob. Rectification des épitrochoïdes. Liége Mém. (3) **4**, 6 S.

A. Greiner. Über orthogonale Invarianten der Kurven dritter Ordnung mit unendlich fernem Doppelpunkt und ihre geometrische Bedeutung. Diss. Jena. 41 S. 8⁰.

L. Kleritsch. Über die inverse Figur der Tractrix des Kreises und über die geometrische Konstruktion der Hyperbelfunktionen. Belgrad. Ak. 63, 143-208 (Serbisch).

W. Koch. Die Eigenschaften der Kurven vierten Grades mit zwei Doppelpunkten, hergeleitet mittels elliptischer Funktionen. Pr. Züllichau 14 S. 4°.

L. Orlando. Note di matematica: alcuni elementi di calcolo sulle epicicloidi; l'inversione; questioni varie; la spirale logaritmica. Messina. 80 S. 8°.

H. C. Richards. On the harmonic curves known as Lissajous figures. Journ. Franklin Inst. 153, 269-283.

F. Spencer. Über Konchoiden. Pr. Schwerin. 11 S. 4°.

F. G. Teixeira. Sur une propriété des ovales de Descartes. Mathesis (3) 2, 135-137.

Kapitel 3.

Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven.

Karl Friedrich Gauss' general investigations of curved surfaces of 1827 and 1825. Translated with notes and a bibliography by J. C. Morehead and A. M. Hiltebeitel. Princeton 126 S. 4°.

Das Werk enthält eine englische Übersetzung von Gauß' Disquisitiones generales circa superficies curvas, sowie von der in Band VIII von Gauß' Werken (S. 408-442) aus dem Nachlaß veröffentlichten Arbeit „Neue Untersuchungen über die krummen Flächen". Bei der Übersetzung der Disquisitiones ist nicht nur die Originalarbeit nebst ihren Abdrücken, sondern es sind auch die verschiedenen französischen und deutschen Übersetzungen zu Rate gezogen, insbesondere, wie die Übersetzer angeben, die in den Klassikern der exakten Wissenschaften erschienene deutsche Ausgabe des Referenten. Letzterer Ausgabe sind auch mehrere der zahlreichen und zum großen Teil umfangreichen Noten entnommen, die (S. 51-78) der Übersetzung der Disquisitiones beigegeben sind. Die Noten zu der zweiten Arbeit umfassen nur vier Seiten. Den Schluß (S. 115-126) bildet eine ausführliche Bibliographie.

Das sehr schön ausgestattete Werk wird für die Studenten englischer Zunge von großem Werte sein. Wn.

G. Scheffers. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. 2. Band: Einführung in die Theorie der Flächen. Leipzig: Veit & Co. X u. 518 S. gr. 8°.

L. BIANCHI. Lezioni di geometria differenziale. Seconda edizione, riveduta e considerevolmente aumentata, in due volumi. Vol. I. Pisa: Spoerri. 524 S. 8°.

ISSALY. Principes fondamentaux de la théorie des pseudo-surfaces. Paris: Hermann. 114 S. 8°.

H. v. MANGOLDT. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Kurven und Flächen. Encykl. d. math. Wiss. 3_3, 1-104.

Inhaltsübersicht: Einleitung, 1-3. I. Die einzelne Linie oder Fläche. Grundbegriffe. 4. Tangente, Normale, Tangentenebene usw. 5. Formeln für Tangenten usw. 6. Aufgaben und Konstruktionen. 7. Fußpunktlinien und -flächen. 8. Asymptoten. 9. Berührung n-ter Ordnung. 10. Rektifikation. 11. Algebraisch rektifizierbare Linien. 12. Minimalkurven. 13. Lösung der Gleichung $dx^2 + dy^2 = ds^2$ und ähnlicher Gleichungen ohne Integralzeichen. 14. Krümmung ebener Linien. 15. Natürliche Gleichung einer ebenen Linie. 16. Evoluten und Evolventen. 17. Konstruktionen von Krümmungsmittelpunkten. 18. Deviation. 19. Gestalt einer Linie oder Fläche in der Nähe eines singulären Punktes. 20. Traktorien. II. Scharen von Linien und Flächen. 21. Einhüllende von Linien und Flächenscharen. 22. Brennlinien. 23. Trajektorien. Orthogonale Linien und Flächenscharen. 24. Isotherme Linien und Flächenscharen. III. Inhaltsberechnungen. 25. Inhalt ebener Flächenstücke (Quadratur). 26. Inhalt gekrümmter Flächenstücke (Komplanation). 27. Inhalt in der nichteuklidischen Geometrie. 28. Rauminhaltsberechnung (Kubatur). IV. Die Linien im Raume. 29. Schmiegungsebene, Krümmungskreis, Haupt- und Binormale. 30. Windung, Schmiegungskugel und -schraubenlinie. 31. Formeln und Lehrsätze. 32. Differentialinvarianten und natürliche Gleichungen. 33. Filar- und Planevolventen und -evoluten. V. Anfangsgründe der Flächentheorie. 34. Fundamentalgrößen. 35. Sätze von Meunier und Euler, Hauptkrümmungen. 36. Krümmungsmaß. 37. Konjugierte Tangenten und Indikatrix. 38. Geometrische Bedeutung der Ableitungen dritter Ordnung der Koordinaten in der Flächentheorie. Hsb.

R. v. LILIENTHAL. Die auf einer Fläche gezogenen Kurven. Encykl. d. math. Wiss. 3_3, 105-183.

Inhaltsübersicht. I. Krümmungslinien. Haupttangentenkurven. Konjugierte Linien. Methoden von Euler und Monge.

1. Methode von Euler. 2. Methode von Monge. 3. Konjugierte Tangenten und Linien. 4. Allgemeine Parameter. II. Weitere Methoden. 5. Geradlinige Strahlensysteme. 6. Krümmungstheorie der Raumkurven. 7. Sphärische Abbildung. 8. Binäre Differentialformen. Differentialparameter. 9. Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

10. Kinematische Gesichtspunkte. III. Geodätische Krümmung. 11. Historisches. 12. Definitionen und Ausdrücke für die geodätische Krümmung. 13. Sätze über geodätische Krümmung. IV. Geodätische Linien. 14. Geodätische und kürzeste Linien. 15. Eigenschaften geodätischer Linien. 16. Reduzierte Länge eines geodätischen Kurvenbogens. 17. Verschiebbarkeit geodätischer Dreiecke. 18. Integration der Gleichung der geodätischen Linien. V. Isotherme Linien. 19. Geometrische und physikalische Entstehungsart. 20. Eigenschaften isothermer Scharen. VI. Parameterlinien. Fundamentalgleichungen. 21. Parameter- und Koordinatenlinien. 22. Methode von Gauß. 23. Methode von Codazzi. 24. Methode von Darboux. 25. Willkürliche Koordinatenlinien. 26. Methode von Lipschitz. 27. Methode von Ribaucour. VII. Die allgemeine Flächenkurve. 28. Methode von Laguerre. Geodätische Torsion. 29. Ableitungen nach Bogenlängen. 30. Methode von Enneper. 31. Weitere Begriffe. 32. Polkurve einer Flächenkurve und Kurven der normalen Segmente. VIII. Krümmungsmaße. 33. Das Gaußsche Krümmungsmaß und ihm verwandte Krümmungsmaße. 34. Das Casoratische Krümmungsmaß und ihm verwandte Krümmungsmaße. IX. Weitere Sätze über Krümmungslinien, Haupttangentenkurven, konjugierte Linien. 35. Krümmungslinien. 36. Haupttangentenkurven. 37. Konjugierte Linien. X. Weitere besondere Kurven. 38. Geodätische Kreise. 39. Kurven, deren Schmiegungskugeln die Fläche berühren. 40. Äquidistante Kurvenscharen. 41. Meridian- und Parallelkurven. 42. Isotherm-konjugierte Systeme. Hsb.

R. v. Lilienthal. Über die Beziehungen der Geometrie der Bewegung zur Differentialgeometrie. Deutsche Math.-Ver. **11**, 37-44.

Die allgemeine Bewegung eines Tetraeders längs einer Raumkurve, bei der eine Achse Tangente der Kurve bleibt, läßt in jedem Punkte eine lineare Schar linearer Komplexe entstehen. Die Betrachtung der mit diesen zusammenhängenden Schraubungen, Nullpunkte, Achsen etc. gibt bei der Bewegung eines Tetraeders längs einer Fläche zu einer großen Reihe von Beziehungen Anlaß, über die in gedrängter Kürze berichtet wird. Hsb.

P. Stäckel. Beiträge zur Flächentheorie (VII. Darstellungen der Minimalkurven. VIII. Über die Flächen, die nur eine Schar von Krümmungslinien besitzen). Leipz. Ber. **54**, 101-120.

Das Ergebnis des Abschnittes VII ist die Feststellung der Tatsache, „daß eine Reihe einfacher Umformungen von der Enneper-Weierstraßschen Darstellung der Minimalkurven zu den Formeln der Huygensschen Evolutentheorie führt“, sowie die Erkenntnis, „daß der Zusammenhang des Problems der Rektifikation mit der Darstellung der Minimalkurven für die Entwicklung der Theorie der Minimalflächen unfruchtbar ge-

blieben ist, weil man es nicht wagte, mit imaginären Gebilden zu operieren."

Im Abschnitt VIII beweist der Verf. den Lehrsatz: „Die Flächen, die nur eine Schar von Krümmungslinien besitzen, sind geradlinige Flächen. Die erzeugenden Geraden sind Minimalgeraden, die zugleich die Bedeutung von Krümmungslinien und Kurven konstanten Krümmungsmaßes haben. Der geometrische Ort der Hauptkrümmungsmittelpunkte ist eine Kurve, die Zentrakurve, und die Flächen lassen sich auffassen als Enveloppen einer Schar sich berührender Kugeln, deren Mittelpunkte auf der Zentrakurve liegen. Ist die Zentrakurve keine Minimalkurve, so ist der Ort der Berührungspunkte der Kugeln eine Evolvente der Zentrakurve. Ist sie aber eine Minimalkurve, so haben die Kugeln alle denselben Radius, und die Fläche besitzt konstantes Krümmungsmaß." Es wird noch bemerkt, daß es unter den imaginären geradlinigen Flächen konstanten Krümmungsmaßes unendlich viele algebraische gibt. Z.

A. R. Forsyth. The fundamental magnitudes in the general theory of surfaces. Messenger (2) **32**, 68-80.

„In der algebraischen Flächentheorie, die mit dem Namen von Gauß verknüpft ist, sind die gewöhnlich fundamentale Größen erster und zweiter Ordnung genannten Ausdrücke von höchster Wichtigkeit, besonders wegen des Satzes, daß, wenn sie bekannt sind, sie eine Oberfläche eindeutig bestimmen, mit Ausnahme ihrer Lage und Orientierung im Raume. Bei gewissen Untersuchungen, wie bei dem Gange der Änderung der Krümmung eines Normalschnittes oder bei der Konstruktion der Ableitungen des Maßes totaler Krümmung und des Maßes mittlerer Krümmung findet man spezielle Kombinationen aus den ersten Ableitungen dieser Größen zweiter Ordnung als wiederkehrend; es ist passend, sie Größen der dritten Ordnung zu nennen, indem man dabei sich dessen bewußt bleibt, daß sie nicht ein System unabhängiger Größen sind. In ähnlicher Weise existieren Größen höherer Ordnung; so werden Größen vierter Ordnung benötigt für die vollständige Diskussion der Krümmungslinien in der unmittelbaren Nachbarschaft eines Nabelpunktes der Fläche. Der Zweck der gegenwärtigen Note besteht in der Angabe einer Methode zur Erlangung der Größen höherer Ordnungen, von denen jedes System vernünftigerweise als abgeschlossen betrachtet werden kann und zur Verfügung steht bei der Hinzunahme oder Wegnahme von Kombinationen niederer Ordnung. Die Methode wird durch die Bildung der Größen dritter und vierter Ordnung genügend erklärt werden." Lp.

M. Servant. Sur une extension des formules de Gauss. S. M. F. Bull. **30**, 92-100.

Ableitung der Gaußschen und Codazzischen Formeln für Flächen im vierdimensionalen Raum. Das vollständige System enthält sechs

Formeln (an Stelle von dreien im gewöhnlichen Raum). Die Zahl der Fundamentalformen wird vier: nämlich ds^2, sodann zwei zweite Fundamentalformen, für zwei zu einander senkrechte Normalen gebildet, endlich die lineare Form $\Sigma X_1\, dX_2 = -\Sigma X_2\, dX_1$, aus den zu einander senkrechten Normalenrichtungen X_1, Y_1, Z_1, T_1 etc. gebildet. Eine der erhaltenen Formeln ist der Gaußschen Relation, vier sind den Codazzischen Formeln analog. Die sechste Formel ist neuartig. Hsb.

C. Burali-Forti. Le formole di Frenet per le superfici. Torino Atti 37, 233-246.

Der Verf. entwickelt die Theorie der krummen Flächen vermittelst der Graßmannschen Vektoranalysis, wodurch die Ableitung der Fundamentalformeln außerordentlich kurz, der Formelapparat auf ein Minimum zusammengedrängt wird. Die formale Analogie mit den Frenetschen Formeln der Raumkurven hat den Titel veranlaßt, der dem Inhalte der Arbeit nicht gerecht wird. — Wenn auch die Vektoranalysis noch kein Allgemeingut geworden ist, so ist doch die Betrachtungsweise auch in der Flächentheorie allgemein üblich, so daß das Neue in den Ausführungen des Verf. wesentlich formaler Natur ist. Hsb.

D. N. Seiliger. Neue Ableitung der Formeln von Frenet-Serret. Kasan Univ. 1902, No. 1, Abh. 2, 103-114 (Russisch).

Kinematischer Beweis (mit Hülfe des beweglichen Trieders) der bekannten Formeln. Si.

N. J. Hatzidakis. Sopra alcune formole del Darboux e del Bour. Periodico di Mat. (2) 4, 275-276.

Der Verf. zeigt den Zusammenhang zwischen den Darbouxschen sechs Grundformeln für die zehn kinematischen Größen einer beliebigen Oberfläche (Surfaces 2, 348) und den von Bour 1862 im Journal de l'École Pol. veröffentlichten entsprechenden Formeln. Lp.

A. Demoulin. Démonstration des formules d'Euler et d'Olinde Rodrigues. Mathesis (3) 2, 185-186. Mn.

E. Pascal. Sulla teoria invariantiva delle espressioni ai differenziali totali di second' ordine, e su di una estensione dei simboli di Christoffel. Rom. Acc. L. Rend. (5) 11_2, 105-112.

E. Pascal. Trasformazioni infinitesime e forme ai differenziali di second' ordine. Rom. Acc. L. Rend. (5) 11_2, 167-173.

Ein Ausdruck $U = \sum_k X_k d^2 x_k + \sum_{ij} X_{ij}\, dx_i\, dx_j$ läßt sich als

$$d \sum X_k\, dx_k + \sum \left(X_{ij} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right) dx_i\, dx_j$$

schreiben, d. h. als Summe einer quadratischen Form Q und des Differentials dL einer linearen. Von L erkennt man sofort, daß sie eine Kovariante von U ist, demnach ist es auch dL und Q. Die Invariantentheorie einer Form von der Gestalt U wird sich daher einfach auf die Theorie der simultanen Invarianten einer linearen und einer quadratischen zurückführen lassen. Dies führt Verf. im einzelnen, speziell für infinitesimale Transformationen durch. Hsb.

M. Servant. Sur l'habillage des surfaces. C. R. 135, 575-577.

„Habillage d'une surface" nennt Darboux das Problem, das Linienelement so zu transformieren, daß $E = G = 1$ wird. Der Verf. zeigt, daß die Aufgabe, die Flächen zweiten Grades zu deformieren, auch als „Habillage" bestimmter, mit den Flächen zusammenhängender Formen von der Gestalt $du\, dv : \Omega$ aufgefaßt werden kann. Für

$$\Omega = 2u - v^2, \quad \Omega = 2uv + h, \quad \Omega = h^2 + 2uv + v^2$$

läßt sich die Aufgabe des „Habillage" völlig durchführen, da diese Funktionen den drei bekannten Paraboloid-Deformationen entsprechen. Hsb.

J. Hadamard. Sur une condition que l'on peut imposer à une surface. S. M. F. Bull. 30, 111.

Sind A_1, A_2, A_3 drei Punkte einer Fläche, N_i ein Punkt auf der Normale von A_i, so ist nach einem Satz von Zaremba auf den Flächen zweiten Grades:

$$\Pi \cos A_1 A_2 N_2 = \Pi \cos A_2 A_1 N_1$$

(Krak. Anz. Jan. 1902, 37). Diese Gleichung gilt nur auf Flächen zweiten Grades für jedes Punktetripel. Hsb.

E. Goursat. Sur un problème relatif aux lignes asymptotiques. S. M. F. Bull. 30, 12-18.

Die geradlinigen Flächen, Schrauben- und Rotationsflächen besitzen kongruente Asymptotenlinien. Wenn eine andere Fläche die gleiche Eigenschaft besitzen soll, so müssen die Binormalen der Asymptotenlinie, wie ohne Rechnung leicht zu sehen ist, einer linearen Kongruenz angehören. Die Bestimmung der Fläche führt dann auf Quadraturen. Die Ermittlung aller Linien, deren Binormalen einer linearen Kongruenz angehören, führt nach Angabe des Verf. auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integration aussichtslos erscheint. Er begnügt sich daher mit dem

Ansatz für den speziellen Fall, in dem die Fokallinien der Kongruenz auf einander senkrecht stehen. Hsb.

L. Raffy. Sur le réseau diagonal conjugué. S. M. F. Bull. 30, 226-233.

Die beiden konjugierten Richtungen in einem Punkt einer Fläche, die zu den Richtungen der Hauptkrümmungen symmetrisch liegen, also den äquikonjugierten Durchmessern der Indikatrix entsprechen, umhüllen zwei Kurvenscharen, die der Verf. Diagonallinien nennt. Zunächst werden die bekannten Sätze über die äquikonjugierten Durchmesser ins Flächentheoretische übersetzt, sodann werden die Fundamentalgleichungen für die Diagonallinien als Koordinatenlinien angeschrieben; endlich ergibt sich die Fläche mit der Gleichung (die willkürliche Konstante als Längeneinheit): $z = \log\cos x + \log\cos y$ als einzige mit folgenden Eigenschaften: Sie ist eine Translationsfläche mit ebenen, in aufeinander senkrechten Ebenen gelegenen Erzeugenden, und diese Erzeugenden sind ihre Diagonallinien. Hsb.

D. F. Jegorof. Über eine Klasse von Orthogonalsystemen. Gelehrte Schriften der Univ. Moskau, physiko-math. Abt. 1901. VI u. 241 S. 8°, dazu ein Nachtrag, 3 S. (Russisch).

Der Verf. denkt sich zunächst auf einer Fläche zwei orthogonale Kurvenscharen: $u =$ const. und $v =$ const. gegeben und fragt, unter welchen Bedingungen diese beiden Kurvenscharen eine solche eingliedrige Gruppe von Transformationen gestatten, die, als Bewegung einer auf der Fläche verteilten Flüssigkeit aufgefaßt, ein Geschwindigkeitspotential besitzt (wirbelfrei ist). Sind die Kurven $v =$ const. die Bahnkurven der eingliedrigen Gruppe, so besitzt das Bogenelement der Fläche die Form: $ds^2 = U du^2 + G dv^2$, wo U eine Funktion von u allein ist. Fallen dagegen die Bahnkurven weder mit den Kurven $u =$ const. noch mit den $v =$ const. zusammen, so kann man sie nach Lie in der Form: $u - v =$ const. annehmen, und das Bogenelement erhält die Gestalt: $ds^2 = w_u du^2 + w_v dv^2$, wo w eine Funktion von u und v und die Kurvenschar $w =$ const. zu den Kurven $u - v =$ const. orthogonal ist. Der Verf. nennt ein Orthogonalsystem, für welches das Bogenelement diese Form erhalten kann, ein System vom Potentialtypus. Die Orthogonalsysteme vom Potentialtypus behalten natürlich bei jeder Biegung der Fläche diese Eigenschaft. Sie sind, wie der Verf. zeigt, dadurch charakterisiert, daß sie die Fläche in unendlich kleine Rechtecke zerlegen, deren Seiten sich umgekehrt verhalten wie die geodätischen Krümmungen der Parameterkurven. Ist das Bogenelement in der allgemeinen Form gegeben, so erfordert die Bestimmung aller zugehörigen Systeme vom Potentialtypus zunächst die Integration einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung, von der die Fundamentalfunktionen w der einzelnen Systeme abhängen. Kennt man eine solche Funktion w, so verlangt, wie im Nachtrage gezeigt wird, die Ermittlung der zugehörigen orthogonalen Parameter u und v nur

noch Quadraturen. Ist ein Orthogonalsystem zugleich isotherm, so kann das Bogenelement auf die Form: $ds^2 = w'(U + V) \cdot (du^2 + dv^2)$ gebracht werden, wo U nur von u und V nur von v abhängt; derartige Systeme gibt es demnach nicht auf jeder Fläche. Ebenso gibt es nur auf den Rotationsflächen und deren Verbiegungen mehrere und zwar immer gleich unendlich viele Orthogonalsysteme vom Potentialtypus, die bei derselben eingliedrigen Gruppe invariant bleiben. Der Verf. untersucht auch noch, wann Orthogonalsysteme vom Potentialtypus existieren, deren eingliedrige Gruppen zwar von einander verschieden sind, aber gemeinsame Bahnkurven haben. Das tritt z. B. auf den Spiralflächen ein. Sehr eingehend werden die Potentialsysteme auf der Ebene und auf der Kugelfläche behandelt, insbesondere werden auf der Kugelfläche alle Potentialsysteme bestimmt, die zugleich isotherm sind. Den Flächen, deren Krümmungslinien vom Potentialtypus sind, widmet der Verf. zwei Kapitel und schlägt vor, sie Flächen vom Potentialtypus zu nennen, weil bei jeder solchen Fläche die drei zugehörigen Differentialformen zweiten Grades vom Potentialtypus sind, wenn man die Krümmungslinien als Parameterlinien benutzt. Der zweite Teil der Arbeit handelt von den dreifachen Orthogonalsystemen vom Potentialtypus im Raume. Diese lassen sich dadurch charakterisieren, daß sie eine eingliedrige Gruppe von Combescureschen Transformationen gestatten, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dadurch, daß das Bogenelement des Raumes, auf sie bezogen, die Form:

$$ds^2 = \frac{\partial w}{\partial \varrho} d\varrho^2 + \frac{\partial w}{\partial \varrho_1} d\varrho_1^2 + \frac{\partial w}{\partial \varrho_2} d\varrho_2^2$$

erhalten kann. Die Bestimmung der sphärischen Bilder einer solchen Flächenschar hängt von der Integration einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen ab. Ist eine Fläche vom Potentialtypus gegeben, so gibt es immer dreifache Orthogonalsysteme vom Potentialtypus, denen die Fläche angehört, und zwar hängt das allgemeinste System dieser Art von einer willkürlichen Funktion eines Argumentes ab. Aus jedem dreifachen Orthogonalsysteme S vom Potentialtypus kann man zwei neue Systeme S_1 und S_{-1} derselben Art ableiten, die dasselbe sphärische Bild haben, und man erhält daher eine unendliche Reihe: $\ldots S_{-2}, S_{-1}, S, S_1, S_2, \ldots$ von solchen Systemen mit gemeinsamem sphärischen Bilde. Der Verf. untersucht verschiedene besondere Arten der Orthogonalsysteme vom Potentialtypus, z. B. solche, die eine kontinuierliche Gruppe von Ähnlichkeitstransformationen gestatten, solche, bei denen die eben erwähnte unendliche Reihe von Systemen periodisch wird, ferner die, zu denen eine Schar von Flächen zweiten Grades gehört, und die, bei denen eine Schar der Koordinatenlinien aus ebenen Kurven besteht. Indem er auf ein Orthogonalsystem vom Potentialtypus, das eine Gruppe von Ähnlichkeitstransformationen gestattet, die Inversion anwendet, erhält er ein System derselben Art, aber mit anderem sphärischen Bilde. Dadurch gewinnt er die Möglichkeit, aus einem gegebenen sphärischen Bilde eines Orthogonalsystems vom

Potentialtypus unbegrenzt viele neue sphärische Bilder dieser Art abzuleiten. Kennt man nun alle Orthogonalsysteme vom Potentialtypus, die zu einem gegebenen sphärischen Bilde gehören und die eine Gruppe von Ähnlichkeitstransformationen gestatten, so kann man durch Quadraturen eine sehr allgemeine Klasse von Orthogonalsystemen vom Potentialtypus mit demselben sphärischen Bilde finden und ebenso Orthogonalsysteme dieser Art, die zu den auf jenem Wege abgeleiteten sphärischen Bildern gehören. Ich muß mich hier mit diesem freilich nur sehr unvollständigen Berichte begnügen. Wollte doch nur der Verf. seine schönen Untersuchungen in einer allgemeiner verständlichen Sprache veröffentlichen!

El.

F. S. Woods. Space of constant curvature. Annals of Math. (2) 3, 71-112.

Die Arbeit ist eine möglichst elementare und recht empfehlenswerte Darstellung der Ideen, die Riemann in seiner berühmten Probevorlesung skizziert hat, unter Benutzung der späteren Arbeiten von Helmholtz, Beltrami, Newcomb, Killing, F. Schur, Klein, Lie und Bianchi. Der Raum wird als Zahlenmannigfaltigkeit betrachtet und ein quadratisches Bogenelement vorausgesetzt, dann mit Hülfe der geodätischen Linien das Riemannsche Krümmungsmaß des Raumes definiert. Der Ausdruck für dieses Krümmungsmaß und die schon von Riemann angegebene Normalform des Bogenelementes für den Fall eines konstanten Krümmungsmaßes werden ohne Beweis mitgeteilt und daraus die wichtigsten Eigenschaften der bekannten drei Geometrien abgeleitet. Den Schluß der Arbeit bilden Bemerkungen über das Verhältnis der gewonnenen Resultate zu den Tatsachen der Erfahrung.

El.

L. Bianchi. Sui simboli a quattro indici e sulla curvatura di Riemann. Rom. Acc. L. Rend. (5) 11_1, 3-7.

Zwischen den Fünf-Indizes-Symbolen von Riemann (den kovarianten Ableitungen der Vier-Indizes-Symbole (rk, ih)) besteht die Identität: $(rk, ihl) + (rk, hli) + (rk, lih) = 0$. Nachdem diese nachgewiesen ist, ergibt sich aus ihr unmittelbar der Schursche Satz: Wenn die Riemannsche Krümmung eine Funktion des Ortes ist, so ist sie konstant.

Hsb.

G. Darboux. Sur l'application du théorème fondamental d'Abel relatif aux intégrales algébriques à la recherche de systèmes complètement orthogonaux dans un espace à n dimensions. Acta Math. 26, 227-240.

Es sei

$$f(u) = \prod_\lambda (u - a_\lambda), \quad \varphi(u) = \prod_\lambda (u - \varrho_\lambda), \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

so ist:

$$ds^2 = -\frac{1}{4}\sum_\lambda \frac{\varphi'(\varrho_\lambda)}{f(\varrho_\lambda)} d\varrho_\lambda^2$$

das Quadrat des Linienelementes des euklidischen n-dimensionalen Raumes in elliptischen Koordinaten.

Seien weiter $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n Parameter und

$$\omega(u) = \Pi(u-\alpha_\lambda),\quad \theta = \sum_\lambda \int \sqrt{\frac{\omega(\varrho_\lambda)}{f(\varrho_\lambda)}}\, d\varrho_\lambda,$$

endlich F ein Integral des Systems partieller Differentialgleichungen

$$2(\alpha_i - \alpha_\varkappa)\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha_i\,\partial\alpha_\varkappa} + \frac{\partial F}{\partial\alpha_i} - \frac{\partial F}{\partial\alpha_\varkappa} = 0,$$

der auch θ als Funktion der α_i genügt. Definiert man die α_i als Funktionen der ϱ_i durch die n Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha_i} = \frac{\partial\theta}{\partial\varrho_i},$$

so bestimmen sie ein neues orthogonales System; denn es wird

$$ds^2 = \sum_\lambda \frac{\varphi(\alpha_\lambda)}{\varpi'(\alpha_\lambda)}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha_\lambda^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_\lambda^2}\right)^2 d\alpha_\lambda^2.$$

Für die spezielle Annahme

$$F = -\sum_i \int_0^{h_i} \sqrt{\frac{\varpi(h_i)}{f(h_i)}}\, dh_i \quad (i = 1, 2, \dots, n+2p)$$

werden auf Grund des Abelschen Theorems die α_i algebraische Funktionen der ϱ_i. Eine völlig analoge Transformation läßt sich für das vom Verf. gegebene Orthogonalsystem der sphärischen Koordinaten durchführen.

Hsb.

G. Demartres. Détermination des surfaces (W) à lignes de courbures isothermes. Toulouse Ann. (2) 4, 341-355.

Von Weingartenschen Flächen, die zugleich Isothermflächen sind, kennt man die Rotationsflächen und die Flächen von konstanter mittlerer Krümmung. Von allen weiteren weist der Verf. nach, daß sie Schraubenflächen sind, sodaß das Problem auf die Bestimmung der isothermen Schraubenflächen zurückgeführt ist. Hsb.

H. Toussaint. Théorie générale des lignes de courbure. Rom. Acc. P. d. N. L. Atti 55, 148-153.

Der Verf. beansprucht für seine spezielle Methode den Vorzug vollkommen symmetrischer Behandlung der drei Raumkoordinaten x, y, z der Fläche. Hsb.

G. Seyler. Über die Erhaltung der Krümmungslinien bei Orthogonalprojektion. Pr. Gymn. Passau. 24 S. 8⁰.

Verf stellt sich die Aufgabe, zu untersuchen, wann bei orthogonaler Projektion einer Fläche auf eine andere den Krümmungslinien wieder Krümmungslinien entsprechen. Ist die Fläche, auf der die Projektionsstrahlen senkrecht stehen, eine Ebene oder eine Kugel, so soll das den Krümmungslinien der projizierten Fläche entsprechende Liniensystem orthogonal sein. Verf. löst erst diese beiden speziellen Fälle, sodann zeigt er allgemein, daß die Krümmungslinien der als Projektionsbasis benutzten Fläche ein geodätisches Orthogonalsystem bilden müssen. Hsb.

R. Hauth. Über die Flächen, von deren Krümmungslinien ein System in parallelen Ebenen sich befindet. Pr. Gymn. Metten. 33 S. 8⁰.

In einer historischen Einleitung bespricht der Verf. die Arbeiten, welche sich mit den im Titel genannten Flächen beschäftigt haben, fast vollzählig (die Arbeiten von Dini und Bianchi waren dem Verf. nicht zugänglich). In der Abhandlung selbst werden die in den Resultaten hinlänglich bekannten, aber sehr zerstreuten Untersuchungen über den vorliegenden Gegenstand so weit, wie es dem Verf. bisher möglich war, gesammelt und in einheitlicher, zum Teil recht vereinfachter Darstellung wiedergegeben. Z.

V. Rouquet. Étude géométrique des surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes et égales. Marseille Ann. 12, 219-263.

H. D. Thompson. Simple pairs of parallel *W*-surfaces. American J. 24, 303-310.

Bezeichnet man die mittlere Krümmung und das Krümmungsmaß in einem Flächenpunkte P, wie üblich, mit H und K, die entsprechenden Größen für den zugehörigen Punkt P_0 der Parallelfläche mit H_0 und K_0, so liefern die Gleichungen $K_0 = \pm K$, $H_0 = \pm H$ vier einfache Systeme von Parallelflächen, die vom Verf. untersucht werden; am Schlusse wird noch der Fall behandelt, daß der Punkt P_0 der vierte anharmonische Punkt zu den beiden Krümmungsmittelpunkten der Hauptnormalschnitte und dem Punkte P ist; es zeigt sich, daß eine und nur eine Parallelfläche von der verlangten Eigenschaft existiert, und daß auf ihr (außer in dem vierten der obigen Fälle) nicht K_0 konstant sein oder zwischen H_0 und K_0 eine lineare Relation bestehen kann.

Die umständlichen Rechnungen des ersten Teils hätten vermieden werden können, wenn der Verf. die sehr einfachen Ausdrücke für H_0 und K_0 beachtet hätte, wie sie sich z. B. in „Knoblauch, Einleitung in

die allgemeine Theorie der krummen Flächen, Leipzig 1888" (S. 236, Formel 13) finden. Z.

E. HOLMGREN. Sur les surfaces à courbure constante négative. C. R. **134**, 740-743.

1. Die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin \omega$ besitzt Integrale, die nicht analytisch sind und Ableitungen jeder Ordnung haben. Ein solches Integral erhält man durch die Bedingungen, daß es für $v = 0$ selbst Null sein und für $u = 0$ in die Funktion $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin(a^\nu v)}{\nu!}$ übergehen soll. Seine Existenz sowie die seiner Ableitungen für alle Punkte der (u, v)-Ebene folgt aus der Picardschen Methode der Integration. Dagegen ist es für keinen Wert $v_0 = \frac{2k\pi}{a^p}$ (k, p ganz, p positiv) nach Potenzen von $v - v_0$ entwickelbar, also nicht analytisch. — Es ergibt sich hieraus die Existenz nicht-analytischer Flächen von konstanter negativer Krümmung.

2. Ein einfacher Beweis für den Hilbertschen Satz, daß es keine reelle Fläche konstanter negativer Krümmung gibt, die der nichteuklidischen Ebene in ihrer ganzen Ausdehnung entspricht. Hsb.

W. MASSNY. Krümmung von Kurven auf zylindrischen und konischen Rotationsflächen. Pr. Gymn. Beuthen O.-S. 17 S. 2 Fig. 8°.

Mit elementaren Mitteln ausgeführte Berechnung der Krümmungen von geodätischen Linien auf geraden Kreiskegeln und Kreiszylindern, sowie Untersuchung spezieller ebener Kurven, welche beim Aufwickeln der Ebene auf die genannten Flächen wieder in ebene Kurven, d. h. in Kegelschnitte, übergehen.

Die inkonsequente Druckweise (z. B. F_1, Φ_{13}, aber Fi, Φik) stört beim Lesen. Z.

G. FANO. Sul modi di calcolare la torsione di una linea geodetica sopra una superficie qualunque. Atti della R. Accademia Peloritana **16**, 198-199.

Eine sehr einfache Methode zur Ableitung des Ausdruckes der Torsion einer geodätischen Linie. Vi.

A. R. FORSYTH. On families of geodesics and geodesic parallels. Messenger (2) **32**, 98-107.

In dieser Note werden einige der wichtigeren Lehrsätze über Familien geodätischer Linien auf einer Oberfläche und über geodätische

Parallelen im Zusammenhange mit der einfachsten Gestalt des Ausdrucks für ein lineares Element auf einer Oberfläche aufgestellt. Das gebrauchte Verfahren erweist sich als so einfach, daß manche allgemeinen Theoreme (wie Beltramis Satz über die Quadratur des geodätischen Bogens), die oft bei der Herleitung der Resultate gebraucht werden, sofort einleuchten. Besonders wird das erste Integral der geodätischen Linien in enge organische Beziehung zu der Bestimmung der geodätischen Parallelen gebracht. Lp.

R. Rothe. Bemerkungen über ein spezielles krummliniges Koordinatensystem. Berl. Math. Ges. Ber. 1, 47-53.

Wenn in jedem Punkte der Fläche die geodätische Krümmung der Koordinatenlinie $x = \text{const.}$ gleich der der anderen $y = \text{const.}$ ist, so ist das Linienelement in diesen „(xy)-Linien" durch

$$\frac{1}{4}ds^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 dy^2,$$

die geodätische Krümmung $g(x, y)$ der Koordinatenlinien im Punkt x, y durch

$$0 = 2g(x, y)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$$

gegeben. Die Kurven $\varphi = \text{const.}$ sind die Winkelhalbierenden des äußeren Koordinatenwinkels, die des inneren sind geodätische Linien. Umgekehrt ist auch das System der Winkelhalbierenden eines orthogonal-geodätischen Koordinatensystems stets ein (xy)-System. Ist $g = a$ konstant, so ist die Fläche von konstanter negativer Krümmung $= -2a^2$ (Bonnet); ist $g = 0$, so ist die Fläche abwickelbar (Liouville). Ferner: sind die (xy)-Linien Linien gleicher Bogenlänge, und besitzen umgekehrt die Kurven eines orthogonalen Systems gleiche Bogenlänge, so besitzen sie auch gleiche geodätische Krümmung.

Die (xy)-Systeme sind isometrisch dann und nur dann, wenn die Fläche auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist. Zu jeder Fläche läßt sich eine zweite derart angeben, daß beide konform auf einander abgebildet sind, einem (xy)-System der einen ein ebensolches der andern entspricht und die geodätischen Winkelhalbierenden der einen Fläche sich auf die nicht geodätischen der anderen abbilden. Soll dann $g(x, y)$ gleich der entsprechenden Funktion auf der anderen Fläche sein, so erhält man wieder Rotationsflächen als einzige Lösung. Hsb.

J. Knoblauch. Über den Beweis der Christoffelschen Kovarianz. Berl. Math. Ges. Ber. 1, 63-66.

G. Hessenberg. Über die Gleichung der geodätischen Linien. Berl. Math. Ges. Ber. 1, 55-59.

Beide Arbeiten gehen darauf aus, Kovarianten quadratischer Differentialformen zu bilden, ohne die Transformation der Variabeln nachzurechnen. In der ersten Arbeit ergibt sich zunächst nach einigen einfachen Umformungen die Identität:

$$(1)\quad \begin{cases} d\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda}\, du_\varkappa \delta u_\lambda - \frac{1}{2}\delta \sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda}\, du_\varkappa\, du_\lambda \\ \qquad = \sum\limits_{\nu} x_\nu \left(d^2 u_\nu + \sum\limits_{\varkappa,\mu} \begin{Bmatrix} \varkappa\mu \\ \nu \end{Bmatrix} du_\varkappa du_\mu \right), \end{cases}$$

worin

$$(2)\qquad x_\nu = \sum_\lambda a_{\nu\lambda} \delta u_\lambda.$$

Die Größen δu_λ können irgend ein den du_λ kogredientes System, die x_ν also irgend ein den du_λ kontragredientes bezeichnen. Die rechte Seite von (1) ist eine Invariante, wie die linke Seite von (1) unmittelbar erkennen läßt.

Setzt man speziell $x_\nu = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_\nu}$ und subtrahiert den so aus (1) entstehenden Ausdruck von dem invarianten Ausdruck $d^2\varphi$, so entsteht rechts die bekannte Christoffelsche Kovariante. Auf der linken Seite wird zugleich $\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda} du_\varkappa du_\lambda = d\varphi$, so daß die Christoffelsche Kovariante nichts anderes ist als $\frac{1}{2}\delta(ds^2)$, wenn unter δu_λ die durch $\sum a_{\nu\lambda} du_\lambda = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_\nu}$ definierten Größen verstanden werden.

Aus der Identität (1) erkennt man, daß die Ausdrücke $d^2 u_\nu + \sum\limits_{\varkappa,\mu} \begin{Bmatrix} \varkappa\mu \\ \nu \end{Bmatrix} du_\varkappa du_\mu$ den Differentialen du_ν kogredient sind. Dieser Gedankengang wird in der zweiten Arbeit verfolgt. Im ersten Abschnitt wird bewiesen: Wenn für irgend ein linear unabhängiges, den du_λ kogredientes System ξ_λ „kogrediente Differentiale" $d'\xi_\lambda = d\xi_\lambda + \sum\limits_\mu q_{\lambda\mu}\xi_\mu$ existieren, so sind für ein kontragredientes System x_λ die Differentiale $d'x_\lambda = dx_\lambda - \sum\limits_\mu q_{\mu\lambda} x_\mu$ den x_λ kogredient, und für jede invariante Form, deren Veränderliche den ξ_λ ko- und kontragredient sind, lassen sich in analoger Weise aus den Differentialen der Koeffizienten und einer linearen Verbindung der Koeffizienten selbst Ausdrücke bilden, die den Koeffizienten kogredient sind. Man erhält übrigens diese Ausdrücke unmittelbar, wenn man die Koeffizienten in der bekannten invariantentheoretischen Form als symbolische Produkte schreibt. Das Symbol d' befolgt das distributive Gesetz der Differentialrechnung. Im zweiten Abschnitt wird aus der Identität

$$d_1 \sum_{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda} d_2 u_\varkappa d_3 u_\lambda + d_2 \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda} d_3 u_\varkappa d_1 u_\lambda - d_3 \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda} d_1 u_\varkappa d_2 u_\lambda$$
$$= 2\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda}\left(d_1 d_2 u_\varkappa + \sum_{\mu,\nu} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \varkappa \end{Bmatrix} d_1 u_\mu d_2 u_\nu \right) d_3 u_\lambda,$$

die eine Verallgemeinerung von (1) ist, geschlossen, daß die spezielle Annahme $q_{\lambda\mu} = \sum_\nu \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \lambda \end{Bmatrix} du_\nu$ auf kogrediente Differentiale führt, daß in diesem Fall $d' a_{\varkappa\lambda} = 0$ und $d'_1 d_2 u_\lambda = d'_2 d_1 u_\lambda$ ist.

Im dritten Abschnitt wird nunmehr die Gleichung der geodätischen Linien als Bedingung des Verschwindens der ersten Variation der Bogenlänge abgeleitet, wobei wegen $d' a_{\varkappa\lambda} = 0$ die Rechnung formal dieselbe wird wie bei konstanten $a_{\varkappa\lambda}$ nach der üblichen Methode. In Abschnitt 4 wird darauf hingewiesen, daß

$$\sum_\lambda d' \frac{\partial \varphi}{\partial u_\lambda} du_\lambda$$

die Christoffelsche Kovariante ist. Hsb.

P. Zühlke. Über die geodätischen Linien und Dreiecke auf den Flächen konstanten Krümmungsmaßes und ihre Beziehungen zur sogenannten nichteuklidischen Geometrie. Pr. Ober-Realsch. Charlottenburg. 36 S. 1 Tafel. 8°.

1. Die Flächen konstanter Krümmung als Liouvillesche Flächen. 2. Konforme Abbildung auf die Kugel; stereographische Polarprojektion. 3. Konforme Abbildung der pseudosphärischen Flächen auf eine reelle Ebene. 4. Einige allgemeine Sätze über die geodätischen Linien auf pseudosphärischen Flächen. 5. Der Satz von Busse. 6. Geodätische Abbildung der Flächen konstanten Krümmungsmaßes auf die Ebene. 7. Zusammenstellung der Abbildungsgleichungen für die Fälle $K = 0$, $K > 0$, $K < 0$. Geodätische konforme Abbildung der abwickelbaren Flächen auf die Ebene. 8. Diskussion der geodätischen Abbildung pseudosphärischer Flächen nach Beltrami. 9. Der Parallelwinkel. 10. Das geodätische Dreieck und die pseudosphärische Trigonometrie. 11. Die Prinzipien der nichteuklidischen Geometrie. Hsb.

W. Anissimoff. Complément au Mémoire sur la théorie des courbes géodésiques. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **19**, 63-64.

In einer früheren Note (Ann. de l'Éc. Norm. (3) **18**, 371-395; F. d. M. **32**, 614, 1901) leitete Verf. aus einem ersten Integral der Differentialgleichung der geodätischen Linien durch die Transformation $x = u + iv$, $y = u - iv$ zwei erste Integrale ab. Sind diese von einander unabhängig, so erhält man aus ihnen durch Elimination der Ableitung sofort die Gleichung der geodätischen Linien. Verf. nannte ein solches erstes Integral „von der zweiten Klasse"; sind die beiden neuen Integrale von einander abhängig, so rechnete er das ursprüngliche „zur ersten Klasse".

Egoroff hat daraufhin gezeigt, daß auf jeder Fläche ein Integral der zweiten Klasse existiert. Die Einteilung der Integrale kann also nicht zu einer Klassifikation der Flächen benutzt werden. Hsb.

H. Petrini. Bidrag til Vinkelens Definition. Nyt. Tidss. for Math. 18 B, 5-6.

Der Verf. sucht eine Definition des Winkels, welchen zwei geodätische Linien auf einer gegebenen Oberfläche bilden. V.

P. Stäckel. Lineare Scharen geodätischer Linien. Math. Ann. 56, 501-506.

Gibt es auf einer krummen Fläche unter den Linien $au+bv = \text{const.}$ vier Scharen Geodätischer, so besitzt die Fläche konstante Totalkrümmung (Erweiterung des bekannten Beltramischen Satzes; Finsterwalder, Deutsche Math. Ver. 6, 50-51). Zwei Scharen finden sich bei jeder Fläche, wenn man sie nämlich zu Koordinatenlinien wählt. Demgemäß entsteht die Frage, bei welchen Flächen es drei Scharen gibt. Bekannt sind von diesen die Rotationsflächen und ihre Biegungen. Verf. gibt als Beispiel einer nicht zu diesen gehörigen, imaginären Fläche: $ds^2=(u+v)^2du^2+2(u+v)(u-2v)\,du\,dv$. Auf Anregung des Verf. hat Fritz Ahl (Untersuchungen über geodätische Linien, In.-Diss. Kiel; F. d. M. 32, 615, 1901) sich mit der Frage beschäftigt und außer jener imaginären Fläche folgenden reellen Typus angegeben, der zu einer Spiralfläche gehört:

$$ds^2=(2u-v)^2du^2-2(2u-v)(u-2v)\,dudv+3u(u-2v)\,dv^2.$$

Verf. stellt die Aufgabe, zu untersuchen, ob die Rotationsflächen die einzigen sind, bei denen drei Scharen der verlangten Art auf unendlich vielfache Art angegeben werden können. Hsb.

P. Stäckel. Eine Eigenschaft der geodätischen Linien. Arch. der Math. u. Phys. (3) 4, 68-73.

Von Weingarten stammt ein in der flächentheoretischen Literatur auffallend wenig genannter, von ihm selbst nicht veröffentlichter Satz, der in der Geodäsie wiederholt Anwendung gefunden hat, nach dem eine geodätische Linie, welche die Punkte P und Q einer Fläche verbindet, sich sowohl in P als in Q an den bezüglichen Normalschnitt in der Weise anschmiegt, daß ihre Abweichung davon, wenn P sich Q unbegrenzt nähert, ein Drittel des Winkelunterschiedes wird, welchen die beiden Normalschnitte in dem betreffenden Punkte mit einander bilden. Verf. gibt einen Beweis dieses Satzes. Hsb.

U. Amaldi. Sulle superficie che contengono sistemi doppi ortogonali isotermi di cerchi geodetici. Rom. Acc. L. Rend. (5) 11_1, 198-204, 237-242.

Abgesehen von den Flächen konstanter Krümmung, die ∞^4 Systeme geodätischer Kreise enthalten, welche die Fläche in Quadrate infinitesimal einteilen, kann eine Fläche nur ∞^1 solcher Systeme geodätischer Kreise enthalten. Es werden die Kriterien (vier Differentialgleichungen) für das Eintreten dieses Falles aufgestellt. Hsb.

N. J. Hatzidakis. Bemerkung zum Aufsatze von Herrn Kommerell: „Ein Satz über geodätische Linien". Arch. der Math. u. Phys. (3) 3, 313-315.

Kurzer Beweis der Formel $\frac{1}{R^2} = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho}\right)$ sowie der Enneperschen Formel $R = \sqrt{-\varrho_1 \varrho_2}$. Hsb.

S. Chassiotis. Note sur la courbure des lignes géodésiques d'une surface de révolution. Nouv. Ann. (4) 2, 564-566.

Auf den Rotationsflächen zweiten Grades ist längs einer jeden geodätischen Linie der Krümmungsradius derselben dem des geschnittenen Meridians proportional (Gudermann, Resal). Die Eigenschaft ist für die genannten Flächen charakteristisch. Hsb.

L. Bianchi. Sur les systèmes cycliques, dont les plans enveloppent une sphère. Ann. de l'Éc. Norm. (3) 19, 325-334.

Der Verf. betrachtet die Deformation der Flächen konstanter Krümmung und ihre Transformationen an der Hand der Kreissysteme, die zu einer Fläche senkrecht sind (cyklische Kongruenzen). Es ergeben sich zahlreiche neue Gesichtspunkte für bekannte Sätze dieser umfangreichen Theorie. Hsb.

L. Bianchi. Sopra un problema relativo alla teoria della deformazione delle superficie. Rom. Acc. L. Rend. (5) 11_1, 265-276.

„Virtuelle Asymptotenlinien" sollen solche Linienscharen heißen, die durch eine Deformation zu Asymptotenlinien der Fläche werden können. Zwei Flächen, auf denen sich alle virtuellen Asymptotenlinien entsprechen, sind geodätisch auf einander abgebildet und umgekehrt, abgesehen von dem Trivialfall, daß sie auf ähnliche Flächen abwickelbar sind. Von diesem Resultat werden einige Anwendungen auf bekannte Eigenschaften der Deformation der Rotationsflächen gemacht. Hsb.

L. Bianchi. Sulla deformazione delle superficie di rotazione. Rom. Acc. L. Rend. (5) 11_1, 453-456.

Wenn eine Rotationsfläche S auf einer ihrer Biegungen Σ rollt, so beschreibt ihre Achse eine Normalenkongruenz. Eine Brennfläche dieser Kongruenz ist die Komplementarfläche Σ' von Σ, und die von der Kongruenz eingehüllte Schar geodätischer Linien auf Σ' geht in eine Schar räumlich kongruenter Linien über, wenn man Σ' in eine Rotationsfläche verbiegt. Auf den Normalflächen Φ der Achsenkongruenz besteht eine Gleichung der Form $\psi(r_1 - r_2) + r_2 = v$, worin ψ eine durch das Linienelement von S bestimmte Funktion, r_1 der eine, r_2 der andere Hauptkrümmungsradius und v der Parameter der einen Krümmungslinienschar ist. Ist S ein Paraboloid, so lautet die betreffende Gleichung $r_1 + r_2 = -2v$. Für diesen Fall ist ferner charakteristisch, daß jedem konjugierten System der einen Evolutenfläche von Φ in dem sphärischen Abbild der Kongruenz ein Orthogonalsystem entspricht. Hsb.

L. P. Eisenhardt. Infinitesimal deformation of surfaces. American J. 24, 173-204.

Kurze, aber eingehende Darstellung des Gegenstandes nach der Weingartenschen Methode der charakteristischen Funktion mit Literaturangaben, wo sich die wichtigeren Sätze der Theorie finden. Hsb.

G. Tzitzéica. Sur la déformation continue des surfaces. C. R. 134, 894-895.

Verf. hat an anderer Stelle gezeigt, daß die Fläche

$$x_i = A_i(a_i + u)^{\frac{3}{2}} (a_i + v)^{\frac{3}{2}} \quad (i = 1, 2, 3;\ x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z)$$

stetig ohne Dehnung verbogen wird, wenn die sechs Konstanten A_i, a_i sich so ändern, daß die fünf Ausdrücke $\sum_i A_i^2 a_i^\mu$ $(\mu = 0, \dots, 4)$ ihre Werte beibehalten. Die Linie $u = v$ bleibt dabei Asymptotenlinie und, wie sich leicht zeigen läßt, sich selbst kongruent. Es dürfte dies das erste Beispiel für den Satz sein, daß eine Fläche unter Festhaltung einer Asymptotenlinie deformierbar ist. Hsb.

G. Tzitzéica. Sur la déformation continue des surfaces. C. R. 135, 503-505.

Fortsetzung von Untersuchungen, über die F. d. M. 32, 612 und 617, 1901, berichtet worden ist; dort muß das Zitat heißen: F. d. M. 30, 556, 1899. Es handelt sich um die Ermittelung derjenigen Flächen, die kontinuierliche Biegungen mit Erhaltung eines konjugierten Netzes gestatten. Der Verf. gibt auch hier nicht die vollständige Lösung des

Problems, sondern nur spezielle Fälle, unter denen die Fläche hervorgehoben sei, die durch die Gleichungen

$$x = A\,(a+u)^{\frac{3}{2}}\,(a+v)^{\frac{3}{2}},$$
$$y = B\,(b+u)^{\frac{3}{2}}\,(b+v)^{\frac{3}{2}},$$
$$z = C\,(c+u)^{\frac{3}{2}}\,(c+v)^{\frac{3}{2}}$$

dargestellt wird. St.

P. Calapso. Sulla deformazione delle quadriche. Palermo Rend. 16, 297-326.

Der Verf. stellt für die Deformation der Flächen zweiten Grades ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen auf, ausgehend von der Bestimmung desjenigen konjugierten Netzes einer Fläche zweiten Grades, das auf einer vorgeschriebenen Biegung auch konjugiert ist. Ist die Fläche zweiten Grades eine Rotationsfläche oder ein Paraboloid, so ergibt das System des Verf. unmittelbar eine bekannte Differentialgleichung, von deren Integration die Bestimmung der Flächen konstanter Krümmung abhängt. Damit ist jeder Deformation einer Rotationsfläche zweiten Grades eine Fläche konstanter Krümmung zugeordnet. Sie geht aus der Guichardschen Fläche durch eine Bäcklundsche Transformation hervor. Hsb.

A. Demoulin. Sur la déformation des conoïdes droits. C. R. 134, 1038-1041.

Der Verf. bestimmt sämtliche Biegungen des folgenden imaginären Konoids: $y : x = i \,\mathrm{tgh}\,(2\sqrt{2}\cdot i z)^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$ und gibt folgende geometrische Interpretation seiner Formeln: (A) und (B) seien zwei Raumkurven, längs denen der Krümmungsradius das $2i$-fache der Bogenlänge ist. In den beiden Punkten A auf (A), B auf (B) konstruiere man die Schmiegungsebenen und ziehe parallel zu ihrer Schnittlinie die Gerade g durch die Mitte von AB. Die Geraden g bilden eine Kongruenz, auf deren Fokalflächen längs einer Schar von Krümmungslinien die totale Krümmung konstant ist. Die Evoluten dieser Fokalflächen, die zu dieser Krümmungsschar gehören, sind auf das genannte Konoid abwickelbar. Hsb.

M. Servant. Sur la déformation des quadriques. S. M. F. Bull. 30, 18-23.

Ist S eine Fläche zweiten Grades, S' eine auf S abwickelbare Fläche, so läßt sich das gemeinsame konjugierte Netz durch Quadraturen bestimmen. Im Anschluß daran werden einige Ansätze für das Problem der Deformation der Flächen zweiten Grades abgeleitet oder angedeutet. Hsb.

M. SERVANT. Sur deux problèmes de géométrie. C. R. 134, 1291-1293.

Die Fundamentalgleichungen einer Fläche, die unter Beibehaltung der Hauptkrümmungen in jedem Punkt deformiert werden kann, stimmen formal mit denen einer Isothermfläche im nichteuklidischen Raum überein, und da jeder Isothermfläche im nichteuklidischen Raum eine im euklidischen in bekannter Weise entspricht, erhält man eine eindeutige Zuordnung der zuerst genannten Flächen und der Isothermflächen. Die Bestimmung der einen Flächenklasse führt daher zugleich zur Kenntnis der zweiten. Hsb.

M. FOUCHÉ. Sur certains couples de surfaces applicables. C. R. 134, 1412-1414.

Man nehme in einem Raume von vier Dimensionen zwei auf den ebenen Raum abwickelbare Mannigfaltigkeiten V und V' an und betrachte ihre Schnittfläche. Wickelt man V und V' auf den ebenen Raum ab, so wickelt sich die Schnittfläche auf zwei Flächen S und S' ab, die auf einander abwickelbar sind. Sie besitzen ein gemeinsames konjugiertes Netz, und auf jeder der beiden Flächen besteht je eine der Scharen aus ebenen Kurven. Hsb.

W. DE TANNENBERG. Sur quelques systèmes orthogonaux et leur application au problème de la déformation du paraboloïde de révolution. C. R. 134, 1100-1102.

Verf. definiert zwei zusammengehörige orthogonale Systeme der Ebene, welche gestatten, den Ausdruck für die Koordinaten eines Punktes einer beliebigen auf das Rotationsparaboloid abwickelbaren Fläche in einer sehr einfachen Form darzustellen. Wbg.

U. BARBIERI. Sulla determinazione di tutte le superficie applicabili su di una superficie data. Palermo Rend. 16, 70-99.

Die Arbeit bietet eine neue Ableitung der Weingartenschen Fundamentalgleichung, die aber bei genauerer Betrachtung nicht wesentlich von den bisher gegebenen abweicht. Hsb.

J. LÜROTH. Zwei Beispiele für die Ableitung der wahren aus der scheinbaren Gestalt eines Körpers. Festschrift der Univ. Freiburg, 181-205.

Ein Körper, der von jeder Ebene in einer Kurve zweiten Grades geschnitten wird, ist von einer Fläche zweiten Grades begrenzt. Wird er von jeder Ebene in einem Kreise geschnitten, so ist er eine Kugel. Dualistisch steht dem gegenüber: Ein Körper, der von jedem Punkt des Raumes durch einen Kegel zweiter Ordnung (speziell einen Rotationskegel) projiziert wird, ist von einer Fläche zweiten Grades (speziell einer Kugel-

fläche) begrenzt. Diese letzteren Sätze beweist der Verf., und zwar bieten die Beweise durch Anwendung der Vektoranalyse ein gewisses „aktuelles" Interesse, trotz des enormen Umfanges der durch die angewandte Methode abgekürzten Rechnungen. Hsb.

M. DE MONTCHEUIL. Sur une classe de surfaces. Thèse. Paris: Gauthier-Villars. 75 S. 4°.

Verbindet man zwei beliebige Punkte P und P' von je zwei beliebigen Kurven im Raume und zieht durch den Mittelpunkt dieser Strecke eine Parallele zu der Schnittgeraden der Ebenen, welche den unendlich fernen Kugelkreis berühren und je die Tangente einer der Kurven in P, resp. P' enthalten, so entsteht, wenn P und P' auf den Kurven sich beliebig bewegen, eine Normalenkongruenz, deren Normalenflächen die in der vorliegenden Abhandlung betrachteten Flächen Ξ sind. Dieselben haben eine Translationsfläche als mittlere Zentrafläche (d. h. Ort der Mittelpunkte der beiden zu einem Punkte gehörigen Krümmungszentra) und sind in den Koordinaten von O. Bonnet definiert durch die Gleichung $\frac{\partial^4\xi}{\partial u^2\,\partial u_1^2}=0$. Sind A und B Funktionen von u, A_1 und B_1 Funktionen von u_1 allein, so zerfallen die Flächen Ξ in vier Klassen, die resp. durch die Gleichungen

$$\frac{\partial^3\xi}{\partial u^2\,\partial u_1}=A'';\quad \frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial u_1}=A'+A_1';\quad \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}=u_1\,A''+B'';$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial u}=A_1+u_1\,A'+B'$$

definiert sind. Zu den Flächen Ξ gehören zahlreiche bekannte Flächengattungen, z. B. die Minimalflächen, die imaginären Regelflächen Monges, die Flächen mit ebener mittlerer Zentrafläche. Doppelflächen erhält man, wenn die Kurven, auf denen P und P' sich bewegen, zusammenfallen (vgl. F. d. M. **29**, 549, 1898; **30**, 574, 1899). Wö.

V. KOMMERELL. Gleichung und Eigenschaften der Röhrenflächen. Arch. der Math. u. Phys. (3) **8**, 1-13.

Zunächst werden die Gleichungen der Röhrenflächen in Krümmungsparametern gegeben; sodann werden mehrere spezielle Sätze abgeleitet über die Beziehungen der Krümmungslinien und Asymptotenlinien einer Röhrenfläche zu der Leitkurve, d. h. zu der Raumkurve, auf welcher sich der Mittelpunkt des die Fläche erzeugenden Kreises bewegt; u. a. ergeben sich die beiden interessanten Tatsachen, daß auf einer Röhrenfläche Krümmungs- und Torsionsradius einer (natürlich nicht mit einem der erzeugenden Kreise identischen) Krümmungslinie sich verhalten wie Krümmungs- und Torsionsradius der Leitkurve in dem entsprechenden

Punkte, und daß die Asymptotenlinien einer Röhrenfläche die Enveloppe der erzeugenden Kreise berühren. Z.

G. Scheffers. Über Loxodromen. Leipz. Ber. 54, 363-370.

Für die Loxodromen wird eine neue Definition gegeben, welche sachlich mit der sonst üblichen übereinstimmt, formell aber von ihr abweicht; die Loxodromen werden nämlich definiert als diejenigen Kurven, die alle Ebenen eines Ebenenbüschels unter konstantem Winkel durchsetzen; sie erscheinen also als eine besondere Art Raumkurven und nicht als Flächenkurven wie sonst. Die Nützlichkeit der neuen Definition erhellt aus dem § 2, der von der Bedeutung der sphärischen Loxodromen handelt; § 3 bringt als Anwendung hiervon eine Transformation des Raumes durch reziproke Radien, wodurch zugleich ein neues Verfahren gefunden wird, die Kurven zu ermitteln, die einen Kugelbüschel unter konstantem Winkel schneiden. In einem Schlußabschnitt „Raumkurven, die ihre Radienvektoren unter konstantem Winkel schneiden", wendet sich der Verf. gegen einige von Cesàro in seinen Vorlesungen über natürliche Geometrie (deutsch von Kowalewski, Leipzig 1901) S. 184 gemachten Bemerkungen. Z.

A. Demoulin. Détermination de quelques classes de courbes gauches. Mathesis (3) 2, 129-134, 165-166.

Bestimmung derjenigen Kurven, bei denen $\tau c''^2$ eine Funktion von c/c'' ist, wo τ der Torsionsradius ist und c, c', c'' die Richtungskosinus der Binormale einer Raumkurve bezeichnen. Bestimmung der Beziehung zwischen den Torsionen zweier Kurven, die reziproke Polaren bezüglich eines linearen Komplexes sind, in zwei entsprechenden Punkten. Mn. (Lp.)

L. P. Eisenhart. Lines of length zero on surfaces. American M. S. Bull. (2) 8, 241-243.

Herleitung folgender Sätze: Die Minimalflächen und die Kugeln sind die einzigen reellen Oberflächen, für welche die sphärische Abbildung der Linien von der Länge Null das System rechtwinkliger Erzeugenden der Kugel ist. — Damit die asymptotischen Linien oder ein konjugiertes System auf einer Oberfläche auf der Kugel durch ihre imaginären sphärischen Erzeugenden abgebildet werden kann, müssen sie Linien von der Länge Null auf der Oberfläche sein. Lp.

J. Lubin. Détermination d'une surface ou d'une ligne de l'espace. Revue scient. (4) 17, 304-308.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumkurven.

F. Enriques. Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche. Torino Atti 37, 19-40.

Enriques und Castelnuovo haben (cf. F. d. M. 32, 622, 1901) eine systematische Theorie der Geometrie auf den algebraischen Flächen entwickelt. Da die dort in § 1 und § 2 gegebenen Grundlagen nur sehr knapp gefaßt sind, hat Enriques nunmehr eine ausführliche Einleitung in jene große Arbeit verfaßt.

Sei F eine singularitätenfreie algebraische „Fläche" im Raume S_k von k Dimensionen. Durch eine lineare ∞^r Schar

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_{r+1} f_{r+1} = 0$$

von Flächen wird auf F ein lineares System $|C|$ von ∞^r Kurven C ausgeschnitten. Irgend ein fester gemeinsamer Punkt der Kurven C, von der Multiplizität i, heißt ein i-facher Basispunkt des Systems $|C|$.

Geht F durch eine birationale Transformation über in F_1, so geht auch das System $|C|$ auf F in ein System $|C_1|$ auf F_1 über. Ein i-facher Basispunkt von $|C|$ geht dabei im allgemeinen über in einen eben solchen für $|C_1|$. Dagegen verwandelt sich ein für die Transformation „fundamentaler" Basispunkt A von $|C|$ in eine Kurve a auf F_1, die dann eine „Ausnahmskurve" heißt. Diese Fundamentalpunkte A zerfallen in drei Klassen. Ist die Kurve a kein fester Bestandteil der Kurven C_1, so wird A „virtualmente non esistente" genannt (erste Klasse). Ist dagegen a, i-mal gerechnet, ein fester Bestandteil der C_1, so ist der i-fache Basispunkt A „assegnato di molteplicità virtuale i" (zweite Klasse).

Ist endlich a, schon j-mal ($j < i$) gerechnet, ein fester Bestandteil der C_1, so heißt A „assegnato di molteplicità virtuale j e di molteplicità accidentale i" (dritte Klasse). Ein System $|C|$, virtual frei von Basispunkten auf F, ist ein „vollständiges", wenn es nicht in einem umfassenderen System derselben Ordnung enthalten ist. Dann gilt der grundlegende Satz, daß irgend eine Kurve C auf F einem bestimmten vollständigen System $|C|$ derselben Ordnung angehört.

Der Begriff eines vollständigen Systems $|C|$ nebst dem soeben erwähnten Satze läßt sich auf den Fall ausdehnen, daß $|C|$ Basispunkte der zweiten Klasse enthält. Die Eigenschaft der Vollständigkeit eines Systems $|C|$ ist dann gegenüber jeder birationalen Transformation von F eine invariante.

Liegen zwei vollständige Systeme $|C|$ und $|K|$ auf F vor, so existiert ein bestimmtes vollständiges Summensystem $|C+K|$, das alle aus Kurven C und K zusammengesetzten Kurven enthält. Umgekehrt gibt es dann auch, unter gewissen Voraussetzungen über $|C|$ und $|K|$, ein bestimmtes Differenzsystem $|C-K|$. Sind die Kurven C eines Systems reduzibel, so zerfallen sie in einen festen (allen gemeinsamen) Bestandteil und in einen variabeln irreduzibeln Teil.

Nunmehr werden die gegenüber einer birationalen Transformation invarianten „Charaktere“ eines ∞^r-Systems $|C|$ eingeführt. Das ist einmal die „Dimension“ r selbst, sodann das „Geschlecht“ π und der „Grad“ n. Im Falle, wo $|C|$ ein irreduzibles System ohne Basispunkte der dritten Klasse ist, ist π das Geschlecht der erzeugenden Kurve C und n die Anzahl der variabeln Schnittpunkte zweier erzeugenden C. Sind dagegen i-fache akzidentale Basispunkte vorhanden, so ist π noch um $\sum \frac{i(i-1)}{2}$ zu vermehren, n um $\sum i^2$, und eine entsprechende Vermehrung tritt bei assignierten Basispunkten ein.

Für die Geschlechter π_1, π_2, π und die Grade n_1, n_2, n der Systeme $|C_1|, |C_2|, |C_1+C_2|$ gelten die Beziehungen:

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1, \quad n = n_1 + n_2 + 2i,$$

wenn i die Zahl der virtualen Schnittpunkte von C_1 und C_2 bedeutet. Diese Beziehungen gestatten, die Begriffe Geschlecht und Ordnung auch auf reduzible Systeme $|C|$ auszudehnen, und gelten dann wiederum für solche.

Nunmehr wird der wichtige Begriff der Jacobischen Kurve eingeführt. Es liege ein Netz (eine ∞^2 Schar) von Kurven auf F vor. der Ort der Doppelpunkte von Kurven des Netzes heißt die Jacobische Kurve des Netzes.

Zerlegt man ein beliebiges, aber mindestens zweifach unendliches Kurvensystem $|C|$ auf F auf alle möglichen Weisen in Netze, so bilden sämtliche Jacobischen Kurven dieser Netze ein bestimmtes lineares System.

Auf dem Begriff der Jacobischen Kurve beruht weiterhin der der adjungierten Kurven C' eines Systems $|C|$ mit der fundamentalen Eigenschaft $|C'+K| = |(C+K)'|$. My.

H. Lacaze. Sur la connexion linéaire de quelques surfaces algébriques. Toulouse Ann. (2) 3, 151-215 (1901).

Der Verf. untersucht zunächst die linearen Cyklen einer algebraischen Fläche nach den von Picard aufgestellten Methoden und wendet die erhaltenen Resultate auf die Reduktion der linearen Cyklen an, welche den Flächen mit der Gleichung

$$z^2 = f(x, y)$$

zukommen. Alsdann reichen die aufgestellten Sätze in vielen Fällen aus, um die Ordnung des linearen Zusammenhanges der Fläche, d. i. die Anzahl der linear unabhängigen Integrale von vollständigen Differentialen erster und zweiter Gattung, zu bestimmen. Im zweiten Kapitel der Arbeit wird alsdann speziell der Fall untersucht, wenn die Funktion r$f(x, y)$ vom vierten, sechsten oder achten Grade ist, wodurch auch die von de Franchis (Palermo Rend. **14**; F. d. M. **31**, 632, 1900) behandelte

Frage der Aufstellung der Flächen vierten Grades, welche eine positive Ordnung des linearen Zusammenhanges besitzen, beantwortet werden kann.

Lsg.

B. Levi. Sur la résolution des points singuliers des surfaces algébriques. C. R. 134, 222-225.

Es handelt sich um die wichtige Aufgabe, eine algebraische Fläche birational in eine andere mit nur gewöhnlichen Singularitäten zu transformieren. Die Schwierigkeit des Beweises besteht darin, alle möglichen Fälle zugleich zu umfassen. Im Jahre 1897 hat der Verf. in den Torino Atti (F. d. M. 28, 557, 1897) einen Beweis veröffentlicht, der aber keine allgemeine Anerkennung gefunden zu haben scheint. Er setzt daher die Grundzüge seines Beweises nochmals auseinander. My.

C. W. M. Black. The parametric representation of the neighborhood of a singular point of an analytic surface. American Acad. Proc. 37, 281-330.

Mit dem Problem, die Umgebung eines singulären Punktes auf einer algebraischen Fläche durch eine endliche Anzahl von Parameterformeln zwischen zwei Variabeln darzustellen, hat sich u. a. Kobb (vergl. F. d. M. 24, 376, 1892) beschäftigt. Der Nachweis der in den Kobbschen Untersuchungen enthaltenen Irrtümer, von denen einige bereits von Levi (F. d. M. 28, 557, 1897) erkannt worden sind, bildet die Einleitung der vorliegenden Arbeit. Sodann wird der Hauptsatz bewiesen, den man folgendermaßen aussprechen kann: Wenn $F(x, y, z)$ eine in der Umgebung des Punktes $x=a$, $y=b$, $z=c$ analytische Funktion ihrer drei unabhängigen Variabeln ist, wenn ferner die Funktion selbst und auch ihre partiellen Ableitungen nach x, y, z im Punkte (a, b, c) verschwinden, so lassen sich alle Werte von (x, y, z), welche der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ genügen und in einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes (a, b, c) liegen, darstellen durch eine endliche Anzahl von Parametergleichungen von der Form

$$x = \Phi_\varrho(u, v),\ y = \Psi_\varrho(u, v),\ z = X_\varrho(u, v) \quad (\varrho = 1, 2, 3, \dots, \bar{\varrho}),$$

wo Φ_ϱ, Ψ_ϱ, X_ϱ in einem bestimmten Gebiete analytische Funktionen ihrer Argumente (u, v) sind; ferner entspricht jedem Wertetripel (x, y, z) — mit Ausnahme der Werte $(0, 0, 0)$ — für mindestens einen Wert von ϱ ein Wertepaar (u, v) innerhalb des für Φ_ϱ, Ψ_ϱ, X_ϱ abgegrenzten Bereiches, und für keinen Wert von ϱ, für welchen dies der Fall ist, gibt es noch ein zweites Wertepaar (u, v) von derselben Eigenschaft. Dem Wertetripel $(0, 0, 0)$ entspricht mindestens ein Wertepaar, im allgemeinen aber eine unendlich große Anzahl von Wertepaaren (u, v) für jeden Wert von ϱ. Z.

J. DE VRIES. Surfaces algébriques renfermant un nombre fini de droites. Arch. du Musée Teyler (2) 8, 235-288.

Diese Abhandlung beschäftigt sich hauptsächlich mit den vielfachen Geraden, die eine algebraische Fläche enthalten kann. Insbesondere werden betrachtet: 1. Die „axiale" Fläche, erzeugt von ebenen Kurven n-ter Ordnung, die in den Ebenen eines Büschels liegen und $\frac{1}{2}n(n+3)$ feste Geraden schneiden. 2. Flächen n-ter Ordnung mit einer $(n-2)$-fachen Geraden, welche also von jeder durch dieselbe hindurchgehenden Ebene in Kegelschnitten geschnitten werden. 3. Flächen $(\mu+\nu+1)$-ter Ordnung mit einer μ-fachen und mit einer ν-fachen Geraden. 4. Flächen $(\lambda+\mu+\nu)$-ter Ordnung, welche drei Gerade enthalten, und zwar eine λ-, μ- und ν-fache. Diese allgemeinen Betrachtungen finden nun schließlich ihre Anwendung bei einer Diskussion der Flächen vierter, fünfter und sechster Ordnung, welche Doppelgeraden oder drei- und vierfache Geraden aufweisen. Kl.

JAN DE VRIES. Rechte lijnen op oppervlakken met veelvoudige rechten. Amst. Versl. 10, 742-748.

Eine Fläche n-ter Ordnung O^n mit $(n-2)$-facher Geraden kann noch durch $6n-3$ willkürliche Punkte gelegt werden, dagegen nur durch vier willkürliche Geraden für $n>8$, durch fünf Gerade für $n=8$. In einer Fläche $(\mu+\nu+1)$-ter Ordnung mit einer μ-fachen und einer diese schneidenden ν-fachen Geraden werden diese von $2\mu\nu+\mu+\nu+1$ Flächengeraden geschnitten. Insbesondere werden die O^5 mit zwei Doppelgeraden und diejenigen mit einer dreifachen und einer Doppelgeraden, endlich Flächensysteme mit zwei und drei mehrfachen Geraden untersucht. Wö.

U. AMALDI. Determinazione delle superficie algebriche, su cui esistono più di due fasci di curve algebriche unisecantisi. Rom. Acc. L. Rend. (5) 11_2, 217-220.

Flächen der angegebenen Eigenschaft sind entweder rational, oder sie lassen sich birational in Flächen des vierdimensionalen Raumes transformieren, die durch $x=\wp(u)$, $y=\wp'(u)$, $z=\wp(v)$, $t=\wp'(v)$ dargestellt sind. Im ersten Falle gibt es ∞ Scharen sich einpunktig schneidender algebraischer Kurven, im zweiten Fall allgemein vier, bei komplexer Multiplikation auch sechs oder acht solcher Scharen. Hsb.

A. S. GALE. On the rank, order and class of algebric minimum curves. American M. S. Trans. 3, 451-466.

Die Gleichung einer räumlichen Minimalkurve Γ (mit Ausnahme der Minimalgeraden) läßt sich bekanntlich in die Form bringen:

$$x = (1 - s^2) F''(s) + 2sF'(s) - 2F(s),$$
$$y = i(1 + s^2) F''(s) - 2isF'(s) + 2iF(s),$$
$$z = 2sF''(s) - 2F'(s),$$

wo $F(s)$ eine analytische Funktion des komplexen Parameters s bedeutet (mit der einzigen Bedingung $F'''(s) \neq 0$). Eine algebraische Kurve ist Γ dann und nur dann, wenn $F(s)$ eine algebraische Funktion ist.

Dann ergibt sich leicht, da $(1 - s^2)x + i(1 + s^2)y + 2sz + 4F(s) = 0$ die Gleichung einer Schmiegungsebene von Γ ist, daß Ordnung, Rang und Klasse von Γ geliefert werden durch die Ordnung gewisser dreier Funktionen $\varphi(s)$, $\psi(s)$, $\chi(s)$.

Um diese Ordnungen zu gewinnen, bringe man vorerst die Gleichung von Γ, d. h. die Funktion $F(s)$, vermöge einer gewissen Translation und Rotation auf eine geeignete Normalform. Sodann entwickle man die Funktionen $F(s)$, $\varphi(s)$, $\psi(s)$, $\chi(s)$ in der Umgebung irgend eines Punktes $s = a$ nach Potenzreihen von $s - a$. Für $F(s)$ bestehen die drei Möglichkeiten:

$$(1)\ F(s) = (s-a)^{\frac{p}{q}} P(s-a)^{\frac{1}{q}}, \quad (2)\ F(s) = (s-a)^p P(s-a),$$

$$(3)\ F(s) = \left(\frac{1}{s}\right)^p P\left(\frac{1}{s}\right),$$

wo p, q ganze Zahlen sind, und $P(x)$ eine gewöhnliche Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ bedeutet. Die entsprechenden Entwicklungen von $\varphi(s)$, $\psi(s)$ und $\chi(s)$ führen zu den Polen dieser Funktionen, und die jedesmalige Summe der Pole zu der gesuchten Ordnung, wobei verschiedene Unterfälle zu berücksichtigen sind. Der Verf. wendet seine Ergebnisse auf den Fall einer rationalen Funktion $F(s)$ an, der bereits von Lie behandelt ist. Sind m Pole von $F(s)$ vorhanden mit den Ordnungen m_i $(i = 1, \ldots, m)$, so findet man für Rang, Ordnung, Klasse von Γ bezw. die Anzahlen $\Sigma m_i + m + 2$, $\Sigma m_i + 2m$, $\Sigma m_i + 2$. Außerdem wird noch der Fall einer zweiwertigen Funktion $F(s)$ eingehend untersucht, die sich in die Gestalt bringen läßt: $F(s) = R_1(s) + R_2(s)\sqrt{P(s)}$, wo R_1, R_2 rationale Funktionen von s sind und P eine ganze Funktion ohne vielfache Wurzeln. Behufs Ermittelung der Pole von $F(s)$ sind elf Unterfälle zu unterscheiden. Die niedrigsten Rangzahlen, die auftreten können, sind 5, 6, 7. Nach dem Vorgange von Lie können die Resultate des Verf. unmittelbar dazu verwendet werden, um Ordnung und Klasse einer Minimalfläche zu bestimmen, da diese durch Translation einer Minimalkurve erzeugt werden kann.

My.

F. Severi. Il genere aritmetico ed il genere lineare, in relazione alle reti di curve tracciate sopra una superficie algebrica. Torino Atti 37, 625-643.

Vom „arithmetischen Flächengeschlecht“ kennt man, nach Zeuthen,

Noether und Enriques, zwei verschiedene Erklärungen. Aber weder die eine noch die andere bietet eine gründliche Ähnlichkeit mit derjenigen des Geschlechts einer Kurve, zu der man durch Vergleichung zweier linearen Punktreihen derselben gelangt. In der vorliegenden Arbeit hat sich der Verf. die Aufgabe gestellt, die Definition des arithmetischen Flächengeschlechts auf die Vergleichung zweier Kurvennetze der Fläche zu gründen; die Arbeit selbst, welche der Anregung Segres ihre Entstehung verdankt, wurde in ihrer Gestalt nach den Ratschlägen desselben vervollkommnet.

Der Verf. betrachtet auf einer Fläche F von der Ordnung n, welche nur gewöhnliche Singularitäten besitzt, eine Kurve K, ein Kurvennetz und die Jacobische Kurve J derselben; durch eine Anwendung des Chaslesschen Korrespondenzprinzips beweist er zuerst, daß „die Anzahl der Durchschnittspunkte der Kurven K und J, vermindert um die dreifache Anzahl der Durchschnittspunkte von K mit einer beliebigen Kurve des Netzes, dieselbe bleibt, wenn man das Netz nach Belieben wechselt". Dieser Unterschied ist daher ein Charakter, welcher nur von der Kurve K und der sie enthaltenden Fläche F abhängt; hierfür schlägt der Verf. den Namen Eintauchungs-Charakter (carattere d' immersione) vor. Falls adjungierte Flächen $(n-4)$-ter Ordnung existieren, so drückt der genannte Charakter die Anzahl derjenigen Durchschnittspunkte der Kurve mit einer adjungierten Fläche aus, welche auf der Doppelkurve nicht liegen; er ist eine Invariante in bezug auf alle birationalen Transformationen der Fläche F. Durch Anwendung dieser Resultate beweist der Verf. nachher: „Wenn auf F ein Kurvennetz gegeben ist, welches ohne Basispunkte und Fundamentalkurven ist, wenn ferner p das Geschlecht seiner Kurven und π dasjenige seiner Jacobischen Kurve ist, so bleibt der Ausdruck

$$\Omega = \pi - 6p + 9$$

immer derselbe, wenn das Netz beliebig verändert wird". Dieser Ausdruck ist daher ein Charakter von F. Unter denselben Voraussetzungen, wenn χ die Anzahl der Kurven des Netzes ist, deren jede eine Spitze besitzt, ist auch die Differenz

$$P_a = \tfrac{1}{24}\chi - p$$

eine Invariante derselben Natur, welcher der Verf. den Namen „arithmetisches Geschlecht" gibt, da sie (wie der Verf. selbst beweist) mit der Funktion zusammenfällt, welche gewöhnlich diesen Namen trägt. Auch P_a ist eine Invariante in bezug auf alle birationalen Transformationen der Fläche. Besitzt endlich F eine endliche Anzahl e ausgezeichneter Kurven, so ist

$$P^{(1)} = \Omega + e$$

eine absolute Invariante der Fläche; es ist das sogenannte „Liniengeschlecht" der Fläche F.

Um eine Anwendung der auseinandergesetzten Begriffe und der Methoden zu geben, bestimmt der Verf. zum Schluß die Zahlen der

Kurven eines auf einer beliebigen Fläche gezeichneten Netzes, deren jede eine Spitze oder zwei Doppelpunkte besitzt, wie auch die Zahlen der in Netzen enthaltenen Büschel, welche aus sich oskulierenden oder zweimal berührenden Kurven bestehen; die entspringenden Formeln enthalten als ganz besondere Fälle einige, welche Caporali („Collectanea mathem.“; vgl. F. d. M. **13**, 514, 1881) für die Ebene entdeckte. La.

M. Stuyvaert. Recherches relatives aux connexes de l'espace. Belg. Mém. cour. in 8° **61**, 50 S.

J. Neuberg. Rapport. Belg. Bull. Sciences 1899, 740-741; 1900, 223 und 883-884.

Der Verf. dehnt einige der Eigenschaften ebener Konnexe auf den Raum von drei Dimensionen aus. Zuerst studiert er die Eigenschaften, welche aus der Definition des Konnexes fließen, die des konjugierten Regelkonnexes und der Koinzidenzen. Er bestimmt die Ordnung und die Klasse des konjugierten Konnexes in dem allgemeinen Falle und beschäftigt sich mit der Frage nach den Singularitäten des Konnexes.

Mn. (Lp.)

E. Kasner. Some properties of potential surfaces. American M. S. Bull. (2) **8**, 243-248.

Fortsetzung der Arbeit: „On the algebraic potential curves“ (F. d. M. **32**, 576, 1901). Die gegenwärtige Untersuchung dehnt einige der dort gefundenen Resultate auf den entsprechenden Typus der Oberflächen aus, nämlich auf Oberflächen, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten $\varphi(x, y, z) = 0$ ist; hierin ist φ eine ganze rationale Lösung der Potentialgleichung $\Delta\varphi = 0$. Die Ergebnisse sind unter den Überschriften zusammengestellt: § 1. Apolare Eigenschaften. § 2. Spezielle Potentialflächen. § 3. Knoten und vielfache Kurven. Im ganzen sind neun Theoreme ausgesprochen, von denen die im § 3 nicht bloß für algebraische, sondern für alle analytischen Potentialflächen gelten. Lp.

J. N. van der Vries. On monoids. Bull. Univ. Kansas. **1**, 305-322.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

H. M. Taylor. On the condition that five straight lines meet a sixth. Messenger (2) **31**, 135-137.

Die betreffende Bedingung wird in der Form erhalten $LP + MQ + NR = 0$, wo L, M, N, P, Q, R die Unterdeterminanten von

$$|l_i\, m_i\, n_i\, p_i\, q_i\, r_i|$$

sind, gehörig zu $l_6, m_6, n_6, p_6, q_6, r_6$, den Koordinaten der sechsten Geraden, während $l_i, m_i, n_i, p_i, q_i, r_i$ $(i = 1, 2, \cdots, 5)$ die Koordinaten der fünf anderen Geraden bedeuten. Hieraus werden einige Folgerungen gezogen. Lp.

C. A. Laisant. Remarques sur les bissectrices d'un angle. Ens. math. **4**, 284-287.

Hat man zwei Gerade des Raumes:

$$\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma}, \quad \frac{x-a}{\alpha'} = \frac{y-b}{\beta'} = \frac{z-c}{\gamma'},$$

so sind die Winkelhalbierenden:

$$\frac{x-a}{\alpha+\alpha'} = \frac{y-b}{\beta+\beta'} = \frac{z-c}{\gamma+\gamma'}, \quad \frac{x-a}{\alpha-\alpha'} = \frac{y-b}{\beta-\beta'} = \frac{z-c}{\gamma-\gamma'}.$$

Die erste der beiden letzteren hälftet den spitzen oder den stumpfen Winkel, je nachdem $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$ positiv oder negativ ist. Lp.

Ph. du Plessis. Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1902. Composition mathématique. Nouv. Ann. (4) **2**, 313-320.

Analytische und geometrische Untersuchung des Ortes der senkrechten Projektionen eines festen Punktes auf alle Geraden einer speziellen Strahlenkongruenz erster Ordnung zweiter Klasse, die nämlich gleichzeitig einen Kreis und eine in einem Punkte seiner Peripherie auf seiner Ebene errichtete Senkrechte schneiden. R. M.

M. Stuyvaert. Sur les plans qui coupent en des points d'une conique un système de lignes de l'espace. Belg. Mém. cour. in 8°, **62**, 22 S.

Vergl. F. d. M. **32**, 631, 1901. Mn.

E. Müller. Über das Analogon zur Lieschen Kugelgeometrie im Gebiete der geraden Linie. Deutsche Math.-Ver. **11**, 123-128.

Das auf der Geraden der Kugel entsprechende Gebilde ist das Punktepaar. Sind $P_i = a_i x^2 + 2b_i x + c_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ drei Punktepaare einer Geraden, die zu je zweien einander harmonisch trennen, so kann man jedes andere Punktepaar in der Form $P = x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 = 0$ darstellen; hier sind x_1, x_2, x_3 das Analogon zu den pentasphärischen Koordinaten. Der Verf. führt dann den Begriff der orientierten Punktepaare ein, definiert den „Winkel" zweier solcher

Punktepaare. Schließlich gelangt er zu 4 Punktepaarkoordinaten $x_1, \ldots, x_4$, zwischen denen die Relation $\Sigma x_i^2 = 0$ besteht, und die den hexasphärischen Koordinaten entsprechen. Ist $y_1, \ldots, y_4$ ein Wertsystem, für das $\Sigma y_i^2 \neq 0$, so definiert die Gleichung $\Sigma x_i y_i = 0$ zusammen mit $\Sigma x_i^2 = 0$ alle Punktepaare einer Projektivität. Die Projektivitäten auf den Geraden erscheinen somit als das Analogon zu den linearen Kugelkomplexen von Lie. Damit ist zugleich die bekannte Stephanossche Abbildung der Projektivitäten einer Geraden wiedergefunden. El.

C. Koehler. Über die Klassifikation der Kurven und Flächen zweiten Grades. Arch. d. Math. u. Phys. (3) 8, 21-33, 94-111.

S. Gundelfinger. Bemerkungen zu dem Aufsatz von C. Koehler: Über die Klassifikation der Kurven und Flächen zweiten Grades. Arch. d. Math. u. Phys. (3) 8, 311-313.

Bei einer beliebigen algebraischen Kurve oder Fläche hängt die Einteilung nach ihrer projektiven Beschaffenheit nur vom Werte der Konstanten ihrer Gleichung ab. Ihre metrische Beschaffenheit hängt aber auch noch von den Koordinaten der unendlich fernen Geraden, resp. Ebene (also von dem zugrunde gelegten Koordinatensystem) ab. Nach diesem Prinzip will der Verf. die Gebilde zweiten Grades klassifizieren. Die Vorkenntnisse sind so gering wie möglich gehalten; dahin gehört das homogene Koordinatensystem, die darauf aufgebaute Polarentheorie bis zum Beweise der Identität der nicht ausgearteten Gebilde zweiter Ordnung und Klasse; der Zusammenhang zwischen Ausartung und Rang der Determinante des Gebildes; endlich die elementare Theorie der Determinanten, bis zu dem Satze, daß der Rang einer symmetrischen Determinante durch das Verschwinden ihrer Hauptunterdeterminanten allein bestimmt ist.

Ist nun, bezogen auf Dreieckskoordinaten, $f(x, x) = \Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ die Gleichung der Kurve zweiter Ordnung C_2, so wird ihr Schnitt mit der Geraden $v = |yz|$ gegeben durch

$$f(y, y)\, x_1^2 + f(z, z)\, x_2^2 + 2 f(y, z)\, x_1 x_2 = 0,$$

und durch Rang und Vorzeichen der Determinante $D = f(y, y) f(z, z) - f^2(y, z)$ ist die Beschaffenheit dieses Schnittes bestimmt. Ist $F(u, u)$ die adjungierte Form von $f(x, x)$, so besteht vermöge der Gleichungen $v_i = |y_k z_l|$ die Identität $D = F(v, v)$, und die Determinanten D und $F(v, v)$ haben auch immer den gleichen Rang.

Die analoge Erscheinung tritt bei Flächen F_2 zweiter Ordnung $f(x, x) = 0$ auf; schneidet man die Fläche mit einer Ebene $v = |yzs|$, und ist D die Determinante des Schnittes, $F(v, v)$ die zu $f(x, x)$ adjungierte Form, so sind wiederum die Determinanten D und $F(v, v)$ gleich und von gleichem Range.

Endlich gilt Analoges für die zweimal, resp. dreimal geränderte Determinante der Kurve, resp. Fläche zweiter Ordnung.

Da der Grad der Ausartung einer C_2 durch den Rang ihrer Determinante A bestimmt wird, so kommt bei der projektiven Einteilung nur noch die Realitätsfrage hinzu. Die aus A und deren Hauptunterdeterminanten gebildete Reihe läßt sich so anordnen, daß die C_2 reell oder imaginär ist, je nachdem diese Reihe Zeichenwechsel aufweist oder nicht. Die metrische Einteilung der C_2 ist dann, wie oben schon betont, bedingt durch die projektive Beschaffenheit ihres Schnittes mit der unendlich fernen Geraden g_∞.

Analoges gilt dann wiederum für die Flächen zweiter Ordnung F_2. Danach ergeben sich die Kriterien für eine nicht ausgeartete Fläche, die dann imaginär, geradlinig oder nicht-geradlinig sein kann, für einen imaginären und reellen Kegel, resp. ein solches Ebenenpaar, schließlich für eine Doppelebene.

Gundelfinger macht zunächst einige Bemerkungen, die seinen Anteil an einigen der von Koehler benutzten Sätze klarstellen, und füllt sodann eine Lücke aus, um die Koehlersche, nur notwendige Bedingung für die Realität einer Fläche zweiter Ordnung zu einer hinreichenden zu ergänzen.

My.

G. Halley des Fontaines. Sur la détermination des axes d'une section plane d'une quadrique. Revue de Math. spéc. **12**, 378.

Um die Richtungen der Achsen eines ebenen Schnittes einer Fläche zweiter Ordnung zu bestimmen, halbiere man die Winkel der beiden Geraden, in denen die Schnittebene von zwei nicht parallelen, auf derselben Hauptebene senkrecht stehenden cyklischen Ebene geschnitten wird. Die gesuchten Achsen sind diesen Winkelhalbierenden parallel. Zch.

G. Stiner. Über Durchschnittskurven von Flächen zweiten Grades: Einige typische Formen der Kurven mit unpaaren Ästen. Pr. Technikum Winterthur. 16 S. 6 Taf. 4°.

Es werden in dieser Arbeit einige typische Formen von Raumkurven vierter Ordnung erster Spezies konstruiert, durch welche keine reellen Regelflächen zweiter Ordnung gehen. Die Projektionen haben immer zwei reelle Doppelpunkte, darunter wenigstens einen mit reellen Tangenten; sie haben imaginäre Doppeltangenten, und jede Tangente trifft sie außer im Berührungspunkt noch in zwei reellen Punkten. Die Kurven ergeben sich als Schnittkurven von je einem gleichseitigen Drehungshyperboloid und einem hyperbolischen Paraboloid. Die abwickelbare Tangentenfläche einer solchen Kurve wird von einer beliebigen Ebene in einer C^8 mit vier Rückkehrpunkten (von denen wenigstens zwei reell sind), mit 16 imaginären Doppelpunkten und ebensovielen imaginären Wendepunkten geschnitten. Es werden auf den Tafeln fünf verschiedene Fälle dargestellt.

Wö.

A. BOURGONNIER. Condition pour qu'il existe un tétraèdre inscrit dans une quadrique et circonscrit à une autre. Revue de Math. spéc. 12, 525-526.

Die von Duporcq in der Augustnummer 1901 der Revue angegebene Methode zur Aufstellung der Bedingung, welche zwei Kegelschnitte erfüllen müssen, damit Dreiecke existieren, die dem einen ein- und dem andern umgeschrieben sind, wird hier auf das analoge räumliche Problem ausgedehnt. Es wird gezeigt, daß bei passender Wahl des Koordinatensystems die Gleichungen der beiden Flächen zweiter Ordnung die Form haben:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0,$$

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} = 0.$$

Entwickelt man die Gleichung

$$\left(a - \frac{\lambda}{a}\right)\left(b - \frac{\lambda}{b}\right)\left(c - \frac{\lambda}{c}\right)\left(d - \frac{\lambda}{d}\right) = 0$$

nach Potenzen von λ:

$$\Delta\lambda^4 + \Theta\lambda^3 + \Phi\lambda^2 + \Theta'\lambda + \Delta' = 0,$$

so lautet die gesuchte Bedingung:

$$(\Theta^2 - 4\Delta\Phi)^2 - 64\Delta'\Delta^3 = 0.$$

Zch.

P. PATRASSI. Le linee asintotiche nelle superficie del 2° ordine dotate di centro. Periodico di Mat. (2) 4, 308-312.

Als Beispiel für die Behandlung der asymptotischen Linien berechnet der Verf. nach den Formeln der allgemeinen Flächentheorie den Fall der Flächen zweiter Ordnung, also insbesondere die Erzeugenden des einschaligen Hyperboloids. Lp.

H. MASCHKE. On superosculating quadric surfaces. American M. S. Trans. 3, 482-484.

Hermite hat gefunden (Cours d'analyse 1873, S. 148, 149), daß die zehn Bedingungsgleichungen, welche sich für den Kontakt dritter Ordnung zwischen einer gegebenen Fläche Φ und einer zu bestimmenden Fläche zweiter Ordnung F ergeben, durch Elimination der neun Konstanten von F sich nicht auf eine, sondern auf zwei Gleichungen reduzieren. Dieses Verfahren wird vom Verf. dadurch außerordentlich vereinfacht, daß er die obigen zehn Gleichungen durch vier andere ersetzt, welche die geometrischen Bedingungen der Aufgabe mit den Mitteln der neueren Algebra darstellen. Schg.

V. ROUQUET. Des courbes sphériques dont les développantes sont aussi sphériques. Toulouse Mém. (10) 2, 71-81.

Für die in Rede stehenden Kurven wird eine geometrische Konstruktion angegeben und daraus ihre Differentialgleichung in den Koordinaten r, φ, ϑ abgeleitet. Die Integration ergibt φ als Funktion von r und ϑ in Form eines elliptischen Integrals. Sodann werden die Krümmungs- und Torsionsverhältnisse dieser Kurven mittels einer in Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces (I, 8 u. 10) aufgestellten Methode untersucht.
Schg.

G. KILBINGER. Relations analytiques des sphères et ellipsoïdes. Ens. math. 4, 327-329.

Eine Kugel mit drei aufeinander senkrechten Durchmessern geht durch Parallelprojektion auf einen neuen Raum in ein Ellipsoid mit drei konjugierten Durchmessern über. Werden diese Durchmesser als Koordinatenachsen betrachtet, so bestehen zwischen den Koordinaten zweier homologen Punkte der beiden Flächen einfache Beziehungen, welche benutzt werden, um aus Eigenschaften der Kugel entsprechende Eigenschaften des Ellipsoids abzuleiten (vgl. Chasles, Aperçu historique, S. 811 bis 830. Lp.)
Schg.

T. J. I'A. BROMWICH. On the parabolas (or paraboloids) through the points common to two given conics (or quadrics). American M. S. Bull. (2) 8, 386-388.

„Die beiden Parabeln, welche in dem Büschel $S+\lambda S'$ vorkommen, sind reell, wenn jeder der beiden Kegelschnitte $S=0$, $S'=0$ eine Ellipse ist; diese Bedingung ist hinreichend, aber nicht notwendig." — Die drei Paraboloide, welche in dem Büschel $S+\lambda S'=0$ vorkommen, sind alle reell, wenn jede der beiden Flächen zweiter Ordnung $S=0$, $S'=0$ ein Ellipsoid ist.
Lp.

A. HAAS. Über die Ähnlichkeitskurven auf einem Ellipsoid. Math. naturw. Mitt. (2) 4, 35-39.

Der geometrische Ort aller Punkte eines Ellipsoids, deren konjugierte Durchmesserebenen ähnliche Ellipsen ausschneiden, wird durch eine Cyklide ausgeschnitten, ist also eine Raumkurve achter Ordnung.
R. M.

A. HAAS. Über die einem Ellipsoid umbeschriebenen Kegel. Math. naturw. Mitt. (2) 4, 39-44.

Bestimmung des geometrischen Orts der Spitzen ähnlicher Tangentialkegel (Raumkurve 16. Ordnung).
R. M.

H. LAURENT. Solution d'une question proposée (909). Nouv. Ann. (4) 2, 427-432.

Es handelt sich um eine von É. Lemoine gestellte Frage; wenn in ein orthogonales Dreiflach ein Ellipsoid von gegebener Größe die drei Ebenen berührend gelegt werden soll, so werden die möglichen Berührungspunkte ein gewisses Gebiet nicht verlassen. Verf. zeigt, wie man die Koordinaten der begrenzenden Konturen durch einen Parameter darstellen kann. R. M.

A. GRÜNWALD. Geodätische Linien auf dem Ellipsoide. Prag. 27 S. 8° u. 1 Taf.

W. LUDWIG. Über die „ϑ-Kurven" des einmanteligen Hyperboloides und des hyperbolischen Paraboloides. Arch. der Math. u. Phys. (3) 3, 217-225.

Als ϑ-Kurve einer Fläche zweiten Grades wird die Kurve derjenigen Punkte definiert, in denen sich die beiden durch sie gehenden Geraden der Fläche unter dem Winkel ϑ schneiden. Diese Kurve ist algebraisch, und zwar von der achten, resp. vierten Ordnung auf den zentrischen F_2, von der vierten, resp. zweiten Ordnung auf dem Paraboloid (s. des Verf. Dissertation Breslau 1898. F. d. M. 29, 539). Der Verlauf der Kurven auf dem einschaligen Hyperboloid und dem hyperbolischen Paraboloid wird zunächst der Anschauung zugänglich gemacht durch Figuren, die sie in je drei zweckmäßigen Orthogonalprojektionen darstellen. Sie sind auf dem Hyperboloid im Endlichen geschlossen, auf dem Paraboloid ins Unendliche laufend. Je nach dem Werte von ϑ im Verhältnis zu den Konstanten des Hyperboloids und nach den Größenverhältnissen dieser Konstanten selbst ordnen sich die ϑ-Kurven in sechs Gruppen an, welches Verhalten sowie die Gestalten der Kurve $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ in einer ausführlichen Tabelle dargestellt wird. Ebenso werden die je nach dem Verhältnis von ϑ zu dem Winkel w der beiden Scheitelgeraden des Paraboloids verschiedenen Gestalten der ϑ-Kurve auf dieser Fläche diskutiert. D.

A. VACQUANT. Agrégation des sciences mathématiques (Concours de 1901). Solution de la question de mathématiques spéciales. Nouv. Ann. (4) 2, 265-280.

Es werden die Fokalkegelschnitte eines in vorgeschriebener Weise von einem veränderlichen Parameter abhängigen Paraboloids bestimmt und die durch die Veränderung dieser Fokalkurven erzeugten Örter und Einhüllenden untersucht. R. M.

F. RUDIO. Zur Kubatur des Rotationsparaboloides. Zs. f. Math. u. Phys. 47, 126-127.

Wenn die Höhe eines Segmentes zwischen zwei zur Hauptachse

senkrechten Ebenen durch eine dritte Ebene im Verhältnis $M_1 M : M M_2 = \lambda$ geteilt ist, so gilt die Formel für das Volumen V:

$$V = \tfrac{1}{2} h \{(1 + 1/\lambda) g + (1 - 1/\lambda) g_1\},$$

wo g_1 den zu M_1, g den zu M gehörigen Querschnitt bezeichnet. Die nämliche Formel gilt übrigens für jeden Körper, dessen Querschnitt parallel zu einer festen Ebene eine lineare Funktion des Abstandes von dieser Ebene ist, wie aus den Formeln der mechanischen Quadratur einleuchtet. Lp.

L. DESAINT. Un théorème général sur les surfaces de révolution. Nouv. Ann. (4) **2**, 184-186.

Der Verf. zeigt geometrisch: Wenn eine nicht zerfallende Drehfläche von einer zur Drehachse nicht senkrechten Ebene nach einer Kurve geschnitten wird, derart, daß die Projektion des reellen Teils der Schnittkurve auf eine zur Drehachse senkrechte Ebene ein einfach oder mehrfach zählender Kreis ist, so muß die Fläche ein Drehungsparaboloid sein. Wö.

G. FONTENÉ. Sur une figure de l'espace déduite des polygones de Poncelet. Nouv. Ann. (4) **2**, 545-549.

Es handelt sich um eine geschlossene Folge von Kegeln, die einer Fläche zweiten Grades umbeschrieben sind und sich in Kegelschnitten einer andern Fläche zweiten Grades schneiden. R. M.

M. DUBOIS. Concours général de 1902. Solution du problème de mathématiques spéciales. Nouv. Ann. (4) **2**, 501-510.

Lösung einer Aufgabe aus der analytischen Geometrie des Raumes. Jhk.

FREISE. Die Gleichung der harmonischen Teilung. Unterrichtsbl. f. Math. 8, 90-91.

Die Gleichung $1/x + 1/y = 1/z$ oder $(x + y) z = xy$ kann als die eines Kegels zweiter Ordnung gedeutet werden. Bei rechtwinkligen Koordinaten ist der Kegel ein Kreiskegel, dessen Lage näher bestimmt wird. Als ganzzahlige Lösung jener Gleichung wird ferner gegeben:

$$x : y : z = p(p + q) : q(p + q) : pq,$$

wo p und q beliebige teilerfremde ganze Zahlen sind. Lp.

E. VENERONI. Sopra alcuni sistemi di cubiche gobbe. Palermo Rend. **16**, 209-229.

Es sei $[C_p^n]$ ein System von ∞^2 Raumkurven der Ordnung n und des Geschlechtes p. Als Ordnung des Systems bezeichnet der Verf. die

Anzahl der durch einen beliebigen Raumpunkt gehenden Systemkurven, als Klasse die Anzahl der Systemkurven, welche eine beliebige Gerade zur Sehne (Doppelsekante) haben. Punkte und Gerade, für welche die Anzahl der durchgehenden, bezw. doppelt schneidenden Kurven größer und daher unendlich groß ist, heißen singulär. Die Ordnung kann 0 sein; dann liegen die sämtlichen Systemkurven auf einer Fläche, deren sämtliche Punkte singulär sind. Ebenso kann die Klasse 0 sein; dann sind sämtliche Sehnen des Systems singulär und bilden einen Komplex. Verf. studiert zunächst allgemein die Fälle, in denen Ordnung und Klasse nicht größer als 1 sind, und wendet sich dann zur Aufstellung aller hierher gehörigen Systeme von Kurven dritter Ordnung. Stz.

E. Ciani. Sopra i gruppi finiti di collineazioni quaternarie dotate di cubiche gobbe invarianti. Palermo Rend. **16**, 327-345.

Kohn (F. d. M. **30**, 490, 1899) hat die gegenseitige Lage zweier kubischen Raumkurven untersucht, die invariant sind einmal in bezug auf eine Oktaedergruppe von Kollineationen, sodann in bezug auf eine Ikosaedergruppe. Andererseits hat Maschke (F. d. M. **29**, 115, 1898) alle linearen endlichen quaternären Gruppen aufgestellt, die mit symmetrischen und alternierenden Buchstabenvertauschungsgruppen holoedrisch isomorph sind. Unter diesen müssen sich die beiden von Kohn benutzten befinden. Der Verf. führt diese Bestimmung durch und fragt darüber hinaus nach allen endlichen linearen quaternären Gruppen, die invariante kubische Raumkurven besitzen. Die Oktaedergruppe wird nunmehr nach ihren geometrischen Eigenschaften verfolgt. Das invariante Oktaeder zerlegt sich in zwei Sechsecke und zwei Vierecke. Ein besonderes Interesse beanspruchen die bei der Gruppe invarianten Flächen, eine solche zweiten Grades, sowie ein Büschel und Netz von solchen vierten Grades. Die entsprechende Untersuchung der Ikosaedergruppe befindet sich in einer in den Annali di Mat. abgedruckten Arbeit (s. das Referat S. 160 dieses Bandes). My.

J. de Vries. La configurazione formata dalle ventisette rette di una superficie cubica. Mat. pure ed appl. **2**, 49-53. [Aus: Arch. Néerl. **6**, 148-154, 1901.]

Durch ziemlich einfache Betrachtungen wird (in einer Schlußnote noch auf eine zweite Art) abgeleitet, daß die Fläche dritter Ordnung 27 Gerade enthält. Aus der Konfiguration ergeben sich leicht Sätze, wie sie z. B. im neunten Vortrag des dritten Bandes der Geometrie der Lage von Reye (3. Aufl.) zu finden sind. Durch Spezialisierung der Lage der Geraden erhält man Flächen mit einem Doppelpunkt, mit zwei, drei und vier Doppelpunkten (s. F. d. M. **32**, 491, 1901). Lwt.

St. Glaser. Untersuchung der Flächen dritten Grades, welche bei der Abbildung nach dem Prinzip der reziproken Radienvektoren wieder in sich selbst zurückkehren. Pr. Falk-Realgymn. Berlin. 29 S. 4°.

Soll eine Fläche n-ter Ordnung, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten $f = 0$ sei, durch Inversion in sich selbst übergehen, so führe man Polarkoordinaten r, ϑ, φ ein. Wird dann die Flächengleichung $r^n g_n + r^{n-1} g_{n-1} + \cdots + g_0 = 0$, so darf sich diese bei Vertauschung von r mit $\frac{1}{r}$ nicht ändern. Daraus resultiert eine Reihe von Bedingungsgleichungen, wobei die Fälle eines geraden und ungeraden n zu trennen sind. Die Anwendung auf $n = 3$ zeigt, daß die fraglichen Flächen die charakteristische Eigenschaft besitzen, von einer unendlichen Schar paralleler Ebenen in lauter Kegelschnitten geschnitten zu werden, die ihrerseits wieder als Schnittkurven derselben Ebenen mit einer unendlichen Schar von Flächen zweiten Grades aufgefaßt werden können. Dies führt auch zu einer Vorstellung von der Gestalt dieser Flächen dritter Ordnung. My.

D. Andere spezielle Raumgebilde.

G. Marletta. Studio geometrico della quartica gobba razionale. Annali di Mat. (3) 8, 97-128.

Fast alle bekannten projektiven Eigenschaften der allgemeinen und einiger speziellen Raumkurven vierter Ordnung vom Geschlechte Null werden hier rein geometrisch gewonnen unter dem einheitlichen Gesichtspunkte der Projektion aus dem vierdimensionalen Raum. R. M.

M. Genty. Solutions de questions proposées 1901, 1902, 1904, 1906, 1907. Nouv. Ann. (4) 2, 475-479.

Es handelt sich um projektive Eigenschaften der Oskulationsebenen der Raumkurve vierter Ordnung erster Art, die der Verf. sämtlich aus einer einfachen Parameter-Darstellung ableitet. R. M.

F. Riess. Geometrische Behandlung der Punktkonfigurationen, welche auf einer Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies liegen. Math. és Phys. Lapok 10, 293-309, 346-360.

A. Goller. Über die Steinersche Fläche. Pr. Ludwigs-Realschule München. 69 S. 8°.

Die Steinersche Fläche wird durch eine quaternär-ternäre Form $U_A\, a_x^2 = 0$ dargestellt. Der Verf. entwickelt die Geometrie auf der

Steinerschen Fläche mit Zugrundelegung ternärer Formen, insbesondere die Gleichung und die Eigenschaften der Asymptotenkurven, und geht dann zu quaternären mit der Fläche in Zusammenhang stehenden Gebilden über, wobei insbesondere die Hessesche Fläche der Steinerschen Fläche in einfacher Weise sich ergibt. Wö.

G. Humbert. Détermination des courbes algébriques de degré donné qu'on peut tracer sur la surface de l'onde. S. M. F. Bull. **30**, 23-28.

Die algebraischen Kurven auf der singulären Kummerschen Fläche (Tetraedroid) sind alle von geradem Grad. Die Kurven $2l$-ten Grades bilden $32(2l-1)$ Familien. Die Kurven einer Familie gehen alle einmal durch $2s$ Doppelpunkte der Fläche, wo s eine der Zahlen 0, 2, 3, 4, 5, 6, 8 ist; sie bilden eine lineare $\frac{1}{2}(l^2-k^2-s+2)$-mal endliche Schar, ihr allgemeines Geschlecht ist ebenfalls $\frac{1}{2}(l^2-k^2-s+2)$, wobei k eine für die Familie charakteristische Zahl zwischen $-l$ und l ist. Die Flächen l-ter Ordnung durch eine Kurve einer Familie vom Index k schneiden das Tetraedroid noch in einer Kurve einer Familie vom Index $-k$. Für $k=0$ erhält man die gewöhnlichen Kurven, welche auch auf den nichtsingulären Kummerschen Flächen existieren. Zum Schluß wendet der Verf. seine Resultate auf die C^4 des Tetraedroids an. Wö.

G. A. Bliss. The geodesic lines on the anchor ring. Annals of Math. (2) **4**, 1-21.

Mit Hülfe der von Weierstraß eingeführten Methoden der Variationsrechnung und unter Anwendung der Weierstraßschen Theorie der elliptischen Funktionen werden die geodätischen Linien der bei uns meist als Ringfläche, Wulst oder auch Torus bezeichneten, teils positiv, teils negativ gekrümmten Rotationsfläche untersucht, welche die Peripherie eines Kreises beschreibt, der um eine in seiner Ebene liegende, die Peripherie nicht schneidende Gerade rotiert.

Es zeigt sich, daß bei der Einteilung der geodätischen Linien die beiden singulären Parallelkreise, deren Ebenen zugleich Tangentialebenen der Fläche sind, eine besondere Rolle spielen. Man hat nämlich außer dem Äquator, dem Kehlkreis und den Meridiankreisen geodätische Linien von drei wesentlich verschiedenen Typen zu unterscheiden; zu dem ersten gehören solche, welche den Äquator, die beiden singulären Parallelkreise und den Kehlkreis wiederholt schneiden; den zweiten bilden solche, welche den Äquator wiederholt schneiden und den einen — und daher auch den anderen — der beiden singulären Parallelkreise wiederholt berühren; den dritten Typus vertreten diejenigen geodätischen Linien, welche den Äquator und die singulären Parallelkreise je einmal schneiden, dem Kehlkreise aber sich von zwei Seiten her asymptotisch nähern. Bei der Klassifikation aller Flächenpunkte in Punkte erster und zweiter Art (nach v. Mangoldt,

J. für Math. **91**, 23 ff., 1881; vgl. F. d. M. **13**, 578-581, 1881) ergibt sich das interessante Resultat, daß alle Punkte des Kehlkreises von der ersten Art, dagegen alle anderen Punkte der Fläche von der zweiten Art sind. Z.

A. Berry. On certain quintic surfaces which admit of integrals of the first kind of total differentials. Cambr. Trans. **19**, 249-296.

In einer früheren Arbeit (Cambr. Trans. **18**, 333-347; vgl. F. d. M. **31**, 633, 1900) bestimmte Verf. diejenigen Flächen vierten Grades, für welche Integrale erster Art von totalen Differentialausdrücken existieren. Die Untersuchung wird im ersten Teil der vorliegenden Abhandlung auf Flächen fünften Grades ausgedehnt und für große Klassen derselben zum Abschluß gebracht. Sodann werden im zweiten Teil diejenigen Flächen fünften Grades bestimmt, für welche zwei linear unabhängige, aber funktional von einander abhängige Integrale erster Art vorhanden sind. Der dritte Teil endlich beweist den Satz, daß es keine Fläche fünften Grades gibt, welche zwei Integrale erster Art, die in keiner funktionalen Beziehung zu einander stehen, zuläßt. Sk.

V. Snyder. On the forms of quintic scrolls. American M. S. Bull. (2) 8, 293-296.

„Die einzige Schrift, welche der systematischen Erforschung der geradlinigen Flächen fünften Grades gewidmet ist, rührt von Schwarz her (J. für Math. **67**, 23-57, 1866); hier sind die Flächen nach der Konfiguration der Doppelkurve klassifiziert: 15 Typen werden aufgezählt, von denen zehn unikursal sind, vier vom Geschlechte 1 und eine vom Geschlechte 2. Schwarz betrachtete die Regelfläche als das Erzeugnis der Schnittlinie entsprechender Ebenen bei zwei abwickelbaren Flächen, für welche die Summen der Klassen 5 ist. — Es scheint wünschenswert, die Typen vom dualen Standpunkte aus aufzuzählen, d. h. als Erzeugnisse der Linie, welche entsprechende Punkte zweier ebenen oder räumlichen Kurven verbindet. Natürlich erscheinen die nämlichen Formen, die ehedem erhalten wurden; aber die Beziehungen zwischen den Unterformen treten klarer hervor.“ Lp.

J. Hadamard. Sur certaine ssurfaces minima. Darb. Bull. (2) **26**, 357-360.

Zunächst zeigt der Verf., daß die singulären Punkte einer algebraischen Minimalfläche den singulären Punkten der sie erzeugenden (Darboux, Leçons, t. I, p. 341) Minimalkurve entsprechen; sodann gibt er eine spezielle Minimalfläche an, welche ebenso wie die sie erzeugende Minimalkurve im Endlichen überall singularitätenfrei ist. Das hier gegebene Beispiel einer Fläche vom Geschlecht 6 mit 11 ins Unendliche laufenden Schalen ist besonders deswegen lehrreich, weil sich in den vom Verf. früher (Journ. de Math. (5) **4**, 27ff., 1898; vgl. F. d. M. **29**, 522, 1898)

angegebenen Fällen jedesmal, wenn das Geschlecht von Null verschieden war, eine gerade Anzahl ins Unendliche laufender Schalen ergeben hatte, so daß man hätte denken können, es müßte immer so sein. Z.

G. TZITZÉICA. Sulle superficie minime ortogonali ad una sfera. Mat. pure ed appl. 2, 186-188.

Cosserat hat die Minimalflächen bestimmt, die eine Kugel längs den Kurven konstanter Torsion berühren. Hier werden die Minimalflächen angegeben, die eine Kugel längs den Kurven konstanter Krümmung senkrecht schneiden. Lwt.

H. LEBESGUE. Sur les transformations de contact des surfaces minima. Darb. Bull. (2) 26, 106-112.

In der Arbeit „Weitere Untersuchungen über Minimalflächen" (Archiv for Math. og Naturv. IV, 1880) sagt Lie: „Ich habe bestimmt alle algebraischen und zugleich alle algebraisch eindeutigen Berührungstransformationen, die alle Minimalflächen in ebensolche Flächen überführen." Er hat aber seine Lösung nicht veröffentlicht. Der Verf. der vorliegenden Note zeigt, daß jede Berührungstransformation, die alle Minimalflächen in Minimalflächen überführt, eine Ebenentransformation ist, und daß die allgemeinste Transformation dieser Art, abgesehen von einer euklidischen Bewegung und Ähnlichkeitstransformation, dadurch erhalten werden kann, daß man eine beliebige Minimalfläche Σ_0 nimmt und zu jeder Ebene P die Ebene P' konstruiert, die von P und von der zu P parallelen Tangentialebene π der Fläche Σ_0 gleich weit absteht. Setzt man für Σ_0 eine beliebige Minimalkurve, die ja auch als Minimalfläche aufgefaßt werden kann, so erhält man eine einfache Verallgemeinerung der Lieschen Erzeugung der Minimalflächen. Die Transformation ist im allgemeinen vieldeutig und kann höchstens dann eindeutig sein, wenn Σ_0 eine Doppelfläche ist. Ersetzt man Σ_0 durch eine Parallelfläche einer Minimalfläche, so erhält man die allgemeinste Berührungstransformation, bei der jede Parallelfläche einer Minimalfläche in eine ebensolche Fläche übergeht. El.

F. WEISS. Die geodätischen Linien auf dem Catenoid. Pr. Realschule Gr.-Lichterfelde. 46 S. 8°.

Es wird unter Anwendung der Weierstraßschen Theorie der elliptischen Funktionen bewiesen, daß das Catenoid (der Zusatz: „abgesehen von dem geraden Kreiszylinder" ist geometrisch ohne jede Bedeutung) die einzige Rotationsfläche ist, für welche der Satz gilt: Projiziert man alle Punkte der Fläche durch die zur Rotationsachse senkrechten Geraden auf den die Fläche im Kehlkreis berührenden Zylinder, so ist der Winkel, unter dem eine geodätische Linie eine

Meridiankurve schneidet, ebenso groß wie der Winkel, unter dem sich die Projektionen dieser beiden Kurven schneiden.

Dieser Satz liefert sofort eine konforme Abbildung des Catenoids auf die Ebene, aus der auf die bekannten Eigenschaften der geodätischen Linien geschlossen werden kann.

Den aufmerksamen Leser stört außer der auffallend großen Zahl von Druckfehlern (Ref. fand bis S. 34 bei oberflächlicher Zählung über 80) auch die Ungenauigkeit, bezw. Unzulänglichkeit der in den Zitaten gemachten Angaben. Z.

G. Pirondini. Sur les normales d'un hélicoïde. Nouv. Ann. (4) 2, 289-311.

Eine Regelfläche mit Leitgerade ist immer der Ort eines Normalensystems einer Umdrehungsfläche. Sind zwei Gerade gegeben, so gibt es immer doppelt unendlich viele Kurven, welche auf einem Regelflächensystem liegen, und deren jede als Berührungskurve einer Schraubenfläche und einer Drehfläche angesehen werden kann, die die gegebenen Geraden resp. zu Achsen haben. Durch eine gegebene Kurve geht nur eine Konoidfläche, welche von einem Normalensystem einer Schraubenfläche von gegebener Achse erzeugt wird. Der Verf. nennt die Orthogonaltrajektorien der Schraubenlinien einer Schraubenfläche geodätische Hauptlinien (géodésiques principales). Er erörtert sodann, wie von den drei Größen: Meridian einer Schraubenfläche, Äquatorialprojektionen einer geodätischen oder asymptotischen Kurve auf derselben, Transformierte dieser Kurve durch Abwicklung des äquatorialprojizierenden Zylinders zwei bestimmt werden können, wenn die dritte gegeben ist. Schließlich macht er Anwendungen seiner Formeln auf spezielle Fälle und kommt dabei unter anderem zu folgenden Sätzen: Hat eine geodätische Hauptlinie einer Schraubenfläche als Äquatorialprojektion eine logarithmische Spirale, so ist ihre Transformierte eine Parabel. Auf der Schraubenfläche von konstanter negativer Krümmung sind die Orthogonaltrajektorien der Schraubenlinien sphärische Loxodromen und schneiden die Meridiane unter 45°. Die Transformierte einer beliebigen geodätischen Linie eines Drehungsparaboloids ist eine Parabel. Wenn die Asymptotenkurven dreier Schraubenflächen auf einem Zylinder liegen, so teilt eine die Strecke der Mantellinien des Zylinders zwischen den beiden andern in konstantem Verhältnis. Hat eine Asymptotenkurve einer Drehfläche eine logarithmische Spirale mit dem Pol in der Achse als Äquatorialprojektion, so sind ihre Transformierte und die Meridiankurve der Fläche allgemeine (binomische) Parabeln. Wö.

L. P. Eisenhart. Infinitesimal deformation of the skew helicoid. American M. S. Bull. (2) 9, 148-152.

„Bei jeder infinitesimalen Deformation einer Schraubenfläche ist die assoziierte Oberfläche eine Gesimsfläche.“ — „Wenn die Oberfläche S_1 bei

einer infinitesimalen Deformation einer Schraubenfläche eine Umdrehungsfläche ist, so ist die assoziierte Oberfläche S ebenfalls eine Umdrehungsfläche, und ihre Krümmungslinien entsprechen sich." — „Wenn die assoziierte Oberfläche S_0 eine Umdrehungsfläche ist, so ist die charakteristische Oberfläche S_1 eine Umdrehungsfläche." Lp.

H. Piccioli. Sur les hélices cylindriques dont les normales principales rencontrent une droite fixe. Nouv. Ann. (4) **2**, 177-181.

Die von Pirondini (Batt. G. 1885) gestellte und von ihm und Cesàro (Batt. G. 1886) gelöste Frage nach den zylindrischen Schraubenlinien, deren Hauptnormalen eine feste Gerade treffen, behandelt der Verf. auf eine neue Weise, indem er von gewissen Relationen zwischen den Momenten der Hauptrichtungen in einem Punkt einer Raumkurve in bezug auf eine feste Gerade ausgeht. Er findet, daß das Moment der Tangenten einer solchen Schraubenlinie in bezug auf jene feste Gerade konstant ist. Ferner sind die von den Hauptnormalen auf dieser Geraden abgeschnittenen Strecken zu den Bogenlängen proportional. Wö.

E. Duporcq. Remarque sur la note précédente. Nouv. Ann. (4) **2**, 181-184.

Der Verf. bemerkt zu der Arbeit von Piccioli (s. das vorherg. Referat), daß, wenn eine zylindrische Schraubenlinie die verlangte Eigenschaft hat, dies von allen Schraubenlinien desselben Zylinders gilt, und führt die Aufgabe auf die Bestimmung der ebenen Kurven zurück, deren Normalen auf einer Geraden Strecken proportional zu den Bogenlängen abschneiden. Er beweist, daß die Länge der Normale vom Kurvenpunkt bis zu dieser festen Geraden proportional zur Quadratwurzel aus dem Krümmungsradius ist. Wö.

Weitere Literatur.

A. Emch. Closed loxodromics of the torus. Amer. Math. Monthly **9**, 277-280.

A. Hume. Meridian and transverse sections of helicoids of uniform pitch. Amer. Math. Monthly **9**, 123-129.

A. Kadesch. Über die Einhüllungsflächen von Potenzflächenscharen. Pr. Wiesbaden. 45 S. 4°.

C. Kraemer. Beitrag zur analytischen Untersuchung sphärischer Kurven. Diss. Marburg. 35 S. 8°.

J. Richard. Sur la surface des ondes de Fresnel. Thèse. Chateauroux: Langlois.

E. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

C. J. Keyser. Concerning the angles and the angular determination of planes in 4-space. American M. S. Bull. (2) 8, 324-329.

Im vierdimensionalen Raume gibt es bekanntlich zwei Winkel, durch welche die gegenseitige Stellung zweier Ebenen ausgedrückt werden kann (vergl. Hoppe: „Über die Stellung der Ebene in der Vierdimensionengeometrie.“ Arch. d. Math. **68**, 378-389; F. d. M. **14**, 435, 1882). Der Zweck der vorliegenden Note besteht in der Aufstellung eines Systems homogener Koordinaten mit Hülfe dieser Winkel, in Analogie zu den Plückerschen Koordinaten, indem die Ebene als Element eines vierdimensionalen Raumes angesehen wird. Lp.

G. Fubini. Sugli spazii che ammettono un gruppo continuo di movimenti. Annali di Mat. (3) 8, 39-81.

Diese Arbeit nebst einer anderen noch zu veröffentlichenden behandelt die allgemeine Theorie der Räume, welche eine kontinuierliche Gruppe von Bewegungen gestatten, die Eigenschaften dieser Gruppen, ihre endlichen diskontinuierlichen Untergruppen und die Bestimmung der vierdimensionalen Räume, welche eine solche Gruppe von Bewegungen gestatten. Die Methoden, deren sich Bianchi bedient hat (F. d. M. **28**, 586 u. 642, 1897), um alle dreidimensionalen Räume mit einer kontinuierlichen Gruppe von Bewegungen zu bestimmen, geben über das allgemeine Problem nicht genügend Aufklärung. Eins der Ergebnisse der gegenwärtigen Arbeit besteht eben gerade darin, zur Lösung der Aufgabe mittels bloßer Quadraturen eine allgemeine Methode zu geben, die, auf den besonderen Fall der dreidimensionalen Räume angewandt, es ermöglichen würde, die Bianchischen Ergebnisse schnell zu finden. Aber weder die allgemeine Methode noch die verallgemeinerte Bianchische können dann ohne eine grenzenlose Reihe von Rechnungen zur wirklichen Bestimmung solcher Räume führen, wenn die Anzahl ihrer Dimensionen über drei hinausgeht. Die vorliegende Abhandlung entwickelt für den Fall von vier Dimensionen eine viel schneller und bequemer zum Ziele führende Methode. Schließlich führt die Untersuchung der endlichen diskontinuierlichen Untergruppen von Bewegungen, die in solchen Räumen zulässig sind, unter anderem zu bemerkenswerten Darstellungen der Räume von den Bianchischen Typen VIII und IX auf der Kugel und Pseudosphäre. Ein anderes Ergebnis der gegenwärtigen Arbeit, das ein größeres Interesse beanspruchen kann, besteht darin, daß es die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür gibt, daß eine Gruppe als Gruppe von Bewegungen angesehen werden kann; aus diesen Bedingungen lassen sich einige beachtenswerte Eigenschaften für manche dieser Gruppen herleiten. Lp.

G. Fubini. Sugli spazi a quattro dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti. Rom. Acc. L. Rend. (5) **11**$_2$, 53-57.

In dieser vorläufigen Mitteilung über eine längere Arbeit, welche die Fortsetzung einer Abhandlung bildet, die der Verf. inzwischen in Annali di Matematica (3) **8**, 39-81 veröffentlicht hat (Referat vorstehend), werden die Methoden skizziert, welche Fubini angewandt hat, um die vierdimensionalen Räume R_4 zu untersuchen, welche eine kontinuierliche Gruppe von Bewegungen besitzen. Zuerst bemerkt der Verf., daß es erlaubt ist, die Gruppen mit vier oder zehn Parametern auszuschließen; dann bemerkt er, daß als Grundzüge der obengenannten Untersuchungen die folgenden angesehen werden können.

I. Keine Gruppe G_9 mit neun Parametern kann als Gruppe der Bewegungen eines R_4 angesehen werden.

II. Wenn eine Gruppe $G_r (r = 2, \ldots, 8)$ als Gruppe der Bewegungen eines R_4 angesehen werden kann, so enthält sie gewiß eine Untergruppe G_{r-1}.

Mit Hülfe dieser Sätze gelangt der Verf. zu zahlreichen Resultaten, von denen wir die folgenden anführen wollen:

Keine Gruppe G_8 kann als Gruppe der Bewegungen eines vierdimensionalen Raumes angesehen werden. Ein n-dimensionaler Raum kann keine Bewegungsgruppe besitzen, welche $\frac{1}{2}n(n+1)-1$ oder $\frac{1}{2}n(n+1)-2$ Parameter enthält.

Außer dem R_4 konstanter Krümmung, gibt es nur acht bestimmte vierdimensionale Räume, welche eine kontinuierliche Bewegungsgruppe besitzen; die Ausdrücke ihrer Linienelemente werden vom Verf. angegeben.

La.

A. Dragoni. Sulla varietà cubica di S_4 dotata di dieci punti doppi. Batt. G. **40**, 255-264.

Die kubische Mannigfaltigkeit V_3^3 aus R_4, welche zehn Doppelpunkte besitzt, wurde schon von Segre (Torino Atti **22** und Torino Memorie (2) **39**; vgl. F. d. M. **19**, 673, 1887; **20**, 662, 1888) und Castelnuovo (Ven. Ist. Atti (6) **5**; vgl. F. d. M. **20**, 669, 1888) gründlich untersucht. Im besonderen bemerkte der letztere, daß dieselbe rational ist, da man ihre Durchschnitte mit den ∞^4 R_3 von R_4 den ∞^4 Flächen zweiter Ordnung entsprechen lassen kann, welche durch fünf Punkte gehen. In der vorliegenden Arbeit, einem Auszuge aus der Inaugural-Dissertation der Verfasserin, geht man von einem solchen Flächensystem aus, bezieht seine Elemente projektiv auf die R_3 von R_4 und gelangt so zur genannten Mannigfaltigkeit V_3^3; die bekannten Eigenschaften derselben werden so auf neue Weise begründet und um einige neue bereichert, welche die involutorischen Homologien betreffen, die die V_3^3 in sich selbst transformieren.

La.

G. Marletta. Sulle varietà del quarto ordine con piano doppio dello spazio a quattro dimensioni. Batt. G. **40**, 265-274.

Wie in der Geometrie des gewöhnlichen Raumes laufen die Untersuchungen über die algebraischen Kurven und Flächen im allgemeinen mit denjenigen parallel, welche spezielle Figuren betreffen; so ist es geschehen, daß unter den Erforschern der beliebig ausgedehnten Räume einige durch Studien von allgemeinem Charakter angezogen worden sind, während andere die besonderen geometrischen Gebilde vorgezogen haben. Zu dieser letzten Forscherklasse gehört Marletta, welcher in der vorliegenden Arbeit die Mannigfaltigkeit V_3^4 vierter Ordnung des R_4, die mit einer Doppelebene versehen ist, untersucht hat. Er erkannte sofort, daß dieselben Eigenschaften auch den Mannigfaltigkeiten V_{n-1}^n des R_n zukommen, welche mit einer $(n-2)$-fachen Ebene versehen sind. Diese wichtige Tatsache erkannt, konnte der Verf. diesen allgemeineren Gebilden den Ehrenplatz in seiner Abhandlung geben und zum Schluß $n=4$ voraussetzen; umgekehrt zog er vor, die V_3^4 direkt zu studieren, die Verallgemeinerung seiner Schlußfolgerungen zu bemerken und die so entstehenden allgemeinen Sätze auszusprechen. Um dem Leser eine Idee der erhaltenen Resultate zu geben, werden wir uns auf die V_3^4 beschränken, da diese Gebilde, wie der Titel selbst zu erkennen gibt, dem Herzen des Verf. näher liegen.

Die Doppelebene π der V_3^4 von R_4 enthält ∞^1 Kuspidalpunkte, deren Ort eine Kurve i vierter Ordnung ist. Jeder der ∞^1 R_3, die durch π gehen, schneidet die V_3^4 noch in einer Fläche zweiter Ordnung; die so entstehende Flächenreihe enthält zehn Kegel; die Pole von π in bezug auf die Flächen dieser Reihe bilden eine rationale Kurve g siebenter Ordnung. Rational und achter Ordnung ist ferner der Ort der Mittelpunkte jener Flächen; daher sind acht derselben Paraboloide. Eine beliebige Gerade r von π besitzt eine bestimmte konjugierte Gerade in bezug auf jede der besagten Quadriflächen; Ort derselben ist eine rationale Regelfläche φ fünfter Ordnung, von der g eine Direktrix ist. Eine beliebige Ebene ω von R_4 schneidet π in einem Punkt P; ein beliebiger durch π gehender R_3 schneidet die V_3^4 noch in einer Quadrifläche und ω in einer durch P gehenden Geraden t; man suche die konjugierte t' dieser in bezug auf jene; Ort von t' ist eine rationale Regelfläche ψ sechster Ordnung. Die V_3^4 besitzt ferner die wichtige Eigenschaft, auf einem R_3 eindeutig abbildbar zu sein; daher ist sie rational. Sie enthält ∞^1 eine Regelfläche bildende Geraden, von denen jede die π in einem Punkte schneidet; ferner ∞^3 Kegelschnitte, welche π in zwei, und ∞^5 Raumkurven dritter Ordnung, welche π in drei Punkten schneiden. V_3^4 enthält ferner eine endliche Zahl von Geraden, welche π nicht schneiden; jede wird von 17 anderen getroffen.

Die Zahl der Doppelpunkte, welche die V_3^4 besitzen kann, ist $\leqq 10$; sie liegen zu zweien auf Geraden, welche π treffen; im Falle, daß die Zahl der Doppelpunkte 5 ist, ist die V_3^4 durch zwei Büschel erzeugbar, welche aus Quadrikegeln bestehen, die π enthalten. Aber die Mannig-

faltigkeit kann auch ∞^1 Doppelpunkte enthalten; sie bilden eine Gerade, einen Kegelschnitt oder eine ebene Kurve dritter Ordnung.

Die Kontur von V_3^4 aus einem Punkte von π auf einem beliebigen R_3 ist im allgemeinen eine Fläche sechster Ordnung mit vier Doppelpunkten; wenn aber jene zehn Doppelpunkte besitzt, so ist die Kontur, falls das Auge mit einem Doppelpunkt zusammenfällt, eine Kummersche Fläche.

Bildet man die V_3^4 auf einen beliebigen R_3 ab, und projiziert man zugleich dieselbe von einem Punkte von π auf denselben R_3, so erhält man in R_3 eine (1, 2)-Transformation, mit deren Studium dieser erste Teil der Marlettaschen Abhandlung geschlossen wird. La.

E. Jahnke. Über Drehungen im vierdimensionalen Raum. Deutsche Math.-Ver. **11**, 178-182.

Die Arbeit enthält zunächst eine übersichtliche Zusammenstellung und Charakterisierung der über die Zusammensetzung endlicher und unendlich kleiner Drehungen im R_3 ermittelten Resultate. Dann folgen die entsprechenden Ergebnisse für die Drehungen im R_4. Zwischen den Geschwindigkeitskomponenten einer Drehung im R_4 und denjenigen der beiden „Elementardrehungen", aus welchen sie sich zusammensetzen läßt, bestehen sehr einfache Beziehungen, aus welchen sich auch verschiedene Zusammenhänge zwischen Drehungen im R_3 und solchen im R_4 ergeben. So gehen z. B. die letzteren durch Zusammenfallen der beiden Elementardrehungen in die ersteren über, und das Köttersche Orthogonalsystem, welches die Lösungen mehrerer Probleme der Mechanik als Spezialfälle enthält, erscheint selbst als Spezialfall eines anderen, welches eine Drehung im R_3 darstellt, die als „Verknüpfung" einer dreidimensionalen mit einer vierdimensionalen Drehung oder als Resultat der Zusammensetzung von drei Drehungen im R_3 aufgefaßt werden kann. Schg.

J. G. Hardy. Curves of triple curvature. American J. **24**, 13-38.

In dieser Arbeit werden die bereits bekannten Resultate über dreifach gekrümmte Kurven (L) im R_4 zusammengestellt und durch eigne Untersuchungen des Verf. vermehrt. Den Ausgangspunkt bilden die Bewegungsgleichungen der Systeme im R_4. Die vier Achsen eines beweglichen Systems bilden ein Tetraedroid, die sechs durch je zwei Achsen gehenden Ebenen ein „Hexaedron". Die Geschwindigkeit eines Systempunktes erscheint als geometrische Summe zweier Vektoren, von denen der eine eine Verschiebung, der andere eine Rotation um eine Ebene darstellt. Hieran schließt sich der Begriff der momentanen Rotationsebene, die Konstruktion des Haupttetraedroids eines Kurvenpunktes und die Untersuchung seiner Bewegung mittelst der erhaltenen kinematischen Gleichungen, ferner geometrische Deutungen der sechs Rotationen, welche

sich durch Projektion der Rotation des Systems auf die obigen sechs Ebenen ergeben. Es werden dann die Formeln aufgestellt, welche den Serret-Frenetschen Formeln für Kurven doppelter Krümmung entsprechen, und zur Untersuchung der Kurven L verwendet. Weiter wird die oskulierende Hyperkugel und der Ort ihrer Mittelpunkte bestimmt, auch die Bedingungsgleichung für „hypersphärische", d. h. auf einer Hyperkugel liegende Kurven L aufgestellt. Den Schluß bilden Untersuchungen über Evoluten und Evolventen der Kurven L. Die Darstellung benutzt homogene Koordinaten und läßt überall die Analogie mit gewöhnlichen Raumkurven erkennen. Schg.

C. Rosati. Sulle curve ellittiche del sest' ordine. Lomb. Ist. Rend. (2) **35**, 407-411.

Durch eine elliptische Normalkurve von R_5 gehen vier Veronesesche Flächen. Die Kegelschnitte, welche eine derselben enthält, sind dreischneidende Kurven von Γ, während die doppelberührenden R_4 die Kurve Γ dreifach berühren. Es ist bekannt, daß die Ebene der ∞^2 Kegelschnitte einer Veroneseschen Fläche eine Form dritter Ordnung erzeugen. Nun haben die vier Formen dritter Ordnung, die den vier obengenannten Veroneseschen Flächen entsprechen, in dem Büschel, dem sie angehören, ein Doppelverhältnis, welches dem Modul der Kurve Γ gleich ist.

Durch Projektion der Kurve Γ von einem R_1 auf einen R_3 erhält man die folgenden Sätze:

Die elliptische Kurve Δ sechster Ordnung des gewöhnlichen Raumes ist in vier Steinerschen Flächen enthalten; die Kegelschnitte und die Doppelgeraden dieser Flächen sind dreischneidende von Δ, während ihre doppelberührenden Ebenen dreiberührende von Δ sind. Daher besitzt diese 16 dreifache Tangentialebenen, und es gibt vier Raumpunkte, welche die Eigenschaft besitzen, daß die entsprechenden projizierenden Kegel drei dreifache Erzeugende besitzen.

In dem besonderen Falle, daß die drei Hauptinvolutionen der Kurve Δ linear sind, ist das Tetraeder, dessen Scheitel die dreifachen Punkte der obengenannten Steinerschen Flächen sind, autopolar in bezug auf die Fläche zweiter Ordnung, welche durch die drei vierschneidenden Geraden der Kurve Δ bestimmt wird, während in bezug auf dieselbe die Tetraeder, welche die doppelberührenden Ebenen bilden, unter einander konjugiert sind. La.

G. Kowalewski. Über die projektive Gruppe der Normkurve und eine charakteristische Eigenschaft des sechsdimensionalen Raumes. Leipz. Ber. **54**, 371-392.

Die hier behandelte Gruppe besteht aus allen projektiven Transformationen des R_n, welche eine rationale C_n, die in keiner ebenen Punktmannigfaltigkeit des R_n enthalten ist (Normkurve), in sich über-

führen. Es werden alle projektiven kontinuierlichen Gruppen (im Sinne Lies) bestimmt, denen diese Gruppe als Untergruppe angehört. Der Verf. gelangt zu folgenden Ergebnissen: Die Gruppe einer Normkurve steckt, abgesehen von der allgemeinen projektiven Gruppe, nur noch in einer projektiven Gruppe. Diese ist für ungerades $n\,(>1)$ die $\frac{1}{2}(n+1)\,(n+2)$-gliedrige projektive Gruppe eines Nullsystems, für gerades n die $\frac{1}{2}n\,(n+1)$-gliedrige projektive Gruppe einer nicht ausgearteten $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit zweiten Grades. Ausgenommen ist der Fall $n=6$, in welchem zu der Gruppe einer Normkurve zwei umfassende projektive Gruppen existieren, die von der allgemeinen projektiven Gruppe verschieden sind. Die eine ist die 21-gliedrige Gruppe einer gewissen M_2, die andre eine 14-gliedrige Untergruppe von dieser. Wenn im R_n eine Mannigfaltigkeit M bei jeder projektiven Transformation invariant bleibt, die eine Normkurve N in sich überführt, so bleibt auch umgekehrt N bei jeder projektiven Transformation invariant, die M in sich überführt, außer wenn M eine nicht ausgeartete $(n-1)$-dimensionale M_2 ist. Schg.

A. Finzi. Sulle varietà a tre dimensioni le cui geodetiche ammettono caratteristiche independenti. Torino Atti 37, 300-301.

Es werden die Bedingungen festgestellt, denen der Ausdruck der lebendigen Kraft eines materiellen Systems ohne Einwirkung von Kräften und mit Verbindungen, die von der Zeit unabhängig sind, genügen muß, damit die Bewegung dieses Systems zu der von Volterra aufgestellten Klasse der „Bewegungen mit unabhängigen Charakteristiken" (s. F. d. M. **29**, 604, 1898) gehöre. Schg.

G. Ricci. Formole fondamentali nella teoria generale delle varietà e della loro curvatura. Rom. Acc. L. Rend. (5) **11**$_1$, 355-362.

Die Differentialgeometrie der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten des Raumes von $m+n$ Dimensionen hat als ihre Basis einige Formeln, welche analog den Grundformeln der Differentialgeometrie des gewöhnlichen Raumes sind. Sie wurden zuerst von Voß ganz allgemein begründet (Math. Ann. Bd. **16**; vgl. F. d. M. **12**, 570, 1880) und, im Falle $m=1$, von Bianchi, in den Zusätzen zur deutschen Übersetzung seiner bekannten „Vorlesungen". Im vorliegenden Aufsatze werden dieselben in ihrer allgemeinen Form durch die Methoden der absoluten Differentialrechnung (vgl. die Abhandlung von Ricci und Levi-Civita, in Math. Ann. **54**; F. d. M. **31**, 297, 1900) bewiesen. La.

H. F. Blichfeldt. On the determination of the distance between two points in space of m dimensions. American M. S. Trans. **3**, 467-481.

In den Grundlagen der Geometrie, wie sie von Riemann, Helm-

holtz und Lie aufgestellt worden sind, wird der Abstand zweier Raumpunkte als eine Funktion ihrer sechs Koordinaten definiert, wobei die Koordinaten eines Punktes kontinuierlich veränderlich und unabhängig vorausgesetzt werden. Aber schon 1877 hat G. Cantor auf Räume aufmerksam gemacht, in welchen diese Voraussetzungen nicht erfüllt werden, und es entsteht die Frage, wie sich in diesem Falle die Bestimmung des Abstandes zweier Punkte und der geometrischen Örter von Punkten durch ihre Koordinaten gestaltet. Der Verf. ersetzt nun die obigen beiden Voraussetzungen durch die Annahme, daß im R_n zwischen den gegenseitigen Abständen von $n+2$ Punkten bestimmte Beziehungen („Distanz-Relationen") existieren, und ermittelt die analytische Form des Abstandes mittels eines Axioms über die Darstellbarkeit des Abstandes zweier beliebigen Punkte als algebraische Funktion ihrer Abstände von einer Gruppe fester Punkte. Es stellt sich dann heraus, daß diese Funktionen einem schon von Lie gefundenen Systeme von Differentialgleichungen genügen. Zuletzt werden für die Räume von 1 bis 4 Dimensionen die typischen Formen der Abstandsfunktion festgestellt.

Schg.

C. Segre. Relazione sulla memoria del Dr. F. Severi, intitolata: Sulle intersezioni delle varietà algebriche, e sopra i loro caratteri e singolarità projettive. Torino Atti 37, 267-269.

In der in Rede stehenden Arbeit werden die zugrunde gelegten Mannigfaltigkeiten V_k durch die Ordnungszahlen der geometrischen Örter derjenigen ihrer Punkte charakterisiert, deren Tangenten eine Fundamentalbedingung erfüllen. Dasselbe geschieht für die in V_k liegenden Mannigfaltigkeiten V', unter Beschränkung auf diejenigen Tangenten, welche die V_k in Punkten der V' berühren. Durch die charakteristischen Zahlen zweier Mannigfaltigkeiten lassen sich dann diejenigen ihrer Schnitte ausdrücken.

Schg.

N. J. Hatzidakis. Om nogle Konsekvenser af Frenet's og Brunel's Formler. Nyt Tidss. for Math. 13 B, 49-58, 73-80.

Der Verf. untersucht zuerst mittels der Frenetschen Formeln die Folgen davon, daß bei zwei verschiedenen Kurven 1. die Tangenten, 2. die Hauptnormalen oder 3. die Nebennormalen überall parallel sind, oder daß 4. die Tangenten mit den Hauptnormalen parallel sind usw. Danach werden ähnliche Untersuchungen für einen n-dimensionalen Raum angestellt, indem hier Brunels Formeln (Math. Ann. 19) Anwendung finden.

Es wird nachgewiesen, daß die Sätze, die im dreidimensionalen Raume gelten, nur teilweise im n-dimensionalen Raum ein Analogon haben.

V.

JOH. PETERSEN. Bidrag til en syntetisk Fremstilling af den ikke-euklidiske Geometri. Nyt Tidss. for Math. 13 B, 25-47.

In dieser Abhandlung setzt der Verf. seine Betrachtungen über nichteuklidische Geometrie fort (s. F. d. M. **32**, 485, 1901). Hier betrachtet er einen n-dimensionalen Raum, dessen Elemente eine Figur bilden, die mit einer gegebenen Figur kongruent ist. Die hier betrachtete Geometrie kann als eine Erweiterung der Geometrie der reellen Punkte im nichteuklidischen Raume betrachtet werden. V.

Weitere Literatur.

C. SEGRE. Relazione intorno alla memoria di C. Z. Giambelli, intitolata: Risoluzione del problema degli spazi secanti. Torino Atti **37**, 733.

ST. KWIETNIEWSKI. Über Flächen des vierdimensionalen Raumes, deren sämtliche Tangentialebenen unter einander gleichwinklig sind, und ihre Beziehung zu den ebenen Kurven. Diss. Zürich: E. Speidel. 51 S. gr. 8° (1902).

G. H. KNIBBS. On the principle of continuity in the generation of geometrical figures in pure and pseudo-homaloidal space of n dimensions. Journ. and Proc. R. S. New South Wales **35**, 243-319 (1901).

G. H. KNIBBS. Some theorems concerning geometrical figures in space of n dimensions, whose $(n-1)$-dimensional generatrices are n^{ic} functions of their position on an axis, straight, curved or tortuous. Journ. and Proc. R. S. New South Wales **35**, 319-332 (1901).

M. MORALE. La rigata razionale d'ordine n dello spazio a quattro dimensioni e sua rigata trasversale con particolare considerazione al caso di $n = 5$. Atti Acc. Gioenia di sc. nat. in Catania (4) **14**, No. 2, 15 S. (1901).

H. C. MORENO. On ruled loci in n-fold space. American Acad. Proc. **37**, 126-157 (s. F. d. M. **32**, 656, 1901).

Kapitel 4.

Liniengeometrie (Komplexe, Strahlensysteme).

K. ZINDLER. Liniengeometrie mit Anwendungen. Leipzig: G. J. Göschen. VIII u. 380 S. 8° (Sammlung Schubert XXXIV).

Der Verf. des vorliegenden Lehrbuches, welches für das noch zu wenig bekannte Gebiet der Liniengeometrie wohl in weiteren Kreisen Interesse erwecken dürfte, bedient sich zur Entwicklung seiner Resultate mit Recht vornehmlich derjenigen Hülfsmittel, welche am raschesten und natürlichsten weiterführen, und wechselt daher nach Bedürfnis zwischen synthetischer und analytischer Methode ab. Der vorliegende erste Band

umfaßt die linearen Komplexe und Kongruenzen und die linearen Mannigfaltigkeiten dieser Komplexe nebst den dabei auftretenden höheren Gebilden. Die beiden ersten Abschnitte sind ganz elementar gehalten. Den Gegenstand des ersten Abschnitts bildet das Nullsystem und das durch dasselbe definierte Strahlengewinde. Am Schluß wird der Graßmannsche Begriff des Stabes eingeführt; es ist dies ein Vektor, der nicht parallel mit sich, sondern nur längs seines Trägers verschoben werden darf. Der zweite Abschnitt enthält Anwendungen auf Kinematik und graphische Statik, wobei die Zusammensetzung der Kräfte ihrer größeren Anschaulichkeit wegen derjenigen der Geschwindigkeiten vorangestellt wird. Im Zusammenhang mit dem ebenen Fachwerk werden einige Sätze aus der Lehre von den Polyedern gegeben. Der dritte Abschnitt umfaßt die Koordinaten der Linien und der Stäbe, sowie die Gleichungen zwischen denselben. Ob es gelingen wird, das internationale Kunstwort „Koordinaten" durch das Graßmannsche „Zeiger" zu verdrängen, möchte Referent bezweifeln. Dagegen ist es sehr zweckmäßig, ein vierfach unendliches System von Stäben „Stabwald" zu nennen. Hervorzuheben ist im vierten Abschnitt, der den linearen Linien- und Stabgebilden gewidmet ist, die Betrachtung der linearen Linienkongruenzen (Strahlennetze) mit zwei imaginären Brennlinien. Auch wird angegeben, wie man das Koordinatensystem am zweckmäßigsten annehmen muß, um für die einzelnen Fälle der Strahlennetze möglichst einfache Gleichungsformen zu erhalten. Der Verf. zeigt auch, daß ein nichtspezieller Komplex (Strahlengewinde) durch Translation, Rotation oder Schraubung einer Kongruenz vollständig erzeugt werden kann, und begründet darauf die Parameterdarstellungen des Komplexes. Im nächsten Abschnitt werden die durch elliptische Involutionen definierten imaginären Elemente in die Liniengeometrie eingeführt, wobei insbesondere die allgemein imaginären Tangenten der Flächen zweiter Ordnung diskutiert werden. Der letzte Abschnitt behandelt Mannigfaltigkeiten linearer Komplexe, wobei der Verf. Veranlassung nimmt, der Verwendung der mehrdimensionalen Geometrie auch in der Liniengeometrie warm das Wort zu reden. An die Einführung der allgemeinen Linienkoordinaten schließt sich die Betrachtung reziproker und koreziproker Komplexe (Schrauben) mit Anwendung auf Statik und Dynamik. Da die Komplexe dieselbe Mannigfaltigkeit haben wie die Stäbe, so können die Komplexsysteme durch Stabsysteme dargestellt werden, indem den Komplexgeweben und Komplexnetzen Stabwälder und Stabkongruenzen entsprechen. Hierbei ist der Fall von besonderem Interesse, daß in der Achsenkongruenz des Komplexnetzes keine sich senkrecht schneidenden Strahlen vorkommen.

Jedem einzelnen Abschnitt sind Übungsaufgaben beigegeben. Am Schluß werden Anleitungen zur Lösung dieser Aufgaben gegeben, ebenso Erläuterungen betreffend die Anfertigung der liniengeometrischen Figuren und ein alphabetisches Sachregister. Hoffentlich bringt der zweite Band auch ein möglichst vollständiges Literaturverzeichnis, das in einem so grundlegenden Werke nicht fehlen sollte. Wö.

R. W. H. T. Hudson. A new method in line geometry. Messenger (2) **31**, 151-157.

Zwischen den sechs Koordinaten l, m, n, l', m', n' einer Geraden bestehen die beiden Gleichungen

$$l^2+m^2+n^2=1,\ ll'+mm'+nn'=0.$$

Die zweite Gleichung kann man als die Ableitung der ersten nach der Zeit auffassen. „Anstatt also sechs Koordinaten zur Darstellung einer Geraden kann man drei Variabeln und ihre Ableitungen wählen, und um hierfür eine kinematische Deutung zu haben, können wir eine Gerade durch einen beweglichen Punkt auf einer Kugel vom Radius 1 darstellen; der Radius durch den Punkt ist der Geraden parallel, und die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes bilden das zweite Tripel der Koordinaten der Geraden.“ Diese Art der Darstellung wird durch die Aufstellung einiger Formeln und die Lösung einiger Aufgaben beleuchtet; hierbei wird auch die Rechnung mit Vektoren herangezogen. Zuletzt wird auf die Untersuchungen Joh. Petersens hingewiesen (F. d. M. **29**, 473, 1898), aus denen man verwandte Gedanken herauslesen kann.

Lp.

R. W. H. T. Hudson. Dual line coordinates in absolute space. Messenger (2) **32**, 31-36.

Ausdehnung der Betrachtungen des vorstehend angezeigten Aufsatzes auf den nichteuklidischen, insbesondere den elliptischen Raum, mit Zitaten aus Joh. Petersen, Cayley, Burnside, Schilling, Klein. Lp.

A. P. Pszeborski. Einige Anwendungen der Theorie der Kongruenzen von Geraden. Charkow Ges. (2) **7**, 49-226 (Russisch).

Das Hauptziel des Verf. ist, die Sätze von C. Guichard (C. R. **128**; F. d. M. **30**, 552, 1899) und L. Bianchi (Rom. Acc. L. Rend. **9**$_2$ ff.; F. d. M. **31**, 609, 1900) zu beweisen. Die Sätze von C. Guichard waren zwar schon von L. Bianchi (Annali di Mat. (3) **3**; F. d. M. **30**, 552) und G. Darboux (Ann. Ec. Norm. (3) **16**; F. d. M. **30**, 554) bewiesen; doch führt die vom Verf. benutzte Methode der Perimorphie zu einfacheren Auseinandersetzungen, besonders für die Umkehrungen der Sätze von C. Guichard. Die Abhandlung von Pszeborski ist in sieben Kapitel geteilt. Kapitel I ist der Aufstellung der Haupteigenschaften der Kongruenzen von Geraden gewidmet. Der Verf. betrachtet hier auch eine Reihe von für die weitere Darstellung wichtigen speziellen Aufgaben. Etwas ausführlicher als sonst wird die Theorie der von Darboux eingeführten optischen Achsen behandelt (es wird nämlich der noch nicht untersuchte Fall betrachtet, wenn diese Achsen die Kongruenz der Normalen einer Fläche bilden). Im Kapitel II werden die Fokaleigenschaften der Kongruenzen ausführlich untersucht. Unter anderem

wird der bekannte Satz von Weingarten bewiesen. Hauptstück des Kapitels ist die Behandlung der Frage über die Transformation der Flächen konstanter Krümmung. Für das kommutative Gesetz von Bianchi wird der Beweis in der Weise erbracht, daß der Verf. die Bedingungen für die vier Konstanten σ_i sucht, so daß die zusammengesetzten Transformationen $B_{\sigma_3} B_{\sigma_4}$ und $B_{\sigma_1} B_{\sigma_2}$ einander äquivalent sind; es folgt dann, daß notwendig $\sigma_3 = \sigma_2$, $\sigma_4 = \sigma_1$ sein muß. Kapitel III enthält den Beweis der Guichardschen Sätze. Der Verf. weist auf das Verhältnis der Guichardschen Kongruenz zu einer gewissen cyklischen hin; dieses Verhältnis ist für den Beweis der Umkehrungen der Sätze von L. Bianchi wesentlich. Im Kapitel IV gibt der Verf. den Beweis der Sätze von L. Bianchi. Im Kapitel V beweist er die Umkehrungen der Sätze von C. Guichard und L. Bianchi für den Fall der Minimalflächen; er findet hier eine interessante Transformation dieser Flächen und zeigt deren Zusammenhang mit der Thybautschen (Ann. Ec. Norm. (3) **14**; F. d. M. **28**, 566). In den Kapiteln VI und VII sind die Umkehrungen der Sätze von C. Guichard und L. Bianchi für den Fall der Flächen konstanter Krümmung betrachtet. Auf Grund der Resultate des zweiten Kapitels wird gezeigt, wie die gefundenen Transformationen dieser Flächen auf die von Backlund zurückgeführt werden. Si.

A. P. Pszeborski. Über einige Kongruenzen von Geraden. Moskau Math. Samml. **23**, 764-771 (Russisch).

Es sei ein bewegliches räumliches Koordinatensystem (T) gegeben, dessen Bewegung von zwei Parametern abhängt, und ein mit dem Systeme invariant verbundener Punkt M. Dann haben wir für eine bestimmte Lage von (T): 1. Der geometrische Ort der Fokalpunkte sämtlicher mit (T) invariant verbundenen und durch M gehenden Geraden ist die Cyklide von Dupin. 2. Der geometrische Ort der Grenzpunkte dieser Geraden ist die Fläche vierter Ordnung, welche durch den unendlich fernen Kreis geht und außerdem eine unendlich ferne doppelte Gerade besitzt.
Si.

G. Fano. Nuove ricerche sulle congruenze di rette del 3° ordine prive di linea singolare. Torino Mem. (2) **51**, 1-79.

Die Kongruenzen dritter Ordnung ohne singuläre Linien haben eine endliche Anzahl singulärer Punkte und Ebenen. Ist n ihre Klasse, r ihr Rang, so nennt der Verf. (nach Vorschlag von Segre) „Schnittgeschlecht" (genere sezionale) die Zahl $p = 2(n-1) - r$: das Geschlecht der „ebenen" Schnitte der der Kongruenz in einem R_5 entsprechenden „Oberfläche". Den N-fachen Punkten dieser „Oberfläche" entsprechen N-fache Strahlen der Kongruenz. Die Punkte, deren drei Kongruenzstrahlen in einer Ebene liegen, bilden eine Fläche $(n-p-1)$-ter Ordnung. Die Ebenen, in welchen drei Kongruenzstrahlen durch einen

Punkt liegen, umhüllen eine Fläche $\left\{\binom{n-1}{3}+(n+2)(n-p-1)\right\}$-ter Klasse. Der Verf. bestimmt noch die Zahl der Strahlentripel, deren Schnittpunkt einer gegebenen Ebene und deren Ebene einem gegebenen Bündel angehört. Er untersucht weiter das Schnittgeschlecht von Kongruenzen ohne N-fache Strahlen und die Abbildbarkeit der Kongruenzen dritter Ordnung auf elliptische Regelflächen. Zum Schluß werden die rationalen Kongruenzen dritter Ordnung und diejenigen vom Schnittgeschlecht 0 bis 6 näher untersucht. Wö.

G. Fano. Le congruenze di rette del 3° ordine composte di tangenti principali di una superficie. Torino Atti **37**, 501-519.

Die irreduzibeln Strahlenkongruenzen dritter Ordnung, welche aus Haupttangenten einer Fläche bestehen, sind alle von der dritten Klasse. Sie können auf die Ebene abgebildet werden und sind in tetraedralen Komplexen enthalten. Die beiden einzigen hierher gehörigen Fälle sind: die Kongruenz der Tangenten der nicht-geradlinigen Asymptotenkurven einer Regelfläche dritter Ordnung und die Kongruenz der Tangenten an eines der Systeme von Asymptotenkurven einer Nichtregelfläche dritter Ordnung mit drei biplanaren Knotenpunkten. Wö.

L. P. Eisenhart. Conjugate rectilinear congruences. American M. S. Trans. **3**, 354-371.

Der Verf. wendet die Formeln von Ciffarelli (Ann. di Mat. (3) **2**, 139) für die Kummerschen Funktionen einer Linienkongruenz, welche auf eine allgemeine Doppelfamilie parametrischer Regelflächen bezogen ist, auf Spezialfälle an, indem er alle Kongruenzen bestimmt, welche eine gegebene sphärische Abbildung entweder der Hauptflächen oder der mittlern Regelflächen oder endlich der Abwickelbaren und ihrer Orthogonaltrajektorien haben. Der Verf. spezialisiert nun die sphärische Abbildung, indem er ein System von Großkreisen $u = \text{const.}$ und deren Orthogonaltrajektorien $v = \text{const.}$ wählt, und nennt konjugierte Kongruenz zur gegebenen die Kongruenz, welche aus den Linien kürzesten Abstands zwischen den Geraden (u, v) und $(u + du, v)$ besteht. Soll die Kongruenz der Tangenten einer Kurvenschaar auf einer Fläche konjugiert zur Normalenkongruenz der Fläche sein, so müssen die Kurven Haupttangentenkurven sein, welche sich sphärisch als die Orthogonaltrajektorien einer Großkreisschar abbilden. Die einzige Minimalfläche, die dieser Bedingung genügt, ist das Schraubenkonoid. Die zu Anfang genannten drei Möglichkeiten, der sphärischen Abbildung Doppelfamilien der Kongruenzregelflächen zuzuordnen, werden zum Schluß noch eingehend untersucht. Wö.

S. Kantor. Sopra un errore in una Memoria fondamentale di Sophus Lie. Batt. G. 40, 278-280.

Es handelt sich um eine Stelle in Lies großer Abhandlung „Über Komplexe“ (Math. Ann. 5, 1872), und zwar um S. 164-168. Der Verf. der vorliegenden Note hat zwar schon seine unrichtige Behauptung, daß Lie hier einen Irrtum begangen habe, in einem späteren Hefte derselben Zeitschrift wieder zurückgezogen; aber es erscheint mir doch angebracht, festzustellen, durch welchen Fehlschluß der Verf. zu seiner Behauptung veranlaßt worden ist. Lie betrachtet nämlich a. a. O. die Korrespondenz, die zwischen zwei Räumen x, y, z und X, Y, Z durch zwei sowohl in den x, y, z als in den X, Y, Z lineare Gleichungen vermittelt wird. Diese Gleichungen zusammen ordnen den Punkten jedes der beiden Räume die Geraden eines gewissen Linienkomplexes des andern Raumes zu. Da aber zugleich jede einzelne der beiden Gleichungen ein homographisches Entsprechen der beiden Räume vermittelt, so läßt sich jeder der beiden Komplexe zugleich definieren als der Inbegriff der Schnittgeraden der Ebenenpaare, die auf diese Weise den Punkten des andern Raumes homographisch entsprechen. Lie sagt dann: „Der hierdurch bestimmte Linienkomplex ist nach den Untersuchungen von Reye mit demjenigen Liniensysteme identisch, welches Binet zuerst betrachtet hat, und welches später Chasles und Reye untersucht haben.“ Der Verf. glaubt nun, Lie habe damit sagen wollen, der betreffende Komplex sei ein tetraedraler Komplex, also einer, der aus allen Geraden besteht, die ein Tetraeder unter konstantem Doppelverhältnisse schneiden, und da Lie weiter ausführt, daß einer der beiden Komplexe in den Räumen x, y, z und X, Y, Z aus allen Geraden bestehen kann, die einen Kegelschnitt treffen, wobei dann der andere ein allgemeiner linearer Komplex ist, so glaubt der Verf., Lie sei der Meinung gewesen, die eben erwähnten besonderen Komplexe seien Ausartungen des tetraedralen Komplexes. Das zu denken konnte Lie natürlich niemals einfallen. Der Verf. übersieht eben, daß der Komplex, der durch zwei solche homographischen Beziehungen bestimmt wird, nur im allgemeinen ein tetraedraler Komplex ist, und daß seine Ausartungen keineswegs erschöpft sind, wenn man die Ausartungen des tetraedralen Komplexes aufzählt. Der Verf. glaubt ferner, Lie eine unerlaubte Umgestaltung der Gleichungen vorwerfen zu können, die in den einzelnen Räumen die Komplexe darstellen. Durch diese fehlerhafte Umgestaltung sei jener angebliche Irrtum Lies sozusagen wieder gut gemacht worden. Der Verf. übersieht aber, daß die Umgestaltungen, die Lie mit den Gleichungen der Geraden seiner Linienkomplexe vornimmt, nur auf die Art des Auftretens der Parameter der Komplexgeraden Einfluß haben, daß sie also die Beschaffenheit der Komplexe selbst nicht ändern können; es kann höchstens ein einem Komplexe angehöriges Strahlensystem verloren gehen oder ein überflüssiges Strahlensystem hinzukommen. Das ist aber sowieso nicht gut zu vermeiden, solange man nicht homogene Koordinaten anwendet. Hätte der Verf. homogene Koordinaten benutzt,

so würde er wohl gleich eingesehen haben, auf wessen Seite der Irrtum lag. El.

S. Kantor. Die Typen der linearen Komplexe elliptischer Kurven im R_r. American J. **24**, 205-256.

Der Verf. untersucht die innerhalb eines M_{r-1}-Systems, oder durch mehrere solche Systeme erzeugten Kurvensysteme und Komplexe, zu welchem Zweck er sich der gleichzeitig erzeugten M_2-Komplexe bedient. Er zeigt zunächst, daß alle uneigentlichen Komplexe elliptischer Kurven im R_3, von denen ein erzeugendes M_2-System den Typus der elliptischen Kegelflächen hat, räumlich birational übertragbar sind in den Schnitt eines linearen Systems elliptischer Kegel mit einem Monoidsystem. Die eigentlichen und uneigentlichen Komplexe elliptischer Kurven im R_3 werden dann in fünf Klassen eingeteilt, je nachdem die zum Komplex gehörige M_2 auf eine solche vom ersten, zweiten, dritten, vierten oder sechsten Grad zurückgeführt werden kann, und die Typen von Komplexen elliptischer Kurven im R_3 innerhalb dieser Klassen werden aufgezählt. Sodann zeigt der Verf., daß und wie damit auch das Problem im R_r gelöst ist. Zum Schluß beweist der Verf., daß jede M_i im R_r, welche lauter elliptische ebene Schnittkurven besitzt, entweder ∞^1 R_{i-1}, die eine elliptische Reihe bilden, oder aber ∞^2 R_{i-2} oder ∞^3 R_{i-3} enthält, welche je eine unikursale Reihe bilden, und gibt, wie auch schon zu Anfang, Aufklärungen über das Verhältnis seiner Arbeiten zu einer Abhandlung (Math. Ann. **49**) von Enriques, in der er mehrere Mängel und Fehler nachweist. Wö.

F. Aschieri. Sulla costruzione delle cubiche gobbe direttrici di una data polarità nulla. Lomb. Ist. Rend. (2) **35**, 306-312.

In einer früheren Arbeit (Batt. G. **13**, 328-337; F. d. M. **7**, 516-517, 1875) hat der Verf. die Frage nach einer kubischen Kurve als Leitlinie einer gegebenen Nullpolarität berührt. Gegenwärtig kehrt er zu dieser Frage zurück, um zu bemerken, daß der Kegelschnitt, welcher nach der angegebenen Art dazu dient, die Aufgabe zu lösen, sich in zwei Gerade spaltet, von denen die eine die Lösung derselben Aufgabe liefert. Außerdem wird durch analytische Behandlung der Aufgabe die Konstruktion von Systemen kubischer Leitlinien der gegebenen Polarität vermittelt.

Lp.

E. Veneroni. Sui connessi bilineari fra punti e rette nello spazio ordinario. Torino Mem. (2) **51**, 115-158.

Durch eine bilineare Relation (Konnex) werden den Punkten eines Raumes S_3 die linearen Komplexe eines Raumes Σ_3 zugeordnet. Die letzteren bilden ein lineares System, bestehend aus allen Komplexen, welche entweder zwei getrennte oder zwei zusammenfallende Gerade oder

endlich einen Strahlenbüschel gemein haben, woraus sich drei Kategorien von Konnexen ergeben. Die Punkte von S_3, welche den speziellen Komplexen von Σ_3 entsprechen, liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung (C). Für die drei Kategorien von Konnexen kann die bilineare Relation resp. auf die Formen

$$x_1 x_{42} + x_2 x_{23} + x_3 x_{14} + x_4 x_{31} = 0,$$

$$x_1 x_2 x_4 + x_2 (x_{23} + x_{14}) + x_3 x_{42} + x_4 x_{31} = 0,$$

$$x_1 x_{31} + x_2 x_{42} + x_3 x_{14} + x_4 x_{23} = 0$$

gebracht werden. Die Flächen (C) sind resp.:

$$x_1 x_4 + x_2 x_3 = 0, \quad x_2^2 + x_3 x_4 = 0, \quad x_3 x_4 = 0.$$

Fallen S_3 und Σ_3 zusammen, so entsteht eine Nullkorrespondenz, indem man jedem Punkte die ihm im zugehörigen Komplex entsprechende Ebene zuordnet (Fokalebene). Den Fokalebenenbündeln entspricht ein lineares F^2-System mit fünf Basispunkten; jedem dieser fünf Punkte entspricht ein spezieller Komplex mit einem durch den betreffenden Punkt gehenden Träger. Hauptstrahlen des Konnexes heißen die Geraden, welche den Komplexen aller ihrer Punkte angehören; sie bilden eine Kongruenz zweiter Ordnung und dritter Klasse. Der Verf. betrachtet weiterhin spezielle Konnexe; ferner die gemeinschaftlichen Elemente von zwei, drei vier Konnexen, endlich vierfach unendliche lineare Systeme von Konnexen.

Wö.

C. Carrone. Sopra un complesso di rette del quarto grado. Palermo Rend. **16**, 359-375.

Zwei projektivische Scharen zweiter Ordnung von linearen Komplexen erzeugen einen Komplex vierten Grades, dessen Doppelgerade eine allgemeine Roccellasche Kongruenz (3, 3) bilden. Sind alle Komplexe der Büschel speziell, so ist die Kongruenz ein von Montesano und Fano studierter Spezialfall der Roccellaschen Kongruenz. Die Geraden derselben sind die Erzeugenden einer rationalen Schar quadratischer Regelflächen. Die anderen Geraden auf diesen Regelflächen bilden einen neuen Spezialfall der Roccellaschen Kongruenz vom Schnittgeschlecht 2 mit der Maximalzahl von singulären Punkten und Ebenen. Der Verf. untersucht zum Schluß den Fall, in welchem der die Roccellasche Kongruenz als Doppelgeradenkongruenz besitzende Komplex sich in einen linearen und in einen Weilerschen Komplex dritter Ordnung spaltet.

Wö.

P. H. Schoute. Über das Nullsystem N_{2n-1} im Raume R_{2n-1}. Deutsche Math.-Ver. **11**, 223-234.

„Zweck dieser Arbeit ist, eine einheitliche Behandlung des Nullsystems in den höheren Räumen zu geben, unabhängig von der Frage, ob dabei etwas geboten wird, was teilweise schon bekannt sein mag.“ 1. Analytische Erzeugung des Nullsystems durch Zuordnung der Raum-

koordinaten zu linearen Verbindungen der auf dasselbe Fundamentalgebilde bezogenen Punktkoordinaten. Ist die Zuordnungsdeterminante schief-symmetrisch, so stellt diese Zuordnung im Raume von ungerader Dimensionenzahl ein Nullsystem dar. Definition und Konstantenzahl der Leitelemente. 2. Geometrische Erzeugung. Man erhält im R_{2n-1} ein Nullsystem durch ein $(2n+1)$-Eck, wenn man jedem der $2n+1$ R_{2n-2} durch $2n-1$ auf einander folgende Ecken des Vielecks den zu diesen Punkten symmetrisch liegenden Eckpunkt zuordnet. Der Beweis wird geometrisch (im Anschluß an Reye) und analytisch geführt. 3. Einfachste analytische Darstellung. Einführung der eigentlichen und uneigentlichen Achsen. 4. Beweglichkeit des Nullsystems. 5. Anwendung der Mechanik. D.

A. Grünwald. Sir Robert S. Balls lineare Schraubengebiete. Zs. f. Math. u. Phys. 48, 49-108.

Die umfangreiche Abhandlung gehört zur Geometrie, nicht etwa zur Mechanik; sie bringt eine vollständige Übersicht über die linearen Schraubenmannigfaltigkeiten, ihrer Achsenlager und Parameterverteilung. Sir Robert S. Ball hat diese geometrischen Untersuchungen vorwiegend in ein mechanisches Gewand gekleidet. Dabei hat sich ergeben, daß jeder starre Körper von beliebigem Freiheitsgrade $n \lesseqqgtr 6$ um die Schrauben einer linearen Mannigfaltigkeit n-ter Stufe R_n beweglich ist und nicht beeinflußt wird durch Dynamen, welche einer anderen linearen, zur ersteren reziproken Schraubenmannigfaltigkeit der $[\nu-(6-n)]$-ten Stufe P_ν angehören. Der Verf. führt dagegen seine Untersuchung mit Hülfe der einfachsten Operationen der Graßmannschen Ausdehnungslehre durch. Wir geben hier nur die Disposition des Aufsatzes, weil ein näheres Eingehen auf den Inhalt die Anzeige über den verfügbaren Raum anschwellen lassen würde.

Einführung der linearen Schraubenmannigfaltigkeiten und ihrer reziproken Gebiete. — Die Liniengerippe der linearen Schraubengebiete. — Maßbeziehung zwischen reziproken Schrauben. I. Die Schraubung R_I und das reziproke Schraubengewebe P_V. II. Der Schraubenbüschel R_{II} und das reziproke Schraubengebüsch P_{IV}. — Allgemeiner Fall R_{II}, P_{IV}. Hauptschrauben und Parameterverteilung der Gebiete R_{II}. — Achsenlagen der Gebiete R_{II}. Plückers Zylindroid. — Die Kegelschnitte S^2 des Zylindroids und die dieser Fläche umschriebenen Kegel zweiten Grades (ws^2). — Achsensystem und Parameterverteilung der reziproken Gebiete P_{IV}. — Übergang zur kanonischen Darstellung. — Der Schraubenbündel R_{III} und der reziproke Bündel P_{III}. — Allgemeiner Fall R_{III}, P_{III}.
Lp.

L. P. Eisenhart. Note on isotropic congruences. American M. S. Bull. (2) 8, 301-303.

„Die Mittelhüllfläche einer isotropen Kongruenz ist die Adjungierte

der Minimalfläche, welche die assoziierte Oberfläche bei der infinitesimalen Deformation der Kugel ist, der Leitfläche der Kongruenz.“ Lp.

E. Study. Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Leipzig: B. G. Teubner. XIII u. 603 S. gr. 8° (1901-03).

Das vorliegende Werk enthält die systematische Darstellung der Forschungen aus der Kinematik und Liniengeometrie, welche der Verf. seit mehreren Jahren angestellt und auch zumteil schon in verschiedenen Noten publiziert hat. Die Darstellung geht aus von den geometrischen Bildern, unter denen man Kräfte und Kräftesummen darstellen kann. Es werden zunächst neben die bekannten Repräsentationen von „Zugkräften“ und „Drehkräften“ durch Stäbe (d. h. Linienstücke), bezw. Stäbepaare oder Vektoren, neue einfache Repräsentationen dieser Kräfte gestellt; insbesondere werden solche geometrischen Figuren angegeben, der Motor und der Impulsor, welche als Repräsentanten einer Dyname gelten können, d. h. des allgemeinsten, von sechs Konstanten abhängigen Kräftesystems. Für diese Figuren lassen sich Verknüpfungen definieren, welche der Zusammensetzung der Dynamen entsprechen. Von diesen kinematischen Untersuchungen aus, die sowohl elementargeometrisch als auch analytisch durchgeführt werden, gelangt Verf. zu allgemeinen Untersuchungen der Liniengeometrie, insbesondere zu der Aufgabe, lineare Systeme von Gewinden hinsichtlich gewisser Gruppen zu klassifizieren.

Auf die Darstellung ist die größte Sorgfalt verwandt, überall sind die Voraussetzungen genau präzisiert und die Begriffe so scharf gefaßt, daß alle Sätze auch streng gelten. Verf. verbindet mit einer seltenen geometrischen Phantasie die Strenge der Beweise, die in der Analysis und in anderen Zweigen der Mathematik heute erreicht ist. Für die Liniengeometrie, nicht weniger als für die Kinematik, bedeutet das Erscheinen des Buches einen wirklichen Fortschritt durch seine Eigenart und die Konsequenz der Methoden, wie durch die Fülle des durchaus neuen Stoffes. Dieser Stoff verteilt sich auf drei Abschnitte und einen Anhang, der eine neue Methode der Kinematik als Anwendung der entwickelten Theorie bringt.

Der erste Abschnitt behandelt elementar-geometrisch die Frage nach denjenigen möglichst einfachen geometrischen Figuren, welche man einer Dyname zuordnen kann, von der Art, daß sich Dynamen konstruktiv zusammensetzen lassen, so wie man Zugkräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt oder Drehkräfte zusammensetzen kann. Es werden drei Lösungen dieser Frage angegeben, und zwar ergeben sich diese sehr einfach dadurch, daß statt der Kräfte die Bewegungen (und ihre Zusammensetzung) untersucht werden, indem Verf. den bekannten Zusammenhang zwischen Kräften und infinitesimalen Bewegungen auf endliche Bewegungen ausdehnt.

Nach drei einleitenden Paragraphen, in welchen die Hauptsätze der Kinematik (insbesondere diejenigen über die mit einer Bewegung verbundenen Kollineationen und Korrelationen und das zugehörige Nullsystem)

zusammengefaßt sind, kommt Study zur Aufstellung geometrischer Figuren, die den Bewegungen und weiterhin Dynamen zugeordnet sind. Beispiele solcher Figuren sind:

1. Der Keil $\mathfrak{K}_{\varphi}^{\varphi'}$, Inbegriff zweier nicht orthogonalen Ebenen φ, φ', deren Schnittlinie die Gerade des Keils heißt und (zusammen mit der uneigentlichen Geraden, in welcher sich die zu der Schnittgeraden orthogonalen Ebenen schneiden) ein „Linienkreuz" bestimmt, das als Träger des Keils gilt.

2. Der Motor $\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{Y}}$, das System zweier in bestimmte Reihenfolge gesetzten Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, die sich nicht rechtwinklig kreuzen.

3. Der Quirl, die Figur eines Punkts und einer Ebene, welche nicht vereinigt liegen.

4. Der Impulsor $\mathfrak{J}_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{Y}}$, das System zweier in bestimmte Reihenfolge gesetzten Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$, die nicht in einer Ebene liegen.

Für jede dieser Figuren lassen sich die Begriffe der Gleichheit und Zusammensetzung (Addition, Subtraktion und Multiplikation mit Konstanten) definieren. Es lassen sich ihnen Kollineationen oder Korrelationen und damit auch Bewegungen zuordnen und darnach die Zusammensetzung der Dynamen auf die Zusammensetzung jener Figuren zurückführen.

Wegen der Konstruktionen selbst verweist Ref. auf das sehr schöne Selbstreferat des Verf. in dem Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver. **11**, 313-342 (Referat S. 490 dieses Bandes).

An die elementargeometrische Behandlung dieser Dinge im ersten Abschnitt schließt sich im zweiten Abschnitt die analytische Behandlung. Dafür liefert gerade die Beziehung der Bewegungen zu den verschiedenen Dynamenbildern den Ausgangspunkt. Study stellt die Figuren des Stabs, Vektors, Keils etc. durch sogenannte Alternanten dar, einfach gebaute (bilineare) Formen in symbolischer Form, so daß die Addition dieser Alternanten der Addition jener Figuren (und der Dynamen) entspricht. Die Konstruktionen und alle Rechnungen sind dabei so gewählt, daß sie gegenüber Bewegungen invariant sind, indem von vornherein alle in die Rechnung eingehenden Größen: Strecke, Winkel zweier Geraden, Winkel zweier Ebenen, als Bewegungsinvarianten eingeführt werden. Die symbolischen Rechnungsmethoden von Aronhold und Clebsch sind in bescheidenem Maße verwendet, soweit die Übersichtlichkeit dadurch gewinnt.

Beispielsweise wird dem Keil $\mathfrak{K}_{\varphi}^{\varphi'}$ die Alternante zugeordnet:

$$(\mathfrak{K}\,\mathfrak{X}) = \frac{(\varphi\,\varphi'\,u\,v)}{(\varphi\,|\,\varphi')},$$

wo $(\varphi\,\varphi'\,u\,v)$ die Determinante aus den Koordinaten der vier Ebenen φ, φ', u, v:

$$|\varphi_0\,\varphi_1'\,u_2\,v_3|$$

und $(\varphi\,|\,\varphi')$ die Summe $\varphi_1\varphi_1' + \varphi_2\varphi_2' + \varphi_3\varphi_3'$ bedeutet. Der geometrischen Summe zweier Keile mit gemeinsamer Anfangsebene ω: $\mathfrak{K}_{\omega}^{\varphi}$ und $\mathfrak{K}_{\omega}^{\psi}$ oder der Gleichung:

$$\mathfrak{K}_\omega^\chi = \mathfrak{K}_\omega^\varphi + \mathfrak{K}_\omega^\psi,$$

entspricht dann die Addition der entsprechenden Alternanten, d. h. die Relation:

$$\frac{(\omega \chi u v)}{(\omega | \chi)} = \frac{(\omega \varphi u v)}{(\omega | \varphi)} + \frac{(\omega \psi u v)}{(\omega | \psi)}.$$

In den andern Fällen, für Stäbe, Vektoren, Quirle etc. wird ganz analog verfahren.

Um die vom Verf. definierte zweite Art von Zusammensetzung der Motoren und Impulsoren, die sogenannte „stereometrische" Addition analytisch darzustellen, führt er für die Geraden des Raumes eine neue, sehr fruchtbare Darstellung ein durch „duale Strahlenkoordinaten", d. h. durch allgemeine Größen eines komplexen Zahlensystems. Sie werden auch durchgängig verwendet bei den Untersuchungen des dritten Abschnitts, dessen Hauptziel eine Klassifikation der linearen Mannigfaltigkeiten von Dynamen oder von reellen Gewinden (linearen Linienkomplexen) statt der Dynamen ist.

Wegen des Inhalts des dritten Abschnitts verweist Ref. hier vor allem wieder auf das Selbstreferat des Verf. im Jahresb. der deutsch. Math.-Ver. **11**, 97-123. Ref. verdankt selbst wesentliche Punkte der folgenden Darstellung den persönlichen Mitteilungen von Study.

Nach Plücker wird bekanntlich eine Gerade des R_3 durch sechs Koordinaten $\mathfrak{X}_{01}, \mathfrak{X}_{02}, \mathfrak{X}_{03}, \mathfrak{X}_{12}, \mathfrak{X}_{23}, \mathfrak{X}_{31}$ dargestellt, welche die Identität erfüllen:

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{X}\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{31} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{12} = 0.$$

Sechs bestimmte Größen $\mathfrak{X}_{ik}$ $(i, k = 0, 1, 2, 3)$, welche diese letztere Identität nicht erfüllen, können als Koordinaten eines Gewindes angesehen werden, dessen Gleichung ist:

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{Y}_{23} + \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{Y}_{31} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{Y}_{12} + \mathfrak{X}_{23}\mathfrak{Y}_{01} + \mathfrak{X}_{31}\mathfrak{Y}_{02} + \mathfrak{X}_{12}\mathfrak{Y}_{03} = 0,$$

wo nun die $\mathfrak{Y}$ veränderliche Plückersche Linienkoordinaten sind. Jedes System $\sigma\mathfrak{X}_{01}, \sigma\mathfrak{X}_{02}, \sigma\mathfrak{X}_{03}, \sigma\mathfrak{X}_{23} + \tau\mathfrak{X}_{01}, \sigma\mathfrak{X}_{31} + \tau\mathfrak{X}_{02}, \sigma\mathfrak{X}_{12} + \tau\mathfrak{X}_{03}$ stellt alsdann ein zum Gewinde $\mathfrak{X}_{ik}$ koaxiales Gewinde vor.

Um das Gemeinsame der genannten Gewinde, nämlich eben ihre Hauptachse, kurz zu bezeichnen, bedient sich Verf. eines Systems dualer Größen, $\sigma + \tau\varepsilon$, mit zwei Einheiten 1 und ε, deren letzte in Rechnungen an die Bedingung

$$\varepsilon^2 = 0$$

geknüpft wird.

Faßt man jetzt die Gewindekoordinaten in der Form:

$$X_1 = \mathfrak{X}_{01} + \mathfrak{X}_{23} \cdot \varepsilon, \quad X_2 = \mathfrak{X}_{02} + \mathfrak{X}_{31} \cdot \varepsilon, \quad X_3 = \mathfrak{X}_{03} + \mathfrak{X}_{12} \cdot \varepsilon$$

zusammen, so kann man die dualen Verhältnisgrößen $X_1 : X_2 : X_3$ als Koordinaten der Hauptachse eines Büschels koaxialer Gewinde, mithin als Koordinaten einer beliebigen eigentlichen Geraden ansehen, solange nicht gleichzeitig die drei Größen $\mathfrak{X}_{01}, \mathfrak{X}_{02}$ und $\mathfrak{X}_{03}$ Null sind.

Die linearen „synektischen“ Transformationen dieser drei Verhältnisgrößen, die den homogenen Koordinaten eines reellen oder imaginären Punktes der Ebene analog sind,

$$X_i' = a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + a_{i3} X_3 \qquad (\text{für } i = 1, 2, 3)$$

definieren eine kontinuierliche Gruppe (sogenannter dual kollinearer Transformationen) mit 16 Parametern G_{16} im Linienraum, die ähnlich behandelt werden kann, wie die Gruppe aller ∞^{15} Kollineationen in der Plückerschen Liniengeometrie behandelt zu werden pflegt.

So läßt sich der Begriff des Doppelverhältnisses von vier Punkten der Ebene (einer Geraden) erweitern zu dem Begriff des dualen Doppelverhältnisses von vier Geraden, die im Normalennetz (s. unten) einer eigentlichen Geraden gelegen sind.

Für die Liniengeometrie ist die Auffassung wesentlich, wonach die Gesamtheit aller Geraden im Raum ein abgeschlossenes algebraisches Kontinuum bildet, welches auf eine M_4^2 im R_5 eindeutig und stetig abbildbar ist. In diesem Kontinuum sind nun aber die erklärten neuen Transformationen noch nicht eindeutig, vielmehr ist es ein schwieriges Problem, den Begriff der reellen eigentlichen Geraden so zu erweitern, daß man ein (neues) Kontinuum erhält, in welchem jene ∞^{16} Transformationen überall wohl definiert, eindeutig und stetig sind. Es soll hier nur eine der beiden entwickelten Lösungen angeführt werden.

Diese Lösung besteht darin, daß den reellen eigentlichen Geraden die Punkte der unendlich fernen Ebene hinzugefügt werden. Das so erhaltene reelle Kontinuum wird dann noch in das komplexe Gebiet ausgedehnt, und für den in doppelter Hinsicht erweiterten Begriff der Geraden wird das Wort Strahl gebraucht, um Verwechslungen mit den Plückerschen Geraden vorzubeugen. Das Strahlenkontinuum unterscheidet sich in wesentlichen Eigenschaften vom Plückerschen Linienkontinuum. Es wird nicht wie dieses auf eine M_4^2 im R_5, sondern auf eine Mannigfaltigkeit M_4^3 im ebenen Raum von acht Dimensionen R_8 umkehrbar-eindeutig und stetig abgebildet.

Zur Darstellung der Strahlen des erwähnten Strahlenkontinuums dienen die Strahlenkoordinaten zweiter Art, die, im Falle der dargestellte Strahl zugleich als Gerade im Sinne Plückers angesehen werden kann, sich in folgender Weise durch die Plückerschen Koordinaten ausdrücken lassen:

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_{01},\ \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_{02},\ \mathfrak{X}_3 = \mathfrak{X}_{03},$$

$$\mathfrak{X}_{11} = \begin{vmatrix} \mathfrak{X}_{02} & \mathfrak{X}_{31} \\ \mathfrak{X}_{03} & \mathfrak{X}_{12} \end{vmatrix},\ \mathfrak{X}_{22} = \begin{vmatrix} \mathfrak{X}_{03} & \mathfrak{X}_{12} \\ \mathfrak{X}_{01} & \mathfrak{X}_{23} \end{vmatrix},\ \mathfrak{X}_{33} = \begin{vmatrix} \mathfrak{X}_{01} & \mathfrak{X}_{23} \\ \mathfrak{X}_{02} & \mathfrak{X}_{31} \end{vmatrix},$$

wobei die Relation besteht:

$$\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_{11} + \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_{22} + \mathfrak{X}_3 \mathfrak{X}_{33} = 0.$$

Die Größen $\mathfrak{X}_i$ und $\mathfrak{X}_{ii}$ spielen in diesen Formeln eine verschiedene Rolle, mit dem System $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{X}_{ii}$ ist das System $\varrho \mathfrak{X}_i$, $\varrho^2 \mathfrak{X}_{ii}$ (für $i = 1, 2, 3$

gesetzt) äquivalent, abweichend von dem Verhalten der zuerst benutzten Koordinaten $\mathfrak{X}_{01}, \ldots, \mathfrak{X}_{31}$, wo dieses System äquivalent ist mit dem System $\varrho\,\mathfrak{X}_{01}, \ldots, \varrho\,\mathfrak{X}_{31}$.

Eine nicht unwesentliche Eigenschaft der Strahlenkoordinaten ist die, daß stetigen Änderungen derselben auch stets stetige Lagenänderungen des Strahls entsprechen usw.

Ist eine der Größen $\mathfrak{X}_i$ von Null verschieden, so hat man einen eigentlichen Strahl vor sich, wenn sie alle drei gleichzeitig verschwinden, einen unendlich fernen Punkt oder, da hier der unendlich ferne Punkt als Grenzfall eines eigentlichen Strahls aufgefaßt wird, einen Punktstrahl. Der zugehörige geometrische Grenzübergang ist dieser: Läßt man einen eigentlichen Strahl in einem Parallelenbüschel ins Unendliche rücken, so geht er über in einen Punktstrahl oder Punkt, der zusammenfällt mit dem Scheitel des zweiten Parallelenbündels, das zu dem ersten orthogonal ist.

In diesem Strahlenkontinuum nun sind die erwähnten Transformationen überall wohldefiniert, eindeutig und stetig. Sie haben die weitere bemerkenswerte Eigenschaft, aus dem Normalennetz eines Strahls, d. i. der Gesamtheit aller Strahlen, welche einen gegebenen (die Achse) „rechtwinklig" schneiden, wieder ein Normalennetz hervorgehen zu lassen (ferner duale Doppelverhältnisse nicht zu ändern). Dabei wird nun aber die Achse des Normalennetzes im allgemeinen nicht in die Achse des transformierten Normalennetzes übergeführt. Mit der betrachteten Transformation ist also eine zweite verbunden, welche angibt, wie die Achsen entsprechender Normalennetze einander zugeordnet werden, und auch diese Transformationen werden in Strahlenkoordinaten erster Art oder in dualen Strahlenkoordinaten ausgedrückt durch ein System linearer Gleichungen:

$$U'_i = \mathfrak{b}_{i1} U_1 + \mathfrak{b}_{i2} U_2 + \mathfrak{b}_{i3} U_3 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Dabei sind die Größen $\mathfrak{b}_{ik}$ proportional den Ausdrücken $\frac{\partial \Delta}{\partial \mathfrak{a}_{ik}}$, wo $\Delta = |\mathfrak{a}_{11}\ \mathfrak{a}_{22}\ \mathfrak{a}_{33}|$ ist.

Hieraus ergibt sich also die Notwendigkeit, das ganze Strahlenkontinuum mit zwei Blättern zu überdecken. Strahlen verschiedener Blätter werden „kontragredient" transformiert. Der hiermit eingeführte Begriff der Kontragredienz ist nahe verwandt mit dem in der Geometrie üblichen Begriff. Die Strahlen der beiden Blätter verhalten sich ähnlich zu einander wie die Punkte und Geraden in der ebenen Geometrie, und es ist z. B. der Inbegriff aller Strahlen des zweiten Blattes, die senkrecht stehen auf einem Strahl des ersten Blattes, analog dem Inbegriff aller reellen oder komplexen Geraden einer Ebene, die mit einem ebenfalls reellen oder komplexen Punkte vereinigt liegen.

Die allgemeinste kontinuierliche Gruppe von analytischen Strahlentransformationen, welchen als charakteristisch die Eigenschaft zukommt, aus einem Normalennetz eines Strahls wieder ein Normalennetz hervorgehen zu lassen und in dem beschriebenen Strahlenkontinuum eindeutig

zu sein, ist eine solche von 17 Parametern G_{17}, die Study radialprojektiv nennt. Diese G_{17} entsteht durch Erweiterung der Gruppe der dualen Kollineationen durch die Gruppe der ∞^7 Ähnlichkeitstransformationen. Dieser Gruppe G_{17} ist die Gruppe der Kollineationen des R_5 isomorph, welche die Mannigfaltigkeit M_4^2 ungeändert lassen.

Der Unterschied zwischen dem Strahlenkontinuum und dem Plückerschen Linienkontinuum tritt besonders hervor, wenn man komplexe Werte der Koordinaten, imaginäre Strahlen und Geraden betrachtet.

Es gibt nämlich ∞^3 imaginäre Strahlen (die sogenannten akzessorischen Strahlen), welche überhaupt nicht als imaginäre Geraden angesehen werden können. Es sind dies diejenigen Strahlen, deren Koordinaten $\mathfrak{X}_{01}$, $\mathfrak{X}_{02}$, $\mathfrak{X}_{03}$ von Null verschieden sind und den Bedingungen genügen:

$$\mathfrak{X}_{01}^2 + \mathfrak{X}_{02}^2 + \mathfrak{X}_{03}^2 = 0,$$

$$\mathfrak{X}_{01}\,\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{X}_{02}\,\mathfrak{X}_{31} + \mathfrak{X}_{03}\,\mathfrak{X}_{12} \neq 0.$$

Ferner gibt es ∞^2 eigentliche imaginäre Strahlen (die sogenannten Minimalstrahlen), denen gleich ∞^1 viele imaginäre Gerade, bezw. Minimalgerade äquivalent sind. Die Koordinaten eines Minimalstrahls erfüllen die Gleichungen:

$$\mathfrak{X}_{01}^2 + \mathfrak{X}_{02}^2 + \mathfrak{X}_{03}^2 = 0,$$

$$\mathfrak{X}_{01}\,\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{X}_{02}\,\mathfrak{X}_{31} + \mathfrak{X}_{03}\,\mathfrak{X}_{12} = 0.$$

Der Inbegriff der ∞^3 akzessorischen Strahlen wird als akzessorischer Komplex bezeichnet. In demselben ist die Gesamtheit der ∞^2 Minimalstrahlen, oder die absolute Kongruenz, und ferner die Gesamtheit oder Kongruenz der ∞^2 Punktstrahlen enthalten, ebenso der Durchschnitt dieser beiden Kongruenzen, der absolute Kegelschnitt.

Verf. entwickelt die Strahlengeometrie hinsichtlich der kontinuierlichen Gruppen und betrachtet folgende Strahlenmannigfaltigkeiten, unter denen die als „Ketten" bezeichneten Hauptachsenörter von linearen Gewindemannigfaltigkeiten mit aufgezählt sind.

Dreidimensionale Strahlenmannigfaltigkeiten, welche Komplexe heißen. Jeder analytische Komplex läßt sich, wie bewiesen wird, durch eine Gleichung in den Strahlenkoordinaten zweiter Art darstellen. Unter den algebraischen Komplexen betrachtet Verf. genauer die einfachsten, nämlich die planaren Komplexe, dargestellt durch die Gleichung

$$\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{A}_2\,\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{A}_3\,\mathfrak{X}_3 = 0,$$

und die quadratischen Komplexe, dargestellt durch:

$$(\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{A}_2\,\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{A}_3\,\mathfrak{X}_3)^2 + \mathfrak{P}_1\,\mathfrak{X}_{11} + \mathfrak{P}_2\,\mathfrak{X}_{22} + \mathfrak{P}_3\,\mathfrak{X}_{33} = 0.$$

Die nicht akzessorischen Strahlen eines planaren Komplexes gehören einem linearen Geradenkomplex an, dessen Gerade alle einer Ebene parallel sind. Die reellen eigentlichen Strahlen eines quadratischen Komplexes bilden einen speziellen quadratischen Geradenkomplex.

Für die Gleichung der Strahlenkomplexe sind zwei auch geometrisch erklärte ganze Zahlen μ, ν wichtig. Sie sind für die Klassifikation der Komplexe hinsichtlich der G_{16} charakteristisch, und Verf. löst die Aufgabe, alle Typen zu gegebenen Zahlen μ und ν hinzuschreiben.

Zweidimensionale Strahlenmannigfaltigkeiten heißen Kongruenzen. Von diesen haben besonders merkwürdige Eigenschaften die „synektischen" Kongruenzen, die aplanaren und planaren Kettenkongruenzen. Die aplanaren Kettenkongruenzen lassen sich zu ∞^8 Paaren anordnen, so daß jede Kongruenz aus den gemeinsamen Normalen von sämtlichen Strahlenpaaren der andern besteht. Die Strahlen der ∞^7 planaren Kongruenzen lassen sich auf ∞^1 Parallelenbüschel verteilen, von denen jedes einen der ∞^1 Punktstrahlen der Kongruenzen enthält. Die synektischen Kongruenzen lassen sich wieder zu Paaren anordnen, und ihre reellen Strahlen sind identisch mit den Normalenkongruenzen paralleler abwickelbarer Flächen.

Eindimensionale Strahlenmannigfaltigkeiten nennt Verf. Bänder, da dieselben nämlich nicht notwendig identisch sind mit Flächen. Auch sie lassen sich im allgemeinen wieder zu Paaren anordnen, indem jedes Band aus den gemeinsamen Normalen je zweier konsekutiven Strahlen des andern besteht.

An dieser Stelle führen wir kurz einiges aus den gruppentheoretischen Untersuchungen an. Die Gruppe G_{17} enthält als invariante Untergruppen:

1. die G_{16} der dualen Kollineationen,

2. eine kontinuierliche Gruppe G_9, deren Transformationen die ∞^3 Punktstrahlen einzeln in Ruhe lassen,

3. eine in dieser G_9 enthaltene Untergruppe G_8, deren Transformationen paarweise vertauschbar sind und duale Schiebungen heißen,

4. eine G_7, deren Tansformationen den akzessorischen Komplex in Ruhe lassen. Diese Transformationen sind dadurch charakterisiert, daß sie das Übereinanderliegen von Strahlen verschiedener Blätter nicht zerstören; sie fallen im reellen Gebiet zusammen mit der Gruppe $\mathfrak{g}_7$ der Ähnlichkeitstransformationen.

Diese Begriffsbildungen haben mit der Geometrie der Gewinde, Dynamen und Motoren etc. einen einfachen Zusammenhang.

Die Gesamtheit der linearen Transformationen im Gewinderaum nämlich (wo das Gewinde als Raumelement gesetzt ist) bildet eine Gruppe Γ_{35}. Diese enthält eine Untergruppe Γ_{18}, die koaxiale Gewinde in ebensolche überführt und durch diese Eigenschaft definiert ist. Fragt man dann, wie bei den Transformationen von Γ_{18} die Hauptachsen koaxialer Gewinde eines Büschels vertauscht werden, so kommt man auf die alte Gruppe G_{17}. Daher ist mit einer Klassifikation der linearen Mannigfaltigkeiten von Gewinden gegenüber Γ_{18} zugleich eine Klassifikation der zugehörigen Örter von Hauptachsen dieser Gewinde gegenüber G_{17} geleistet.

Fragt man nach den einfachsten Bändern eigentlicher Strahlen, d. h. nach solchen, die Mannigfaltigkeiten von möglichst geringer Dimension bilden, so ergeben sich nächst den ∞^4 Parallelenbüscheln, denen einige

Paragraphen des Buchs gewidmet sind, noch ∞^7 Bänder, die **Ketten** heißen. Diese Strahlenketten sind analog jenen ∞^7 Ketten, die v. **Staudt** in die projektive Geometrie der Ebene eingeführt hat, und gleichzeitig deckt sich der Begriff der reellen Strahlenkette mit der Vereinigung der Begriffe des Zylindroids und des ebenen Büschels von Strahlen mit eigentlichem Mittelpunkt.

Der Begriff des Zylindroids, oder vielmehr der nur weniger umfassende Begriff der Strahlenkette erweist sich hiernach als ein Fundamentalbegriff der Geometrie, wodurch das Interesse verständlich wird, welches die Geometer immer jener Fläche zugewendet haben.

Die Gesamtheit der Normalen zu allen Strahlen einer Kette bildet den „Kettenkomplex“, der als zur Kette reziproke Figur bezeichnet wird.

Nach den Strahlenketten erfahren eine eingehende Untersuchung die Hauptachsenörter der zwei- und dreidimensionalen Gewindemannigfaltigkeiten, die Kettenkongruenzen und Kettenkomplexe. Es werden die geometrischen Bestimmungsweisen, die analytischen Darstellungen, sowie die Abbildungen der Ketten auf Mannigfaltigkeiten im R_8 und ihr gegenseitiges Verhältnis angegeben und diskutiert.

Zu sehr interessanten Resultaten gelangt Verf. dadurch, daß er an Stelle des Strahls die aplanare Kettenkongruenz und den Parallelenbüschel als Raumelemente wählt. Im ersten Fall ergibt sich dabei aus der Punkt- und Streckenrechnung des R_8 die sogenannte geometrische Addition der aplanaren Kettenkongruenzen. Setzt man die aplanare Kettenkongruenz und den eigentlichen Punkt des R_3 analog, so ergibt sich eine direkte Parallele der radial-projektiven und der Euklidischen Geometrie des R_3. Der Gruppe G_{17} entspricht dann die $\mathfrak{g}_7$ der Ähnlichkeitstransformationen in der Euklidischen Geometrie.

Für die aplanaren Kettenkongruenzen werden im Anschluß an die Besprechung der metrischen Eigenschaften der linearen Systeme von Gewinden und deren Klassifikation die Brennflächen, Grenzflächen und Fußpunktflächen zu bestimmten Punkten des Raumes aufgestellt und diskutiert. Durch Einführung von Parametern λ und μ für gewisse Flächensysteme (die sogenannten Parameterflächen) lassen sich die Linien der aplanaren Kettenkongruenzen in analoger Weise darstellen, wie man Punkte der Ebene durch elliptische Koordinaten bestimmen kann. Mit diesen Koordinaten gelingt z. B. das schwierige Problem der Integration derjenigen Differentialgleichung, von welcher die Zusammenfassung von Kongruenzlinien zu abwickelbaren Flächen abhängt.

Am Schluß des dritten Abschnittes kommt Verf. wieder auf die Kinematik zurück. Als Anwendung der Klassifikation der linearen Gewindesysteme ergibt sich die Lösung der bisher noch nirgends behandelten Aufgabe, die verschiedenen Arten von Freiheit eines starren Körpers im Infinitesimalen zu klassifizieren.

Im Anhang skizziert der Verf. eine neue Methode der Kinematik, d. h. des „Studiums der (analytischen) Mannigfaltigkeiten von ∞^r ($r = 1, 2, \ldots, 6$) Lagen eines starren Körpers im R_3“, wobei es sich um die Beweglichkeit im Endlichen handelt.

Der starre Körper kann ersetzt werden durch drei einander rechtwinklig schneidende orientierte Gerade, mit welchen ein kartesisches Koordinatensystem verbunden ist. Dieses System kann ∞^6 Lagen annehmen, von denen jede einzelne ein Soma und eine beliebige, aber bestimmt gewählte Lage ein Protosoma heißt. Verf. leitet nun zunächst aus den Koordinatentransformationsformeln die Bemerkung ab, daß das Soma durch ein System von vier dualen Verhältnisgrößen, als Koordinaten, gegeben werden kann, also durch:

$$X_0 = \mathfrak{X}_0 + \mathfrak{X}_{123} \cdot \varepsilon$$

$$X_1 = \mathfrak{X}_{01} + \mathfrak{X}_{23} \cdot \varepsilon, \quad X_2 = \mathfrak{X}_{02} + \mathfrak{X}_{31} \cdot \varepsilon, \quad X_3 = \mathfrak{X}_{03} + \mathfrak{X}_{12} \cdot \varepsilon.$$

In dieser Darstellung erweist sich also das Soma als eine Erweiterung des Begriffs des reellen Strahls, und es ergibt sich eine Geometrie der Somen, welche analog ist der radial-projektiven Geometrie und diese umfaßt.

Den dualen Kollineationen entsprechend wird man zunächst zu einer kontinuierlichen Gruppe von linearen Transformationen mit dualen Koeffizienten G_{30} geführt, und diese, zusammen mit der kontinuierlichen Gruppe $\mathfrak{g}_7$ von Ähnlichkeitstransformationen der Somen, ergibt die kontinuierliche Gruppe G_{31} der „projektiven Transformationen der Somen". Diese umfassende Gruppe ist geometrisch dadurch definiert, daß sie alle analytischen Transformationen der Somen umfaßt, welche aus dem Inbegriff der zu irgend einem Soma „symmetralen" Somen stets wieder einen solchen Inbegriff hervorgehen lassen. Dabei bezeichnet Verf. zwei Somen als zu einander symmetral, wenn sie durch eine Umwendung zur Deckung kommen.

Die Untersuchung der Lagen eines starren Körpers, dessen Bewegungen noch r Grade der Freiheit im Endlichen gelassen sind, ist offenbar identisch mit dem Studium der r-dimensionalen Somenmannigfaltigkeiten hinsichtlich der G_{31}. Eine relativ einfache Aufgabe, welche Verf. löst, ist diese, die sogenannten Somenketten C_r in bezug auf die G_{31} zu klassifizieren und durch geometrische Konstruktionen zu erzeugen. Somenketten sind solche analytischen Mannigfaltigkeiten von ∞^r Somen, für die $\mathfrak{X}_0, \ldots, \mathfrak{X}_{12}$ als lineare homogene Funktionen von $r+1$ Parametern darstellbar sind, also z. B. die Mannigfaltigkeiten, die man durch die Gruppen der Schiebungen aus einem Soma erhält.

Indem Study wieder den Raum mit Somen doppelt überdeckt, zwei Blätter unterscheidet, lassen sich Reziprozitätsbeziehungen definieren, durch welche die Somenmannigfaltigkeiten paarweise zusammengefaßt werden und die Konstruktionen der Ketten übersichtlicher sich gestalten.

Wie für die radial-projektive Geometrie stellt sich auch für die Geometrie der Somen hinsichtlich der G_{31} die Notwendigkeit ein, ein natürliches abgeschlossenes Kontinuum der Somenmannigfaltigkeit zu definieren; dies geschieht durch die Einführung des Begriffs „Parasoma", das dem Punktstrahl analog ist.

Außer der Gruppe G_{31} betrachtet Verf. noch eine gemischte Gruppe G_{28}, H_{28} von analytischen Transformationen, welche die charakteristische Eigenschaft haben, „konsekutiven eigentlichen Somen, die durch eine infinitesimale Drehung (Schiebung) in einander übergeführt werden können, Somen gleicher Eigenschaft zuzuordnen".

In der Gruppe G_{58} ist neben anderen Gruppen eine gemischte Gruppe G_{12}, H_{12} von solchen synektischen Transformationen enthalten, welche die dualquadratische Form

$$(XX) = X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$$

nur um einen dualen Faktor ändern. Verf. wird hier anschließend zu der Bemerkung geführt, daß in der Geometrie dieser Gruppe die Formeln und Sätze der nichteuklidischen Geometrie im Raum positiver Krümmung eine neue Deutung finden.

Einen besonderen Hinweis möchte Ref. noch machen auf die Erörterungen über die Äquivalenzbegriffe der Kinematik und Mechanik. Das Genauere muß im Buche selbst nachgelesen werden.

Die gewählte Darstellung ist sehr klar, wenn auch das Studium des Buches, das eine ganze große Theorie umspannt, nicht gerade leicht ist. Die Schwierigkeit liegt auch in der Fülle neuer Resultate und den vielen eigenartigen Methoden. Sr.

E. Study. Ein neuer Zweig der Geometrie. Deutsche Math.-Ver. **11**, 97-123 (1902).

Enthält eine kurze Übersicht der Untersuchungen des dritten Abschnittes aus der „Geometrie der Dynamen" des Verf. Sr.

A. Emch. On the congruences of twisted curves. Univ. Colorado Studies **1**, 29-32.

M. Pieri. Sopra i sistemi di congruenze lineari che generano semplicemente lo spazio rigato. Atti Acc. Gioenia di sc. nat. in Catania (4) **14**, No. 3, 7 S. (1901).

Kapitel 5.

Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen und Abbildung.

L. Lo Monaco-Aprile. Sopra una trasformazione cremoniana del terz' ordine speziale. Nota sul soggetto di ricerche *n*. VII.
Mat. pure ed appl. 2, 188-192.

Bezüglich der Resultate sei auf die gleichbetitelte Arbeit von V. Retali in demselben Heft der Zeitschrift verwiesen (vgl. das folgende Referat). Verf. behandelt die Frage nur analytisch, indem er an die in nicht homogenen kartesischen Koordinaten aufgestellten Transformationsgleichungen anknüpft. Lwt.

V. Retali. Sopra una trasformazione cremoniana del terz' ordine.
Mat. pure ed appl. 2, 192-197 und 2, 222-227.

Ordnet man den Punkten $P \equiv re^{\varphi i}$ der Ebene π der komplexen Zahlen die Punkte $P' \equiv r\cos^2\varphi e^{\varphi i}$ der Ebene π' zu, so erhält man in den Gleichungen zwischen den Koordinaten entsprechender Punkte die Gleichungen einer Cremonatransformation dritter Ordnung. Ihre Eigenschaften werden teils analytisch, teils synthetisch untersucht. Die Fundamentalpunkte und -geraden sind leicht anzugeben. Die Bilder der Geraden und Kurven n-ter Ordnung einer Ebene in der andern werden studiert; daraus wird die Möglichkeit gewonnen, an die Kurve C^{3n} der Ebene π' im Punkte P' die Tangente zu konstruieren, wenn in der Ebene π die Tangente im Punkte P der Kurve Γ^n gezeichnet vorliegt. Einen breiteren Raum nimmt die Diskussion der den geraden Linien entsprechenden Kurven dritter Ordnung ein, wodurch die Zerlegung der Transformation dritter Ordnung in zwei aufeinander folgende quadratische Transformationen, eine Hirstsche Inversion und eine Transformation mittels reziproker Radien, vorbereitet wird. Diesen quadratischen Transformationen werden Kegelschnitte, Kegelschnitt-, speziell auch Kreissysteme und Kurven n-ter Ordnung unterworfen. Kreise, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen, liefern Kurven sechster Ordnung, die in anderm Zusammenhang in der Arbeit „Die eiförmigen Kurven" von Fritz Münzer (Bern 1894) behandelt worden sind. Verf. macht auf einige in der Arbeit enthaltene Unrichtigkeiten aufmerksam. Die Abhandlung schließt mit der Anwendung der Transformation auf mehrere einfache Kurven. Lwt.

M. Bonicelli. Sopra una trasformazione birazionale dello spazio di 3° grado e una classe di superficie razionali del 6° grado. Batt. G. **40**, 184-191.

Zunächst wird in einem Raum X ein spezielles, von Flächen dritter Ordnung Φ gebildetes homaloidales System konstruiert, welches geeignet ist, den Raum X dergestalt in einen Raum Y zu transformieren, daß den Ebenen des Raumes Y eindeutig die Flächen Φ des Raumes X zugeordnet sind; die inverse Transformation ist vom sechsten Grade, d. h. den Ebenen des Raumes X entspricht ein lineares System dritter Stufe von — ebenfalls homaloidalen — Flächen sechster Ordnung Ψ. Die Jacobische Fläche des Systems Φ ist von der achten, die des Systems Ψ von der zwanzigsten Ordnung.

Sodann bringt der Verf. eine ebene Abbildung einer der Flächen Ψ, eine ausführliche Besprechung der (drei) verschiedenen Fälle, welche beim Schnitt einer Bitangentialebene mit der Fläche auftreten können, eine kurze Behandlung der Tritangentialebenen und eine Angabe einiger bis dahin noch nicht erwähnten Eigentümlichkeiten der Fläche. Z.

D. Gravé. Un cas remarquable de transformation rationnelle de l'espace. C. R. **134**, 1345-1346.

Die kartesischen Koordinaten eines Punktes im Raume werden als rationale Funktionen von zwei Tripeln neuer Veränderlicher und von einem Parameter in der Weise dargestellt, daß umgekehrt jedes der beiden Wertetripel rational durch die ursprünglichen Koordinaten und das andere Wertetripel ausgedrückt werden kann. Eine solche Transformation, bei der die Koordinaten von Punkten dreier Räume in der Beziehung stehen, daß man die zwischen diesen neun Größen vorhandenen Gleichungen nach den Koordinaten jedes der drei Räume rational auflösen kann, nennt der Verf. eine trirationale Transformation. St.

G. Pirondini. Symétrie tangentielle par rapport à une surface de révolution. Journ. de Math. (5) 8, 229-251.

Wenn man von einem Punkt A aus an die durch A gehende Meridiankurve einer Drehungsfläche Σ eine Tangente AA_0 zieht und dieselbe um $A_0A_1 = AA_0$ verlängert, so erhält man den Punkt A_1, welcher A entspricht vermöge der „tangentiellen Symmetrie in bezug auf die Drehfläche Σ.“ Dabei entspricht einer Fläche S wieder eine Fläche S_1, einer Kurve L eine Kurve L_1; in letzterem Falle bilden die Berührungspunkte A_0 auf Σ eine Kurve $\varLambda$, die der Verf. tangentiale Projektion von L auf Σ nennt. Es wird gezeigt, wie S_1 gefunden wird, wenn S und Σ gegeben ist, ebenso L_1 und $\varLambda$, wenn L und Σ gegeben sind, endlich wie vermittels der Flächen S und S_1 die Drehfläche Σ bestimmt werden kann. Wö.

E. Lacour. Exemple de transformation birationnelle. Nouv. Ann. (4) **2**, 169-177.

Nimmt man in der Ebene ein rechtwinkliges Achsenkreuz und einen festen Punkt J an und läßt man jedem Punkte M denjenigen Punkt M' entsprechen, welcher zu J symmetrisch ist bezüglich der Verbindungslinie PQ der Projektionen von M auf die Achse, so entsteht eine birationale (Cremonasche) Verwandtschaft, die der Verf. näher studiert.

Stz.

P. Patrassi. Le corrispondenze collineari del fascio sizigetico in sè stesso. Batt. G. **40**, 154-166.

Eine allgemeine ebene Kurve dritter Ordnung hat als Hessesche Kurve eine andere Kurve derselben Ordnung und bestimmt mit dieser einen Büschel (den sogenannten syzygetischen Büschel), in dem vier Dreiecke enthalten sind. Es gibt eine bestimmte Zahl ebener Projektivitäten, welche diesen Büschel in sich selbst transformieren, d. h. im allgemeinen jede Kurve des Büschels in eine andere; dies ist der Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Durch eine geschickte Anwendung der Theorie der binären Formen dritten und vierten Grades und der ternären kubischen Formen beweist der Verf. zuerst, daß die projektiven Transformationen des Büschels in sich selbst die folgenden sind:

1. Drei Involutionen; jede hat als Doppelelemente zwei harmonische Kurven des Büschels, wovon jede die Hessesche Kurve der anderen ist;

2. Vier cyklische Projektivitäten dritter Ordnung; jede hat als Doppelelemente ein syzygetisches Dreieck und die äquianharmonische Kurve des Büschels, welche seine Hessesche Kurve bildet.

Wenn man nun einige Resultate benutzt, welche die Transformation einer Kurve dritter Ordnung in sich selbst betreffen, so kann man daraus schließen, daß die ebenen Kollineationen, welche den syzygetischen Büschel in sich selbst transformieren, $18 \times 3 + 36 \times 4 + 18 = 216$ sind.

Außer diesen Sätzen werden andere minder wichtige auf diesem Wege bewiesen; bei denselben können wir uns nicht aufhalten, ohne die Grenzen eines Referats zu überschreiten.

La.

P. Cattaneo. Sulle congruenze di linee in uno spazio piano a tre dimensioni. Ven. Ist. Atti **61** [(8) **4**, 41-50.

Dieser Aufsatz bietet neue Anwendungen der Riccischen „absoluten Differentialrechnung“.

Im § 1 erhält der Verf. die Ausdrücke der Krümmungen der Linien einer Kongruenz und die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit eine Kongruenz aus Geraden, ebenen Kurven oder Kreisen bestehe; daraus folgt, daß die einzigen orthogonalen geradlinigen Kongruenzen diejenigen sind, welche aus orthogonalen kartesischen Systemen in parallelen Ebenen und aus den Normalen solcher Ebenen bestehen.

Im § 2 werden die Resultate des ersten Paragraphen auf die Erforschung der orthogonalen Trajektorien von Ebenen- oder Kugelfamilien angewandt; der Verf. findet der Reihe nach, wie die Kongruenzen gebildet sind, welche aus Geraden, Kreisen oder ebenen Kurven bestehen, im Falle, daß diese Linien aus Trajektorien von Ebenen- oder Kugelfamilien bestehen.
La.

M. Fréchet. Généralisation du théorème de Tissot. Nouv. Ann. (4) 2, 446-448.

Ist eine Punktkorrespondenz zwischen drei Oberflächen S_1, S_2, S_3 gegeben, so existieren im allgemeinen vier Paare von Kurvenscharen auf S_1 derart, daß die Winkel, unter denen sich zwei Kurven desselben Paares schneiden, in der Korrespondenz bewahrt bleiben. Wbg.

E. Duporcq. Sur une note de M. Fréchet. Nouv. Ann. (4) 2, 482-485.

Die auf drei Flächen, die sich punktweise entsprechen, nach einer Bemerkung von Fréchet (Referat vorstehend) existierenden vier Systeme korrespondierender isogonaler Kurven untersucht der Verf., indem er den Tangententripeln an die korrespondierenden Kurven in drei homologen Punkten die Punkte eines Kegelschnitts zuordnet. Wö.

E. O. Lovett. Les transformations de contact entre les éléments fondamentaux de l'espace. Annali di Mat. (3) 7, 39-98.

Der Verf. macht sich recht unnötiger Weise die Mühe, direkt alle Berührungstransformationen des R_{n+1} zu bestimmen, bei denen die Punkte in n-fach ausgedehnte Ebenen E_n übergehen, und alle die, bei denen die E_n' unter einander vertauscht werden. Sodann fragt er nach Berührungstransformationen des R_3, die durch eine aequatio directrix definiert werden und bei denen die Geraden in Kugeln übergehen. Es stellt sich heraus, daß es keine gibt. Nimmt man zwei aequationes directrices von der Form:

$$x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3 + \varphi_4 = 0,\ x\varphi_5 + y\varphi_6 + z\varphi_7 + \varphi_8 = 0,$$

wo die φ_k lineare Funktionen von x_1, y_1, z_1 sind, so erhält man eine Berührungstransformation, bei der die Geraden des Raumes x, y, z in Flächen zweiter Ordnung übergehen. Verlangt man insbesondere, daß diese Flächen zweiter Ordnung sämtlich Kugeln werden, so müssen die Koeffizienten der φ_k gewisse Relationen erfüllen, und zwar ergibt sich, daß die gestellte Forderung auf zwei verschiedene Arten befriedigt werden kann, so daß zwei Fälle zu unterscheiden sind. Im ersten Falle erhält man Relationen, die zwei Scharen von je ∞^{15} Berührungstransformationen bestimmen, und jede derartige Transformation entsteht dadurch, daß man zuerst eine beliebige projektive (dualistische) Transformation ausführt

und dann die berühmte Liesche Berührungstransformation, die die geraden Linien in die Kugeln verwandelt. Im zweiten Falle findet der Verf. sechs Scharen von je ∞^{13} Berührungstransformationen, unter denen natürlich wieder die Liesche Transformation steckt. Der Verf. gibt sich unglaubliche Mühe, die betreffenden Relationen zwischen den Koeffizienten der q_k auf jede mögliche Art dadurch zu befriedigen, daß er diese Koeffizienten durch ganz willkürlich bleibende Parameter ausdrückt, und er unterscheidet dabei nicht weniger als 45 verschiedene Fälle, die auf 15 Quartseiten alle einzeln durchgerechnet werden. Wozu? das bleibt unklar; denn die Berührungstransformationen, die sich hier ergeben, sind selbstverständlich unter den vorhin charakterisierten mit enthalten, worauf jedoch der Verf. mit keinem Wort eingeht. Nicht viel mehr Zweck hat die nachher behandelte Frage nach Berührungstransformationen des R_n, bei denen die Geraden in Kugeln übergehen; denn für $n > 3$ gibt es keine wirklichen Transformationen dieser Art. Die nunmehr folgenden Bemerkungen über die Berührungstransformationen des R_n, die Kugeln in Kugeln überführen, enthalten nichts Neues, und das, was der Verf. über solche Transformationen sagt, bei denen je zwei auf einander abwickelbare Mannigfaltigkeiten des R_n in ebensolche verwandelt werden, ist nur eine selbstverständliche Verallgemeinerung einer Idee von Stäckel. Der Verf. wendet sich jetzt zu der Aufgabe, alle Berührungstransformationen des R_3 zu bestimmen, bei denen Asymptotenkurven in Krümmungslinien übergehen. Die langen und langweiligen Rechnungen, die er dazu durchführt, zeigen recht deutlich, wie verfehlt es ist, eine solche Aufgabe auf diesem Wege anzugreifen, um so verfehlter, als Lie die Aufgabe längst auf dem denkbar einfachsten Wege gelöst hat. Nur weil die Liesche Lösung schon vorlag, konnte der Verf. sich überhaupt an diese Aufgabe wagen. Nicht viel anders verhält es sich mit der Bestimmung aller Berührungstransformationen, die Asymptotenkurven in Asymptotenkurven verwandeln, womit sich der Verf. am Schluß der Arbeit beschäftigt, und die er auch für den Raum von n Dimensionen behandelt. El.

U. Amaldi. Contributo alla determinazione dei gruppi continui finiti dello spazio ordinario (contin. e fine, v. vol. XXXIX p. 273-316). Batt. G. **40**, 105-141.

Fortsetzung und Schluß der Arbeit, über die in F. d. M. **32**, 674, 1901 berichtet ist. Da es sich nur um die Bestimmung von Normalformen für gewisse Klassen von endlichen kontinuierlichen Gruppen von Punkttransformationen des R_3 handelt, so ist eine Inhaltsangabe nicht möglich. El.

Weitere Literatur.

W. Boy. Über die Abbildung der projektiven Ebene auf eine im endlichen geschlossene singularitätenfreie Fläche. Halle: M. Schilling. 14 S. (Abhdl. 5) (1902).

H. B. Brewster. On collineations of space which leave invariant a quadric surface. Bull. Univ. Kansas 8, 281-302.

A. Emch. Cyclographic transformation of ordinary space. Univ. Colorado Studies 1, 33-43.

B. Gawrilowitsch. Über die konjugierten polaren Transformationen. Belgrad Ak. 63, 255-268 (Serbisch).

H. B. Newson. Projective transformations in one dimension and their continuous groups. Bull. Univ. Kansas 8, 115-142.

B. Konforme Abbildung und dergleichen.

A. Gottschalk. Die konforme Abbildung gewisser krummlinig begrenzter Vielecke. (Teil II.) Pr. Progymn. Münster. 20 S. 8°.

Im Anschluß an den ersten Teil der Arbeit (vergl. F. d. M. 32, 680, 1901) werden unter der Bedingung, daß die Winkel der betrachteten Figuren Bogenzahlen besitzen, welche einander gleich und aliquote Teile von π sind, mit Benutzung der von H. A. Schwarz eingeführten Methoden die konformen Abbildungen eines ebenen, von zwei Kreisbogen begrenzten, sichelförmigen Flächenstückes sowie eines ebenen von vier Lemniskatenbogen begrenzten Vierecks auf die Fläche eines Kreises ausgeführt und darnach Andeutungen über eine Verallgemeinerung der letzten Aufgabe gegeben. Z.

N. Perry. Das Problem der konformen Abbildung für eine spezielle Kurve von der Ordnung $3n$. Münch. Ber. 32, 43-54.

Verf. behandelt die Aufgabe, ein Flächenstück, welches von einer „n-fach zirkularen“ Kurve $3n$-ter Ordnung begrenzt wird, konform auf die Halbebene abzubilden; er zeigt, daß die Lösung dieser Aufgabe abhängig ist von einer Differentialgleichung dritter Ordnung, welche in bestimmten, angebbaren Fällen auf eine durch Quadraturen aufzulösende Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückgeführt werden kann. Z.

H. F. Stecker. Concerning the existence of surfaces capable of conformal representation upon the plane in such a manner that geodetic lines are represented by a prescribed system of curves. American M. S. Trans 3, 12-22.

Als Fortsetzung einer früheren Arbeit (American M. S. Trans. 2, 152-165, 1901; F. d. M. 32, 680f., 1901) behandelt der Verf. hier, ohne wesentlich Neues zu bieten, die bereits von Beltrami (Annali di Mat. (1) 7, 185ff., 1866) untersuchte Abbildung einer Fläche auf die Ebene derart, daß den geodätischen Linien der Fläche vorgeschriebene Kurven (spez. Gerade) der Ebene entsprechen. Diese Abbildung ist zwar

punktweise eindeutig, aber nicht konform, wie man vielleicht aus dem Wortlaute der Überschrift zu schließen versucht sein könnte. Z.

R. LE VAVASSEUR. Sur la représentation conforme de deux aires planes à connexion multiple, d'après M. Schottky. Toulouse Ann. (2) **4**, 45-100.

Der Verf. bespricht in Anlehnung an eine bekannte Arbeit von Schottky (J. für Math. **83**, 300-351, 1877; vgl. F. d. M. **9**, 584-586, 1877) die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächenstücke und behandelt am Schlusse ausführlich den Fall des zweifachen Zusammenhangs, insbesondere die Abbildung eines zweifach zusammenhängenden Flächenstückes auf die Fläche eines von zwei konzentrischen Kreisen begrenzten Ringes, die Abbildung zweier zweifach zusammenhängenden Flächenstücke auf einander derart, daß ein beliebiger Punkt der Begrenzung des einen Gebietes einem beliebigen Punkte der Begrenzung des anderen entspricht, endlich noch Abbildungen eines von zwei exzentrischen Kreisen begrenzten Ringes und eines von zwei konfokalen Ellipsen eingeschlossenen Flächenstückes. Z.

K. VON DER MÜHLL. Über konforme Abbildung im Raum. Sep.-Abdr. Naturf. Ges. Basel **16**, 158-172.

Der Verf. gibt eine direkte rein analytische Ableitung des bekannten Satzes, daß die Abbildung durch reziproke Radien die einzige Raumabbildung ist, für welche die kleinsten Raumteile in Figur und Bild einander ähnlich sind. Wö.

Zehnter Abschnitt.

Mechanik.

Kapitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

J. WILLARD GIBBS. Elementary principles in statistical mechanics developed with especial reference to the rational foundation of thermodynamics. New York: Charles Scribner's Sons. London: Edward Arnold. XVIII u. 207 S. 8°.

Die statistische Mechanik ist ein neuer Zweig der Mechanik, der sich aus der Behandlung der Thermodynamik, besonders der kinetischen Gastheorie entwickelt. Wegen der Neuheit des Gegenstandes lassen wir den Verf. hier mit einigen Stellen aus der Einleitung selbst reden.

Der Gegenstand des gegenwärtigen Bandes besteht meistenteils aus Ergebnissen, die von verschiedenen Forschern gewonnen worden sind, obgleich der Gesichtspunkt und die Anordnung anders sein mag. Diese dem Publikum nach der Folge ihrer Entdeckung einzeln übergebenen Resultate sind bei ihrer ursprünglichen Darlegung mit Notwendigkeit nicht gerade in der logischsten Art angeordnet gewesen.

In dem ersten Kapitel wird das allgemeine Problem betrachtet und diejenige Gleichung gefunden, welche die Grundgleichung der statistischen Mechanik genannt werden kann. Ein besonderer Fall dieser Gleichung gibt die Bedingung des statistischen Gleichgewichtes, d. h. die Bedingung, welche die Verteilung der Systeme in Phase (nach einem neuen, vom Verf. eingeführten Kunstausdrucke) befriedigen muß, damit die Verteilung permanent sei. In dem allgemeinen Falle gestattet die Grundgleichung eine Integration; hierdurch entsteht ein Prinzip, das mannigfach ausgedrückt werden kann je nach dem Gesichtspunkte, unter dem man es betrachtet, als die Erhaltung der Dichtigkeit in Phase oder der Ausdehnung in Phase oder der Wahrscheinlichkeit der Phase.

In dem zweiten Kapitel wird dieses Prinzip der Erhaltung der Wahrscheinlichkeit der Phase auf die Theorie der Fehler bei den berechneten Phasen eines Systemes angewandt, wenn die Bestimmung der willkürlichen Konstanten der Integralgleichungen Fehlern unterliegen.

Im dritten Kapitel wird das Prinzip der Erhaltung der Ausdehnung in Phase auf die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung angewandt. Dies liefert Jacobis letzten Multiplikator, wie von Boltzmann gezeigt worden ist.

In den nun folgenden Kapiteln kehrt die Darstellung zu der Betrachtung des statistischen Gleichgewichtes zurück; besonders werden konservative Systeme betrachtet. Wenn der Index (oder Logarithmus) der Wahrscheinlichkeit der Phase eine lineare Funktion der Energie ist, so wird diese Verteilung kanonisch genannt, und der Divisor der Energie heißt dann der Modulus der Verteilung. Die Moduli der Mannigfaltigkeiten haben Eigenschaften analog wie die Temperatur. Eine Differentialgleichung, die sich auf Mittelwerte in der Mannigfaltigkeit bezieht, ist der Form nach identisch mit der fundamentalen Differentialgleichung der Thermodynamik, indem der mittlere Index der Wahrscheinlichkeit der Phase (mit umgekehrtem Vorzeichen) der Entropie entspricht und der Modulus der Temperatur.

Andere Größen werden im Laufe der Entwicklungen gefunden, die, wenn die Zahl der Freiheitsgrade sehr groß ist, mit dem Modulus merkbar zusammenfallen und ebenso mit dem durchschnittlichen Index der Wahrscheinlichkeit, negativ genommen, in einer kanonischen Mannigfaltigkeit, die also als der Temperatur und der Entropie entsprechend angesehen werden können, aber nur bei sehr großer Anzahl der Freiheitsgrade. Dieses Thema der thermodynamischen Analogien wird im XIV. Kapitel in größerer Breite erörtert.

Im XV. Kapitel wird endlich die Modifikation betrachtet, die an den Ergebnissen der vorangehenden Abschnitte nötig wird, wenn Systeme betrachtet werden, die aus einer Anzahl von völlig gleichen Partikelchen bestehen.

„Obgleich, geschichtlich betrachtet, die statistische Mechanik ihren Ursprung den Forschungen in der Thermodynamik verdankt, so scheint sie in hervorragender Weise eine selbständige Entwicklung zu verdienen, sowohl wegen der Eleganz und der Einfachheit ihrer Prinzipien, als auch weil sie neue Ergebnisse liefert und alte Wahrheiten in Gebieten, die der Thermodynamik ganz fern liegen, in ein neues Licht stellt. Außerdem scheint das gesonderte Studium dieses Zweiges der Mechanik die beste Grundlage für das Studium der analytischen Thermodynamik und der Molekularmechanik zu geben.“ Lp.

H. Lorenz. **Lehrbuch der technischen Physik. Erster Band: Technische Mechanik starrer Systeme.** München und Berlin: R. Oldenbourg. XXIV u. 626 S. 8°.

Das vom Verf. geplante Werk soll „eine Darstellung der Physik in unmittelbarem Zusammenhang mit ihren wichtigsten technischen Anwendungen geben, an denen der Studierende zugleich den Gebrauch der vorgetragenen Methoden kennen lernt und so weit geführt wird, um

selbständig auch an schwierige und praktische Aufgaben heranzutreten". Der vorliegende erste Band behandelt in diesem Sinne als Einleitung des ganzen Werkes die Mechanik der starren Systeme. Weil die vorgetragenen Lehren zunächst immer an konkreten Beispielen zur Anschauung gebracht und dann auch weiter an Aufgaben erläutert werden, die der Astronomie, der Physik und der Technik entlehnt sind, so hat der sich als Ingenieur auf dem Titelblatte bekennende Verf. das Buch als „Technische Mechanik" gekennzeichnet. In Frankreich oder besonders in England würde man den einfacheren Titel Mechanik ohne weiteres gebraucht haben; in Deutschland ist die Bezeichnung als ein Protest gegen diejenigen Vorträge über Mechanik aufzufassen, welche sich auf die Darstellung der Prinzipien beschränken, ohne zu Anwendungen auf die wichtigeren Fälle zu gelangen.

Der Inhalt des Ganzen umfaßt durchaus diejenigen Gegenstände, welche sonst der analytischen Mechanik zugerechnet werden. Die Festigkeitslehre, welche den charakteristischen Inhalt der technischen Mechanik bildet, kommt nicht zur Darstellung. Die Theorie der ebenen Schwingungen gespannter Saiten, der ein Paragraph gewidmet ist, wird ja auch sonst in Lehrbüchern der Mechanik abgehandelt, wie z. B. in Sturms Cours de mécanique.

Als ein Lehrbuch, das den Lernenden in die reichhaltigen Anwendungen einweiht, wird die vorliegende Schrift gewiß segensreichen Einfluß ausüben. Auf den Inhalt hier noch näher einzugehen, ist nicht möglich. Wir beschränken uns mit der Angabe der Kapitelüberschriften: I. Geometrische Bewegungslehre. II. Geschwindigkeit und Beschleunigung. III. Die Relativbewegung. IV. Treibende Kräfte und Widerstandskräfte. V. Mechanik ebener Systeme. VI. Mechanik räumlicher Systeme. VII. Abriß der geschichtlichen Entwicklung der Mechanik starrer Systeme. — Die Trennung der ebenen und der räumlichen starren Systeme, die wohl aus pädagogischen Gründen geschehen ist, hat manche Unzuträglichkeiten im Gefolge, so die gesonderte Behandlung der Trägheitsmomente ebener und räumlicher Systeme, die Einreihung der Bewegung eines starren Körpers um eine Achse in die Aufgaben der ebenen Systeme, wobei das erforderliche Trägheitsmoment eines Körpers, wie einer schwingenden Glocke, anzuwenden ist, obschon nur Trägheitsmomente ebener Systeme bis dahin berechnet sind. Von vielen Einzelheiten, die beim Lesen dem Ref. aufgefallen sind, kann hier nichts zur Sprache gebracht werden. Lp.

P. Appell. Cours de mécanique à l'usage des candidats à l'École centrale des arts et manufactures. Paris: Gauthier-Villars. IV u. 271 S. 8°.

Wie der berühmte Verf. des Traité de mécanique rationnelle als Professor der École centrale im Jahre 1898 die Éléments d'analyse mathématique für Physiker und Ingenieure verfaßt hat, so veröffentlicht er jetzt seine für denselben Hörerkreis bestimmten Vorträge über Mechanik.

„Jede Frage wird für sich auf direktem geometrischen oder mechanischen Wege behandelt, so lange das möglich ist; die analytischen Ausdrücke kommen erst nach den geometrischen oder mechanischen Tatsachen.“ Der eigentlichen Mechanik geht die Kinematik voran. Die Streckentheorie wird reichlich benutzt; der Begriff des Kraftfeldes ist früh eingeführt, und die physikalischen Maßsysteme finden ausgiebige Verwendung. Zur Einführung in die Mechanik und ihre ersten Anwendungen ist auch dieses Buch des französischen Akademikers vortrefflich geeignet. Lp.

K. Heun. Formeln und Lehrsätze der allgemeinen Mechanik in systematischer und geschichtlicher Entwicklung dargestellt. Mit 25 Figuren im Text. Leipzig: G. J. Göschen. VIII u. 112 S. 8°.

Ein kleines Kompendium der theoretischen Mechanik, für die Zuhörer des Verf. zur Repetition ausgearbeitet. Die Ideen, welche von Heun während der letzten Jahre in verschiedenen Arbeiten entwickelt sind, erscheinen hier zum ersten Male systematisch verarbeitet, leider aber in so knapper Darstellung, daß eben wohl nur seine Schüler Nutzen daraus ziehen. Zu den mathematischen Hülfsmitteln, die auf S. 1-5 erklärt werden, gehört die Streckenrechnung in bescheidenem Umfange; „eigentlich sind nur die Definitionen der beiden geometrischen Produkte benutzt“. Als weitere Abschnitte sind zu nennen: II. Kinematik. III. Dynamik. a) Statik. b) Kinetik der Momentankräfte. c) Kinetik der zeitlich wirkenden Kräfte. d) Kinetostatik. — In einem Anhange sind verschiedene einzelne Gegenstände behandelt; zuletzt werden einige Daten aus der Geschichte der Mechanik gegeben. Lp.

H. A. Lorentz. Sichtbare und unsichtbare Bewegungen. Vorträge auf Einladung des Vorstandes des Departements Leiden der maatsappij tot nut van't algemeen im Februar und März 1901 gehalten. Unter Mitwirkung des Verfassers aus dem Holländischen übersetzt von G. Siebert. Braunschweig: Friedr. Vieweg und Sohn. 123 S. gr. 8°.

In musterhaft klaren und einfachen populären Vorträgen über die mechanischen Lehren von den Bewegungen führt der holländische berühmte Physiker seine Hörerschaft aus der Gemeinnützigen Gesellschaft in diejenigen Anschauungen von den physikalischen Vorgängen ein, die gegenwärtig als die maßgebenden gelten. Die sieben Abschnitte behandeln der Reihe nach geradlinige, krummlinige und schwingende Bewegungen nebst Lichtstrahlen, Lichtschwingungen, Molekularbewegungen, elektrische Erscheinungen, die Erhaltung der Energie. Durch eine Reihe lehrreicher Versuche unterstützt, liefert der Verf. so mannigfaltige und eingehende Belehrung, daß die Schrift als ein kleines populäres Lehrbuch der Mechanik und der Physik gelten kann. Um etwas Spezielles anzu-

führen, gelangen sowohl die kinetische Gastheorie, als auch die Hypothese der Elektronen und das Zeemansche Phänomen zur Erörterung. „In der Überzeugung, daß ein Einblick in den Mechanismus der Erscheinungen unser Ziel sein muß, habe ich Ihnen Spekulationen über den Äther, über Moleküle, Atome und Elektronen nicht erspart.“ Lp.

É. Picard. Quelques réflexions sur la mécanique suivies d'une première leçon de dynamique. Paris: Gauthier-Villars. VI u. 57 S. 8°.

Das Büchlein besteht aus zwei verschiedenen Schriften, die beide schon anderswo erschienen sind. Der erste Aufsatz ist in Darboux Bull. (2) **25**, 17-27 zum Teil abgedruckt (F. d. M. **32**, 690, 1901). Daselbst fehlt der Abschnitt „La science de l'énergie“. Aus dem Vorworte erfährt man, daß der ganze Artikel ein Kapitel des allgemeinen Berichtes bildet, den der Verf. über die exakten Wissenschaften auf der Pariser Weltausstellung von 1900 verfaßt hat. Der zweite Aufsatz ist in Ens. math. **2**, 3-13 erschienen (vergl. F. d. M. **31**, 672, 1900). Lp.

E. Timerding. Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers. Encykl. d. math. Wiss. **4**$_1$, 125-189.

Die vom Verf. gegebene Darstellung hat den Zweck, die Grundlage der Statik und Kinematik eines starren Körpers in ihrem organischen Zusammenhange mit der Geometrie zu entwickeln und so auf die Abschnitte der Encyklopädie vorzubereiten, in denen die weitergehenden Resultate dieser Disziplinen enthalten sind. Es wird daher eine Reihe geometrischer Sätze angeführt, die in den berührten Teilen der Mechanik Verwendung finden. Dies geschieht jedoch nur in abgekürzter Form und mit derjenigen Einschränkung, die durch die Anwendung in der Mechanik bedingt ist. Das erste Kapitel behandelt unter dem Titel „geometrische Grundbegriffe“ die Prinzipien der Rechnung mit Vektoren. Im zweiten Kapitel werden die ersten Sätze der Kinematik des starren Körpers und die Ballschen Schrauben vorgeführt. Das dritte Kapitel ist den Grundzügen der elementaren Statik gewidmet und das vierte der Astatik; hier kommt nach einer geometrischen Einleitung die Theorie der gebundenen Kräftesysteme und ihrer Drehung zur Darstellung. Als kenntnisreicher und scharfsinniger Forscher hat der Verf. auf den vier Bogen seiner Schrift eine recht gute Übersicht über die bezüglichen Arbeiten gegeben. Lp.

J. Duncan. Applied mechanics for beginners. London: Macmillan. XI u. 324 S.

Als ein Buch für Anfänger kann dieser kleine Band warm empfohlen werden. Trotz gelegentlicher Unachtsamkeit, nicht gerade Ungenauigkeit im Ausdrucke ist die Darlegung sachlich, einfach und klar; zahlreiche

Beschreibungen von Laboratoriumsapparaten und Anweisungen zur Ausführung experimenteller Bestätigung wichtiger Prinzipien machen das Buch ungemein wertvoll für den Leser. Außerdem sind viele Übungen in Zahlen beigegeben. Gbs. (Lp.)

K. T. Fischer. Neuere Versuche zur Mechanik der festen und flüssigen Körper. Mit einem Anhange über das absolute Maßsystem. Ein Beitrag zur Methodik des physikalischen Unterrichts. Mit 55 Figuren im Text. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner. V u. 68 S. gr. 8°.

Aus den Ferienkursen für Lehrer der Mathematik und Physik zu München 1898 hervorgegangen, bietet das Büchlein eine Reihe von Experimenten, die der Verf. zum großen Teil selbst ersonnen hat, und die einen heuristischen Lehrgang der Mechanik für Mittelschulen bilden sollen. Für die Lehrer der Physik werden gewiß viele der angegebenen Versuche ein willkommener Fingerzeig zum induzierenden Aufbau der Physik sein; daher ist die Benutzung allen Physikern beim Unterrichte zu empfehlen. Kleine Ungenauigkeiten wird der denkende Leser bemerken und verbessern; so z. B. ist es unmöglich, daß bei einer gekrümmten Bahn eines Körpers jeder Punkt desselben in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegt (S. 2). Lp.

C. Albrich jun. Die Lehre von der Bewegung fester Körper. Ein Unterrichtsgang auf historischer Grundlage. Hermannstadt: W. Krafft. 69 S. 8°.

Das Büchlein enthält einen einführenden Lehrgang der Bewegungslehre in dem Umfange, wie die elementaren Lehrbücher der Physik ihn bieten, mit eingestreuten historischen Bemerkungen nebst Aufgaben zur Übung am Ende einzelner Paragraphen. Bei einer neuen Auflage müßten manche Ungenauigkeiten und Unrichtigkeiten beseitigt werden. Auf S. 8 wird der in der Fallrinne durch das Hinabrollen einer Kugel zu 909 cm bestimmte Wert von g als „wegen der Reibung zu klein“ erklärt, also die Rollbewegung mit der einfachen Translation für identisch erachtet. Die Wurfparabel auf S. 16 ist falsch gezeichnet. Auf S. 60 wird die Aufgabe, den Schwingungsmittelpunkt eines physischen Pendels zu finden, als mathematisch nicht lösbar bezeichnet, usw. Lp.

C. de Freycinet. Sur les principes de la mécanique rationnelle. Paris: Gauthier-Villars. VIII u. 169 S. [C. R. **134**, 761-762.]

Der Verf. will sich mit dieser Schrift der neuerdings hervorgetretenen Neigung entgegenstellen, „aus der Mechanik eine fast ausschließlich abstrakte Wissenschaft zu machen“. Er ist also, mit Hertz zu sprechen, ein überzeugter Anhänger der „alten“ Mechanik, der das Band zwischen der Wissenschaft und der physischen Welt mit Hülfe der Ergebnisse der

Erfahrung fest hält. „Der Verf. hat kein Lehrbuch schreiben, sondern darlegen wollen, wie nach seiner Meinung die theoretische Mechanik darzustellen ist, um ihren natürlichen Platz in der wissenschaftlichen Entwicklung einzunehmen und zugleich die Stufe der Strenge und Gewißheit zu erreichen, deren sie fähig ist. Ein ausgedehntes Kapitel ist der Zergliederung der in der Mechanik vorkommenden Grundbegriffe gewidmet, welche Begriffe durch die Beobachtung der elementarsten Erscheinungen erzeugt werden: Geschwindigkeit, Masse, Quantität der Aktion, Arbeit, lebendige Masse oder Kraft, Energie, Schwerpunkt stehen in der ersten Reihe dieser Begriffe. In zweiter Stelle liefert die Prüfung der grundlegenden Gesetze der Bewegung, die völlig aus dem Studium der Natur geschöpft sind, alle für die mathematische Spekulation notwendigen Unterlagen und gestattet sogar, auf einfache Weise und ohne rechnerischen Aufwand zahlreiche Sätze abzuleiten.“ Das vorliegende Buch beseitigt also alle neueren Fragen der theoretischen Mechanik durch Nichtberücksichtigung der geltend gemachten Bedenken und hält denselben Standpunkt fest, den der Verf. in seinem „Essais sur la philosophie des sciences. Analyse. — Mécanique“ (1896) dargelegt hat. Wie bei der Anzeige dieses Werkes in dem Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik Referent nur das stilistische Geschick des Verf. anerkennen konnte, den Mangel des Eingehens auf den gegnerischen Standpunkt sich durch die Unbekanntschaft mit den dort vertretenen Anschauungen erklärte, so kann auch die jetzige Schrift nicht das gesteckte Ziel erreichen, indem sie auf dem rein physikalischen Boden stehen bleibt. Ihr Wert liegt in der von keinem Zweifel beirrten Überzeugung von der Richtigkeit der „alten Mechanik“ und der stilistisch höchst gewandten, populären Darstellung.

Lp.

L. Koenigsberger. Die Prinzipien der Mechanik für mehrere unabhängige Variable. J. für Math. **124**, 202-277.

Ein Auszug aus dieser großen mathematischen Abhandlung ist in Berl. Ber. 1901 veröffentlicht worden; über denselben ist in F. d. M. **32**, 691 referiert. Da jetzt nur die ausführlichen Beweise gegeben werden, deren Wiedergabe sich für ein kurzes Referat nicht eignet, so genügt der Hinweis auf den vorjährigen Bericht. Im übrigen schließt sich die Arbeit auch eng an das ebenfalls im Vorjahre erschienene Buch des Verf. an: „Die Prinzipien der Mechanik. Mathematische Untersuchungen“ (F. d. M. **32**, 691, 1901). Lp.

K. Heun. Über die Hertzsche Mechanik. Berl. Math. Ges. Ber. **1**, 12-16.

Im Hinblick auf die zunehmende Bedeutung der Mechanik gebundener Systeme gibt der Verf. einige Entwicklungen aus den Hertzschen Prinzipien, welche hiermit in der engsten Beziehung stehen. Dadurch soll gezeigt werden, daß Hertz den kinetostatischen Betrachtungen eine wesentlich größere Aufmerksamkeit geschenkt hat, als in den meisten

systematischen Darstellungen der theoretischen Mechanik zu geschehen pflegt, wo der Schwerpunkt allzu einseitig in die Bewegungsgleichungen gelegt wird. Lp.

H. A. Lorentz. Eenige beschouwingen over de grondstellingen der mechanica, naar anleiding van „Die Prinzipien der Mechanik" van Hertz. Amst. Ak. Versl. **10**, 876-896.

In der englischen Ausgabe der Proc. Amst. **4**, 713-732 unter dem Titel: „Some considerations on the principles of dynamics, in connexion with Hertz's Prinzipien der Mechanik" erschienen.

Die Ziele, welche dem berühmten Verf. dieser Abhandlung von eigenartiger Fassung vorschwebten, erhellen aus den folgenden Sätzen der Einleitung: „Es scheint kaum möglich, den großen Vorzug an Knappheit und Klarheit des Ausdrucks anzuzweifeln, der durch die mathematische Form, welche Hertz für seine Aussagen gewählt hat, gewonnen ist. Ich habe daher die Überlegung für ratsam erachtet, wie weit diese Vorzüge noch bestehen bleiben, wenn man unter Absehung von der Hypothese der verborgenen Bewegungen und ohne Abweichung von dem allgemeinen Gebrauch bei dynamischen Forschungen die Bewegung eines Systems nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch als von Kräften beherrscht in die Betrachtung einführt. In dem folgenden ist vieles enthalten, was sich auch in dem Hertzschen Buche befindet. Dies schien notwendig, um den Gegenstand im Zusammenhange darzustellen." Diesem Grundgedanken entsprechend, beginnt die Entwicklung mit der Definition der unendlich kleinen Verrückung ds eines Systems von n Massenpunkten, gerade wie bei Hertz, S. 69. Dann aber werden die Hülfsbegriffe in etwas abweichender Art unter Benutzung der Ausdrücke der Vektorenrechnung entwickelt. Die Länge der Bahn wird als die Summe $\int ds$ definiert, die Krümmung der Bahn durch einen Vektor gemessen, die „geradeste Bahn" als die von geringster Krümmung definiert. Ohne diesen Gedankengang zu verfolgen, den wir nur andeuten, um die Verwandtschaft mit Hertz zu zeigen, erwähnen wir noch, daß der Verf. nach dieser Art zum d'Alembertschen Prinzipe, zum Hamiltonschen und zum Jacobischen Prinzipe gelangt und zuletzt einige bekannte Sätze der Dynamik seiner Darstellung gemäß behandelt. Lp.

G. Combebiac. Les idées de Hertz sur la mécanique. Ens. math. **4**, 247-271.

Eine eingehende Darstellung des Gedankenganges, den Hertz in seinem nachgelassenen Werke über die Prinzipien der Mechanik eingeschlagen hat. Lp.

C. Neumann. Beiträge zur analytischen Mechanik. Zweite und dritte Abhandlung. Leipz. Ber. **54**, 333-339, 340-362.

Die erste Abhandlung dieser Beiträge zur analytischen Mechanik

erschien in Leipz. Ber. **51**, 371-444 (F. d. M. **30**, 635, 1899). Von den beiden vorliegenden Artikeln gibt die „zweite Abhandlung" Erläuterungen zu jener ersten. „Wenn bei einem materiellen System von sogenannten Bedingungsgleichungen oder Bedingungsungleichungen die Rede ist, so versteht man darunter den analytischen Ausdruck derjenigen Beschränkungen, denen die Beweglichkeit des Systems, vermöge seiner von Hause aus gegebenen Konstitution, fortdauernd unterworfen ist. Diese Beschränkungen aber werden, genauer betrachtet, stets herrühren von irgend welchen mehr oder weniger unbekannten Kräften.'" Bei starren Körpern handelt es sich um die Kohäsionskräfte, die normalen Druckkräfte und die tangentialen Reibungskräfte. Dieselben sind uns ihrer eigentlichen Natur nach unbekannt; doch werden wir annehmen dürfen, daß alle diese Kräfte dem allgemeinen Gesetz der Gleichheit der Aktion und Reaktion entsprechen. In den beiden Paragraphen dieser zweiten Abhandlung wird nachgewiesen, daß die Arbeiten der Kohäsionskräfte und der normalen Druckkräfte stets Null sind.

Die „dritte Abhandlung" beschäftigt sich mit dem Gleichgewicht, und zwar werden die Kriterien des Gleichgewichtszustandes aus den in den ersten beiden Teilen entwickelten allgemeinen Vorstellungen abgeleitet. Es sei ein System von Körpern gegeben, die mit den Eigenschaften der Starrheit und Undurchdringlichkeit ausgestattet sind; in dem Innern jedes Körpers seien also Kohäsionskräfte vorhanden, ferner normale Druckkräfte bei gegenseitiger Berührung zweier Körper. Alle sonst noch einwirkenden Kräfte, einschließlich der tangentialen Reibungskräfte, werden als gewöhnliche Kräfte bezeichnet. Als Resultat einer längeren Betrachtung ergibt sich dann das allgemeine Theorem (S. 351): Die ausreichende und notwendige Bedingung dafür, daß das gegebene Körpersystem unter dem Einfluß irgend welcher gewöhnlichen Kräfte A, B, C im Gleichgewicht sei, besteht darin, daß für jedwedes System virtueller Verrückungen δx, δy, δz folgende Formel erfüllt ist:

$$\Sigma(A\,\delta x + B\,\delta y + C\,\delta z) \leqq 0.$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen, wenn alle vorhandenen Beweglichkeitsbeschränkungen durch lauter Gleichungen ausdrückbar sind. Sobald Ungleichungen vorkommen, ist die Ersetzung des Zeichens $\leqq$ durch $=$ unstatthaft. Dieser Umstand wird in einem besonderen Paragraphen eingehend erörtert. Der letzte Paragraph handelt über das relative Gleichgewicht an der Erdoberfläche und gipfelt in einem zu dem obigen Theorem parallel laufenden Satze, bei welchem nur statt im Gleichgewicht zu setzen ist in relativem Gleichgewicht. Lp.

P. Stäckel. De ea mechanicae analyticae parte, quae ad varietates complurium dimensionum spectat. Festschrift der Univ. Klausenb. „Joannis Bolyai in mem." 61-79.

Der Aufsatz gibt eine Übersicht über diejenigen mathematischen Schriften, in denen die Mechanik auf nichteuklidische Räume und auf

Räume von mehr als drei Dimensionen ausgedehnt ist. Als Bestandteil der Festschrift zum Andenken an die hundertste Wiederkehr des Geburtstages von Johann Bolyai beginnt der Aufsatz mit der Betrachtung des Einflusses, den die geometrischen Untersuchungen eines Lobatschefskij und der beiden Bolyai auf die Fortbildung der Begriffe in der Mechanik haben mußte. Die Gedanken, welche dem Vorstellungskreise der mehrdimensionalen Räume angehören, werden auf die allgemeinen Koordinaten der Mécanique analytique von Lagrange zurückgeführt, mit deren Hülfe die Ausdrücke der lebendigen Kraft und der virtuellen Arbeit hergestellt sind. Die dann folgende Aufzählung der Autoren, welche allmählich unter vollem Bewußtsein der von ihnen geschaffenen Begriffserweiterungen die einzelnen Teile der Mechanik für euklidische und für nichteuklidische mehrdimensionale Räume bearbeitet haben, ist bei der Knappheit der Darstellung eines Auszuges nicht gut fähig und muß im Originale nachgelesen werden. Übrigens ist der vom Verf. auf der Naturforscherversammlung in Cassel gehaltene Vortrag: „Bericht über die Mechanik mehrfacher Mannigfaltigkeiten“ eine inhaltlich übereinstimmende Neubearbeitung des vorliegenden Artikels. Lp.

N. J. Hatzidakis. Notes sur la mécanique. Ens. math. 4, 413-417.

1. Über die Kräfte, welche eine Gerade schneiden. Erweiterung der bekannten Formeln für Zentralkräfte auf diesen Fall. 2. Über die Beschleunigungen höherer Ordnungen. Definition derselben in Analogie zu der geometrischen für d^2s/dt^2. Lp.

E. Goedseels. Sur les systèmes au repos absolu. Brux. S. sc. 26 A, 114-116.

Der Verf. nennt so ein System, in welchem das von der Refraktion befreite Licht sich geradlinig bewegt. Mn. (Lp.)

Weitere Literatur.

T. Alexander and A. W. Thompson. Elementary applied mechanics; with numerous diagrams, and a series of graduated examples carefully worked out. London and New York: Macmillan. XX u. 575 S. 8°.

X. Antomari et E. Humbert. Leçons de mécanique à l'usage des candidats à l'École Centrale. Paris: Nony et Cie. 270 S. 8°.

C. Bourlet. Cours de statique, comprenant les éléments de la statique graphique et du calcul des moments d'inertie, à l'usage des élèves architectes et ingénieurs, professé à l'École des beaux-arts. Paris: Naud. 288 S. 8°.

F. Caldarera. Corso di meccanica razionale. Vol. II, Parte 1. Palermo. 108 S. 8°.

E. CAVALLI. Avviamento allo studio della meccanica. Elementi di cinematica teorica. Seconda edizione. Napoli. VIII u. 91 S. 8°.

M. CIURLO. Sul principio dei lavori virtuali; memoria. Genova: Ist. Sordomuti. 9 S. 8°.

N. B. DELAUNAY. Lehrbuch der theoretischen Mechanik. St. Petersburg. 432 S. (Russisch).

S. GURSCHEJEW. Lehrbuch der Mechanik, mit Aufgaben. 5. Auflage. St. Petersburg. 275 S. 8°.

J. H. C. HARRISON. The Roorkee manual of applied mechanics, stability of structures, and the graphic determination of resistance. Vol. II. Roorkee: Thomason Civil Engineering College Press. VIII u. 318 u. 70 S. [Nature 66, 340-341.]

P. HUBER. Katechismus der Mechanik. 7. Auflage, den Fortschritten der Technik entsprechend neu bearbeitet von W. Lange. Leipzig: J. J. Weber. XIV u. 269 S. 12° (Webers illustrierte Katechismen, No. 70).

A. JANSSEN. Cours de mécanique rationnelle. Bruxelles. 352 S. 8°.

A. JAY DU BOIS. The mechanics of engineering. Vol. I.: Kinematics, statics, kinetics, statics of rigid bodies and of elastic solids. XXXIV u. 634 S. Vol. II. Stresses in framed structures and designing. XIII u. 609 S. New York: Wiley and Sons. London: Chapman and Hall. [Nature 66, 265-266.]

J. N. LE CONTE. An elementary treatise on the mechanics of machinery; with special reference to the mechanics of the steam engine. New York: Macmillan. X u. 311 S. 12mo.

M. LÉVY. Éléments de cinématique et de mécanique. Paris. 300 S. 8° (1901).

J. G. MACGREGOR. An elementary treatise on kinematics and dynamics. London and New York: Macmillan. 538 S. 12mo.

E. MACH. The science of mechanics; a critical and historical account of its development. Second enlarged edition. Translated by T. J. McCormack. Chicago: Open Court Publ. Comp. XX u. 605 S. 12mo.

J. OLSHAUSEN. Geschwindigkeiten in der organischen und anorganischen Welt bei Menschen, Tieren, Pflanzen, Maschinen, Fahrzeugen, Geschossen, Gasen, Flüssigkeiten, Wasserläufen, Meeresströmungen, Gletschern, beim Erdboden, der Atmosphäre, bei Himmelskörpern und Naturkräften. Beobachtet, bezw. gesammelt und berechnet und verbunden durch erläuternden Text. Hamburg: Boysen & Maasch. XX u. 488 S. gr. 8°.

E. OVAZZA. Urti ed esplosioni; lezioni di dinamica applicata. Torino: Lattes. 155 S. 8°.

É. PICARD. Une première leçon de dynamique. Nouv. Ann. (4) 2, 1-17.

Vergl. F. d. M. 31, 672, 1900.

W. W. F. PULLEN. Mechanics; theoretical, applied, and experimental. London: Longmans. 390 S. 12mo.

E. RONKAR. Cours de mécanique analytique. Vol. I: Dynamique. Vol. II: Statique et cinématique. Paris. 4° (lithogr.).

E. J. ROUTH. A treatise on analytical statics, with illustrations taken from the theories of electricity and magnetism. Vol. II: Second edition, revised and enlarged. Cambridge: University Press. 390 S. 8°.

F. B. SANBORN. Mechanics-problems, for engineering students. New York: The Engin. News Publ. Comp. 155 S.

N. SCHILLER. Über die Möglichkeit, eine Mechanik der Massen ohne Gebrauch des Hülfsbegriffs der Kraft herzustellen. Kiew. 8 S. 8°.

TH. SCHWARTZE. Dynamische Betrachtungen über mechanische Fundamentalbegriffe. Unterrichtsbl. f. Math. 8, 11-13, 87-90.

SCHWIDTAL. Technische Mechanik, nebst einem Abriß der Festigkeitslehre für Bergschulen und andere technische Lehranstalten. Leipzig: J. Baedeker. VI u. 76 S. gr. 8°.

H. SICARD. Traité de cinématique théorique. Avec des notes de A. Labrousse. Paris: Gauthier-Villars. VIII u. 185 S. 8°.

G. K. SUSLOFF. Grundzüge der analytischen Mechanik. Zwei Bände. XIV u. 543, VIII u. 287 S. Kiew, 1902 (Russisch).

G. K. SUSLOFF. Die grundlegenden Sätze der Dynamik. Kiew. Phys. Rev. 17 S. 8° (Russisch).

Kapitel 2.

Kinematik.

A. SCHOENFLIES und M. GRÜBLER. Kinematik. Encyklop. d. math. Wiss. **4**, Teil 1, S. 190-278 (1902).

Von dieser Behandlung der Kinematik gehört der größte Teil der 31 Paragraphen dem erstgenannten Autor an; Grübler hat nur die §§ 28-30 verfaßt, welche die Theorie der kinematischen Ketten enthalten. Als Verf. der „Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung“ (Leipzig 1886) war Schoenflies für die Bearbeitung dieses Abschnittes besonders gut vorbereitet, und daher hat seine Darstellung auch den Reiz, den nur ein auf diesem Gebiete produktiver Forscher dem Gegenstande geben konnte. In den einzelnen Abschnitten kommen zuerst die endlichen, dann die stetigen Bewegungen zur Besprechung. Danach werden die Mechanismen beschrieben. In einem Anhange wird noch einiges über die Kinematik veränderlicher Systeme beigebracht. Auch dieser Teil der Encyklopädie wird allen, die auf diesem Grenzgebiete zwischen Geometrie, analytischer Mechanik und technischer Mechanik arbeiten, vortreffliche Dienste leisten. Lp.

R. de Saussure. Théorie géométrique du mouvement des corps (solides et fluides). Arch. sc. phys. et nat. (4) **18**, 425-461; **14**, 14-41, 209-231.

Die Arbeiten des Verf. bewegen sich in einer eigentümlichen Richtung. Ihrem Wesen nach sind sie rein geometrisch; indem aber für die geometrischen Beziehungen Analogien in der Dynamik aufgesucht werden, ohne daß der innere Zusammenhang klargelegt wird, entstehen Sätze, die für die Beschreibung der Vorgänge in der Bewegungslehre dienen können. Am nächsten verwandt sind diese Betrachtungen mit der geometrischen Kinematik, entfernen sich aber von der üblichen Darstellung durch eine neue Nomenklatur und Systematik. Aus diesen Gründen ist in diesen Berichten bisher nur wenig über die Schriften des Verf. gesagt worden. Die Abhandlung „Cinématique des fluides“ in Arch. sc. phys. et nat. (4) **5**, 497-503, 1898 ist nur mit dem Titel angeführt worden, dagegen ist über eine Note in C. R. **126**, 325-328: „Sur la géométrie des champs magnétiques etc.“ so referiert worden, daß die Eigenart dieser Forschungen aus dem Berichte erhellt (F. d. M. **29**, 751, 1898). Die vorliegende Arbeit ist als Fortsetzung der „Cinématique des fluides“ zu betrachten und ist in dem gegenwärtigen Hefte nicht abgeschlossen. Das allein abgedruckte erste Kapitel gibt eine Definition dessen, was der Verf. unter „Translation“ und „Rotation“ bei einer ebenen Bewegung versteht.

In der Ebene sei eine Kurve G_0 gegeben und eine Figur F_0. Man nehme auf G_0 einen Punkt a_0 an und konstruiere für ihn als inneren Ähnlichkeitspunkt die zu F_0 kongruente Figur F. Wiederholt man diese Konstruktion für alle Punkte von G_0, so erhält man jedem Punkte von G_0 entsprechend eine neue Lage von F. Man kann also sagen, F führe eine Bewegung aus; dieselbe wird „Translation“ benannt und kann durch das Gleiten einer Kurve G, die zu G_0 kongruent ist und durch Umklappen von G_0 um eine ihrer Tangenten entsteht, auf der Kurve G_0 bei fortwährender Vereinigung entsprechender Punkte bewerkstelligt werden. Ist G_0 eine Gerade, so erhält man die Translation im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Die Translationen werden nach der Natur der Kurve in solche verschiedener Ordnungen geteilt. Konstruiert man zu F_0 in bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene als inneren Ähnlichkeitspunkt alle kongruenten Figuren F'_0, so überdecken die F'_0 die ganze Ebene und die zugehörigen F führen eine „Translation mit zwei Parametern“ aus (§ 1).

Nimmt man wieder eine feste Kurve Γ_0 und konstruiert zu F_0 die Spiegelbilder F in den Tangenten von Γ_0, so sagt der Verf., die Spiegelbilder F führen eine „Rotation“ aus. Dieser Begriff stimmt mit dem allgemein üblichen überein, wenn Γ_0 ein Punkt ist, die Tangenten von Γ_0 also den Strahlenbüschel durch den Punkt bilden. Entsprechend wird die „zweiparametrige Rotation“ durch die Spiegelbilder von F_0 gegen sämtliche Geraden der Ebene ausgeführt (§ 2). Das Rollen einer Kurve Γ, die durch Umklappung von Γ_0 um eine ihrer Tangenten entsteht, auf Γ_0 erzeugt die „Rotation“ im Sinne des Verfassers.

NEUIGKEITEN aus dem Verlage GEORG REIMER in BERLIN.

Biographisches Jahrbuch und Deutscher Nekrolog. Herausgegeben von Dr. ANTON BETTELHEIM. Sechster Band. Mit einem Bildnis von ARNOLD BÖCKLIN in Heliogravüre. Geheftet Mark 12.—, Halbfranz gebunden Mark 14.—.

Politische Porträts. Von Dr. THEODOR BARTH. Geheftet Mark 2.—, gebunden Mark 2.80.

Hermann Kurz. Ein deutscher Volksdichter. Von Prof. Dr. E. SULGER-GEBING. Eine Charakteristik. Nebst einer Bibliographie seiner Schriften und mit einem Bildnis des Dichters. Geheftet Mark 1.20.

Die Grundlagen der Hebbelschen Tragödie. Von Dr. FRANZ ZINKERNAGEL. Geheftet Mark 3.—.

Shakespearedramen (Romeo und Julia, Othello, Lear, Macbeth). Nachgelassene Übersetzungen von OTTO GILDEMEISTER. Herausgegeben von Dr. H. SPIES. Geheftet Mark 7.—, Halbfranz gebunden Mark 9.—.

Bismarcks Bildung, ihre Quellen und ihre Äußerungen. Von Prof. Dr. HANS PRUTZ. Geheftet Mark 3.—, gebunden Mark 3.80.

Deutschland und die große Politik anno 1903. Von Prof. Dr. TH. SCHIEMANN. Mit ausführlichem Personen- und Sachregister. Geheftet Mark 6.—, gebunden Mark 7.—.

Geschichte Rußlands unter Kaiser Nikolaus I. Von Prof. Dr. TH. SCHIEMANN. Band I: Kaiser Alexander I. und die Ergebnisse seiner Lebensarbeit. Geheftet Mark 14.—, Halbfranz gebunden Mark 16.—.

Jugendlehre. Ein Buch für Eltern, Lehrer und Geistliche. Von Dr. FR. W. FOERSTER. Geheftet Mark 5.—, gebunden Mark 6.—.

Lebenskunde. Ein Buch für Knaben und Mädchen. Von Dr. FR. W. FOERSTER. Gebunden Mark 3.—.

Zukunftspädagogik. Utopien, Ideale, Möglichkeiten. Von Prof. Dr. WILHELM MÜNCH. Geheftet Mark 4.—, gebunden Mark 4.80.

Philosophische Propädeutik auf naturwissenschaftlicher Grundlage für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Von Direktor Dr. AUGUST SCHULTE-TIGGES. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Preis geheftet Mark 3.—, gebunden Mark 3.80.

Das Zeitalter des Sonnengottes. Von LEO FROBENIUS. Band I. Geheftet M. 8.—.

GEORG REIMER  BERLIN W. 35.
VERLAGSBUCHHANDLUNG LÜTZOWSTRASSE 107-8.

Die einzigen
absolut fehlerfreien
also zuverlässigen
sind

A. L. Crelles Rechentafeln

welche alles Multiplizieren und Dividieren **mit Zahlen unter 1000** ganz ersparen, bei größeren Zahlen die Rechnung erleichtern und sicherer machen.

9. Auflage.

Preis solid in Ganzleinen gebunden M. 15.—.

Crelles Rechentafeln stehen durch ihr absolutes Freisein von Fehlern allen späteren Nachahmungen ebenso sehr voran wie durch ihre klassische Einfachheit, den anderwärts unerreichten Reichtum fertiger Produkte und die leichteste und uneingeschränkte Anwendungsfähigkeit.

Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik

Vom Crelleschen Journal habe ich einige wenige Exemplare durch Nachdruck ergänzt und offeriere die Serie

Band 1—100 brosch. für M. 1600.—.

Der angewandte Nachdruck besteht in einem unmittelbaren Übertragen des Originaldrucks mit absoluter Treue auf einen lithogr. Stein, von welchem mit Steindruckfarbe — wie bei der Lithographie — die Abdrücke genommen werden, so daß eine Beschädigung des benutzten Papieres bei diesem Nachdruckverfahren völlig ausgeschlossen ist. Dieser Druck steht daher dem Typendruck durchaus nicht nach; es erhöht sich sogar noch die Haltbarkeit der nachgedruckten Exemplare durch die verwendete bessere Druckfarbe.

Jede Buchhandlung ist in den Stand gesetzt zu obigem Preise zu liefern.

Einzelne Bände der Serie 1—100 können nicht abgegeben werden.

Von Band 101 bis 127 stehen einzelne Bände à M. 12.— zu Diensten.

MAY 11 1905

Jahrbuch
über die
Fortschritte der Mathematik

begründet
von
Carl Ohrtmann.

Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung der Herren Felix Müller und Albert Wangerin sowie der Berliner Mathematischen Gesellschaft

herausgegeben
von
Emil Lampe.

Band 33. Jahrgang 1902.
(In 3 Heften.)
Heft 3.



Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1905.

Bogen 46 bis Schluß.

Hierzu Beilagen von Mayer & Müller, Verlagsbuchhandlung in Berlin, Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig und Schubert & Salzer, Maschinenfabrik Akt.-Ges. in Chemnitz.

Zur Anwendung dieser Begriffe und der aus ihnen folgenden geometrischen Sätze auf die Bewegungen der Flüssigkeiten führt der Verf. für die Rotation im gewöhnlichen Sinne den Begriff des „Kranzes" (couronne) ein: ein Kreis mit allen vom Kreise ausgehenden Tangenten, die alle nach einer bestimmten Drehrichtung einseitig gezogen sind. Der „Kranz" wird zum „Kranzgebilde" (couronnoïde), bestehend aus den Spiegelbildern des Kranzes gegen alle Geraden der Ebene, wenn man zweiparametrige Rotationen betrachtet. Die hierbei auftretenden Figuren sollen Flüssigkeitsbewegungen veranschaulichen (§ 3). Der letzte Paragraph des vorliegenden Teiles der Arbeit macht dann einige Anwendungen der Theorie auf die Bewegung einer ebenen Figur von veränderlicher Größe, wobei die zweiparametrige Rotation R_1^2 hauptsächlich benutzt wird.

Die „Kränze" und „Kranzgebilde" hat der Verf. bereits in zwei Noten der C. R. **133**, 1193-1195 und 1283-1285 behandelt (F. d. M. **32**, 700, 1901). Man vergleiche auch seinen „Calcul géométrique réglé" (American J. **19**, 329-370; F. d. M. **28**, 499, 1897). Lp.

K. Th. Vahlen. Über Bewegungen und komplexe Zahlen. Math. Ann. **55**, 585-593.

Die von Lipschitz zur Darstellung der „Drehungen" im R_n eingeführten komplexen Zahlen (F. d. M. **12**, 303, 1880) eignen sich, wie Study gezeigt hat, auch zur Darstellung der Bewegungen in der Ebene und im Raume. Der Verf. dehnt diese Anwendung unter Benutzung linearer gebrochener Substitutionen auf die allgemeinen parabolischen, die elliptischen und die hyperbolischen Räume aus. Dem Ausgangspunkte entsprechend kommen die Begriffe der Quaternionentheorie zur Verwendung. Schg.

F. Kraft. Équivalence des rotations autour d'axes parallèles et des translations d'un système invariable. Ens. math. **4**, 175-200.

Der Verf. beabsichtigt in dieser Arbeit zu zeigen, wie vorteilhaft sich die Behandlung kinematischer Probleme gestaltet, wenn die üblichen Methoden, wie sie z. B. für den im Titel genannten Gegenstand von Appell und Schell angewendet worden sind, durch die Graßmannschen Methoden ersetzt werden. Der Vorteil besteht, wie immer in solchen Fällen, in erheblichen Abkürzungen der Rechnung und dem dadurch erzielten Gewinn an Durchsichtigkeit. Formal schließt sich die Arbeit an Fehrs Buch „Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la géométrie infinitésimale" an (F. d. M. **30**, 534, 1899). Der Reihe nach werden behandelt: Die Rotation eines unveränderlichen Punktsystems um eine feste Achse und einen bestimmten Winkel, sukzessive Drehung um zwei parallele Achsen, sukzessive Drehung um eine Achse und Verschiebung erstens parallel, zweitens nicht parallel mit derselben. Im Anschluß an jeden Abschnitt wird der Fall einer unendlich kleinen Drehung, bezw. Verschiebung erörtert. Schg.

F. Kraft. Équivalence du mouvement d'une ligne droite invariable σ au déplacement d'une position donnée σ_1 à une autre position donnée σ_2. Ens. math. 4, 347-372.

Diese Arbeit behandelt den Übergang einer Geraden und ihrer Punkte im Raume aus einer Stellung in eine andere mit demselben Zweck und denselben Mitteln wie die vorher besprochene die Bewegung eines Punktsystems. Es wird zuerst die Bewegung einer begrenzten Strecke und ihrer Endpunkte, sodann die einer Geraden und eines beliebigen Punktes derselben betrachtet. Weiter wird der kürzeste Abstand zwischen Anfangs- und Endstellung der Geraden bestimmt, die Bewegung der Geraden in eine Verschiebung und eine Drehung zerlegt, die Äquivalenz dieser Bewegung mit einer Drehung um eine mit der ersten parallele Achse und einer Verschiebung parallel zu derselben gezeigt, die Schraubenfläche als einfachster Weg der Geraden gefunden und derjenige ihrer Punkte bestimmt, welcher die kleinste Ortsveränderung erleidet. Die unendlich kleinen Bewegungen werden in derselben Weise berücksichtigt wie in der vorher besprochenen Arbeit. Schg.

G. O. James. Note on the projections of the absolute acceleration in relative motion. American M. S. Bull. (2) 9, 143-147.

Die Frage ist nach bekannten Methoden rein analytisch behandelt. Dasselbe Verfahren wird dann dazu benutzt, die betreffenden Größen für den Raum von n Dimensionen zu berechnen. Lp.

Ch. Méray. Sur le déplacement d'une figure solide. Nouv. Ann. (4) 2, 17-25.

Verf. bemängelt die üblichen Beweise für den Satz, daß jede Verrückung eines starren Körpers durch eine Translation und eine Rotation nach einander ersetzt werden kann, wobei die Richtung und Achse derselben parallel sind (falls ihre Amplituden nicht verschwinden). Er gibt deshalb ein elementares und nach seiner Ansicht direkteres und anschaulicheres Beweisverfahren, nach welchem die nötigen Größen zugleich konstruiert werden können. Lp.

Reinh. Müller. Zur Lehre von der Momentanbewegung eines starren ebenen Systems: Eine Eigenschaft der Burmesterschen Punkte. Zs. f. Math. u. Phys. 48, 220-223.

In jeder Lage eines komplan bewegten starren ebenen Systems gibt es vier Punkte, welche augenblicklich Bahnstellen mit fünfpunktig berührendem Krümmungskreis durchschreiten, die sogenannten Burmesterschen Punkte. Der Verf. beweist den Satz: „Wenn in einer Systemlage drei der Burmesterschen Punkte sechspunktig berührende Krümmungs-

kreise haben, so gilt dasselbe notwendig auch vom vierten dieser Punkte". Ist nun *AB* das feste Glied eines Gelenkvierecks mit den Seiten *A*A, *B*B, die von *AB* ausgehen, so mögen sich *A*A und *B*B in 𝔓, *AB* und AB in ℌ schneiden. Bringt man die Glieder eines Gelenkvierecks in eine solche Lage, daß 𝔓ℌ mit *A*A und *B*B gleiche Winkel einschließt, so beschreibt bei der Momentanbewegung, die irgend eines der vier Glieder in bezug auf das gegenüberliegende ausführt, jeder der Burmesterschen Punkte eine Bahnstelle mit sechspunktig berührendem Krümmungskreis. Lp.

F. P. Ruffini. Delle accelerazioni di alcuni punti nel moto di un sistema rigido con un punto fisso. Bologna Rend. 1902-03. 8 S.

Der Ort der Punkte, welche zu einer gegebenen Zeit numerisch gleiche Beschleunigungen haben, ist ein Ellipsoid. Der Ort der Punkte, deren Beschleunigungen nach dem festen Punkte gerichtet sind, besteht aus vier durch diesen Punkt gehenden Geraden. Vi.

G. Koenigs. Sur l'assemblage de deux corps. C. R. **135**, 343-346.

Als ein Beispiel für die Definition eines Mechanismus, die der Verf. in vorangehenden Artikeln begründet hat (vergl. F. d. M. **32**, 702, 1902), daß nämlich „die Theorie der Mechanismen nichts anderes ist als das Studium der Verbindungen in den Maschinen", wird in dem vorliegenden Aufsatze der Verband („assemblage") zweier Körper behandelt. Zwei Körper heißen verbunden (assemblés), wenn das binäre System, das sie bilden, eine Freiheit Null hat. Hierbei braucht man nicht an eine starre Verbindung durch Löten, Nieten usw. zu denken. Man hat so viele Berührungspunkte zwischen den beiden Körpern herzustellen, daß sie gegen jede relative Verrückung gesichert sind. Die Berührungspunkte können über eine endliche Fläche, oder über eine Linie verteilt sein, oder auch isoliert liegen. Diese Fälle werden einzeln besprochen. Die Anzahl isolierter Punkte muß sechs sein; doch dürfen die sechs Normalen dieser Punkte zu den sich berührenden Flächen nicht einem linearen Komplexe angehören. Überhaupt läßt jedes Verbandpaar monokinetische Verrückungen zu. Lp.

L. Bickart. Rotations dans un plan. Revue de Math. spéc. **12**, 569-574.

Eine Strecke am drehe sich um einen Winkel φ, und auf der erhaltenen Halbgeraden werde eine Strecke $am' = \alpha \cdot am$ abgetragen. Sind a, b die Koordinaten von a, x, y diejenigen von m und x', y' diejenigen von m', und setzt man

$$u = x + iy,\quad v = x - iy,\quad u' = x' + iy',\quad v' = x' - iy',$$
$$p = a + ib,\quad q = a - ib,\quad h = \alpha \cdot e^{i\varphi},\quad k = \alpha \,.\, e^{-i\varphi},$$

so ergeben sich die Gleichungen:

$$u' = hu + (1 - h)p, \quad v' = kv + (1 - k)q,$$

aus denen man die Koordinaten von m' bestimmen kann.

Läßt man einen Punkt $m_0 (u_0\ v_0)$ der Reihe nach derartige Drehungen um n Punkte $a_1 (p_1\ q_1)$, $a_2 (p_2\ q_2), \ldots, a_n (p_n\ q_n)$ mit den Rotationskonstanten h_1 und k_1, h_2 und $k_2, \ldots, h_n$ und k_n ausführen, so gelangt m_0 in die Lage eines Punktes m_n, dessen Koordinaten sich aus folgenden Gleichungen ergeben:

$$u_n = (h_1 . h_2 \ldots h_n) u_0 + (h_2 \ldots h_n)(1 - h_1) p_1 + (h_3 \ldots h_n)(1 - h_2) p_2$$
$$+ \cdots + h_n (1 - h_{n-1}) p_{n-1} + (1 - h_n) p_n,$$
$$v_n = (k_1\ k_2 \ldots k_n) v_0 + \cdots.$$

Eine solche Reihe von n Drehungen läßt sich immer zu einer einzigen zusammensetzen, deren Charakteristiken

$$A = \alpha_1 . \alpha_2 \ldots \alpha_n \quad \text{und} \quad \Phi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n$$

sind.

Man erhält eine kontinuierliche Bewegung des Punktes m, wenn man annimmt, daß $a_1, a_2, \ldots$ aufeinanderfolgende Punkte einer Kurve, der Basis, seien, und α und φ einer gesetzmäßigen, stetigen Änderung unterwirft. Jedem Punkte a der Basis entspricht dann ein bestimmter Punkt m. Die so erhaltenen Punkte m erfüllen wieder eine stetige Kurve. Läßt man das Zentrum der Rotation auf der Basis, von einem Anfangspunkte a_0 ausgehend, sich bis zu einem bestimmten Punkte a bewegen, so durchläuft m ein bestimmtes Kurvenstück $m_0 m$. Auch hier läßt sich die stetige Folge der Drehungen um die Punkte der Basis durch eine einzige Rotation um einen bestimmten Punkt ersetzen, dessen Koordinaten ebenso wie diejenigen von m durch Integration ermittelt werden können. Die Bestimmung der vom Punkte m durchlaufenen Kurve wird an zwei Beispielen durchgeführt. Zch.

L. Burmester. Kinematisch-geometrische Theorie der Bewegung der affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren räumlichen oder ebenen Systeme. Zweiter Teil. Zs. f. Math. u. Phys. **47**, 128-156.

Über den ersten Teil dieser Abhandlung, die in derselben Zeitschrift **23**, 108-131 erschienen ist, vergleiche man F. d. M. **10**, 587, 1878. In diesem zweiten Teile werden hauptsächlich die Nullsysteme behandelt, welche mit der Bewegung der im Titel genannten Systeme im Zusammenhange stehen und zur weiteren Erkenntnis der Bewegungsvorgänge derselben führen. Daher gehört ein großer Teil der Untersuchung, besonders der Anfang der Abhandlung, der Liniengeometrie an. So wird gleich am Ende der dritten Seite das „Richtnullsystem“ durch den Satz definiert: „Bei zwei affinen räumlichen Systemen bilden die Punkte des einen Systems und die Ebenen, welche in diesen Punkten senkrecht stehen

auf den zugehörigen Verbindungsgeraden der homologen Punkte, ein Nullsystem." Dasselbe wird „Richtnullsystem" genannt. Nach der Ableitung der wichtigsten Eigenschaften des Richtnullsystems, die sich aus den konjektiven reziproken Bündeln und den affinen räumlichen Systemen ergeben haben, wird dann die momentane Bewegung des affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren räumlichen Systems betrachtet. Die Wiedergabe der durch kursiven Druck hervorgehobenen 21 Sätze ist nicht angängig. Die Untersuchung erhält eine physikalische Bedeutung, weil die in der Kristallographie definierte homogene Deformation der Kristalle, die durch Wärme oder durch andere Ursachen bewirkt wird, eine affine Veränderung ist. Lp.

J. Cardinaal. Over de beweging van veranderlijke stelsels. Amst. Ak. Versl. **10**, 560-566, 687-691.

J. Cardinaal. Over de afbeelding van de beweging van veranderlijke stelsels. Amst. Ak. Versl. **11**, 466-471.

Die Bewegung von Systemen, die sich projektiv ändern, wird untersucht, zuerst, indem nur die Richtungen der Geschwindigkeiten der Punkte benutzt werden, nachher unter der Annahme, daß diese Geschwindigkeiten nach Größe und nach Richtung bekannt sind. In dem ersten Teile werden die Haupteigenschaften der Fokalsysteme als bekannt vorausgesetzt. Beide Teile behandeln die drei Hauptfälle des augenblicklichen Tetraeders der Koinzidenzpunkte. In dem ersten Teile bildet die Konstruktion der Richtung der Geschwindigkeit den Hauptgegenstand der Untersuchung, ohne daß die Größe der Geschwindigkeit in Betracht gezogen wird. In dem zweiten Teile dagegen werden Beziehungen abgeleitet, in denen diese Größe auftritt. Die Natur der Verwandtschaft zwischen den Systempunkten und den Endpunkten der von ihnen aus abgetragenen Vektoren der Geschwindigkeit wird ermittelt. Die Ergebnisse stellen einen Zusammenhang her zwischen den bezüglichen Untersuchungen von Schoenflies (Geometrie der Bewegung. F. d. M. **19**, 880, 1887) und Burmester (Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung gesetzmäßig-veränderlicher Systeme. F. d. M. **7**, 535, 1875; vergl. auch das vorstehende Referat).

Die zweite Abhandlung beschäftigt sich mit der geometrischen Abbildung dieser Bewegung nach dem Vorgange von R. Sturm (Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie, **1**, 257; F. d. M. **24**, 609, 1892). Die Entwicklungen beziehen sich hauptsächlich auf den tetraedralen Komplex der Geschwindigkeitsrichtungen der in Bewegung befindlichen Punkte und auf das entsprechende Fokalsystem, gebildet aus den Normalen zu den Bahnen der Systempunkte, zuerst in dem Falle eines unveränderlichen Systems in Bewegung, danach in dem Falle eines projektiv veränderlichen Systems. Zuletzt kommen die Kongruenz (2, 2), welche die Abbildung des Zusammenhanges des Fokalsystems und des tetraedralen Komplexes vermittelt, und besondere Fälle zur Erörterung. Lp.

P. Somoff. Über Scharniermechanismen mit veränderlichen Elementen. Warschau Univ. Nachrichten, 8, 1-43 (Russisch).

In dieser Arbeit werden zwei Arten ebener Systeme behandelt: 1. solche Systeme, welche man durch Vereinigung zweier Punkte eines ähnlich-veränderlichen Systems mit zwei Seiten eines Scharniervierecks erhält, dessen eine Seite unbeweglich ist, 2. solche Systeme, welche man durch Vereinigung dreier Punkte eines homogen-veränderlichen Systems mit drei Seiten des erwähnten Scharniervierecks erhält.

Der Autor untersucht die Gleichungen der Kurven σ, welche durch die Punkte der erwähnten Systeme beschrieben werden, und zieht einige interessante praktische Folgerungen, wie z. B. die Behandlung der Fälle, in denen Kreisbahnen entstehen. Jk.

R. F. Muirhead. Note on the theory of the rolling of one rigid surface on another. Edinb. M. S. Proc. 20, 8-10.

Zuerst wird gezeigt, daß für eine Oberfläche, welche ohne Drehbewegung auf einer Ebene rollt, die Spur auf der Oberfläche oder auf der Ebene zur Tangente den Durchmesser der Indicatrix hat, der zur augenblicklichen Rollachse konjugiert ist. Für eine Oberfläche, die ohne Drehbewegung auf einer anderen rollt, ist dagegen die Richtung der Spur diejenige, welche zu der Rollachse in dem Kegel konjugiert ist, dessen Asymptoten die gemeinschaftlichen Durchmesser der beiden Indicatrices in dem Berührungspunkte sind. Diese Ergebnisse werden auf den Fall des gleichzeitigen Rollens und Drehens oder auch noch des Gleitens ausgedehnt. Gbs. (Lp.)

N. Joukowsky. Über die Bewegung materieller pseudosphärischer Figuren auf der Oberfläche einer Pseudosphäre. Moskau. Phys. Sect. 11, Lieferung 2, 1-22 (Russisch).

In der Voraussetzung, daß eine materielle pseudosphärische Platte, welche sich ganz leicht biegen läßt, auf die Oberfläche einer unbeweglichen Pseudosphäre gelegt wird, die sie nicht verlassen kann, untersucht der Autor das Problem der Bewegung dieser Platte, falls keine äußeren Kräfte einwirken. Zuerst wird der kinematische Teil dieser Aufgabe betrachtet.

Der Autor stellt sich drei pseudosphärische Rotationsflächen vor, für welche die Linienelemente ds durch folgende drei Formeln entsprechend ausgedrückt werden:

$$ds^2 = r^2\left[dp^2 + \left(\frac{e^p - e^{-p}}{2}\right) dq^2\right],$$

$$ds^2 = r^2\left[dp^2 + \left(\frac{e^p + e^{-p}}{2}\right) dq^2\right],$$

$$ds^2 = r^2\left[dp^2 + e^{-2p}\, dq^2\right],$$

wobei als Meridiane die geodätischen Linien $q =$ const. angenommen sind.

Sodann nimmt der Autor an, daß eine materielle pseudosphärische Platte auf je eine dieser drei Flächen gelegt und in eine Rotationsbewegung um die Achse der Fläche gebracht wird. Hierauf legt er die Oberflächen dieser Pseudosphären nebst der Platte in irgend einer Weise auf eine unbewegliche Pseudosphäre und überträgt so auf diese die schon oben betrachteten einfachen Bewegungen der Platte.

Die im ersten Falle entstehende Bewegung der Platte auf der unbeweglichen Pseudosphäre nennt der Autor „Rotationsbewegung" der pseudosphärischen Figur. Dabei bleibt ein Punkt $p = 0$ der pseudosphärischen Figur unbeweglich; alle übrigen Punkte beschreiben um diesen unbeweglichen Punkt geodätische Kreise ($p = \text{const.}$). Die im zweiten Falle entstehende Bewegung nennt der Autor „Translationsbewegung" der pseudosphärischen Figur. Dabei bewegen sich alle auf einer geodätischen Linie (diese Linie nennt der Autor „Richtlinie" der Translationsbewegung) liegenden Punkte längs dieser Linie, alle übrigen Punkte der Figur längs der dieser geodätischen Linie parallelen Linien ($p = \text{const.}$).

Die im dritten Falle erzeugte Bewegung stellt eine Rotationsbewegung um einen unendlich entfernten Pol dar, oder eine Translationsbewegung mit einer unendlich entfernten Richtlinie.

Indem der Autor nun zum dynamischen Teil des Problems übergeht, zeigt er, daß man auf jeder materiellen pseudosphärischen Figur einen Punkt und zwei durch diesen gehende geodätische Linien finden kann, die dem Trägheitszentrum und den Trägheitsachsen einer materiellen ebenen Figur analog sind. Die Trägheitsachsen der materiellen pseudosphärischen Figur werden auf folgende Weise gefunden: Der Autor betrachtet eine Summe

$$J_1 = \Sigma m \sinh^2\left(\frac{\xi}{r}\right),$$

wo m die Masse der materiellen Punkte der pseudosphärischen Figur, ξ die geodätische Entfernung dieser Punkte von einer geodätischen Linie ist, und sucht die Richtung dieser geodätischen Linie unter der Bedingung: $\delta(J_1) = 0$. Es erweist sich, daß es nur zwei zu einander senkrechte geodätische Linien gibt, die dieser Bedingung genügen. Diese geodätischen Linien werden „Trägheitsachsen" der materiellen pseudosphärischen Figur genannt und der Schnittpunkt dieser Linien das „Trägheitszentrum" der materiellen pseudosphärischen Figur.

Ohne Einwirkung von Kräften kann eine materielle pseudosphärische Figur eine permanente rotierende Bewegung um ihr Trägheitszentrum und auch eine permanente Translationsbewegung längs einer ihrer Trägheitsachsen haben. Die letztere Bewegung erhält man infolge der Einwirkung einer impulsiven Kraft, welche die Richtung der Trägheitsachse hat. Bei Einwirkung einer anderen impulsiven Kraft bekommt die materielle pseudosphärische Figur eine kompliziertere Bewegung. Um diese Bewegung zu interpretieren, zieht der Autor auf der unbeweglichen Pseudosphäre eine geodätische Linie in der Richtung der impulsiven Kraft und sucht auf der beweglichen pseudosphärischen Figur eine Kurve, welche

von dieser geodätischen Linie umhüllt wird. Zu diesem Zwecke ersetze man die impulsive Kraft: 1. durch zwei Kräfte R und R_1, welche nach den Trägheitsachsen OX, OY der materiellen pseudosphärischen Figur gerichtet sind, und 2. durch ein Kräftepaar mit dem Momente L. Alsdann wird die lebendige Kraft der materiellen pseudosphärischen Figur durch die Formel ausgdrückt:

$$T = \frac{r^2}{2}(bR^2 + aR_1^2 + cL^2)$$

und gesetzt:

$$y = \sinh\left(\frac{\varrho}{r}\right)\sin\varphi, \quad x = \sinh\left(\frac{\varrho}{r}\right)\cos\varphi,$$

wo ϱ die geodätische Entfernung des betrachteten Punktes der Figur von O, φ der Winkel zwischen den geodätischen Linien ϱ und OX ist.

Darauf wird die gesuchte umhüllende Kurve durch folgende Gleichung ausgedrückt gefunden:

$$\frac{y^2}{\mu} - x^2 = \frac{a-b}{a+c+\mu(b+c)},$$

wo μ eine willkürliche Konstante ist. Wenn die umhüllende Kurve bestimmt ist, dann stellt sich die ganze Bewegung der materiellen pseudosphärischen Figur in folgender Weise dar:

Die Bewegung der Figur setzt sich zusammen aus 1. einer Translationsbewegung längs der nach der impulsiven Kraft gerichteten geodätischen Linie, 2. einer rollenden Bewegung, indem die umhüllende Kurve ohne Gleiten auf der erwähnten geodätischen Linie rollt. Jk.

F. Klein. Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball. Zs. f. Math. u. Phys. 47, 237-265.

Aus Veranlassung des Erscheinens von Balls Treatise on the theory of screws (vgl. F. d. M. **31**, 679, 1900) gibt der Verf. der vorliegenden Abhandlung einige Ergänzungen zu diesem Werke. Dieselben betreffen erstlich die allgemeine Systematik des Gebietes im Sinne moderner invariantentheoretischer (oder gruppentheoretischer) Prinzipien, zweitens aber die Verwendung der Schraubentheorie in der Lehre von den endlichen Bewegungen starrer Körper, wobei in der Hauptsache nur systematisch zusammengestellt wird, was in der Literatur zerstreut vorliegt. Der Verf. bemerkt, daß er die betreffenden Überlegungen seit Jahren in Vorlesungen und gelegentlichen Vorträgen wiederholt zur Geltung gebracht hat. Speziell knüpft er mit den Darlegungen an seine eigenen Beiträge zur Liniengeometrie und Schraubentheorie aus den Jahren 1869 und 1871, sowie an die Auseinandersetzung seines Erlanger Programms von 1872 an. Indem er sich von vornherein der Methoden der analytischen Geometrie bedient, meint er, dadurch die in Betracht kommenden Beziehungen kürzer und präziser bezeichnen zu können, als dies auf andere Weise möglich

wäre. § 1. Von der rationellen Klassifikation geometrischer und mechanischer Größen. § 2. Koordinaten für die unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers, sowie für die an ihm angreifenden Kraftsysteme. § 3. Die Analogie der unendlich kleinen Bewegungen und der Kräftesysteme (beim starren Körper). Schraubengrößen der ersten und zweiten Art. Ballsche Schrauben. § 4. Über die Invarianten der Schraubengrößen und die Begründung der Artunterscheidung aus dem Arbeitsbegriff. § 5. Gruppentheoretische Charakterisierung der verschiedenen Arten von Schraubentheorie. § 6. Lineare Schraubensysteme. § 7. Übergang zur Kinetik. Unterscheidung holonomer und nicht holonomer Differentialausdrücke, bezw. Differentialbedingungen. § 8. Über die Verwendung der Geschwindigkeitskoordinaten p, q, r in der Kinetik des starren Körpers mit festem Punkt. § 9. Fortsetzung. Fälle, wo die p, q, r wie Lagrangesche Geschwindigkeitskoordinaten gebraucht werden können. § 10. Verwendung der Schraubenkoordinaten für die allgemeine Kinetik der starren Körper. § 11. Spezielle Ausführungen zu den Entwicklungen des vorigen Paragraphen. § 12. Abschließende Bemerkungen über die mechanischen Kapitel des Ballschen Werkes. — Verallgemeinerungen des in § 7 und § 9 gegebenen Ansatzes.

Lp.

Ch. J. Joly. Representation of screws by weighted points. Dublin Trans. 32 A, 61-92.

Der Zweck dieser Veröffentlichung kann vielleicht am besten durch Wiedergabe von Stellen aus der Einleitung erläutert werden. Nach einem Hinweise auf Henricis Skizze der Abbildung von Schrauben durch Punkte in einem nichteuklidischen Raume von fünf Dimensionen (Nature **42**, 127-132; F. d. M. **22**, 919, 1890) fährt der Verf. fort: „Es ist jedoch wünschenswert, mit Schraubungen (twists) und Dynamen (wrenches) ebenso zu verfahren wie mit Schrauben, und zu diesem Zwecke wird noch eine Variable erforderlich, welche über die von der Geometrie des fünfdimensionalen Raumes abhängigen hinausgeht. Diese Variable kann als ein Gewicht oder eine Masse, verbindbar mit jedem Punkte, angesehen werden; während also der Punkt eine Schraube darstellt, bedeuten das Gewicht und der Punkt zusammen eine Schraubung oder Dyname auf jener Schraube, die mit der variablen Belastung variabel ist. Es ist natürlich, daß man es versucht, die Resultante einer beliebigen Anzahl von Schraubungen oder Dynamen durch den Massenmittelpunkt ihrer mit der Summe ihrer Gewichte belasteten darstellenden Punkte darzustellen. Dies verursacht keine Schwierigkeit. Indessen muß beachtet werden, daß wir die Intensität oder Amplitude nicht als durch die Summe der Gewichte dargestellt annehmen dürfen, ohne auf die Lage des darstellenden Punktes Rücksicht zu nehmen. Denn die Addition von Gewichten ist distributiv; die Intensität der Resultante einer Anzahl von Dynamen dagegen ist nicht allgemein gleich der Summe der Intensitäten. Wir werden finden, daß man die Lage des darstellenden Punktes in bezug auf eine gewisse Quadrifläche zu berücksichtigen hat. Bei dieser Erörterung sind

die Beziehungen des darstellenden Punktes zu zwei Quadriflächen von hervorragender Wichtigkeit. Henrici schlägt vor, die eine Quadrifläche als die „absolute“ in einem nichteuklidischen Raume zu behandeln; andererseits ist der Raum, den ich gebrauche, „flach“ (flat). . . . Noch andere Methoden von Punktdarstellungen bieten sich der Betrachtung. Wir können eine Schraube abgebildet ansehen durch ein Molekül, das aus zwei in einer angenommenen Ebene liegenden Atomen besteht. Durch Abwandlung der Massen der Atome unter Beibehaltung ihres Verhältnisses erhalten wir eine angemessene Abbildung aller möglichen Schraubungen oder Dynamen auf der Schraube. Die Resultante einer beliebigen Anzahl von Dynamen oder Schraubungen kann konstruiert werden, indem man die Massenmittelpunkte der entsprechenden Atome jedes darstellenden Moleküls aufsucht und die beiden so erhaltenen Mittelpunkte mit der Summe der Gewichte der zugehörigen Atome belastet. Oder aber man kann die Darstellung durch Anwendung dreiatomiger Moleküle auf eine Linie beschränken, und die Methode der Aufsuchung der Resultante ist noch immer brauchbar.“ — In der Abhandlung werden diese drei Methoden alle erörtert. Gbs. (Lp.)

A. Grünwald. Sir Robert S. Balls lineare Schraubengebiete. Zs. f. Math. u. Phys. 48, 49-108.

Die umfangreiche Abhandlung gehört der Geometrie an; sie bringt eine vollständige Übersicht über die linearen Schraubenmannigfaltigkeiten, ihre Achsenlagen und Parameterverteilung. Vergl. S. 690 dieses Bandes. Lp.

W. Peddie. On the use of quaternions in the theory of screws. Edinb. R. S. Proc. 24, 314-320.

Zunächst wird gezeigt, in welcher Weise die Quaternionen bei der Behandlung der Ballschen Theorie der Schrauben verwendbar sind. Dann wird die Bewegung eines starren Körpers mit zwei Freiheitsgraden behandelt, indem die Bewegung durch zwei rechtwinklige koordinierte Schrauben ausgedrückt wird. Zuletzt wird kurz die Betrachtung auf die Bewegung eines Systems mit drei Freiheitsgraden ausgedehnt. Interessant ist, wie bei allen derartigen Untersuchungen, die durch sie veranlaßte Auffindung vieler geometrischen Beziehungen. Lp.

P. G. Tait. Quaternion notes. Communicated by Professor C. G. Knott. Edinb. R. S. Proc. 24, 344.

Zwei Tage vor seinem Tode schrieb Tait diese Noten auf und beauftragte seinen Sohn mit ihrer Aufbewahrung, da dieselben den Keim wichtiger Fortschritte enthielten. Nach der Ansicht von Knott hat sich Tait zuletzt mit einer neuen Betrachtung des früher von ihm behandelten Golfball-Problems beschäftigt. Hiermit stehen die Noten, welche auf die lineare Vektorfunktion Bezug haben, in unverkennbarem Zusammenhange. Lp.

REINH. MÜLLER. Über einige Kurven, die mit der Theorie des ebenen Gelenkvierecks im Zusammenhang stehen. Zs. f. Math. u. Phys. 48, 224-248.

Im wesentlichen ein verkürzter Abdruck des gleichbetitelten Aufsatzes in der Festschrift für Dedekind (F. d. M. 32, 703, 1901). Einzelne Partien sind unverändert; nur der zweite Abschnitt ist durch Zusätze vermehrt. Lp.

J. RÉVEILLE. Note sur un système articulé. Nouv. Ann. (4) 2, 127-132.

Einfache elementare Herleitung der Eigenschaften des Hartschen Fünfstabsystems zur Aufzeichnung eines Kreises oder einer Geraden.

Lp.

E. DELASSUS. Sur les systèmes articulés gauches II. Ann. de l'Éc. Norm. (3) 19, 119-152.

Es wird die Aufgabe gestellt und gelöst: Eine einfache offene Kette sei gegeben; es ist die Zahl der Parameter, von denen wirklich (nicht bloß formell) die Bewegung eines ihrer Glieder abhängt, zu bestimmen. Das i-te Glied s_i habe p_i Freiheitsgrade, so ist ($p_i < 6$) im allgemeinen $p_{i+1} = p_i + 1$. Aber es kann auch passieren, daß $p_{i+1} = p_i$ ist. In diesem Falle hat man eine Reduktion p_i-ter Ordnung an dem Gelenk A_{i+1}. Durch den Satz: findet eine Reduktion im Gelenk A_{i+1} statt, so hat s_i eine Spezialbewegung, wird die Verbindung dieses zweiten Teiles mit dem ersten Teile (Ann. de l'Éc. Norm. (3) 17, 445-499; F. d. M. 31, 683, 1900) hergestellt. Eine Reduktion erster Ordnung gibt es nicht, dagegen zwei verschiedene Reduktionen zweiter Ordnung: 1. A_1, A_2, A_3 gestatten Schraubungen um dieselbe Achse. 2. A_1, A_2, A_3 sind drei zu einer Ebene parallele Geradführungen. Die Reduktionen höherer (dritter bis fünfter) Ordnung sind sehr viel zahlreicher. Beispielsweise kann man 21 verschiedene Reduktionen fünfter Ordnung unter Ausschluß der Geradführungen unterscheiden. Durch den Satz: Eine Reduktion beliebiger Ordnung wird nicht verändert durch die Unterdrückung überflüssiger Gelenke, die bei früheren Reduktionen auftreten, wird auch der Fall gleichzeitiger Reduktionen erledigt. Die Reduktionen ohne Geradführung werden in einer Tabelle dargestellt. Schließlich wird noch speziell der Fall betrachtet, daß nur Walzengelenke (rotoïdes) vorliegen.

D.

E. DELASSUS. Sur les engrenages à contact ponctuel. S. M. F. Bull. 30, 43-47.

Eine „Verzahnung“ (engrenage) ist gegeben durch die Bewegung eines Elementes, das aus einem Punkte und einer Ebene in vereinigter Lage besteht. Es ergibt sich leicht die Bedingung, welcher diese Bewegung genügen muß, damit sie eine Verzahnung zweier in vorgegebener Bewegung befindlichen Körper darstellt. Man kann entweder die Bewe-

gung des Punktes oder die der Ebene beliebig annehmen (génération ponctuelle, tangentielle). Verf. untersucht in dem Falle der gleichförmigen Schraubenbewegung der beiden Körper die beiden einfachsten Verzahnungsmethoden, wo entweder die Bewegung des Punktes als geradlinig und gleichförmig oder die Bewegung der Ebene als eine geradlinige gleichförmige Translation angenommen wird. Es wird die Bedingung angegeben, daß eine Verzahnung der ersten Art eine Verzahnung der zweiten Art darstellt. Ferner wird der Fall untersucht, daß die Bewegung der Ebene parallel zu den Achsen der beiden Schraubungen stattfindet. Die Verzahnungsflächen sind in diesem Falle Zylinder, und es ergibt sich, daß sie Verzahnungsflächen bei beliebiger Änderung der relativen Stellung der beiden Schraubenachsen bleiben, wenn man nur das Verhältnis der Rotationsgeschwindigkeiten der beiden Körper nicht ändert. D.

C. Burali-Forti. Ingranaggi piani. Torino Atti 37, 393-413.

Der eifrige Kämpfer für die Verbreitung der Vektoranalysis zeigt in dieser Abhandlung, wie nach einheitlichen Methoden sowie in allgemeiner und ganz einfacher Art alle ebenen Verzahnungen nebst ihrer wirklichen graphischen Konstruktion erhalten werden können. Er geht nicht darauf aus, besondere bekannte oder neue Fälle zu behandeln, die für die konjugierten Profile herauskommen, weil ihre Bearbeitung nach den dargelegten allgemeinen Verfahrungsarten auf bloße Übungsaufgaben im geometrischen Kalkul hinausläuft. Ebenso wenig beschäftigt er sich mit den Fragen bezüglich der Reziprozität, der Umkehrbarkeit und der Anzahl der Zähne bei den Verzahnungen, weil solche Aufgaben in jedem besonderen Falle gelöst werden können, nachdem die allgemeinen Verfahrungsarten ohne jedwede Einschränkung der Dauer und des Sinnes der Einwirkung zur Anwendung gekommen sind. Lp.

O. Fischer. Über die reduzierten Systeme und die Hauptpunkte der Glieder eines Gelenkmechanismus und ihre Bedeutung für die technische Mechanik. Zs. f. Math. u. Phys. 47, 429-466.

Die Untersuchungen des Verf. über die Mechanik des menschlichen Körpers, welche in den Abhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften seit 1893 erschienen und im Jahrbuch regelmäßig besprochen sind, haben ihn darauf geführt, gewisse Massensysteme und feste Punkte innerhalb der einzelnen Glieder in Betracht zu ziehen; dadurch wird sowohl in kinematischer als auch in kinetischer Hinsicht eine wesentliche Vereinfachung und zugleich eine größere Anschaulichkeit bei der Untersuchung erzielt. Die an dem speziellen Beispiele des menschlichen Körpers gewonnenen Gesichtspunkte lassen sich nun leicht für jeden beliebigen Gelenkmechanismus verwerten. In der gegenwärtigen Abhandlung setzt der Verf. seine Ideen noch einmal für den Leserkreis

der Zeitschrift für Mathematik und Physik auseinander und legt ihre Anwendbarkeit an einigen speziellen Beispielen dar. Hierbei wird besonders die in den letzten Jahren ausgebildete Lehre der Kurbelgetriebe (vergl. die Referate über Lorenz und Schubert in F. d. M. **32**, 741, 1901) vielfach berücksichtigt. Mit Rücksicht auf die in den früheren Jahrgängen abgedruckten Referate über die vorangegangenen Veröffentlichungen des Verf. können wir auf die genauere Wiedergabe des Inhaltes der vorliegenden Arbeit verzichten. Lp.

F. Schilling. Neue kinematische Modelle zur Verzahnungstheorie und ihre Beziehung zur Theorie der Berührungstransformationen. Deutsche Math.-Ver. **11**, 268-271.

Verf. kündigt eine Reihe von neuen Modellen an, die inzwischen bei Martin Schilling in Halle erschienen sind. Dieselben bringen die drei wichtigsten Methoden der Zahnräderkonstruktion, nämlich die Methode der Hülfspolbahnen, der Äquidistanten und der sekundären Polbahnen zur Anschauung. Es wird ferner auf die Bedeutung der Modelle für die Theorie der Berührungstransformationen hingewiesen, was analytisch und anschaulich an dem einfachsten Beispiele zweier auf einander abrollenden Polkreise erläutert wird. D.

R. M. Milne. Curvature of wheel spokes in photographs. Nature **67**, 8.

Die auf den Photographien sichtbare Krümmung der Speichen eines Rades, das während der Bewegung photographiert wurde, wird darauf zurückgeführt, daß das photographische Bild den Schnitt einer Lage der Speichen mit der nächstfolgenden Lage wiedergibt, d. h. ein Stück der Enveloppe der Speichen; diese Enveloppe ist aber eine Cykloide von halber Dimension wie die von einem Punkte der Peripherie des rollenden Rades erzeugte Cykloide. Lp.

Weitere Literatur.

W. Hartmann. Konstruktion der Normalen und der Krümmungskreise der Polbahnen der Vierzylinderkette. Sonderabdr. Zeitschr. des Vereins deutscher Ingen. 7 S. 4°.

C. W. MacCond. Velocity diagrams. Their construction and uses. Intended for all who are interested in mechanical movements. New York: Wiley and Sons. London: Chapman and Hall. III u. 116 S. [Nature **66**, 269-270.]

A. Petrus. Beiträge zur Theorie der Herpolhodie Poinsots. Diss. Halle.

D. Tessari. La costruzione degli ingranaggi. Torino: Fratelli Bocca. XVI u. 226 S. [Nature **66**, 218.]

Kapitel 3.

Statik.

A. Statik fester Körper.

G. BARDELLI. Su un teorema statico di Leibniz. Lomb. Ist. Rend. (2) 35, 412-416.

Ausdehnung einer Betrachtung, die Leibniz für die Resultante von Kräften mit gemeinschaftlichem Angriffspunkte gemacht hatte (Journ. des Savants 1693), auf ein beliebiges Kräftesystem zum Behufe der Zusammensetzung solcher Kräftesysteme. Hierdurch gelangt der Verf. rasch zu dem bekannten Satze, daß das Tetraeder, welches die beiden Einzelresultanten zu Gegenkanten hat, ein konstantes Volumen besitzt. Lp.

R. SKUTSCH. Graphische Zerlegung einer Kraft in sechs Komponenten mit vorgeschriebenen Wirkungslinien. Berl. Math. Ges. Ber. 1, 59-62.

Der Verf. berichtet zuerst über die Methoden zur Lösung der bezeichneten Aufgabe von Müller-Breslau, Fr. Kötter, Henneberg und W. Stäckel (F. d. M. 29, 595, 1898). Am Schlusse gibt er eine Vereinfachung der Stäckelschen Konstruktion. Lp.

H. SCHUBERT. Gleichgewichtsbedingungen für vier Kräfte, die senkrecht zu einer starren Geraden wirken. Arch. der Math. u. Phys. (3) 2, 279.

Die Orthogonalprojektionen der vier Kräfte auf eine Normalebene der Geraden sind vier Strahlen, die zu den vier Angriffspunkten auf der starren Geraden projektiv sind. Lp.

A. DITTRICH. Wie sind die Verbindungen der Kräfte und die Kräfte selbst zu wählen, damit sich das hierdurch bestimmte System realisieren lasse? Časopis 31, 42-48, 115-124, 201-213, 283-300, 406-418 (Böhmisch).

EUG. FERRON. Note exposant un essai de solution complète du problème de l'équilibre d'un corps solide, qui ne peut que tourner autour de la droite joignant deux points fixes du corps. Publ. de l'Inst. gr.-duc. de Luxembourg 27, 7 S.

Im Vorjahre (F. d. M. 32, 706, 1901) war über den Versuch von Ch. Lagrange zu berichten gewesen, die Reaktionen zweier festen Punkte eines starren Körpers gegen eine Kraft, deren Aktionslinie mit der Ver-

bindungslinie jener beiden festen Punkte zusammenfällt, einzeln zu bestimmen. Während Lagrange glaubhaft zu machen versuchte, daß jeder der beiden festen Punkte die Hälfte der Kraft zu stützen habe, kommt Ferron bei der Behandlung nach seinem Verfahren zu einer ganz anderen Lösung. Das von ihm zu Hülfe gerufene Axiom untersagt die Anwendung der Verlegung des Angriffspunktes einer einwirkenden Kraft innerhalb ihrer Aktionslinie für alle Kräfte, deren Richtungen mit der Verbindungslinie der beiden festen Punkte parallel laufen. Indem er dieses Axiom für eine derartige Kraft mit beliebig gegebenem Angriffspunkte in Anwendung bringt, erhält er Reaktionen der festen Punkte, die von den Koordinaten des Angriffspunktes abhängen. — Auch diese Schlußweise hat nichts Zwingendes an sich. Lp.

T. Levi-Civita. Sulla cinetostatica. Sep. aus Padova Atti e Memorie 18, 6 S. 8°.

In den gewöhnlichen Lehrbüchern der Mechanik wird die Bestimmung der von den Verbindungen der Systeme zu leistenden Reaktionen meistens nur flüchtig erwähnt; der Verf. teilt mit, in welcher Weise er bei seinen Vorlesungen an der Universität zu Padua den Gegenstand vorträgt. Lp.

S. Composto. Sulla configurazione d'equilibrio d'un filo flessibile e inestendibile. Mat. pure ed appl. 2, 96-107.

Die Bedingungen für das Gleichgewicht eines gespannten Fadens werden unter der Voraussetzung, daß die äußeren Kräfte ein Potential besitzen, auf die Hamiltonsche Normalform transformiert. Sie gestatten dann die Anwendung des Jacobischen Satzes, mit dessen Hülfe der Fall des frei hängenden Fadens erledigt, der Fall des über eine Rotationsfläche gespannten Fadens auf Quadraturen zurückgeführt wird. Lwt.

A. Guldberg. Sur les analogies entre l'équilibre d'un fil et le mouvement d'un point. Videnskabsselskabets Skr. Christiania 1902, No. 9, 9 S. 8°.

Die schon öfter behandelten Analogien zwischen dem Gleichgewichte eines Fadens und der Bewegung eines Punktes werden vom Verf. in parallelen Sätzen gegenübergestellt, indem dieselben auf den zweiteiligen Seiten nebeneinander gedruckt werden. Die behandelten Sätze sind unter die Überschriften geordnet: 1. Satz von der Projektion der Bewegungsgröße — Satz von der Projektion der Spannung. 2. Satz vom Momente der Bewegungsgröße — Satz vom Momente der Spannung. 3. Satz der lebendigen Kräfte — Satz von der Spannung. Lp.

C. A. Laisant. **Analogies entre les courbes funiculaires et les trajectoires d'un point mobile.** Nouv. Ann. (4) **2**, 343-348.

Der Verf. stellt die Formeln zusammen, nach denen man von den Fadenkurven zu den Bahnlinien übergehen kann und umgekehrt. Hinzugefügte Beispiele erläutern das Verfahren. Lp.

H. Grob. **Einfache Methode zur Bestimmung der Zugspannungen und Kurvenform beliebig aufgehängter Freileitungen.** Mitt. Phys. Ges. Zürich, Nr. 3, 1902, 8-11.

Da alle Kettenlinien ähnlich sind, so kann man eine ein für allemal gezeichnete Kettenlinie benutzen, um für zwei gegebene Punkte A und B, zwischen denen eine Kettenlinie (Telegraphendraht) von gegebener Spannung in dem einen Endpunkte konstruiert werden soll, die Gestalt durch ein leichtes graphisches Verfahren zu bestimmen. Lp.

G. Pennacchietti. **Sopra un integrale d'una classe di problemi dell' equilibrio d'un filo flessibile e inestendibile.** Palermo Rend. **16**, 376-382.

Über diesen Gegenstand hat Lagoutinsky in Nouv. Ann. (3) **17** (F. d. M. **29**, 598, 1898) Untersuchungen angestellt. Die dort gefundenen Resultate findet der Verf. nach einer Methode, die sich auf die Theorie der simultanen homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen stützt. Hierdurch soll der Weg gewiesen werden, der zur Verallgemeinerung derartiger Betrachtungen führt. Lp.

O. Fischer. **Das statische und das kinetische Maß für die Wirkung eines Muskels, erläutert an ein- und zweigelenkigen Muskeln des Oberschenkels.** Leipz. Abh. **27**, 483-588, mit 12 Tafeln.

Fortsetzung der gründlichen und umfassenden Untersuchungen des Verf., über welche im Jahrbuch regelmäßig referiert ist, zuletzt in **32**, 845, 1901. Zuerst wird an den gebräuchlichen Methoden zur Bestimmung der Wirkung eines Muskels Kritik geübt; dann wird im zweiten Teile der Arbeit das statische und das kinetische Maß der Wirkung eines Muskels definiert, im dritten das kinetische Maß am zweigliedrigen System abgeleitet. Die Abschnitte IV und V dienen zur Erforschung des statischen und des kinetischen Maßes der Oberschenkelmuskeln. Der VI. Abschnitt ist, wie in den früheren Abhandlungen, einem ausführlichen Rückblick gewidmet. Für diese Berichte müssen wir uns mit einigen Angaben aus den Abschnitten II und III begnügen, wobei wir den betreffenden Stellen des Rückblickes folgen.

Die einzige exakte Methode für die Bestimmung der Wirkungsweise eines Muskels bei isolierter Kontraktion aus der Ruhe besteht darin, daß

man sich durch möglichst genaue Messungen an geeigneten Präparaten Aufschluß über die mechanischen Verhältnisse verschafft, unter denen der Muskel bei seiner Kontraktion zur Wirkung gelangt. Dann ist es ein rein mechanisches Problem, festzustellen, welche Bewegungen notwendigerweise eintreten müssen, wenn der Muskel sich kontrahiert und außer ihm keine anderen Kräfte auf die in Bewegung zu setzenden Körperteile einwirken.

Jeder Muskel wirkt auf die Körperteile, die er beeinflußt, mit Kräftepaaren ein. Daher sind aus den Daten der direkten Messungen diese Kräftepaare abzuleiten und die Achsenmomente derselben zu bestimmen. Die letzteren stellen die Drehungsmomente dar, welche der Muskel auf die verschiedenen Körperteile ausübt. Die Drehungsmomente stellen in ihrer Gesamtheit nur ein statisches Maß für die Wirkung eines Muskels dar.

Das Maß der eintretenden Gelenkbewegungen, welches man als kinetisches Maß für die Wirkung des Muskels bezeichnen kann, hängt dagegen außer von den Drehungsmomenten noch von Größen ab, welche mit den Massen und der Massenverteilung innerhalb der einzelnen Körperteile zusammenhängen. Für ein zweigliedriges System, welches gegen einen nahezu festbleibenden dritten Körperteil nur Bewegungen um eine Achse ausführt, und bei dem die beiden Glieder durch ein Scharniergelenk mit paralleler Achse verbunden sind, genügen zwei Größen zur Charakterisierung des Einflusses der Massen und der Massenverteilung auf die Bewegung. Versteht man unter l_1 die Länge des um die feste Achse drehbaren Gliedes, unter σ_1 die Länge des mathematischen Pendels, welches gleiche Schwingungsdauer mit diesem Glied besitzt, wenn man in der Achse des beide Glieder verbindenden Gelenkes die Masse des anderen Gliedes konzentriert und dem ersten hinzugefügt denkt, ferner unter ϱ_2 den Abstand des Richtpunktes des zweiten Gliedes vom Mittelpunkt des Zwischengelenkes und endlich unter σ_2 die Länge des mathematischen Pendels, welches mit dem zweiten Gliede gleiche Schwingungsdauer besitzt, so sind die beiden maßgebenden Konstanten durch die Verhältniszahlen σ_1/ϱ_2 und σ_2/l_1 dargestellt.

In dem vorstehenden ist der Weg gekennzeichnet, den der Verf. bei seinen Untersuchungen eingeschlagen hat. Mit mathematischen, physikalischen und anatomischen Kenntnissen ausgerüstet, im Experimentieren wohl erfahren, hat er auch diese Arbeit mit Erfolg vollendet und seine Ergebnisse in klarer Darstellung der Öffentlichkeit übergeben. Die von ihm benutzten graphischen Methoden werden in den musterhaft ausgeführten zwölf Tafeln, die der Schrift beigegeben sind, vortrefflich zur Anschauung gebracht. Lp.

St. Jolles. Synthetische Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente eines ebenen Flächenstückes. Arch. der Math. u. Phys. (3) **2**, 327-341.

Parallele Kräfte in einer Ebene ε, deren Intensitäten proportional sind den Abständen ihrer Angriffspunkte von einem in ε gelegenen Strahle,

bestimmen ein mit ihrer Theorie eng verknüpftes polares Feld Γ^2, das von Culmann, Reye, Hesse behandelt ist. In den vorliegenden Untersuchungen wird, ausgehend vom Zentrifugalmoment, sofort synthetisch das polare Feld Γ^2 behandelt, sein Zusammenhang mit der Theorie der Trägheits- und Hauptträgheitsachsen dargetan und die organische Verbindung mit der Theorie der Trägheitsellipsen entwickelt. Nicht nur zwei sich schneidende, sondern auch zwei parallele Strahlen werden als Trägheitsachsen eines ebenen Flächenstückes bezeichnet, sobald in bezug auf sie das Zentrifugalmoment Null ist. Beschreibt ein Strahl einen Strahlenbüschel erster Ordnung, so umhüllen die von ihm gleichweit abstehenden und zu ihm parallelen Trägheitsachsen die Trägheitsellipse seines Mittelpunktes. Zwischen den Strahlen der Ebene und den zu ihnen parallelen und von ihnen gleichweit abstehenden Trägheitsachsen besteht eine einzweideutige Verwandtschaft. Zum Schlusse ergeben sich die bekannten metrischen Eigenschaften der Trägheitsmomente als eine unmittelbare Folge der Brennpunktseigenschaften von Γ^2. Lp.

St. Jolles. Synthetische Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente eines Raumstückes. Arch. der Math. u. Phys. (3) 4, 100-116.

Die Abhandlung bildet die Fortsetzung des vorstehend besprochenen Aufsatzes sowie der im Archiv (3) **1**, 91 (1901) erschienenen Arbeit: „Die Beziehungen der Zentralellipse eines ebenen Flächenstückes zu seinem imaginären Bilde“, indem die dort für ebene Flächenstücke angestellten Betrachtungen nunmehr auf Raumstücke ausgedehnt werden. Bei einem Raumstücke $\mathfrak{R}$ gelangt man von seinen Zentrifugalmomenten bezüglich je zweier Ebenen unmittelbar zu dem mit ihm verknüpften Raume Γ^2, sowie zu den Beziehungen von Γ^2 zu den Trägheitsebenen, Hauptebenen und Hauptachsen von $\mathfrak{R}$. Werden auch zwei parallele Ebenen als Trägheitsebenen bezeichnet, wenn in bezug auf sie das Zentrifugalmoment Null ist, so umhüllen alle parallelen Trägheitsebenen, die je zu den Ebenen eines Ebenenbündels P parallel sind und von ihnen gleich weit abstehen, das Trägheitsellipsoid π^2 des Punktes P. Daß Ebenen, für welche $\mathfrak{R}$ das gleiche Trägheitsmoment hat, je eine zu Γ^2 konfokale Fläche zweiter Klasse berühren, wird synthetisch bewiesen, und darauf wird gezeigt, in welcher Art die metrischen Eigenschaften der Zentrifugal- und Trägheitsmomente mit den Fokalkurven von Γ^2 verknüpft sind. Ebenso einfach, wie sich die Eigenschaften der Zentrifugal- und Trägheitsmomente aus denen der Fokalkurven ergeben, fließen auch umgekehrt die Eigenschaften dieser aus denen jener. Ein kurzer Beweis des Reyeschen Satzes von den vier einem Raumstücke in bezug auf seine Trägheitsmomente gleichwertigen Massenpunkten bildet den Schluß der Abhandlung. Lp.

ROB. MAYR. Über Körper von kinetischer Symmetrie. Zs. f. Math. u. Phys. 47, 479-488.

Die Abhandlung, ein Auszug aus des Verf. Inauguraldissertation, behandelt zunächst die Körper, bei denen das Zentral-Trägheitsellipsoid eine Kugel ist, eine Aufgabe, mit der sich Laplace und Legendre beschäftigt haben, ohne ihre allgemeinen Resultate auf spezielle homogene Körper anzuwenden. Die Untersuchungen des Verf. stützen sich auf zwei Gleichungen, deren Herleitung auf Legendre zurückgeht, und die beide die fünfte Potenz des Radiusvektors durch die beiden räumlichen Polarwinkel ψ und ϑ ausdrücken, und zwar in Gestalt unendlicher Reihen, in welche Kugelfunktionen eingehen. Die erste Reihe (A), welche von Legendre nicht angegeben wird, nennt der Verf. die allgemeine Legendresche Gleichung, die zweite (B), welche orthogonal symmetrische Flächen in bezug auf die drei Koordinatenebenen darstellt, dagegen die „spezielle Legendresche Gleichung". Die eigene Leistung des Verf. besteht darin, daß er die einfachsten Formen der in den Legendreschen Gleichungen enthaltenen Flächen untersucht, indem er aus den erwähnten Gleichungen nur eine endliche Anzahl von Gliedern beibehält. Eine Reihe von graphischen Darstellungen dient zur Veranschaulichung der Resultate. Der letzte Abschnitt behandelt Körper von kinetischer Symmetrie in bezug auf eine Achse, d. h. die Trägheitsmomente für alle Geraden, die durch einen Punkt der Achse gehen und senkrecht zu ihr stehen, sind gleich groß. Lp.

HJ. TALLQVIST. Om orter för lika moment, vid förhandenvaro af både positiva och negativa massor. S. A. Tekniska Föreningens i Finl. Förh. 7-8, 1902. 27 S.

Eine ausführliche Untersuchung über die Modifikationen der Formeln und Sätze über die Massenmomente erster und zweiter Ordnung, wenn nicht bloß positive, sondern auch negative Massen zugelassen werden. Die einzelnen Abschnitte beziehen sich auf 1. Massenmittelpunkt und Massenmoment erster Ordnung, 2. das Trägheitsmoment von Massen, die in einer Ebene liegen, 3. das Zentrifugalmoment von Massen, die in einer Ebene liegen, 4. polares und planares Trägheitsmoment eines Massensystems im Raume, 5. axiales Trägheitsmoment eines Massensystems im Raume, 6. Zentrifugalmoment eines Massensystems im Raume. In allen Fällen werden die Örter gleicher Momente bestimmt. Es würde zu weit führen, die Resultate aller Abschnitte hier zu wiederholen. Lp.

R. LAUENSTEIN. Die graphische Statik. Elementares Lehrbuch für den Schul- und Selbstunterricht sowie zum Gebrauch in der Praxis. 7. Auflage. Stuttgart: A. Bergsträsser. VIII u. 252 S. gr. 8°.

W. Keck. Vorträge über graphische Statik mit Anwendung auf die Festigkeitsberechnung der Bauwerke, als Anhang zu des Verfassers „Vorträgen über Elastizitätslehre". Zweite ungeänderte Auflage. Hannover: Helwing. VII u. 99 S. gr. 8°.

B. Hydrostatik.

G. Schülen. Das Schwimmen, teilweise von einem neuen Standpunkte aus bearbeitet. III. Teil. Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. 32, 85-93 (1901).

G. Schülen. Stabiles Gleichgewicht schwimmender Körper. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 33, 356-363.

Eug. Scheeffer. Über stabiles Schwimmen homogener Körper. Pr. (No. 43) Realgymn. St. Johann. Danzig 53 S. 4° u. 1 Taf.

Eug. Scheeffer. Gleichgewicht und Stabilität eines schwimmenden homogenen Würfels. Sep. aus Naturf. Ges. Danzig 10, 27 S. gr. 8°.

Bei der Anzeige der ersten beiden Teile der Arbeit von Schülen (F. d. M. 31, 689, 1900) wiesen wir darauf hin, daß die reiche neue Literatur über das behandelte Thema dem Verf. unbekannt geblieben ist. Dieselbe Bemerkung ist über die vier oben angeführten Abhandlungen zu wiederholen. Da inzwischen der dritte Band von Appells Traité de mécanique erschienen ist, so kann Referent auf den Abschnitt IV des Kapitels XXXI dieses Bandes verweisen: „Équilibre des corps flottants" (S. 188-226), wo auf den ersten beiden Seiten die Hauptschriften der bezüglichen Literatur namhaft gemacht sind. Als Beiträge, die einzelne besondere Fragen eingehend erörtern, können die hier anzuzeigenden obigen Arbeiten immerhin einiges Interesse beanspruchen. Allein auch bei einzelnen der behandelten Beispiele (schwimmender Würfel, schwimmendes Prisma) sind die Verf. auch nicht, wie sie meinen, die ersten Forscher, die sich mit diesen Fragen beschäftigt haben. Die Aufgabensammlung von Jullien, welche mehrere derartige Aufgaben vorführt, zitiert als Quelle Bossut, Traité d'hydrodynamique (1786/87). Als Übungsaufgaben sind die von Scheeffer mit großer Sorgfalt durchgerechneten Zahlenbeispiele ganz nützlich. Lp.

H. Poincaré. Sur la stabilité de l'équilibre des figures pyriformes affectées par une masse fluide en rotation. Lond. Phil. Trans. (A) 198, 333-373; Abstract. Lond. Roy. Soc. Proc. 69, 148-149.

Verf. sucht der Frage, ob die von ihm entdeckte birnenförmige Gleichgewichtsfigur einer rotierenden Flüssigkeit stabil ist oder nicht, näher zu kommen, indem er die Annäherung in den zur Untersuchung gebrauchten Funktionen weiter treibt als in seiner ersten Arbeit. Es tritt dabei aber die Schwierigkeit auf, daß der Wert des Potentials eines Ellipsoides (die Analyse bedient sich der elliptischen Koordinaten und

Laméschen Funktionen) außerhalb der Oberfläche anders ist als innerhalb, sodaß die Integration über die ganze birnenförmige Gleichgewichtsfigur, die ja das Grundellipsoid durchdringt, nicht mit denselben Potentialwerten durchgeführt werden kann. Verf. zeigt aber, daß dies doch möglich ist, weil die entstehenden Fehler sich bei der Gesamtintegration gegenseitig aufheben. Nunmehr gelingt die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingung in speziellerer als der ganz schematischen Form; die gewonnenen analytischen Ausdrücke entziehen sich aber doch noch der rechnerischen Auswertung, sodaß die Frage der Stabilität der Gleichgewichtsfigur ungelöst bleibt. Br.

G. H. Darwin. On the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid. Lond. Phil. Trans. (A) 198, 301-331; Abstract: Lond. Roy. Soc. Proc. 69, 147-148.

Verf. setzt seine früheren Untersuchungen über den gleichen Gegenstand fort. Durch nähere Behandlung der von ihm eingeführten (auf Kugelfunktionen basierenden) Funktionen gewinnt er das Mittel, die Berechnungen in genügender Annäherung auf elliptische Funktionen zurückzuführen. Er gibt nicht nur numerische Werte für das Jacobische Ellipsoid von verschiedener Länge, sondern auch genaue Angaben über das kritische Ellipsoid dieser Art, das also die Grenze zwischen Stabilität und Instabilität bezeichnet. Auch für die dann folgende birnenförmige Gleichgewichtsfigur werden Werte berechnet und die drei Querschnitte gezeichnet. Die Gestalt ist ungefähr die eines länglichen, seitlich etwas plattgedrückten Eies. Der Querschnitt ist etwa elliptisch, die Länge größer, als Poincaré annahm. Zum Beweis der Stabilität dieser Figur reichen aber die Formeln noch nicht aus. Die Annäherung müßte zu diesem Zwecke noch weiter getrieben werden. Br.

J. H. Jeans. The equilibrium of rotating liquid cylinders. Lond. Roy. Soc. Proc. 70, 46-48. [Nature 65, 602.] London: Dulau. 38 S.

Die angewandte Methode, welche auf Reihenentwicklungen beruht, eignet sich nur für zweidimensionale Probleme; sie ermöglicht die Ermittlung des Potentials durch Transformation der Gleichung der Grenzlinie, die in Polarkoordinaten r, θ angesetzt wird:

$$r^2 = a_0 + 2a_1 r\cos\theta + 2a_2 r^2 \cos 2\theta + \cdots.$$

Durch die Substitution $\xi = re^{i\theta}$, $\eta = re^{-i\theta}$ und Auflösung nach ξ wird erhalten:

$$\xi = b_1 + b_2\eta + b_3\eta^2 + \cdots + \frac{c_1}{\eta} + \frac{c_2}{\eta^2} + \frac{c_3}{\eta^3} + \cdots.$$

Die Bedingung für die Stabilität der Grenzkurve ist durch das System der Gleichungen $b_n/n = a_n(1 - \omega^2/2\pi\varrho)$ gegeben $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Die lineare Reihe von Kreisen und Ellipsen (entsprechend den Maclaurin-

schen Sphäroiden und den Jacobischen Ellipsoiden) wird ohne Schwierigkeit untersucht, und die Gabelungspunkte auf diesen Reihen werden aufgefunden. Der erste Gabelungspunkt auf der zweiten Reihe erweist sich als Übergang zu einer birnförmigen Kurve, ähnlich der Poincaréschen Figur; in diesem Punkte findet ein Wechsel der Stabilität statt. Nach dem Durchgang durch verschiedene birnförmige Gestalten nimmt die Flüssigkeit die Gestalt „ähnlich einer Sodawasserflasche mit etwas abgerundetem Ende“ an. Darüber hinaus wird bei steigender Rotationsgeschwindigkeit eine Konfiguration gefunden, die „an ein Tennisracket mit ganz kurzem Handgriff erinnert“, bis sich zuletzt die Kurve durch Einschnürung in zwei Teile trennt. Lp.

J. H. Jeans. The stability of a spherical nebula. Lond. Phil. Trans. **199** (A), 1-55.

Es werden, ähnlich wie dies für Flüssigkeitskörper bereits ausgeführt ist, die Bedingungen untersucht, unter denen kosmische Körper aus Substanzen, die den Gesetzen der vollkommenen Gase in allen Punkten gehorchen, stabil sind, wenn auch die Dimensionen, wie z. B. die freie Weglänge, ins Gigantische vergrößert zu denken sind. Der einfachste Fall betrifft die völlig symmetrische Verteilung um ein Zentrum. Ein Körper dieser Art von endlichen Dimensionen und endlicher Masse kann nur im Gleichgewicht sein, wenn eine konstante äußere Kraft auf seine Oberfläche wirkt. Es werden die Ansätze für Schwingungen verschiedener Ordnung eines solchen Körpers in radialer Richtung abgeleitet sowohl für die mechanischen wie für die wärmetheoretischen Größen und die Bedingungen für die Stabilität untersucht, die z. B. durch Abkühlung der Masse verloren gehen kann. Ein Spezialfall, in dem die Bedingung der äußeren Kraft ihre Bedeutung verliert, tritt ein, wenn Radius und Masse unendlich werden. In diesem Fall nimmt die Bedingung für die Stabilität eine einfache Form an. Eine Erweiterung der Formeln wird dann vorgenommen für den Fall, daß die Masse rotiert. Es tritt dabei eine Reihe von abwechselnd labilen und stabilen symmetrischen Gleichgewichtsfiguren, aber auch von birnenförmigen Gleichgewichtsfiguren auf. Die Analogie mit rotierenden inkompressiblen Flüssigkeiten ist also in dieser Beziehung vollständig. Ein wichtiger quantitativer Unterschied liegt aber darin, daß die Übergänge bei sehr viel geringeren Rotationsgeschwindigkeiten eintreten, sodaß man z. B. die Möglichkeit hat, die Abschnürung von Satellitenmassen bei einer allein durch die Abkühlung der Masse erklärlichen Zunahme der Rotationsgeschwindigkeit anzunehmen. Spekulationen dieser und ähnlicher Art über die Anwendbarkeit der erhaltenen Resultate auf eine mögliche rechnerische Begründung der Kant-Laplaceschen Hypothese bilden den Schluß der Arbeit. Br.

A. Garbis. Wasserwiderstand der Schiffe. Mitteil. a. d. Gebiete d. Seewesens 1902, Heft VIII. 43 S. sep.

Die Frage nach dem Widerstande, den ein Schiff bei seiner Bewegung durch das Wasser erfährt, ist eine, deren Beantwortung noch immer aussteht. Dies zeigte sich unter anderem bei den Verhandlungen der Sektionen für „Génie civil et militaire, Navigation" in der Tagung der Association Française pour l'avancement des sciences in Boulogne sur mer 1899. Nach langen Verhandlungen, bei denen die verschiedenen Ansichten zum Ausdrucke gelangten, stellte sich heraus, daß das alte Newtonsche Gesetz vom Widerstande eines Mediums gegen eine ebene Fläche für die Praxis die besten Resultate liefert; wegen der unausgeglichenen Meinungsverschiedenheiten wurde aber beschlossen, die Frage auf die Tagesordnung der nächsten Versammlungsjahre zu bringen (was bisher nicht geschehen ist).

Der Verf. des vorliegenden Aufsatzes hat von diesen Verhandlungen offenbar keine Kenntnis erhalten, steht aber in der Wertschätzung des Newtonschen Gesetzes auf demselben Standpunkte. Seine Absicht, eine Widerstandsformel aufzustellen, die sich nicht zu weit von der theoretischen Basis jenes Gesetzes entfernt, konnte nur in sehr bedingter Weise erreicht werden, weil die äußerst verwickelten in Betracht kommenden hydrodynamischen Vorgänge entweder gar nicht gestreift oder nur durch elementare Überlegungen dem Verständnis näher gebracht sind, und weil die aufgestellte Widerstandsformel sich bloß auf ebene Wände des Schiffes bezieht. Bei einem Schiffe mit parallelepipedischem Mittelkörper, das an beiden Enden Zuschärfungen mit vertikalen ebenen Seitenwänden, sowie durchweg einen horizontalen Boden besitzt, soll der Gesamtwiderstand w sich aus drei Teilen zusammensetzen, dem direkten (vorn w), dem indirekten (hinten w_1), der Reibung (w_2), und zwar

$$w = F\gamma \frac{v^2}{2g} \sin^2 \alpha, \quad w_1 = F\gamma \frac{v_2^2}{2g} \sin^2 \beta, \quad w_2 = \varphi O v^2.$$

Hier ist bezeichnet: mit F die Fläche des untergetauchten Hauptspantes (senkrechten Querschnittes), mit γ das Gewicht von 1 cbm des Wassers, mit v die Geschwindigkeit des Schiffes, mit 2α der Winkel der vorderen ebenen Flächen gegen einander, mit 2β der Winkel der hinteren ebenen Flächen, mit v_2 eine aus der Formel $v_2 = v + (v_1 - v) f/F$ berechnete Geschwindigkeit, wenn f der Flächeninhalt des Schraubenkreises, v_1 die Geschwindigkeit ist, mit welcher die Schraube bei festgelegtem Schiffe das Wasser nach achter schleudern würde, mit O die ganze benetzte Oberfläche, mit φ der mittlere Reibungskoeffizient.

Bei Anwendung der obigen Formel auf beliebige Schiffskörper schlägt der Verf. das Verfahren vor, die Schiffswände vorn und hinten in Elemente zu zerlegen, die als eben betrachtet werden können, und die Summe der Widerstände aller Elemente zu ermitteln. Die nach dieser Formel ausgeführten Berechnungen für verschiedene Schiffe zeigen ganz befriedigende Übereinstimmung mit den wirklich beobachteten Resultaten. In der Polemik

des Verf. gegen die Stromlinientheorie, welche ausschließlich Rankine zugeschrieben wird, zeigt sich der oben berührte Mangel an Vertrautheit mit den theoretischen Arbeiten der Hydrodynamik. Ebenso sind die experimentellen Untersuchungen der Physiker (Magnus, Kummer, Thiesen etc.) nicht erwähnt worden. Lp.

Weitere Literatur.

M. Ciurlo. Sulla stabilità dell' equilibrio dei galleggianti. Genova: Ist. dei Sordomuti. 47 S. 8°.

M. Daymard. Mémoire sur de nouvelles courbes servant à représenter et à mesurer la stabilité statique des navires sous toutes les inclinations possibles. Paris: Bernard. 32 S. 4°.

J. Haedicke. Der Angriffspunkt des Auftriebs. Essen: Baedeker. 60 S. 8° u. 2 Taf.

H. Poincaré. Cours de physique mathématique. Figures d'équilibre d'une masse fluide. Leçons professées à la Sorbonne en 1900, rédigées par L. Dreyfus. Paris: Naud. 215 S. 8°.

Kapitel 4.

Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

L. Boltzmann. Über die Form der Lagrangeschen Gleichungen für nicht holonome generalisierte Koordinaten. Wien. Ber. **111**, 1603-1614; Wien. Anz. 1902, 355-356.

Zuerst wird gezeigt, daß die Lagrangeschen Gleichungen in unveränderter Form nicht mehr gültig sind, sobald die verwendeten generalisierten Koordinaten nicht holonom sind. Ferner wird die Form der Zusatzglieder berechnet, welche zu den Lagrangeschen Gleichungen hinzugefügt werden müssen, damit ihre Gültigkeit auch in diesem Falle gewahrt bleibt, und zum Schlusse werden diese Zusatzglieder geometrisch interpretiert. — Wenn die rechtwinkligen Koordinaten x_i und die generalisierten p_h durch die Gleichungen $dx_i = \xi_i\, dt + \Sigma_h \xi_i^h\, dp_h$ verknüpft sind und zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\mathfrak{r}_i^h = \frac{\partial \xi_i}{\partial p_h} - \frac{\partial \xi_i^h}{\partial t}, \quad \mathfrak{r}_i^{hk} = \frac{\partial \xi_i^k}{\partial p_h} - \frac{\partial \xi_i^h}{\partial p_k},$$

so haben die Zusatzglieder zu den Lagrangeschen Gleichungen die Form $-\Sigma_i m_i (\mathfrak{r}_i^h + \Sigma_k \mathfrak{r}_i^{hk})$, oder:

$$\Sigma_r\, m_r\, \mathfrak{v}_r\, [\mathfrak{u}_r^h \cos(\mathfrak{v}_r\, \mathfrak{u}_r^h) + \Sigma_k\, \mathfrak{u}_r^{hk} \cos(\mathfrak{v}_r\, \mathfrak{u}_r^{hk})].$$

Hierbei ist m die Masse eines materiellen Punktes, $\mathfrak{v}_r$ der Vektor, der dessen Geschwindigkeit darstellt, $\mathfrak{u}_r^h$ ist die Vektordifferenz der Verschiebungen, welche der materielle Punkt erfährt, wenn einmal erst die Zeit, dann p_h, das andere Mal erst p_h dann die Zeit jedesmal dieselben unendlich kleinen Zuwachse erfahren; $\mathfrak{u}_r^{hk}$ hat eine analoge Bedeutung für den Fall, daß einmal erst p_h, dann p_k, das andere Mal erst p_k, dann p_h wächst.

Lp.

P. Appell. Sur le principe de la moindre contrainte. Annuaire des math. 407-412.

Der Artikel zeigt, wie man aus dem analytischen Ausdrucke für das Gaußsche Prinzip des kleinsten Zwanges die Bewegungsgleichungen eines beliebigen (holonomen oder nicht) Systems ableiten kann, liefert zu dieser Schlußweise einige literarische Notizen und zeigt den Zusammenhang mit der vom Verf. aufgestellten und in den letzten Jahrgängen besprochenen allgemeinen Form der dynamischen Gleichungen. Lp.

M. Birkenstaedt. Verallgemeinerung der in den „Prinzipien der Mechanik für mehrere unabhängige Variable von Herrn L. Koenigsberger aus Heidelberg“ dargestellten Hülfssätze über das kinetische Potential. (Journal für Mathematik, B. CXXIV, Heft 3). Diss. Heidelberg, 51 S. 8°.

In der Koenigsbergerschen Abhandlung, die im Titel angeführt wird, ist die Untersuchung meistens nur auf beliebige kinetische Potentiale erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln beschränkt worden; doch lassen die angewandten Methoden die Möglichkeit der Ausdehnung auf den allgemeinsten Fall unmittelbar erkennen, und zwar auf Grund der in dem Buche „Prinzipien der Mechanik“ dargelegten Gesichtspunkte (vgl. F. d. M. **32**, 691, 1901, und S. 714 dieses Bandes). Diese Ausdehnung der von Koenigsberger aufgestellten Sätze auf den Fall für Potentiale höherer Ordnungen mit mehreren unabhängigen Variabeln ist in der vorliegenden Dissertation bewirkt worden. Die Resultate der formelreichen langen Rechnungen eignen sich nicht zur Wiedergabe.

Lp.

K. Heun. Das Verhalten des Virials und des Momentes eines stationären Kräftesystems bei der Bewegung des starren Körpers. Zs. f. Math. u. Phys. 47, 104-125.

Die Astatik hat bisher nur stationäre Kräftesysteme betrachtet, also durchgehends die Annahme gemacht, daß jede Kraft in unveränderlicher Größe und Richtung an ihrem Angriffspunkte haftet. In methodischer Hinsicht macht sich hierbei ein Mangel geltend: man vermißt eine ein-

heitliche Quelle, aus welcher die verschiedenen Resultate ungezwungen fließen. Zur Ergänzung der vorhandenen Untersuchungen geht daher der Verf. von der Frage aus: Welche Veränderungen erleiden das Virial und das Moment eines stationären Kräftesystems infolge der elementaren endlichen Bewegungen eines starren Körpers? Zuerst wird der Einfluß der Translation, sodann der Rotation, endlich der Schraubung festgestellt. Es ergeben sich sowohl für die beiden ersten Bewegungen als auch für die Schraubung äußerst einfache und übersichtliche Formeln, deren Diskussion die Sätze der Astatik als direkte Folgerungen liefert. Hierbei treten zwei zu einander konjugierte Vektoren auf, die durch das Darbouxsche Zentralellipsoid geometrische Deutung finden. — Da sich die Darstellung der Bezeichnungsweise der Vektorrechnung bedient, so ist am Schlusse eine kleine „Legende“ zur Erläuterung beigefügt. Lp.

E. T. Whittaker. On the solution of dynamical problems in terms of trigonometric series. Lond. M. S. Proc. 34, 206-221.

Die Lösungen der Differentialgleichungen für dynamische Probleme lassen sich im allgemeinen als Potenzreihen der Zeit darstellen; allein aus dieser Darstellung ergibt sich nicht die Anzahl und die Natur der verschiedenen möglichen Typen der Bewegung, daher auch nicht die Möglichkeit, z. B. bei dem Dreikörperproblem, die verschiedenen Bahnen zu klassifizieren. Deshalb hat der Verf. eine Methode ersonnen, die Lösung eines dynamischen Problems in eine trigonometrische Reihe zu entwickeln. Jedes System von Reihen stellt eine Familie von Bahnkurven dar, das Endglied des Systems eine Lage stabilen Gleichgewichts in dem dynamischen System. Das Verfahren kann im großen und ganzen beschrieben werden als ein Vorgehen von einer Lage des stabilen Gleichgewichtes aus. Wenn eine solche Lage gefunden ist, werden die Gleichungen durch eine Vertauschung der Variabeln transformiert; hierbei sind die neuen Veränderlichen so beschaffen, daß sie sich nur langsam ändern, wenn das System kleine Oszillationen ausführen würde. Danach werden die Gleichungen wiederholt transformiert, wobei das Ergebnis jeder Vertauschung die Vernichtung eines Gliedes in der Hamiltonschen Funktion ist. Das Verfahren ähnelt in dieser Beziehung demjenigen, das der Delaunayschen Mondtheorie zugrunde liegt. Wenn alle periodischen Glieder der Hamiltonschen Funktion vernichtet sind, können die Gleichungen integriert werden, und die endliche Lösung des dynamischen Problems erscheint in der Form trigonometrischer Reihen. Lp.

G. Picciati. Sui moti stazionari di sistemi olonomi soggetti a forze conservative in casi particolari. Ven. Ist. Atti 61 [(8) 4], 405-417.

Als Beispiele für die von Levi-Civita entwickelte Regel zur Bestimmung stationärer Bewegungen holonomer Systeme, die konservativen

Kräften unterworfen sind (F. d. M. **32**, 721-22, 1901), behandelt der Verf. folgende Aufgaben: 1. Bewegung eines Punktes auf einer Rotationsfläche, wenn ein Potential vorhanden ist, das auf den Parallelkreisen dieser Fläche einen konstanten Wert hat. 2. Bewegung eines freien Punktes unter Einwirkung einer konservativen Kraft, für welche eines der Integrale der Flächen besteht. 3. Bewegung eines schweren Rotationskörpers auf einer horizontalen Ebene, auf der er reibungslos gleitet. Lp.

C. Maltézos. Sur la chute des corps dans le vide et sur certaines fonctions transcendantes. Nouv. Ann. (4) **2**, 197-204.

Die Differentialgleichungen des freien Falles im luftleeren Raume unter Berücksichtigung der Rotation der Erde ergeben für die vertikale Koordinate z:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - 4\,\omega^2 \cos\lambda\,(x \sin\lambda + z\cos\lambda)$$

($x =$ Abweichung im Meridian, $\lambda =$ Breite, $\omega =$ Rotationsgeschwindigkeit der Erde). Da x bekanntlich sehr klein ist, so folgt durch Vernachlässigung des Gliedes mit x, wenn man noch $4\omega^2\cos^2\lambda = \varphi^2$ setzt, $d^2z/dt^2 = g - \varphi^2 z$, und diese Differentialgleichung liefert

$$\varphi^2 z = g\,(1 - \cos\varphi t)$$

als einen brauchbaren Näherungswert.

An diese Rechnung knüpft sich lose die Betrachtung der Funktionen, welche als Verallgemeinerungen der Form von z gebildet sind und den Differentialgleichungen genügen:

$$\frac{d^2u}{d\psi^2} + \frac{\alpha}{\psi}\frac{du}{d\psi} + \left(\beta + \frac{\gamma}{\psi^2}\right)u = \frac{\delta}{\psi^2}, \text{ oder } = \frac{\delta}{\psi},$$

mit der Bedingung $u = 1$ bei der ersten Gleichung, $u = 0$ bei der zweiten für $\psi = 0$. Die hierdurch definierten Funktionen u sind gerade im ersten Falle, ungerade im zweiten und enthalten die geraden, bezw. die ungeraden Besselschen Funktionen als besondere Fälle. Lp.

L. Lecornu. Sur le mouvement vertical d'un projectile dans un milieu résistant. S. M. F. Bull. **30**, 202-207.

Der Widerstand der Luft sei der $(2p)$-ten Potenz der Geschwindigkeit proportional, wo p einen beliebigen Wert habe. Ist die Gestalt eines Geschosses und der Wert der Arbeit gegeben, die zur Hervorbringung der Anfangsgeschwindigkeit aufgebraucht wird, so kann man nach der Masse des Geschosses fragen, bei der die Steighöhe des vertikal aufwärts gerichteten Schusses ein Maximum wird. Der Verf. findet eine Gleichung

$$\int_0^1 \left[\frac{\alpha + 1}{\alpha + x^p} - (p+1)\right] dx = 0,$$

von deren Wurzel α die Lösung abhängt, und zeigt ein Verfahren, durch welches diese transzendente Gleichung für ein beliebiges p angenähert gelöst werden kann. Für das Gesetz des Luftwiderstandes $\lambda g v^2$ (proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit) und die aufgewandte Arbeit T ist angenähert $\alpha = 0{,}25$; daraus ergibt sich die Masse zu $\sqrt{\frac{1}{2}\lambda T}$. Die Anfangsgeschwindigkeit $2\sqrt{2T/\lambda}$ ist doppelt so groß wie die Endgeschwindigkeit, mit der das Geschoß fällt. Die Steighöhe ist zwei Fünftel von derjenigen im luftleeren Raume. Der anfängliche Luftwiderstand ist das Vierfache des Gewichtes. Lp.

P. J. SUCHAR. Sur un exemple de transformation corrélative en mécanique. C. R. 185, 679-682.

Bei einer Zentralbewegung, die zur Zentralkraft J gehört, entspreche dem Punkte M der Bahnlinie der Punkt M' des Hodographen. Ein zweiter materieller Punkt von der Masse 1, gerade wie der erste, stehe unter dem Einflusse der Zentralkraft J'; es soll die Beziehung zwischen J und J', sowie zwischen den Zeiten t und t' beider Zentralbewegungen gefunden werden, falls die Bahnlinie der zweiten Bewegung von dem Hodographen der ersten gebildet wird und der Sinn der Bewegung derselbe ist wie der des geometrischen Punktes M'. Die gesuchte Beziehung folgt aus den Gleichungen:

$$\frac{ds'}{dt'} = J \cdot \frac{dt}{dt'} = r, \quad \frac{ds}{dt} = J' \cdot \frac{dt'}{dt} = v, \quad J \cdot J' = r \cdot v.$$

Außer einigen allgemeinen Folgerungen, die aus dieser Beziehung und aus bekannten Formeln der Zentralbewegung folgen, wird am Schlusse des Artikels eine Anwendung auf die Kraftgesetze gemacht, die von Darboux und Halphen in C. R. **84** u. **85** (F. d. M. **9**, 638, 1877) für die allgemeinste Zentralbewegung in Kegelschnitten aufgestellt sind. Lp.

P. J. SUCHAR. Sur une loi de force centrale déterminée par la considération de l'hodographe. Nouv. Ann. (4) **2**, 123-127.

Die Aufgabe, das Gesetz einer Zentralkraft zu bestimmen, so daß der Hodograph bei willkürlich gegebenen Anfangsbedingungen ein Kegelschnitt ist, kommt auf eine Aufgabe zurück, die etwas allgemeiner ist als die von Bertrand in C. R. **84** gestellte; ebenso auch die andere, bei der angenommen wird, daß der entsprechende Punkt den Kegelschnitt als Hodographen nach dem Flächensatze um das Zentrum der Anziehung durchläuft. Lp.

V. JAMET. Sur la théorie des forces centrales. Nouv. Ann. (4) **2**, 348-367.

Die Abhandlung, welche aus mehreren nicht unmittelbar zusammen-

hängenden Teilen besteht, knüpft zunächst an den Aufsatz von Suchar, S. 123 derselben Zeitschrift, an (Referat vorstehend). Der am Anfange als Verallgemeinerung der Sucharschen Betrachtungen mitgeteilte Satz über den Hodographen gehört Hamilton an und steht unter anderem auch bei Appell, Traité de mécanique rationnelle (**1**, 402). Einen anderen Satz setzen wir her: „Bei der Bewegung eines Punktes unter der Einwirkung einer Zentralkraft ist die beschleunigende Kraft umgekehrt proportional dem Abstande des beweglichen Punktes von dem Zentrum der Kraft und direkt proportional dem Krümmungsradius des Hodographen in dem entsprechenden Punkte.“ Als Folgerung hieraus ergibt sich ein Satz von Darboux (C. R. **84**; Appell a. a. O. S. 372). Ferner: Bei der Bewegung eines Massenpunktes unter der Einwirkung einer Zentralkraft, die von einem festen Punkte ausgeht, sind die einem und demselben Kraftgesetze zugehörigen Bahnkurven homolog zu einer und derselben Kurve, wobei die Achse der Homologie willkürlich ist, das Zentrum in dem festen Punkte liegt. — Wenn vier Punkte von gleicher Masse je eine besondere Bahnkurve beschreiben unter der Einwirkung von Zentralkräften, die von einem und demselben Punkte O ausgehen und einen Ausdruck von der Form $\psi(\theta)/r^3$ haben, wenn außerdem die Sektorengeschwindigkeit für die vier Punkte dieselbe ist, so haben die vier Radii vectores der Hodographen, die solchen vier Punkten entsprechen, welche auf jenen vier Bahnkurven und auf einem und demselben von O ausgehenden Strahle liegen, ein konstantes Doppelverhältnis. — Es folgt die Behandlung des Falles einer Kraft $Ar/(r\cos\theta + a)^3$ und allgemeiner $ar/f(x)$. Als Beispiel wird der Fall $f(x) = 3ax + 2\beta$ genauer untersucht und durch die Weierstraßsche Funktion $\wp(u)$ leicht erledigt. Endlich folgt das Kraftgesetz $Ar/(ax^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)^{3/2}$ und die Behandlung des hiermit im Zusammenhange stehenden Differentialgleichungssystems:

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{y}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{g}{r}.$$

Lp.

J. v. Vieth. **Über Zentralbewegung.** Zs. f. Math. u. Phys. 48, 249-265.

Als Bahnkurve einer Zentralbewegung wird die Kurve angenommen, deren Gleichung in Polarkoordinaten r, φ die Gestalt hat

$$(1) \qquad r^n = \frac{p^n}{1 + \varepsilon\cos n\varphi}.$$

Das Kraftzentrum wird im Ursprung O des Koordinatensystems vorausgesetzt. Für den Fall $n = 1$ ist die Kurve ein Kegelschnitt mit O als Brennpunkt (Newtonsches Gesetz), für $n = 2$ ist die Kurve ein Kegelschnitt mit O als Zentrum (elastisches Gesetz). Die Beschleunigung längs r berechnet sich aus

$$g = \frac{(n-2)\,df^2 r^{n-3}}{p^n} - \frac{(n-1)(1-\varepsilon^2)\,df^2 r^{2n-3}}{p^{2n}},$$

wo df die doppelte Sektorengeschwindigkeit bedeutet. Damit jedoch bei einer Zentralkraft von der Form $c_1 r^{n-3} - c_2 r^{2n-3}$ die Bahnkurve (1) zustande komme, ist eine Bedingungsgleichung zwischen den Konstanten c_1, c_2 und denen des Anfangszustandes erforderlich. Die Arbeit behandelt für diese besondere Zentralbewegung noch die Staudesche Schmiegungsbewegung, die Geschwindigkeit und die Erzeugung derselben Bahnkurve durch andere beschleunigende Kräfte. Aus diesem letzten Abschnitte teilen wir folgenden Satz mit. „Bei zwei reziproken Bewegungen eines Punktes auf einer und derselben Kurve, d. h. bei solchen Bewegungen, deren Geschwindigkeiten an jeder Stelle das konstante Produkt Δ^2 haben, verhalten sich die Beschleunigungen beider Bewegungen an jeder Stelle wie die Quadrate der betreffenden Geschwindigkeiten und weichen von der Kurvennormale nach beiden Seiten um denselben Winkel ab." Im übrigen ist zu bemerken, daß die behandelten Kurven schon öfter zu Übungen über Zentralbewegungen benutzt sind, so bei Appell, Traité de mécanique rationnelle **1**, 363, wo ihre Gleichung in der Form $r^k = a \cos k\theta + b$ angenommen ist. Lp.

G. Leby. Sur les mouvements pour lesquels il existe plusieurs centres des aires. Nouv. Ann. (4) **2**, 97-111.

Der Flächensatz erfordert, daß das Produkt $p \cdot v$ einen konstanten Wert hat, wo p das Lot vom Zentrum auf die Tangente der Bahn, v die Geschwindigkeit des Punktes ist. Sind zwei Zentren der Bewegung vorhanden, so bestehen die zwei Gleichungen $p_1 v = c_1, p_2 v = c_2$ oder $p_1 : p_2 = c_1 : c_2$; bei drei Zentren folgt ebenso $p_1 : p_2 : p_3 = c_1 : c_2 : c_3$. Damit ist die Untersuchung auf das Gebiet der Geometrie verpflanzt. Bei zwei festen Zentren bilden die Tangenten der Bahnkurve einen Teil des Painvinschen Komplexes, wie näher nachgewiesen wird. Falls drei Zentren vorhanden sind, gehören die Bahntangenten zwei derartigen Komplexen an, also einer Kongruenz vierter Ordnung und vierter Klasse. Lp.

G. Pennacchietti. Sopra una generalizzazione della formola di Binet sulle forze centrali. Acc. Gioenia di scienze nat. (4) **14**, Nr. 5, 10 S. (1901).

R. Mehmke. Anschauliche Beschreibung einiger Bewegungen. Math.-naturw. Mitt. Württ. (2) **4**, 65-71.

Vortrag über die folgende von A. v. Brill gestellte Prüfungsaufgabe: „Ein materieller Punkt ist genötigt, auf einer Geraden zu bleiben, und bewegt sich unter dem Einfluß einer Anziehungskraft, die nach einem außerhalb der Geraden gelegenen festen Punkte gerichtet und der Entfernung von diesem proportional ist. a) Man soll für jeden Zeitpunkt die Lage und Geschwindigkeit des Punktes sowie den Druck angeben, den er auf die Gerade ausübt. b) Wie gestaltet sich die Lösung, wenn Abstoßung an Stelle der Anziehung eintritt? c) Wie dagegen, wenn zu

der Kraft noch ein Widerstand hinzutritt, welcher der Geschwindigkeit des Punktes proportional ist?“ Die Bemerkungen beziehen sich auf die Deutung der leicht gewonnenen Gleichungen und auf den Nutzen der Hyperbelfunktionen bei vielen Aufgaben. Lp.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE. Sur le problème des brachistochrones. C. R. **185**, 614-618.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE. Quelques cas d'intégration de l'équation des brachistochrones. C. R. **185**, 657-662.

Mit diesen Untersuchungen kommt der Verf. auf ein Thema zurück, das er vor zwanzig Jahren mehrfach behandelt hat (Mém. Sav. étr.; vgl. F. d. M. **16**, 806, 1884 und die vorangehenden Bände). Gegenwärtig formt er eine damals aufgestellte Differentialgleichung der Brachistochrone für ein gegebenes Kraftfeld in die Gestalt um:

$$\frac{d\,\mathrm{Log}\,U}{dx}dy - \frac{d\,\mathrm{Log}\,U}{dy}dx = 2d\omega,$$

wo in bekannter Bezeichnung $U = T - T_0 + \frac{1}{2}v_0^2$ gesetzt ist, ω den Kontingenzwinkel der Kurve bedeutet. Ist die Integrabilitätsbedingung $d^2\,\mathrm{Log}\,U/dx^2 + d^2\,\mathrm{Log}\,U/dy^2 = 0$ erfüllt, so wird das Integral jener Gleichung unter der Form $\mathrm{Log}\,U = \varphi(p) + \psi(q)$ angesetzt, wo

$$p = x + iy,\; q = x - iy$$

gesetzt ist. Durch eine erste Integration gelangt man zur Gleichung:

$$2i(\omega + \alpha) = \varphi(p) - \psi(q).$$

Es wird dann gezeigt, wie die zweite noch auszuführende Integration auf Quadraturen gebracht werden kann. In die Endgleichung gehen zwei Parameter α und β ein, deren jeder eine Kurvengruppe bestimmt, wenn der andere konstant gehalten wird. Die Bedeutung dieser Gruppen wird durch die Angabe zweier charakteristischen Eigenschaften näher bestimmt.

In der zweiten Note werden als Beispiele folgende Fälle durchgerechnet: I. $U = Ar^n$, wo $r^2 = x^2 + y^2$. II. $U = \varrho\varrho'$ (ϱ und ϱ' bipolare Koordinaten). III. $U = \varrho^2\varrho'^2$. Die mathematisch recht interessanten Ergebnisse dieser Spezialuntersuchungen müssen wir hier übergehen. Lp.

E. BUNGERS. Über die Bewegung eines schweren Punktes auf einem Kegelschnitt, der mit konstanter Geschwindigkeit um seine vertikale Hauptachse rotiert. Diss. Halle. 83 S. u. 2 Taf.

Die im Titel genannte Aufgabe führt im allgemeinen auf ein hyperelliptisches Integral. Zur Diskussion der Bewegung bedient sich der Verf. einer Methode, bei welcher die Differentialgleichung unter Benutzung eines graphischen Verfahrens direkt untersucht wird; diese Methode ist unter anderem von L. Henneberg bei dem Falle des einfachen Zentri-

fugalpendels angewandt worden, wovon die vorliegende Aufgabe eine Verallgemeinerung ist. Die sehr ausführlich gehaltene Erörterung erstreckt sich im ersten Abschnitte auf die Ellipse, wobei ein besonderer Teil der spezialisierten Bewegung auf dem Kreise gewidmet wird, im zweiten auf die Hyperbel und im dritten auf die Parabel. Die Projektion der Bahnkurve auf eine zur Rotationsachse senkrechte Ebene wird hierbei untersucht und abgebildet. Ebenso werden diejenigen Fälle, bei denen das hyperelliptische Integral auf ein elliptisches zurückkommt, zur Bestätigung der allgemeinen Ergebnisse genauer durchgerechnet. Das Thema hat sich unter den Händen des sorgfältig arbeitenden Verf. als ein recht ergiebiges erwiesen. Lp.

E. Daniele. Sopra alcuni particolari movimenti di un punto in un piano. I, II. Rom. Acc. L. Rend. (5) 11_1, 362-368, 427-431.

Ist U die Potentialfunktion bei der Bewegung eines Massenpunktes, h die Konstante der lebendigen Kraft, so stellt nach Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, jedes Integral der Gleichung

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 = 2\,(U+h),$$

gleich einer Konstante gesetzt, eine Familie von Orthogonalkurven zu den Bahnkurven des beweglichen Punktes dar. Bezeichnet man daher mit $f(x, y, a)$ ein Integral jener Gleichung (α), das die wesentliche Konstante a enthält, so stellen die beiden Gleichungen $f(x, y, a) = \text{const.}$, $\partial f/\partial a = \text{const.}$ unendlich viele orthogonale Systeme dar, von denen eine Familie durch den Wert der Konstante a charakterisiert ist. Der Verf. stellt die Frage, ob unter jenen Systemen solche vorhanden sind, welche nicht aus einer, sondern aus zwei Familien von Bahnkurven gebildet werden. Es ergibt sich, daß die Potentialfunktion dann ein Integral der Differentialgleichung

$$(\beta) \qquad \frac{\partial^2 \lg U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lg U}{\partial y^2} = 0$$

sein muß, und daß die Konstante h gleich Null zu setzen ist (außer wenn die einwirkende Kraft selbst Null ist). Dann sind die beiden Gleichungen $f = \text{const.}$, $\partial f/\partial a = \text{const.}$ substantiell nicht verschieden. In der zweiten Note wird gezeigt, daß die Bestimmung der fraglichen Systeme der Aufsuchung der Geodätischen auf einer abwickelbaren Oberfläche gleich zu achten ist. Als Anwendung der Theorie wird zuletzt die Zentralbewegung erörtert, bei der die Gleichung (β) stattfindet.

Lp.

E. Daniele. Intorno ad alcuni particolari movimenti di un punto sopra una superficie. Rom. Acc. L. Rend. (5) 11_2, 4-11.

Erweiterung der in den vorigen beiden Noten gefundenen Resultate auf die Bewegung eines Massenpunktes auf einer krummen Oberfläche:

„Die Bedingungen dafür, daß bei der Bewegung eines Punktes auf einer Oberfläche die ∞^2 Bahnkurven, die einem und demselben Werte der Konstante der lebendigen Kraft entsprechen, sich in Orthogonalsysteme einteilen lassen, bestehen darin, daß die Konstante der lebendigen Kraft Null ist (abgesehen von dem Falle, daß die Bewegung auf einer Abwickelbaren mit Nullkräften geschieht), und daß die Potentialfunktion der Gleichung $\Delta_2 \log U = 2K$ genügt ($K =$ Totalkrümmung der Oberfläche). Die Bahnkurven erhält man dann durch zwei bloße Quadraturen, und die Orthogonalsysteme, zu denen sie Anlaß geben, sind isotherm."

Lp.

G. Pennacchietti. Sugl' integrali comuni a più problemi del moto d'un punto materiale sopra una superficie. Atti dell' Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania (4) **15**, 9 S.

Einige Bemerkungen über einen Fall der Bewegung eines Punktes auf einer Drehungsfläche, welcher die größte Ähnlichkeit mit der Bewegung eines sphärischen Pendels darbietet. Vi.

A. G. Greenhill. Le pendule simple sans approximations. Nouv. Ann. (4) **2**, 241-247.

Sind B und B' die beiden höchsten Lagen des materiellen Punktes P und A seine tiefste Lage auf dem Kreisbogen BAB', so beschreibe man denjenigen Kreis, welcher den Pfeil AD des Bogens BAB' zum Durchmesser hat, und lasse auf diesem Hülfskreise einen Punkt Q sich so bewegen, daß Q mit P immer in derselben Horizontale bleibt. Dann bildet sich die diskontinuierliche Bewegung des Punktes P in eine kontinuierliche des Punktes Q auf seinem Kreise ab, bei welcher der Punkt D den beiden Punkten B und B' entspricht. Durch Untersuchung der Bewegung von Q gelangt der Verf. sowohl zu Näherungsformeln für die Schwingungsdauer als auch zu exakten Ausdrücken durch elliptische Funktionen. Weitere Betrachtungen ermöglichen den Nachweis der doppelten Periodizität dieser Transzendenten auf dem angegebenen Wege.

Lp.

S. A. F. White. Note on the compound pendulum. Proc. Phys. Soc. Lond. **18**, 231-234.

Die Note behandelt die Frage, wo die bewegliche Schneide eines Reversionspendels anzubringen ist, damit bei der Messung der Pendellänge aus dem Abstande der beiden Schneiden eine kleine Verschiebung der beweglichen Schneide eine möglichst große Änderung der Schwingungsdauer hervorbringe. Man vergleiche hiermit die Abhandlung von W. Weber in Leipz. Ber. **35**, 7-17 (F. d. M. **16**, 809, 1884), eine Arbeit, die der Verf. nicht gekannt zu haben scheint. Lp.

J. Horn. Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad. Zs. f. Math. u. Phys. 47, 400-428.

Gegen die „Methode der kleinen Schwingungen“, nach der besonders in englischen Arbeiten verfahren wird, ist in der „Theorie des Kreisels“ von Klein und Sommerfeld (S. 364-374) begründete Kritik geübt worden. Zur genaueren Untersuchung der in der Nähe der Gleichgewichtslagen eines Systems erfolgenden Bewegungen bedient sich der Verf. eines bei der exakten Durchführung wichtigen Hülfsmittels, das H. Poincaré in den Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste angewandt hat. In dem vorliegenden Aufsatze wird die Untersuchung auf Systeme mit einem Freiheitsgrad beschränkt, wenn die Kräfte, die von den Koordinaten und den Geschwindigkeiten abhängen, nicht als lineare Funktionen betrachtet werden. Über die Kräfte, sowie über die Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten werden solche Voraussetzungen gemacht, daß kleine ungedämpfte oder gedämpfte Schwingungen entstehen. Unter der üblichen Beschränkung auf die linearen Glieder sind diese Dinge in der „Dynamik diskreter Massenpunkte“ von H. von Helmholtz, herausgegeben von O. Krigar-Menzel, elementar und ausführlich dargestellt. Unter den allgemeineren Annahmen der vorliegenden Arbeit über die der Untersuchung zugrunde liegenden Kräfte ergeben sich unendliche Reihen zur Darstellung der Schwingungen; mit ihrer Hülfe werden dann die nämlichen Fragen untersucht, welche unter den einfacheren Voraussetzungen in der erwähnten elementaren Bearbeitung behandelt sind. Lp.

---

de Sparre. Sur le mouvement du pendule dans le cas des petites oscillations. Brux. S. sc. 26B, 133-147.

Der Verf. gelangt auf elementare Weise in dem Falle kleiner Schwingungen, wenn man die Glieder von der Ordnung des Kubus des Ausschlages vernachlässigen darf, zur Auffindung der Bewegungsgesetze des Pendels sogar für den Fall, wo man die Rotationsbewegung der Erde in Rechnung stellt. Mn. (Lp.)

O. Kragh. Studier over Pendelbevaegelsen. Afhandling for den filosofiske Doktorgrad. Kjöbenhavn: G. E. C. Gad. 92 S. gr. 8°.

Die umfangreiche Arbeit behandelt die Bewegung eines zusammengesetzten Pendels, das sich um seinen Aufhängepunkt allseitig drehen kann mit Berücksichtigung der Drehung der Erde. In der Einleitung wird die Literatur des Gegenstandes besprochen und zugleich bemerkt, daß die Bourschen Untersuchungen über die relative Bewegung den Ausgangspunkt der neuen Rechnungen geliefert haben. Wenn bei der Durchführung elliptische Funktionen anzuwenden sind, hat der Verf. die Jacobischen Formeln benutzt, weil er dabei sogleich die Hermiteschen Formeln aus den bezüglichen Abhandlungen dieses Mathematikers ent-

nehmen konnte. Wegen des großen Umfanges der vorliegenden Schrift und wegen nicht genügender Kenntnis des Dänischen muß Ref. sich auf die Wiedergabe der Überschriften der Paragraphen begnügen, woraus der Inhalt ersichtlich wird.

§ 1. Einfluß von Himmelskörpern auf die Pendelbewegung auf der Erde. § 2. Bours Behandlung der relativen Bewegung. § 3. Berechnung von $H = U + K + G - T$. § 4. Kanonische Form der Bewegungsgleichungen. § 5. Integration der Bewegungsgleichungen. § 6. Ausschlagswinkel und Schwingungszeiten. § 7. Bewegung der Apsidenebene. § 8. Der Einfluß der konischen Bewegung auf die Stellung der Apsidenebene. § 9. Bewegung der Apsidenebene für unendlich kleinen Ausschlag. § 10. Bewegung der Apsidenebene, wenn die Pendelbewegung nahezu kreisförmig ist. § 11 (S. 58-89). Einfluß der Erdrotation auf die Pendelbewegung. Als bemerkenswertes Ergebnis hebt der Verf. hervor, daß die Eulerschen Koordinaten der Pendelachse durch elliptische Funktionen zweiter Art und ihre Differentialquotienten ausgedrückt werden können, auch wenn man die erste Potenz der Winkelgeschwindigkeit der Erde mit in Rechnung nimmt, vorausgesetzt, daß die Trägheitsmomente bezüglich zweier auf einander und auf der Pendelachse senkrechten Achsen durch den Aufhängepunkt des Pendels von gleicher Größe sind (Zs. f. Math. u. Phys. **49**, 315, 1903). Lp.

Andoyer. Sur un problème de mécanique rationnelle. Darboux Bull. (2) **26**, 293-298.

„Zwei beliebige Raumkurven werden durch eine reibungslose Verbindung gezwungen, immer mit einander in Berührung zu bleiben. Welches sind in einem gegebenen Zeitpunkte die mit der Verbindung verträglichen virtuellen Verrückungen, und wie sind die Verbindungskräfte oder Reaktionen beschaffen, die zwischen den beiden Kurven Platz greifen?“ Die Frage nach den vorhandenen Reaktionen ist es, die den Verf. zur Bearbeitung gereizt hat, weil dadurch eine Abweichung von dem üblichen Ansatz durch die Lagrangeschen Gleichungen bedingt ist. Lp.

Fr. Richarz und Paul Schulze. Über asymmetrische Schwingungen um eine Lage stabilen Gleichgewichts. Ann. der Phys. (4) 8, 348-366.

Auch Arch. Néerl.; vgl. F. d. M. **32**, 729, 1901.

Paul Schulze. Über das Unifilarmagnetometer. Ann. der Phys. (4) 8, 714-719.

Die Ausschläge sind beim Unifilarmagnetometer mit tordiertem Faden in viel höherem Grade ungleich, als man gewöhnlich meint. Die Rechnung an einem Beispiele zeigt dies selbst für kleine Ausschläge. Lp.

F. A. Schulze. Die Schwingungsdauer und Dämpfung asymmetrischer Schwingungen. Ann. der Phys. (4) 9, 1111-1123.

Die vorliegende Arbeit führt die von Paul Schulze und F. Richarz angestellten Untersuchungen weiter fort (vgl. F. d. M. 32, 729, 1901). Im ersten Teile, der von der Schwingungsdauer asymmetrischer Schwingungen handelt, wird die von den genannten Autoren aufgestellte Differentialgleichung der asymmetrischen Schwingungen für kleine Amplituden:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -c_1\alpha - c_2\alpha^2$$

integriert; die Schwingungsdauer T ergibt sich hierbei als ein zwischen den beiden Umkehrpunkten $\alpha = \vartheta$ und $\alpha = -\vartheta - 2c_2\vartheta^2/3c_1$ genommenes elliptisches Integral erster Gattung. Durch Diskussion dieses Integrals wird unter Vernachlässigung der Glieder, deren Größenordnung ϑ^2 übersteigt, die Formel erhalten:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{c_1}}\left\{1 + \frac{5}{12}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2\vartheta^2\right\},$$

und es wird bemerkt, daß die Hinzunahme eines Gliedes $-c_3\alpha^3$ in der Differentialgleichung keine prinzipiellen Schwierigkeiten der mathematischen Behandlung verursacht. Die abgeleitete Formel ist an den Schwingungen eines durch Torsion aus dem Meridian abgelenkten, unifilar aufgehängten Magneten geprüft und gut bestätigt gefunden.

Der zweite Teil behandelt die Verteilung der Schwingungsdauer auf die Elongationen rechts und links von der Ruhelage. Durch Diskussion der entsprechenden Integrale ergeben sich die Formeln:

$$T_l = \frac{1}{\sqrt{c_1}}\left\{1 + \frac{5}{12}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2\vartheta^2\right\}\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\frac{c_2}{c_1}\vartheta\right\},$$

$$T_r = \frac{1}{\sqrt{c_1}}\left\{1 + \frac{5}{12}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2\vartheta^2\right\}\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\frac{c_2}{c_1}\vartheta\right\}.$$

T_r wächst mit abnehmender Elongation, T_l nimmt hierbei ab. Für $\vartheta = 0$ nähern sich beide Zeiten asymptotisch dem gleichen Werte. Auch diese Folgerungen wurden durch die Versuche gut bestätigt.

Der dritte Teil der Arbeit ist der Dämpfung der asymmetrischen Schwingungen gewidmet. Die mathematische Behandlung geht von der Differentialgleichung aus

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -c_1\alpha - c_2\alpha^2 - 2b\frac{d\alpha}{dt}.$$

Obgleich sich das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung nach den bekannten Methoden unschwer aufstellen läßt, bedient sich der Verf. von vornherein einer Schlußweise, die nur ein angenähertes Resultat ergibt. Da nach seinen Versuchen die beobachteten Werte durchweg etwas kleiner sind als die berechneten, so muß dahingestellt bleiben, ob

dieser Umstand der abgeleiteten Näherungsformel zuzuschreiben, oder in der zum Ausgangspunkte dienenden Differentialgleichung begründet ist.

Lp.

G. Guglielmo. Intorno a due modi per determinare il raggio di curvatura della superficie dello spigolo nei coltelli delle bilancie e dei pendoli. Rom. Acc. L. Rend. (5) **11**$_2$, 263-271.

Die beiden Seitenflächen der Schneiden, auf denen der Arm eines Wagebalkens oder ein Pendel ruht, stoßen nicht in einer mathematischen Geraden zusammen, sondern gehen durch eine krumme Oberfläche in einander über, die man als eine Zylinderfläche ansehen kann. Da sowohl die Gleichgewichtslage der Wage als auch die Schwingungsdauer des Pendels durch die Gestalt dieser Zylinderfläche beeinflußt wird, so hat sich der Verf. die Aufgabe gestellt, den Krümmungsradius der Zylinderfläche in der Nähe der Gleichgewichtslage zu bestimmen. Die erste, für die Schneiden eines Wagebalkens geeignete Methode beruht darauf, daß, wenn die Schneide durch eine Ebene unterstützt ist, der Wagebalken bei einer Neigung der Ebene um eine Gerade, die zur Schneide parallel ist, sich um einen gewissen Winkel α neigt. Es wird gezeigt, daß für den gesuchten Krümmungsradius ϱ die Formel gilt:

$$\varrho = \frac{L}{P} \cdot \frac{p_1}{\alpha},$$

wo $2L$ die Länge des Wagebalkens, P sein Gewicht, p_1 das in eine Wageschale zu legende Gewicht bezeichnet, damit ein gleicher Ausschlag erzielt werde, wie bei einer Neigung der Unterstützungsebene um α. Die nach dieser Methode an zwei verschiedenen Wagen ausgeführten Messungen haben Werte für ϱ ergeben, die im Mittel 0,0165 mm bei der ersten, 0,0137 bei der zweiten betrugen, außerdem aber auch die Veränderungen von ϱ längs der Schneide erkennen ließen. — Ein zweites, für die Schneiden der Pendel anwendbares Verfahren benutzt ein System von Rädern, wie die Friktionsräder der Atwoodschen Fallmaschine, ist aber vom Verf. bisher nur daraufhin geprüft worden, ob es für größere Krümmungsradien Werte ergibt, die mit den Ergebnissen der Messungen nach anderen Methoden übereinstimmen; die Resultate waren nicht so befriedigend wie die der ersten Methode. Lp.

R. Gilbert. Mouvement initial d'un solide invariable. Nouv. Ann. (4) **2**, 562-564.

Behandlung der Frage: Es sei K ein beliebigen Kräften $F_1, F_2, \ldots, F_n$ unterworfener Körper; man nehme an, dieser Körper sei ursprünglich in Ruhe. Welches wird die Natur seiner Anfangsbewegung sein? Der allgemeine Fall wird auf die beiden besonderen Fälle zurückgeführt, in

denen die gegebenen Kräfte eine Resultante haben und diese Resultante entweder durch den Schwerpunkt von K geht, oder nicht. Lp.

A. Mayer. Symmetrische Lösung der Aufgabe, die Rotation eines starren Körpers, dessen Winkelgeschwindigkeiten bereits gefunden wurden, vollständig zu bestimmen. Leipz. Ber. **54**, 53-62.

Bei den Aufgaben über die Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt pflegt man zuerst die drei Winkelgeschwindigkeiten p, q, r und dann die neun Richtungskosinus α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ zu bestimmen (nach der allgemeinen bekannten Art der Bezeichnung). Sind p, q, r als Funktionen von t gefunden, so kann man die Ermittlung der α_i, β_i, γ_i auf Quadraturen zurückführen. Man ist dabei bisher aber immer unsymmetrisch zu Werke gegangen. Nimmt man indessen das Prinzip des letzten Multiplikators zum Ausgangspunkt, so kann man dasselbe Ziel auch auf ganz symmetrischem Wege erreichen und dabei, wenn man sich auf den Fall der Mechanik beschränkt, wo die gegebenen Funktionen p, q, r reell sind, immer im reellen Gebiete bleiben. Dies auseinanderzusetzen ist der Zweck der vorliegenden Untersuchungen, die sich anfangs ganz der Darbouxschen Darstellung anschließen in den Leçons sur la théorie générale des surfaces, Chap. 2, Tome I. Lp.

G. Pennacchietti. Sulle equazioni differenziali del moto di un corpo solido intorno a un punto fisso. Atti dell' Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania (4) **16**, 8 S.

Die Korkinesche Methode zur Bestimmung von Klassen von Problemen der Bewegung eines Punktes auf einer Fläche mit gemeinschaftlichen ersten Integralen wird bei einigen einfachen Fällen auf Probleme der Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt ausgedehnt. Vi.

A. Wassmuth. Über eine Ableitung der allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers. Wien. Ber. **111**, 777-787; Wien. Anz. 1902, 189-190.

Abweichend von dem unter anderen in Kirchhoffs Mechanik benutzten Verfahren, schlägt der Verf. einen anderen und bisher, wie es scheint, noch nicht betretenen Weg ein, der in einfacher und übersichtlicher Weise zur allgemeinen Lösung der Aufgabe führt. Die Lage eines starren Körpers ist nämlich eindeutig bestimmt, wenn für ein im Raume festes Koordinatensystem (ξ, η, ζ) bekannt sind: I. Die Koordinaten α, β, γ eines (sonst beliebigen) Punktes G im starren Körper und II. die neun Richtungskosinus $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$, welche drei durch G gehende und zu einander senkrechte Achsen (x, y, z) im starren Körper mit den

Achsen (ξ, η, ζ) bilden. Es bestehen dann allerdings zwischen diesen $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sechs Bedingungsgleichungen, so daß in die Lagrangeschen Gleichungen, wenn gerade diese zur Anwendung kommen sollen, sechs vorher noch unbestimmte Faktoren λ_k (Drehungsmomente) eingeführt werden müssen. Es ist indes leicht, diese λ_k zu eliminieren; hieraus erhält man sofort die allgemeinsten Bewegungsgleichungen. Lp.

A. Föppl. Lösung des Kreiselproblems mit Hülfe der Vektoren-Rechnung. Zs. f. Math. u. Phys. 48, 272-284.

Um die Vorzüge der Vektorenrechnung bei der Behandlung mechanischer Probleme an einem nicht allzu einfachen Beispiele darzutun, kommt der Verf. auf die schon lange gelöste Frage der Bewegung des symmetrischen Kreisels mit festgehaltener Spitze bei beliebig angegebenen Anfangsbedingungen unter dem Einflusse seines Gewichtes zurück. Er beschränkt sich deshalb darauf, die allgemeine Lösung des Problems abzuleiten; dagegen geht er nicht auf die Diskussion der Formeln und ihre Verarbeitung mit Hülfe der elliptischen Funktionen ein. Von den Hülfsmitteln der Mechanik wird fast nur der Flächensatz benutzt. Lp.

R. Marcolongo. Teoria del giroscopio simmetrico pesante. Annali di Mat. (3) 7, 99-128.

Nachdem der Verf. in verschiedenen Arbeiten seine bezüglichen Untersuchungen veröffentlicht hat (vgl. F. d. M. **25**, 1434, 1893/94; **28**, 623, 1897; **32**, 732, 1901), gibt er in der vorliegenden Abhandlung eine „elementare und zugleich vollständige Theorie des schweren symmetrischen Gyroskops, welche auf dem einfachsten Wege die Ableitung der bemerkenswertesten Eigenschaften der Bewegung ermöglicht“. Als „verallgemeinerte Herpolhodie“ wird zuerst die ebene Bahnlinie eines beweglichen Punktes untersucht, die den folgenden beiden Gesetzen gehorcht: 1. Die Flächengeschwindigkeit ist eine biquadratische Funktion des Radiusvektors. 2. Das Quadrat der totalen Geschwindigkeit ist ebenfalls eine biquadratische Funktion des Radiusvektors. Die mit Hülfe Greenhillscher und Halphenscher Formeln durchgeführte Rechnung führt zu dem Satze: „Die einzige von einem Punkte gemäß den Darbouxschen Gesetzen beschriebene Kurve ist die Herpolhodie einer Poinsot-Bewegung. In den folgenden beiden Abschnitten werden die Definitionen und Bezeichnungen festgestellt, die Differential- und Integralgleichungen hingesetzt. Ist OJ die Achse des Impulspaares, so werden die vom Punkte J im Raume und im Körper beschriebenen Kurven bezw. erste und zweite Impulskurve genannt. Nimmt man auf der Symmetrieachse des Körpers vom festen Punkte O an die Strecke $OV = 1$, so wird V der Scheitel des Gyroskops genannt und die vom Punkte V im Raume beschriebene Kurve die Scheitelkurve. Beide Impulskurven, die nun näher untersucht werden, erweisen sich als

Herpolhodien einer Poinsot-Bewegung. Der dann folgende Abschnitt beschäftigt sich mit den Eigenschaften der Polhodie und in größerer Ausführlichkeit mit denen der Herpolhodie des symmetrischen Gyroskops. Von den verschiedenen Sätzen führen wir an: Die Horizontalprojektion der Herpolhodie eines symmetrischen Gyroskops ist nicht eine Herpolhodie einer Poinsot-Bewegung. Die horizontale stereographische Projektion der Herpolhodie des schweren symmetrischen Gyroskops aus den beiden Schnittpunkten der vertikalen Achse mit der Kugel ist eine verallgemeinerte Herpolhodie und daher durch doppeltperiodische Funktionen zweiter Gattung und erster Stufe ausdrückbar. — Die Untersuchung der Scheitelkurve lehrt: Die stereographische Projektion der Scheitelkurve auf die Horizontalebene ist eine verallgemeinerte Herpolhodie — Hiernach ergibt sich also: Alle geometrischen Elemente, welche die Bewegung eines schweren symmetrischen Kreisels definieren, können durch doppeltperiodische Funktionen zweiter Gattung und erster Stufe dargestellt werden.

Der nächste Abschnitt beschäftigt sich mit der Vergleichung der Bewegungen mehrerer ähnlicher Gyroskope. Diese Bewegungen unterscheiden sich nur durch eine gleichförmige Rotation um die Symmetrieachse. Im letzten Abschnitte erfährt dann endlich das Jacobische Theorem, dem der Verf. mehrere seiner früheren Veröffentlichungen gewidmet hat, eine eingehende Behandlung, bei welcher, wie in der ganzen Arbeit, die geometrischen Gesichtspunkte besondere Berücksichtigung erfahren. Lp.

Jos. Haug. Über die Drehung eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt. Pr. Theresien-Gymn. München. 17 S. 8°.

Die Arbeit schließt sich an die Untersuchungen von F. Lindemann über dieses Thema an (vgl. F. d. M. **29**, 627, 1898). Während aber Lindemann in seinen Rechnungen die Jacobischen elliptischen Funktionen beibehalten hat, erzielt Haug weitere Vereinfachungen in der Rechnung durch Einführung der Weierstraßschen $\wp$-Funktionen, und besonders einfach gestaltet sich dabei die von Hermite gegebene Lösung des Problems durch Integration Laméscher Differentialgleichungen. I. Stellung des Problems. II. Einführung der Funktion $\wp(u)$. III. Direkte Ausführung der Integrationen. IV. Ausführung der Integrationen durch Zurückführung auf Lamésche Differentialgleichungen. Lp.

D. Bobylew. Über das perimetrische Rollen eines Kreisels, dessen Schwerpunkt unter dem Unterstützungspunkte liegt. (Bearbeitet von Th. Friesendorf.) Zs. f. Math. u. Phys. 47, 354-367.

Befestigt man über einem Kreisel, dessen Schwerpunkt unterhalb des Unterstützungspunktes liegt, eine horizontale Scheibe mit Rändern von beliebiger Gestalt, und wird die Entfernung der Scheibe vom Unterstützungspunkte des Kreisels mit oberem längerem Stiel so gewählt, daß

das obere Ende des Stieles nie unter die Scheibe gelangen darf, sondern der Stiel sich ständig auf den Rand stützen kann, so rollt der rotierende Kreisel mit seinem Stiele längs des ganzen Randes der Scheibe (die z. B. die Form eines S haben kann). Eine derartige Bewegung ist früher von dem französischen Physiker Sire beobachtet und perimetrisches Rollen genannt, mathematisch dann von Resal im Traité de cinématique pure behandelt (1862), wo der allgemeine Fall des mit Gleiten verbundenen Rollens untersucht ist; endlich hat Bobylew in seinem Lehrbuche der analytischen Mechanik das Problem des perimetrischen Rollens ohne Gleiten für eine beliebige Gestalt der Randkurve erledigt. In der gegenwärtigen Abhandlung wird die Lösung desselben Problems einfacher dargestellt, und dabei werden für den Fall eines kreisförmigen Randes die Bedingungen ermittelt, unter denen der Stiel des Kreisels den Rand nicht verläßt und nicht zu gleiten anfängt; ferner werden die Bewegungen betrachtet, die dann eintreten, wenn der Stiel den Rand verläßt und ihn wieder berührt. Für beliebige Gestalten des Randes wird endlich das Problem analog behandelt. Es zeigt sich, daß die Formeln, die den Druck des Kreisels auf den Rand ausdrücken, ein von der geodätischen Krümmung der Randkurve abhängiges Glied enthalten. Lp.

M. Koppe. Die Bewegung des Kreisels. Berl. Math. Ges. Ber. **1**, 22-24.

Zur Erklärung der Erscheinungen bei der Bewegung eines Kreisels führt der Verf. eine „fingierte Kraft" ein, die er schon früher zu gleichem Zwecke benutzt hat und die, wie am Schlusse bemerkt wird, mit Poinsots Zentrifugalkräften und der Coriolisschen Kraft auf eine Linie zu stellen ist. Mit Hülfe dieser fingierten Kraft werden die Eigentümlichkeiten der Bewegung nicht nur qualitativ, sondern innerhalb gewisser Grenzen auch quantitativ bestimmt. Für den glockenförmigen Kreisel, dessen Schwerpunkt unter dem Unterstützungspunkt liegt, wird das Hauptergebnis des „perimetrischen Rollens" (vgl. die Abhandlung von Bobylew in Zs. f. Math. u. Phys. **47**, 354-367, Bericht vorstehend) ebenfalls auf diese Weise gewonnen und ausgesprochen. Lp.

Fritz Kötter. Ein Beweis des Jacobischen Theorems von der Zusammensetzbarkeit einer Kreiselbewegung aus den Inversionen zweier Poinsotbewegungen. Berl. Math. Ges. Ber. **1**, 11-12.

Enthält bloß die Angabe, der Verf. habe in seinem Vortrage für das Jacobische Theorem, daß sich jede Kreiselbewegung aus den Umkehrungen zweier Poinsot-Bewegungen zusammensetzen lasse, einen Beweis gegeben, bei welchem in dem Ansatz für die Differentialgleichungen der Bewegung des Kugelkreisels die charakteristische Eigenschaft zum Ausdruck kommt. Lp.

G. Kolossoff. Über eine Eigenschaft der Differentialgleichungen der Rotation eines schweren Körpers um einen festen Punkt im Falle von Frau S. Kowalewski. Math. Ann. 56, 265-272.

Es wird gezeigt, daß sich die sechs Differentialgleichungen des Problems mit Hülfe zweier der bekannten vier Integrale derselben auf zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung reduzieren lassen, und zwar auf die der Bewegung eines materiellen Punktes in der Ebene unter dem Einflusse einer Kraft, welche eine Kräftefunktion besitzt, die eine gewisse Funktion der Entfernungen des Punktes von zwei in derselben Ebene liegenden Zentren ist. Hierdurch wird es möglich, die Methode von Jacobi-Hamilton auf das Problem anzuwenden und die ultraelliptischen Differentialgleichungen zu ermitteln, auf welche Frau Kowalewski die Integration der Differentialgleichungen des Problems reduziert hat. Lp.

G. Kolossoff. Sur le cas de M. Goriatchoff de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe. (Extrait d'une lettre à M. Marcolongo). Palermo Rend. 16, 346-348.

R. Marcolongo. Osservazioni intorno alla nota del Sig. Kolossoff „Sur le cas de M. Goriatchoff de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe.“ Palermo Rend. 16, 349-357.

In beiden Noten werden die Ergebnisse der Untersuchungen von Gorjatschoff (F. d. M. **30**, 658-660, 1899) näher dargelegt. Marcolongo, dessen Ausführungen den Charakter eines eingehenden Referates haben, berücksichtigt dann auch in gleicher Weise die Forschungen Tschaplygins (F. d. M. **30**, 660, 1899 u. **32**, 733, 1901) und hebt besonders hervor, daß, wie Fr. Kötter die Lösung des Falles der Frau Kowalewski durch Thetafunktionen zweier Argumente bis zu abschließenden Endformeln geführt hat, so auch im vorliegenden Falle die sechs Größen $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ durch Thetafunktionen zweier Argumente, die beide lineare Funktionen der Zeit sind, ausgedrückt werden können.

Lp.

G. Kolossoff. On the Goriatshoff's case of rotation of a heavy body about a fixed point. Messenger (2) 32, 84-88.

Über den Gorjatschoffschen Fall der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt und seine Verallgemeinerung durch Tschaplygin vergleiche man F. d. M. **30**, 659 und 660, 1899. Der letztere Mathematiker hat zu den vor ihm bekannten drei Integralen des Problems ein viertes hinzugefügt und das Rotationsproblem auf ultraelliptische Quadraturen gebracht. Kolossoff zeigt, daß man diese Formeln erhalten kann, ohne das Tschaplyginsche Integral zu benutzen, indem man die Hamiltonsche Methode zur Lösung dynamischer Probleme an-

wendet. Eine ausführlichere Behandlung der Aufgabe soll in Palermo Rend. erscheinen. Lp.

O. Perron. Über die Drehung eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt bei Wirkung äußerer Kräfte. München. 43 S.

L. Lecornu. Sur les petits mouvements d'un corps pesant. S. M. F. Bull. 30, 71-82.

Am Beginne der Arbeit wird bemerkt, daß man zwar in dem allgemeinen Falle die Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren Körpers, der einen festen Punkt besitzt, nicht integrieren kann, daß jedoch jede Schwierigkeit schwindet, sobald man sich auf die Erforschung des Falles beschränkt, bei welchem die Geschwindigkeiten unendlich klein sind; die hierbei sich ergebenden einfachen Resultate werden abgeleitet. Ohne auf die durch die gemachte Annahme herbeigeführten Vereinfachungen der bekannten Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt einzugehen, führen wir folgende, vom Verf. hervorgehobenen Sätze an, die aus seiner Analyse fließen:

Die allgemeinste (unendlich langsame) Bewegung eines starren Körpers, der einen festen Punkt besitzt, erhält man durch die Zusammensetzung einer gleichmäßigen Rotation um die Vertikale mit zwei oszillatorischen Bewegungen um zwei geneigte Achsen, welche in zwei zu einander rechtwinkligen Vertikalebenen liegen und der in bezug auf das Trägheitsellipsoid zur Vertikale konjugierten Ebene angehören. — Damit der ohne Anfangsgeschwindigkeit sich selbst überlassene Körper um die eine der Rotationsachsen oszilliere, ist es notwendig und hinreichend, daß im Anfangsmomente der Schwerpunkt sich in der durch die zweite Achse bestimmten Vertikalebene befindet. — Damit der mit einer endlichen Winkelgeschwindigkeit versehene Körper sich um eine unbewegliche Achse drehe, muß diese Achse vertikal und außerdem in einem ihrer Punkte Hauptachse sein. Die Rotationsgeschwindigkeit ω ist konstant und befriedigt die Beziehung $\omega^2 \varrho = g$, wo g den Abstand des festen Punktes von dem Punkte bezeichnet, für welchen die Rotationsachse Hauptachse ist. — In einer Schlußnote setzt der Verf. das Verhältnis seiner Untersuchung zu der Arbeit von Staude (F. d. M. 25, 1428, 1894) auseinander, von der er erst nach Mitteilung seiner Ergebnisse an die Soc. Math. Kenntnis erhalten hatte. Lp.

J. Kozák. Berechnung der allgemeinen Schießtafeln und deren Benutzung zur Lösung von Aufgaben aus der Schießlehre. Mitt. üb. Art. u. Genie 33, 651-869, 893-956, 1003-1046.

Die Abhandlung, die im Sonderdrucke ein handliches Buch ausmacht, enthält eine Anleitung für die Aufstellung von allgemeinen Schießtafeln auf Grund und unter Benutzung der vorhandenen Literatur, die Be-

gründung der im Anhange angeführten Formeln und Tabellen, endlich auch Erläuterungen zu dem österreichischen Dienstbuche, Teil Schießwesen. Zweck der Veröffentlichung ist eine gedrängte und doch vollständige systematische Zusammenstellung aller Daten über den in Österreich geübten Vorgang für eine sachgemäße Verwertung der Schießversuche behufs der Berechnung von Schießtafeln; dadurch soll dem Leser das Nachschlagen in anderen, den Gebieten der Ballistik, Physik oder Mechanik angehörenden Werken erspart werden. Nicht für Mathematiker oder Physiker, sondern für den artilleristischen Praktiker ist die Schrift bestimmt; deshalb ist fast durchweg nur von der niederen Mathematik Gebrauch gemacht. Ein besonderer Wert ist auf die Beigabe zahlreicher, möglichst zweckmäßig gewählter und vollständig gelöster Beispiele gelegt. Für die Zwecke des Jahrbuchs genügt die Wiedergabe der Überschriften für die einzelnen Kapitel. I. Angaben der Schußtafeln im allgemeinen. Darstellung von Schießtafel-Kurven und Darstellung der Flugbahnen. II. Ableitung der Formeln zur Berechnung des spezifischen Gewichts der Luft. III. Gradmaß, Bogenmaß und Strichmaß eines Winkels (1 Strich = Winkel zum Bogen 0,001 r). IV. Reduktion der Schußweiten auf Windstille. V. Allgemeines über Chronographie. VI. Schießtafelberechnung im engeren Sinne. VII. Theorie des Aufsatzes. VIII. Bestrichener, gedeckter und gesicherter Raum. IX. Überschießen von Deckungen. X. Abweichungen infolge bekannter Änderungen des Abgangswinkels, der Anfangsgeschwindigkeit, des spezifischen Luftgewichts, des Geschoßgewichts. XI. Treffwahrscheinlichkeit und Methode der kleinsten Quadrate. XII. Bestimmung des Sprengintervalls und der Tempierung aus der Sprenghöhe. Bestimmung der Korrekturmaße. XIII. Bestimmung der Geschoßenergie und Charakterisierung der Panzerformeln. XIV. Berechnung der Ordinaten und der Einfallswinkel mit Hülfe der Schießtafelangaben. Reduktion der Geschoßaufschläge. XV. Bestimmung des Elevationswinkels und der Tempierung beim Beschießen von nicht im Mündungshorizonte gelegenen Zielen. — Anhang. — Außer der Kapiteleinteilung ist noch die Bezifferung nach 127 Nummern mit Sondertiteln zu erwähnen. Lp.

J. Kozák. Berechnung der Objekts-Schießtafeln aus den allgemeinen Schießtafeln. Mitt. üb. Art. u. Genie 33, 453-478.

Schießtafeln für im Mündungshorizonte gelegene Ziele heißen gewöhnlich allgemeine Schießtafeln zum Unterschiede von den Objekts-Schießtafeln, welche beim Schießen aus Küstenwerken benutzt werden und auf Grund der allgemeinen Schießtafeln für jedes einzelne Küstenwerk auszuarbeiten sind. In den Objekts-Schießtafeln sind die Elevationswinkel mit Rücksicht auf die Seehöhe des Werks gerechnet, die Korrekturen der Längenabweichung, die 50-prozentigen Längenstreuungen, die bestrichenen Räume usw. auf den Meeresspiegel reduziert. Die vorliegende Veröffentlichung gibt nur Anhaltspunkte zur Verfassung von Objekts-Schießtafeln auf Grund von bereits berechneten allgemeinen Schießtafeln und

setzt nur die einfachsten Kenntnisse aus der Mathematik und Ballistik voraus. Unter 21 Nummern werden die hauptsächlich in Betracht kommenden Fragen an Zahlenbeispielen erläutert. Lp.

E. Fasella. Tavole balistiche secondarie del Comandante E. Fasella. Genova: R. Ist. Sordomuti (1901).

B. Schöffler. Gesetz der zufälligen Abweichungen. Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Anwendung auf die Theorie des Schießens. Mitt. üb. Art. u. Genie 33, 97-139, 366-406.

Fortsetzung und Schluß der sich durch drei Jahrgänge hinziehenden Veröffentlichung (vgl. F. d. M. **31**, 711, 1900 u. **32**, 752, 1901). Abschnitte: 4. Theoretische Grundlage zur Beurteilung und Aufstellung von Schießregeln. 5. Schrapnellschießen. 6. Schießen auf Fesselballons. 7. Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Bestimmung der Streuungen der Schrapnellsprengpunkte, wenn der Brennzünder mit mehreren gleichzeitigen tätigen Satzsäulen versehen wird. Lp.

L. Bourdelles. Méthode de correction automatique de la dérivation et de l'influence du vent. Revue d'Art. 61, 54-68.

Ein mechanisches Verfahren zur Ausgleichung des Windeinflusses auf das Geschoß wird in einer Abänderung der Lage der Vorrichtung zum Zielen gefunden und theoretisch begründet. Lp.

Krause. Die Witterungsverhältnisse und ihr Einfluß auf die Flugbahn des 8mm-Geschosses. Kriegstechn. Zs. 5, 433-452.

Zusammenstellung der praktisch und der theoretisch ermittelten Resultate über diese Frage. Lp.

A. Dähne. Vorschlag zur Verbesserung der Artilleriegeschosse und Vorschläge zu ballistischen Versuchen. Kriegtechn. Zs. 5, 497-504, 553-561.

Der Verf. der Schrift: „Neue Theorie der Flugbahn von Langgeschossen auf Grund einer neuen Theorie der Drehung der Körper" (Berlin, 1888) benutzt die Gelegenheit, um neben seinen artilleristischen Vorschlägen gegen einige Stellen im Kompendium der theoretischen äußeren Ballistik von Cranz zu polemisieren und dann auch die mathematische Behandlung der Zusammensetzung von Drehungen als unzulässig zu erklären. Lp.

R. Kühn. Rohrrücklaufgeschütze; deren Aufbau und Beanspruchung. Mitt. üb. Art. u. Genie **33**, 551-586.

Neben den technischen Einrichtungen wird auch die Theorie des Rücklaufs in mathematischer Form behandelt, so unter anderem die Differentialgleichung dieser Bewegung aufgestellt und integriert. Im übrigen wird auf den Artikel von Sock „Zur Theorie der hydraulischen Geschützbremsen“ (F. d. M. **30**, 673, 1899) verwiesen. Lp.

D. De Francesco. Sul moto di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante. Math. Ann. **55**, 573-584.

Der Aufsatz ist ein Selbstreferat des Verf. über die Reihe der von ihm über das Thema veröffentlichten Arbeiten nebst einer kleinen historischen Einleitung. Da im Jahrbuche regelmäßig über diese Abhandlungen referiert ist (vgl. die Jahrgänge 1900 und 1901), so ist es nicht nötig, auf die vorliegende Veröffentlichung näher einzugehen. Lp.

Ph. Furtwängler. Über die Schwingungen zweier Pendel mit annähernd gleicher Schwingungsdauer auf gemeinsamer Unterlage. Berl. Ber. 1902, 245-253.

Von den beiden Abschnitten des Aufsatzes behandelt der erste die Differentialgleichungen des Problems, der zweite die Folgerungen aus ihnen. Als Eigentümlichkeit der Methode ist die Benutzung der Analogie zwischen den linearen homogenen Differentialgleichungen und den algebraischen Gleichungen zu bezeichnen. Die linken Seiten der auf Null gebrachten Differentialgleichungen werden gewissermaßen in Linearfaktoren zerlegt unter Benutzung komplexer Größen, und es wird die Störung bestimmt, die ein einzelner Linearfaktor durch die Störungsglieder erleidet. Im zweiten Teile wird gelehrt, wie die erhaltenen Formeln für die bisher im Gebrauche gewesenen Methoden zu benutzen sind. Dann wird aber auch gezeigt, daß sich auf die Resultate eine neue Methode gründen läßt, welche als wesentlichen Bestandteil Beobachtungen von Schwingungsdauern enthält. Angestellte Versuche haben gezeigt, daß diese Methode ohne Schwierigkeit durchführbar ist und dieselbe Genauigkeit liefert wie die anderen vom Verf. besprochenen. Eine ausführlichere Veröffentlichung wird in Aussicht gestellt. Lp.

A. Mayer. Über den Zusammenstoß zweier Körper unter Berücksichtigung der gleitenden Reibung. Leipz. Ber. **54**, 208-243, 327-331.

Das vom Verf. behandelte Problem lautet: „Zwei rauhe Körper von den Massen M und M', die in bekannter freier Bewegung begriffen sind, stoßen in einem Punkte O zusammen, der für ihre beiderseitigen Oberflächen kein singulärer Punkt ist, so daß diese in O zur Berührung

kommen. Es handelt sich darum, aus dem gegebenen Bewegungszustande beider Körper beim Beginn des Zusammenstoßes ihren Bewegungszustand am Ende desselben zu finden."

Wie in der Einleitung zur Arbeit bemerkt wird, ist das Problem von Darboux in seiner „Étude géométrique sur les percussions et le choc des corps" behandelt worden (Darboux Bull. (2) **4**, 126-160; F. d. M. **12**, 683, 1880). Ebenso ist Routh in seinem Werke Rigid dynamics auf diese Aufgabe eingegangen, hat aber nur das ebene Problem gründlich untersucht, dem allgemeinen Problem im Raume dagegen nur wenige Seiten gewidmet und dabei noch eine falsche Behauptung aufgestellt. Offenbar hat Routh die erschöpfende Darbouxsche Darstellung, die er nicht zitiert, nicht gekannt, während andererseits seiner Art der Behandlung eine vorzügliche Klarheit und Anschaulichkeit durch die Einführung des „darstellenden Punktes" eigen ist. Diese letzte Eigenschaft wird an der Darbouxschen Lösung vermißt, weil sie das Phänomen nicht, wie die Routhsche immer, von Anfang bis zu Ende hin Schritt für Schritt durch seine verschiedenen Phasen verfolgt.

Aus diesen Gründen hat der Verf. mit der ihm eigenen klaren und scharf logischen Darstellung den Versuch gemacht, „in engstem Anschluß an Darboux, aber sozusagen in Routhscher Darstellungsweise eine vollständige Lösung des Problems sowohl für unelastische, wie auch für elastische Körper zu geben".

Die Lösung erweist sich als abhängig von einer aus den Konstanten der Aufgabe sich zusammensetzenden Konstante K: „Gelangt während des Zusammenstoßes der darstellende Punkt m überhaupt an die Gerade $V=0$, so bleibt er nunmehr beständig auf ihr, oder verläßt dieselbe sofort wieder, je nachdem $K>0$ oder <0 ist. Im ersten Falle geht von dem Momente an, wo $V=0$ wurde, das Aufeinandergleiten der beiden Körper in ein bloßes Rollen über, im zweiten dagegen wird V nur augenblicklich Null, und die beiden Körper müssen nach wie vor auf einander gleiten."

In dem ersten Aufsatze wird der Grenzfall $K=0$, in welchem den Reibungsgesetzen gemäß während des Zusammenstoßes die Gleitungsgeschwindigkeit V, wenn sie überhaupt einmal Null wird, an und für sich ebensowohl Null bleiben wie auch wieder positiv werden kann, ganz von der Betrachtung ausgeschlossen. Nachträglich hat der Verf. gefunden, daß dieser Fall weniger Schwierigkeiten darbietet, als er ursprünglich glaubte. Er fügt daher in dem zweiten Artikel hinzu, wie sich in diesem besonderen Falle der Verlauf des Zusammenstoßes gestaltet. Lp.

Eug. Stübler. **Bewegung einer auf horizontaler Ebene rollenden Kugel, deren Schwerpunkt im Mittelpunkt liegt.** Inaug.-Diss. Tübingen. Stuttgart: Heinr. Enderlen. 35 S. 8° u. 3 Taf.

Das Beispiel der auf einer horizontalen Ebene rollenden Kugel ist 1888 von Padova und 1889 von Crescini behandelt worden (Rom.

Acc. L. Rend. (4) 4_1, 507-509 u. (4) 5_1, 204-209; F. d. M. **20**, 478 u. **21**, 942); doch entsprechen die mit Anwendung des Hamiltonschen Prinzips gefundenen Resultate nicht der wahren Bewegung. In die Formel der lebendigen Kraft, von der jene Autoren ausgehen, ist nämlich von vornherein die Beziehung aufgenommen, welche bei der rollenden Bewegung zwischen Drehungs- und Verschiebungsgeschwindigkeit besteht; die Kugelbewegung braucht jedoch durchaus nicht eine rein rollende zu sein. Dagegen hat Hölder in seiner Abhandlung über die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis (Gött. Nachr. 1896; F. d. M. **27**, 574) die richtigen Bewegungsgleichungen der auf einer horizontalen Ebene rollenden Kugel als ein Beispiel abgeleitet. Der Verf. der vorliegenden Schrift untersucht im Anschluß an die Hölderschen Gleichungen die wahre Bewegung einer auf horizontaler Ebene ohne Gleitung frei rollenden (nicht homogenen) Kugel und führt insbesondere den Fall näher aus, bei welchem zwei Hauptträgheitsmomente einander gleich sind, der dann bei der Bestimmung des dritten Eulerschen Winkels auf elliptische Transzendenten führt. Lp.

A. Petot. Sur les conditions de stabilité des automobiles dans les courbes. C. R. **134**, 765-768.

Ein neuer Beitrag des Verf. zur Lösung theoretischer Fragen betreffs der Automobile (vgl. F. d. M. **30**, 673, 1899 u. **32**, 742, 1901). In der vorliegenden Note werden die Bedingungen für die Konstruktion und die Führung eines Automobils entwickelt, damit die Unfälle des Ablösens oder Umstürzens möglichst vermieden werden. An die Stelle des wirklichen Wagens ist ein schematischer, natürlich vom Wagen abweichender Körper gesetzt worden. Die Ergebnisse sind daher vom Verf. selbst als erste Annäherungsversuche bezeichnet. Lp.

E. Ferron. Théorie mécanique des bicycles et locomotives. Paris: Gauthier-Villars. 19 S. 4° u. 4 Taf.

The resistance of road vehicles to traction. Brit. Ass. Rep. 1902, 314-349.

Im ersten Abschnitte wird erklärt, daß die ersten zehn Abschnitte des Berichtes eine Übersicht über die den Wegwiderstand betreffenden Arbeiten von den frühesten Zeiten an bringen, für welche Nachrichten erhältlich sind. Über weitere Versuche mit dem Apparate der British Association wird später berichtet. Die folgende Inhaltsübersicht gibt eine Vorstellung von der Natur des Berichtes. II. Die Arbeiten von Corréze und Manès (1832). III. Die Leistung von Coriolis (1835). IV. Versuche und Schlüsse des Generals Morin (1837/42). V. Die Untersuchungen von M. Dupuit. VI. Theoretische Forschung von Edmund

Leahy (1847). VII. Die Leistung von M. Charié-Marsaines. VIII. Versuche von A. Michelin (1896). IX. Auszug aus dem Berichte des Professors Unwin über die Versuche selbstlaufender Fahrzeuge zu Birmingham (1897). X. Experimente des Professors Hele-Shaw (1897). XI. Forschungen von Professor Ira O. Baker (1902). XII. Übersicht über die Ansichten verschiedener Autoren betreffs der Beziehung zwischen Zugwirkung und den verschiedenen unabhängigen Elementen des Wegwiderstandes. XIII. Beschreibung und Zeichnungen des neuen für den Ausschuß der British Association angefertigten Dynamometers zur Fortführung der Untersuchungen. XIV. Natur und Ziel der Experimente des Ausschusses. XV. Die der Versammlung vorgetragene Leistung des Ausschusses.

Gbs. (Lp.)

F. Jung. Zur geometrischen Behandlung des Massenausgleiches bei vierkurbeligen Schiffsmaschinen. Zs. f. Math. u. Phys. **48**, 108-125.

Der Ausgleich der Massenwirkungen bei mehrkurbeligen Schiffsmaschinen nach Schlick ist besonders von Schubert und Lorenz auf vornehmlich rechnerischem Wege behandelt worden (vgl. F. d. M. **32**, 741, 1901). Der Verf. leitet einige von jenen Autoren gefundenen Sätze über Vierkurbelmaschinen auf geometrischem Wege unter möglichst beschränkter Verwendung von Rechnung ab und erhält dabei einige in besonders einfacher Gestalt; zwei seiner Sätze hält er in der aufgestellten Form für neu.

Lp.

B. Hydrodynamik.

V. Bjerknes. Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C. A. Bjerknes' Theorie. Bd. II. Leipzig: Joh. Ambr. Barth. XVI u. 316 S. 8°.

Obgleich der vorliegende zweite Band die unmittelbare Fortsetzung des ersten bildet, kann er unabhängig für sich gelesen werden, weil die Versuche zur Bestätigung der im ersten Bande analytisch abgeleiteten Resultate an sich einen neuen Eingang zu dem Studium des gesamten Erscheinungskomplexes geben und außerdem eine vorausgeschickte elementare Einleitung die Versuche verständlich macht, ohne daß auf die umständlicheren mathematischen Entwicklungen zurückgegriffen zu werden braucht (vergl. F. d. M. **31**, 718, 1900).

Der erste Teil beschäftigt sich mit der Ableitung der hydrodynamischen Fernkräfte, indem der erste Abschnitt die qualitativen Gesetze der hydrodynamischen Fernkräfte nachweist, der zweite die quantitative Formulierung der Resultate bringt. Der zweite Teil beschreibt in zwölf Abschnitten die Versuche über hydrodynamische Fernkräfte. Seit 1880 hatte C. A. Bjerknes ein kleines eigenes Laboratorium mit Unterstützung des norwegischen Staates eingerichtet; in demselben übernahm V. Bjerknes die experimentelle und konstruktive Arbeit. Die Schilderung dieser Ver-

suche (S. 41-221) nimmt mehr als die Hälfte des Buches ein. In ihrer Mannigfaltigkeit entziehen sie sich einer kurzen Berichterstattung; wir müssen uns begnügen, auf den Scharfsinn bei der Erdenkung und die Geschicklichkeit bei der Ausführung derselben hinzuweisen.

Während der zweite Teil die hydrodynamischen Grundlagen für die Betrachtungen des dritten und letzten Teiles enthält, ist dieser selbst der Diskussion der Analogie der hydrodynamischen Erscheinungen mit den elektrostatischen und den magnetischen gewidmet. Eine besonders große Erleichterung hat hierbei die Einführung des Heavisideschen rationellen Einheitssystems gebracht. Da aber somit die elektrischen und magnetischen Erscheinungen in einer Form beschrieben werden, welche den meisten Lesern fremd sein dürfte, so hat der Verf. die betreffenden Teile der Lehrgebäude der Elektrizität und des Magnetismus neu entwickelt. Daher hat der dritte Teil dieses Bandes (S. 221-300) gewissermaßen die Form eines Lehrbuches der Elektrizität und des Magnetismus erhalten und kann als solches an sich interessieren, vor allem wegen der Anschaulichkeit, welche man den sonst so abstrakten Theorien durch Heranziehung der hydrodynamischen Bilder geben kann.

In einem Rückblicke und in Schlußbetrachtungen werden die Ergebnisse der Untersuchung kurz zusammengefaßt. Wir setzen aus dem letzten Paragraphen die Überlegungen des Verf. bezüglich der Ursachen der aufgedeckten Analogien her.

„Hinter der Frage nach den Bildern und ihrer praktischen Verwertung erhebt sich eine andere von ungleich größerer Wichtigkeit: Warum besteht diese Ähnlichkeit zwischen hydrodynamischen Erscheinungen und den elektrischen und magnetischen? Denn niemand wird sich durch die Erklärung befriedigt finden, daß eine Analogie von dieser Ausdehnung und dieser Schärfe auf einem Zufall beruht. Sie muß ihre Ursache in irgend einer formalen oder realen Verwandtschaft zwischen den zwei Klassen von Erscheinungen haben, sei es, daß hinter den elektrischen oder magnetischen Erscheinungen ein Mechanismus steckt, welcher wesentliche Züge mit dem von uns studierten Mechanismus gemein hat, sei es, daß wir uns über die Ursachen noch keine Vorstellungen machen können. Um Klarheit über dieses Rätsel zu finden, wird es kaum mehr als einen Weg geben: fortgesetzte Forschungen nach demselben Plane, welcher zu der Entdeckung der Analogie geführt hat.“ Lp.

P. Duhem. Recherches sur l'hydrodynamique. Première Partie. Sur les principes fondamentaux de l'hydrodynamique. Deuxième Partie. Sur la propagation des ondes. Toulouse Ann. (2) 3, 315-431 (1901); (2) 4, 101-169.

Die Einleitung zum ersten Teile lautet: „Indem die Thermodynamik der theoretischen Mechanik eine ganz neue Form gibt, und zwar eine viel allgemeinere, als sie bisher erhalten hatte, nötigt sie uns zu einer Revision aller Wissenschaften, welche man ehedem als Zweige der Mechanik

ansah. In verschiedenen Veröffentlichungen (man vergleiche vornehmlich: Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **10**, 183-230, 1893) haben wir bereits eine derartige Revision bezüglich der Prinzipien der Hydrostatik unternommen. Gegenwärtig beabsichtigen wir, die Grundlagen der Dynamik einer ähnlichen Analyse zu unterwerfen." In der Einleitung zum zweiten Teile heißt es: „Die jetzt aufzuwerfende Frage ist die folgende: Sind die Integrale der hydrodynamischen Gleichungen im ganzen Raume stetig und analytisch? Wenn sie längs gewisser Flächen aufhören, stetig zu sein oder analytisch zu sein, welches sind die Eigenschaften dieser Flächen?"

Gegenüber einer Arbeit von dem Umfange der vorliegenden, die sich gewissermaßen als ein neues Lehrbuch ankündigt, und die auch fortwährend auf die Veröffentlichungen des Verf. aus dem letzten Jahrzehnt verweist, befindet sich die Berichterstattung in Verlegenheit. Um nichts fortzulassen, wollen wir einfach das Inhaltsverzeichnis geben.

Erster Teil. Kap. I. Die Gleichungen der Bewegung der Flüssigkeiten. § 1. Wie man von den Gleichungen des Gleichgewichts eines Systems zu den Gleichungen der Bewegung des Systems übergeht. Von der Zähigkeit im allgemeinen. § 2. Von der Zähigkeit in einem Körper, der eine homogene Deformation erfährt. § 3. Von der Zähigkeit im Innern einer flüssigen Masse. § 4. Natur der Aktionen, denen die durchforschten Flüssigkeiten unterworfen werden. Gleichungen für die Bewegung dieser Flüssigkeiten. § 5. Die auf die Eulersche und Naviersche Gestalt gebrachten Bewegungsgleichungen. Notwendigkeit einer ergänzenden Beziehung. § 6. Die durch jedes der Flüssigkeitselemente frei gelassene Wärme. § 7. Aufstellung der ergänzenden Beziehung. § 8. Von den nicht zusammendrückbaren Flüssigkeiten.

Kap. II. Die Gleichung der lebendigen Kräfte. § 1. Verschiedene Fälle, in denen ein Integral der lebendigen Kräfte besteht. Form dieses Integrals. § 2. Von der Rolle der Funktion Φ in der Hydrostatik. § 3. Von der Stabilität des Gleichgewichtes. § 4. Isothermische und isentropische Stabilität. § 5. Umkehrung des Kriteriums der Stabilität. Folgen dieses Kriteriums.

Kap. III. Gebräuchliche Form der hydrodynamischen Gleichungen. § 1. Natur der äußeren Aktionen, die in diesem Kapitel betrachtet werden sollen. § 2. Transformation der hydrodynamischen Gleichungen.

Zweiter Teil. Kap. I. Von den Stoßwellen. § 1. Kinematische Betrachtungen. § 2. Ausdehnung der Prinzipien der Hydrodynamik auf den Fall, in welchem die Geschwindigkeiten Unstetigkeiten aufweisen. § 3. Anwendung der vorangehenden Gleichheit auf eine Stoßwelle. § 4. Von der Zähigkeit in einer Stoßwelle. § 5. Fall, in welchem eine zähe Flüssigkeit eine Stoßwelle nicht fortpflanzen kann. § 6. Fall, in welchem eine Stoßwelle sich in einer Flüssigkeit ausbreiten kann. § 7. Die ergänzende Beziehung. Fall der gut leitenden Flüssigkeiten. § 8. Die ergänzende Beziehung. Fall der schlecht leitenden Flüssigkeiten. § 9. Von den Oberflächen, längs denen zwei flüssige Massen über einander gleiten.

§ 10. Die Unstetigkeitsflächen in den inkompressiblen Flüssigkeiten. § 11. Von den Unstetigkeitsflächen, längs denen zwei flüssige Massen an einander adhärieren.

Kap. II. Die Methode von Hugoniot. § 1. Verschiedene Definitionen. Die beiden Lemmata Hugoniots. § 2. Ausdruck für die Verschiebungsgeschwindigkeit $\mathfrak{N}$ bei den Wellen der verschiedenen Ordnungen. § 3. Verschiedene Anwendungen der Hugoniotschen Methode. § 4. Die Parameter von Hadamard. § 5. Welle, die einen Vektor ausbreitet. — Hadamardsche Vektoren.

Kap. III. Von den Wellen in den zähen Flüssigkeiten. § 1. Von den Wellen erster Ordnung in bezug auf gewisse Elemente der Bewegung. § 2. Von den Wellen zweiter Ordnung in bezug auf gewisse Elemente der Bewegung. § 3. Von den Wellen dritter Ordnung in bezug auf gewisse Elemente der Bewegung.

Kap. IV. Von den Wellen in den vollkommenen Flüssigkeiten. § 1. Einige thermodynamische Eigenschaften der Flüssigkeiten ohne Zähigkeit. § 2. Fortpflanzung der Wellen innerhalb der vollkommenen Flüssigkeiten. Gebrauch der Eulerschen Gleichungen. § 3. Die Lagrangesche Methode. — Kinematische Betrachtungen. § 4. Fortpflanzung der Wellen innerhalb der vollkommenen Flüssigkeiten. Gebrauch der Lagrangeschen Methode.

Viele der hier im Zusammenhange dargestellten Untersuchungen sind in den letzten Jahren vom Verf. in einzelnen Noten der C. R. veröffentlicht und hiernach im Jahrbuche besprochen worden. Um aber auch hier zu einem Schlusse zu gelangen, führen wir die Betrachtungen am Ende des zweiten Teiles wörtlich an.

„Beim Abschlusse des ersten Teiles dieser Untersuchungen haben wir den ungemein beschränkten und besonderen Charakter der Fälle hervorgehoben, in denen die Bewegung der Flüssigkeiten für die gewöhnlichen Methoden der Hydrodynamik zugänglich ist. Man könnte meinen, daß diese Einschränkungen, welche die meisten sogenannten allgemeinen Gesetze der Hydrodynamik belasten, in gleicher Weise die Erforschung der Fortpflanzung der Wellen beengen würden. Tatsächlich haben Hugoniot und Hadamard diese Erforschung nur unter der Voraussetzung der Existenz der im ersten Teile definierten Funktionen $\mathcal{A}$ in Angriff genommen; außerdem haben sie angenommen, daß die Einwirkungen Newtonsche sind und die Flüssigkeit nicht zäh ist.

Solche Einschränkungen beeinflussen zum Glück das Problem der Fortpflanzung ständiger Wellen nicht; dieses Problem kann mit einer Allgemeinheit behandelt werden, die keine andere Grenze hat als die Allgemeinheit selbst der fundamentalen Gleichungen der Hydrodynamik. Man kann behaupten, daß die vollständige Lösung dieses Problems, welche wir gegeben haben, das einzige wirklich allgemeine Theorem bildet, das man in der Hydrodynamik erhalten hat. Insbesondere haben wir ein Theorem erhalten, das für alle möglichen Flüssigkeiten, zähe oder nicht zähe, leitende oder nicht leitende, genau gilt. Allein die Flüssigkeiten, die zugleich zäh, unzusammendrückbar und gute Wärmeleiter sind, hat

man auszunehmen. Dieses Theorem lautet: Bei jeder Flüssigkeit kann man Wellen beliebiger Ordnung bemerken, welche unaufhörlich die beiden selben Flüssigkeitsmassen trennen und somit sich nicht fortpflanzen.

Unter den Erscheinungen, welche derartige We en in aller Reinheit bekunden, kann man außer den längst bekannten Fällen der Wirbel und der Strahlen die Fortpflanzung der Wärme durch Konvektion innerhalb einer flüssigen Masse anführen, die unter dem experimentellen Gesichtspunkte von Bénard 1900 so gut untersucht ist. Die seltsamen Zellen, deren Bildung dieser Physiker beobachtet hat, finden ihre unmittelbare Erklärung in dem obigen Theorem.“ Lp.

P. Duhem. Stabilité, pour des perturbations quelconques, d'un système affecté d'un mouvement de rotation uniforme. C. R. **134**, 23-24.

Um eine beschränkende Hypothese eines früheren Aufsatzes (F. d. M. **32**, 765, 1901) zu beseitigen, faßt der Verf. sein Kriterium jetzt so: Es sei M_0 ein Wert des Momentes der Bewegungsgröße. Wir wollen annehmen, daß man für jeden genügend nahe an M_0 liegenden Wert M derselben Größe folgende Aussagen machen kann: 1. Jedem Werte von M entspricht ein Gleichgewichtszustand E, in dem die Summe $\Phi = F + \Omega + W$ einen Minimalwert unter denen annimmt, die sie ohne Änderung in dem Werte von M annehmen kann; 2. der Zustand E variiert in einer beliebigen stetigen Weise, wenn der Wert von M nach der Stetigkeit sich ändert. Unter diesen Bedingungen ist der Zustand E_0, der dem Werte M_0 von M entspricht, stabil sogar für die Störungen, welche das Moment der Bewegungsgröße des Systems ändern. Lp.

P. Duhem. Sur la stabilité de l'équilibre relatif d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. Journ. de Math. (5) 7, 331-350.

P. Duhem. Sur la stabilité, pour des perturbations quelconques, d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme. Journ. de Math. (5) 8, 5-18.

P. Duhem. Sur la stabilité de l'équilibre relatif. Journ. de Math. (5) 8, 215-227.

Mit den vorstehenden Aufsätzen stehen in engstem Zusammenhange die Noten des Verf. in C. R. **132**, 1021-1023 (F. d. M. **32**, 765, 1901) und C. R. **134**, 23-24 (vergl. das vorangehende Referat). In der ersten Arbeit hatte der Verf. durch eine Methode, die einem Dirichletschen Verfahren nachgebildet war, sein Kriterium gewonnen, welches die Stabilität des relativen Gleichgewichts bei einem mit gleichförmiger Rotationsbewegung behafteten Systeme sicherte (vergl. F. d. M. **32**, 766, 1901). Das dort gegebene Kriterium unterlag jedoch einer Einschränkung: es nimmt an, daß die dem Systeme zugeführte Störung nicht das Moment der Bewegungsgröße dieses Systems in bezug auf die Rotationsachse

ändert. Daher ist der Zweck des zweiten Aufsatzes die Befreiung des früher gefundenen Kriteriums von jener einengenden Beschränkung. Der betreffende Satz lautet jetzt: „Es sei M_0 ein Wert des Momentes der Bewegungsgröße. Man nehme an, daß man für jeden dem M_0 hinreichend nahe liegenden Wert M der Bewegungsgröße die Sätze aussprechen darf: 1. Jedem Werte von M entspricht ein Gleichgewichtszustand E, bei welchem die Summe $\Phi = F + \Omega + W$ einen kleinsten Wert unter denen annimmt, den sie ohne Änderung in dem Werte von M annehmen kann. 2. Der Zustand E ändert sich stetig, wenn der Wert von M sich stetig ändert. Unter diesen Bedingungen ist der Zustand E_0, der dem Werte M_0 von M entspricht, selbst für die Störungen stabil, welche das Moment der Bewegungsgröße des Systems verändern."

In der dritten Abhandlung vergleicht der Verf. zunächst sein Kriterium mit demjenigen, das H. Poincaré in § XIV seiner großen Abhandlung „Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation" ausgesprochen hatte (Acta Math. **7**, 259-380; F. d. M. **17**, 864, 1885). Es stellt sich heraus, daß das Poincarésche Kriterium dem vom Verf. aufgestellten gleichwertig ist. Durch eine Untersuchung von Hadamard über das von Thomson und Tait ausgesprochene Kriterium (Assoc. Franç. Bordeaux; F. d. M. **27**, 622, 1896) ist gezeigt worden, daß dasselbe für die Stabilität des relativen Gleichgewichts nicht notwendig zu bestehen braucht. Deshalb geht der Verf. auf die entsprechende Untersuchung für das Poincarésche und sein eigenes Kriterium im zweiten Teile der dritten Abhandlung ein und gelangt zu dem entsprechenden Schluß: „Weder das von H. Poincaré gegebene Kriterium noch das von uns ausgesprochene werden mit Notwendigkeit bestätigt, wenn das relative Gleichgewicht stabil ist." Lp.

P. Duhem. Sur les conditions aux limites en hydrodynamique. C. R. **134**, 149-152.

P. Duhem. Sur certains cas d'adhérence d'un liquide visqueux aux solides qu'il baigne. C. R. **134**, 265-267.

P. Duhem. Sur l'impossibilité de certains régimes permanents au sein des fluides visqueux. C. R. **134**, 456-458.

In der ersten Note erinnert der Verf. an die Art, wie er die bei den Berührungsflächen einer Flüssigkeit und eines festen Körpers oder zweier Flüssigkeiten stattfindenden Bedingungen behandelt (F. d. M. **28**, 819, 1897 u. **29**, 770, 1898). Hiernach hat man zu den verschiedenen in der Hydrodynamik zu betrachtenden virtuellen Arbeiten die virtuelle Arbeit der Berührungszähigkeit und die der Berührungsreibung hinzuzufügen. Die bezüglichen Formeln werden kurz wiederholt. In der zweiten Note wird das einzuschlagende Verfahren an einem Beispiel erläutert und daraus der Satz gefolgert: Eine Flüssigkeit von unendlicher Höhe und Tiefe strömt in einem Bette, dessen zylindrische Wände Erzeugende parallel zu OZ haben, sodaß die von z unabhängige Geschwindigkeit immer der

xy-Ebene parallel ist; das Bett erweitert sich stromaufwärts und stromabwärts, sodaß gewisse Bedingungen einer Gleichung (3) erfüllt sind. Wenn die Flüssigkeit an dem festen Körper adhäriert, kann sie keinen anderen permanenten Zustand als den des Gleichgewichts haben. Die dritte Note leitet folgende Sätze ab: Eine Flüssigkeit befindet sich zwischen zwei parallelen Ebenen, von denen die eine unbeweglich ist, die andere in sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit gleitet; bei permanentem Zustande bewegt sich die Flüssigkeit in Fäden, die der Richtung jener Bewegung parallel sind. — Eine Flüssigkeit befindet sich zwischen zwei unbegrenzten koaxialen Umdrehungszylindern; jeder dieser beiden Zylinder besitzt eine gleichförmige Rotation; bei permanentem Zustande dreht sich die Flüssigkeit in Kreisfäden. Lp.

P. Duhem. Sur l'extension du théorème de Lagrange aux liquides visqueux. C. R. **134**, 580-581.

P. Duhem. L'extension du théorème de Lagrange aux liquides visqueux et les conditions aux limites. C. R. **134**, 686-688.

Das Lagrangesche Theorem für die Bewegung von Flüssigkeiten besagt: wenn die Bewegung so beschaffen ist, daß zu irgend einer Zeit ein Geschwindigkeitspotential existiert, dann ist auch ein solches für jeden folgenden Zeitmoment vorhanden. Durch die Veröffentlichungen von Hadamard angeregt, der jenen Satz ohne Mitteilung des Beweises auf zähe Flüssigkeiten ausgedehnt hatte, skizziert der Verf. in der ersten Note seine Beweisführung aus einer Vorlesung zu Bordeaux 1900/1 und spricht als Endergebnis aus: Das Lagrangesche Theorem findet auf alle Punkte einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit von gleichmäßiger und konstanter Temperatur Anwendung, außer auf diejenigen Punkte, welche in einem gegebenen Augenblicke die Rolle eines singulären Punktes gespielt haben und sich auf einer singulären Linie befunden haben sollten. In der zweiten Note teilt der Verf. mit, daß er von Boussinesq darauf hingewiesen ist, die von ihm bewiesene Ausdehnung des Lagrangeschen Theorems mit den nötigen Einschränkungen sei von de Saint-Venant 1869, Bresse 1880, Boussinesq 1880, H. Poincaré 1893 erörtert worden, wie in den betreffenden Jahrgängen des Jahrbuchs nachgelesen werden kann. Bezüglich der Ausnahmen an den Wänden beweist dann der Verf.: Das auf die zähen Flüssigkeiten ausgedehnte Lagrangesche Theorem ist unvereinbar mit den Bedingungen, welche diese Flüssigkeiten längs der festen Wände erfüllen müssen. Zur Hebung des Widerspruches wird auf den Ausweg verwiesen, den Boussinesq schon 1880 in C. R. **90**, 736 angegeben hat. Lp.

P. Duhem. Sur les fluides compressibles visqueux. C. R. **134**, 1088-1090.

Im Anschluß an seine „Recherches sur l'hydrodynamique I" (Referat siehe oben S. 770) entwickelt der Verf. mehrere Sätze über die Prinzipien der Theorie der zähen Flüssigkeiten: „Wenn ein Körper in aller Strenge

flüssig und nicht zusammendrückbar ist, so kann man ihn als frei von Zähigkeit ansehen. Die Flüssigkeit adhäriert stets an den festen Körpern, mit denen sie in Berührung ist. Die Gesetze der Bewegung einer zähen, zusammendrückbaren Flüssigkeit weichen nur noch in einem Punkte von den Gesetzen der Bewegung einer vollkommenen zusammendrückbaren Flüssigkeit ab: es besteht keine Relation mehr in endlichen Gliedern zwischen dem Drucke P, der Temperatur T und der Dichte ϱ; diese Relation wird durch eine Differentialgleichung ersetzt, welche $d\varrho/dt$ bestimmt, wenn ϱ, T, P bekannt sind. In jedem Punkte einer zusammendrückbaren Flüssigkeit, in der P und T der Druck und die Temperatur sind, hat die Dichte ϱ denselben Wert ϱ_0, wie wenn die Flüssigkeit unter diesem Drucke und bei dieser Temperatur im Gleichgewicht wäre. Im Innern einer in Bewegung begriffenen Flüssigkeit verhält es sich anders; aber für jeden Massenpunkt und in jedem Augenblicke hat die Änderungsgeschwindigkeit der Dichte einen solchen Sinn, daß sie die Dichte ϱ dem Werte ϱ_0 zu nähern strebt, die diesem Punkte und diesem Momente zukommt. Im Innern einer wenig zähen Flüssigkeit, in der die Geschwindigkeit beim Übergange von einem Punkte zum benachbarten keine beträchtlichen Änderungen erfährt, weicht die Dichte ϱ in jedem Punkte und in jedem Augenblicke sehr wenig von dem Werte ϱ_0 ab, der demselben Punkte und demselben Augenblicke entspricht.“ Lp.

P. Duhem. Sur les quasi-ondes. C. R. **135**, 761-763.

Die Entstehung der „Scheinwelle“ (quasi-onde) wird so beschrieben: Man betrachte zwei Oberflächen S_1 und S_2, deren Abstand ε überall sehr klein ist; durch einen Punkt M_1 von S_1 ziehe man die Normale dieser Oberfläche bis zu ihrem Schnittpunkte M_2 mit S_2. Man setze voraus, daß die Werte f_1, f_2, die eine Funktion $f(x, y, z)$ in M_1 und M_2 annimmt, eine Differenz von der Größenordnung von ε haben, daß aber beim Übergange von M_1 nach M_2 wenigstens eine der drei Ableitungen $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ eine endliche, im Verhältnis zu ε sehr große Änderung erleide; die Gesamtheit der Oberflächen S_1, S_2 bildet für die Funktion f eine Scheinwelle erster Ordnung. Im Innern einer vollkommenen, sehr wenig leitenden Flüssigkeit sind zu beobachten: 1. Merklich transversale Scheinwellen. Dieselben pflanzen sich nicht fort. 2. Merklich longitudinale Scheinwellen. Diese sind von zweierlei Art: A. Die einen haben eine Dicke ε von derselben Größenordnung wie der Leitungskoeffizient K; ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist die durch die Laplacesche Formel $V_N \cdot C/c$ gegebene. B. Die anderen haben eine im Verhältnis zum Leitungskoeffizienten K sehr kleine Dicke ε; ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist die durch die Newtonsche Formel gegebene V_N. Diese letzteren haben als Grenze die eigentlich so genannten Wellen. In einer Flüssigkeit, deren Zähigkeitskoeffizienten λ und μ sehr klein sind, kann eine Scheinwelle, deren Dicke ε im Verhältnis zu λ und μ sehr klein ist, sich nicht fortpflanzen; die einzigen

Wellen, die sich fortpflanzen können, sind diejenigen, deren Dicke ε von derselben Ordnung ist, wie λ und μ. Lp.

P. Duhem. Sur les conditions nécessaires pour la stabilité de l'équilibre d'un système visqueux. C. R. **135**, 939-941.

Für den Fall der Abwesenheit der Zähigkeit haben Liapunow 1892 und Hadamard 1897 das Kriterium des instabilen Gleichgewichtes gefunden. Bedeutet nämlich P das Potential der äußeren Kräfte, $\mathcal{A}$ die nutzbare Energie, so setze man $\Omega = P + \mathcal{A}$. In den passend gewählten Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, die den Zustand des Systems ausdrücken, hat man dann gleichzeitig für die lebendige Kraft Θ und für Ω:

$$\Theta = \xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \cdots + \xi_n'^2, \quad \Omega = S_1 \xi_1^2 + S_2 \xi_2^2 + \cdots + S_n \xi_n^2 + \cdots.$$

Ist mindestens einer der Koeffizienten S_i negativ, so ist das Gleichgewicht instabil. Für zähe Systeme zeigt Duhem jetzt, daß das Gleichgewicht instabil ist, wenn wenigstens einer der Koeffizienten $S_1, \ldots, S_n$ negativ und keiner von ihnen positiv ist. Lp.

P. Duhem. Sur la stabilité de l'équilibre et les variables sans inertie. C. R. **135**, 1088-1091.

Um die chemischen Prozesse in den Kreis der Betrachtungen zu ziehen, nimmt Duhem zweierlei Variabeln an, solche mit Trägheit und ohne Zähigkeit ξ_i, andere mit Zähigkeit ohne Trägheit η_i. Demgemäß wird (vergl. das vorstehende Referat):

$$\Omega = S_1 \xi_1^2 + S_2 \xi_2^2 + \cdots + S_m \xi_m^2 + \sigma_1 \eta_1^2 + \sigma_2 \eta_2^2 + \cdots + \sigma_n \eta_n^2.$$

Dann gilt der Satz: Wofern nur ein einziger der Koeffizienten $S_1, \ldots, S_m$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ negativ ist, so ist das Gleichgewicht instabil. Dieser Satz begreift also den von Liapunow in sich. Lp.

P. Duhem. Des conditions nécessaires pour qu'un fluide soit en équilibre stable. C. R. **135**, 1290-1293.

Die von Liapunow und von Hadamard ersonnenen Methoden, die für Systeme zum Ziele führen, welche von einer begrenzten Anzahl von Variabeln abhängen, lassen sich auf manche flüssigen Systeme ausdehnen und zeigen, daß zur Stabilität dieser Systeme gewisse Bedingungen notwendig sind. Als Beispiel behandelt der Verf. den Fall einer homogenen und inkompressibeln Flüssigkeit, deren Elemente Kräften unterworfen sind, welche ein Potential V haben, und deren Grenzfläche S_0 einem gleichmäßigen und konstanten Drucke unterliegt. Ist n die nach innen gerichtete Normale der Oberfläche S_0, so beweist der Verf. den folgenden Satz: „Wenn $\partial V / \partial n$ in keinem Punkte der Oberfläche S_0

negativ ist und positiv in jedem Punkte eines dieser Oberfläche angehörenden Bereiches von endlicher Ausdehnung, so kann das Gleichgewicht der Flüssigkeit nicht stabil sein." Am Schlusse der Note werden zwei Fälle zusammendrückbarer Flüssigkeiten erwähnt, in denen nach der Methode von Lagrange und Dirichlet hinreichende Bedingungen der Stabilität gewonnen werden, nach der vom Verf. skizzierten Methode diese Bedingungen aber als nicht notwendig erkannt werden können. Lp.

D. de Francesco. Alcune formole della meccanica dei fluidi in uno spazio a tre dimensioni di curvatura costante. Nota I e II. Napoli Atti (2) **11**, No. 9, 18 S.; No. 10, 13 S.

Der Zweck der ersten Note ist die Aufstellung der fundamentalen Formeln der Mechanik der Flüssigkeiten in einem Raume konstanter Krümmung von drei Dimensionen vermittelst eines elementaren Verfahrens. Nach Ableitung einer Formel für das Volumen eines unendlich kleinen Parallelepipeds werden die Gleichungen für das Gleichgewicht ermittelt und durch Bearbeitung einiger Beispiele erläutert. Das d'Alembertsche Prinzip liefert hiernach die Bewegungsgleichungen. Transformationen der Kontinuitätsgleichung und der Bewegungsgleichungen bilden den Inhalt der folgenden Paragraphen. Das Helmholtzsche Theorem und das Geschwindigkeitspotential machen den Beschluß.

Der Zweck der zweiten Note ist die Aufstellung der Formeln, welche analytisch die Rotationsbewegung in einem dreidimensionalen Raume von konstanter Krümmung definieren, und der Nachweis, daß einige Formeln von Beltrami, obwohl sie nur in der Voraussetzung des euklidischen Raumes aufgestellt sind, dennoch auch für nichteuklidische Räume gelten. So der Beltramische Satz: Betrachtet man zwei beliebige Zustände eines und desselben in Bewegung befindlichen Teilchens, so existiert immer eine (und im allgemeinen eine einzige) Terne von orthogonalen Richtungen in dem ersten Zustande des Teilchens, welche sich in eine Terne von gleichfalls orthogonalen Richtungen in dem zweiten Zustande desselben Teilchens verwandelt. Der Verf. meint, daß mit den von ihm benutzten Hülfsmitteln die Eigenschaften der Wirbelbewegungen, der Stromfäden und der Zirkulation, die von Helmholtz und von W. Thomson in die Mechanik der Flüssigkeiten eingeführt sind, sich leicht auf die Räume von konstanter Krümmung ausdehnen lassen. Lp.

É. Fontaneau. Du mouvement stationnaire des liquides (suite). Assoc. Franç. Ajaccio (1901) **30**, 176-206.

Fortsetzung der auf der Pariser Versammlung überreichten Abhandlung (F. d. M. **32**, 754, 1901). Der Verf. entwickelt eine Art der Transformation, von der er bisher eine Anwendung nur auf die permanente Bewegung der Flüssigkeiten gemacht hatte, und wendet sie jetzt auf den

allgemeinen Fall der Integration der partiellen Differentialgleichungen der Hydrodynamik an. Er gibt zunächst ein leichtes Mittel zur Vereinfachung der auf das erstere Problem bezüglichen Gleichungen an, indem er die kartesischen Koordinaten durch ein monorthogonales System von krummlinigen Koordinaten ersetzt (Synorthogonien genannt). Dann dehnt er dieselbe Vereinfachung auf die allgemeine Frage aus und bemüht sich, die Gleichungen auf eine Gestalt zu bringen, die nur noch zwei unabhängige Veränderliche enthält, und zwar für Veränderliche, welche mit dem Parameter einer der Scharen von Wirbeln die speziellen Funktionen bestimmen, die er in seinen früheren Veröffentlichungen über den Gegenstand definiert hat. Ohne diese Gedanken praktisch zu verwerten, schließt der Verf. mit einigen Überlegungen bezüglich der Bestimmung des Zähigkeitskoeffizienten der Flüssigkeiten. Lp.

J. Weingarten. Über einen Satz der Hydrodynamik. Berl. Math. Ges. Ber. 1, 2-3.

Der Helmholtzsche Satz, daß ein Teilchen einer reibungslosen Flüssigkeit, die unter dem Einfluß von Potentialkräften in Bewegung ist, zu keiner Zeit eine Rotation erlangt, wenn es zu irgend einer Zeit eine solche nicht besaß, ist von Helmholtz nicht einwandfrei abgeleitet worden. Spätere Autoren wie Kirchhoff, H. Weber haben für seine Ableitung anstatt der von Helmholtz zum Ausgang gewählten Eulerschen Gleichungen die Lagrangeschen Gleichungen der Hydrodynamik zum Ausgangspunkte genommen. Der Satz selbst ist aber, wie der Verf. in der Note zeigt, auch einfach aus den Eulerschen Gleichungen zu gewinnen. Lp.

E. Budde. Kleine Bemerkung zur Helmholtzschen Wirbeltheorie. Berl. Math. Ges. Ber. 1, 21-22.

Der Fall, daß der Wirbelfaden sich im Innern der Flüssigkeit trompetenförmig ausweitet, wird als schematische Form eines Tornados gedeutet. Lp.

A. Viterbi. Sopra una classe di moti vorticosi permanenti. Ven. Ist. Atti 61 [(8) 4], 449-464.

Nach der Untersuchung derjenigen Flüssigkeitsbewegungen, bei welchen die Komponenten der Geschwindigkeit gleich den Ableitungen einer gewissen Funktion sind, kann man sich die Aufgabe stellen, diejenigen Bewegungen aufzufinden, bei denen die Gleichheit durch die Proportionalität zu den Ableitungen ersetzt wird, d. h. den Fall, bei welchem die Kongruenz der Stromlinien normal wäre. In der gegenwärtigen Note beschränkt sich der Verf. auf die Untersuchung aller möglichen Bewegungen, die durch die Tatsache charakterisiert werden, daß sowohl die Kongruenz der Stromlinien als auch die der Wirbellinien, oder aber der Linien,

deren Tangenten die Drehachsen der Flüssigkeitsteilchen bilden, normal sind. Die Fälle, welche gemäß dieser Hypothese möglich sind, kommen auf zwei zurück. Bei dem ersten sind die Stromlinien parallele Geraden, auf denen die Geschwindigkeit der Flüssigkeit konstant ist; doch variiert sie von einer Geraden zur anderen. Beim zweiten Falle sind die Stromlinien Kreise, welche eine und dieselbe Achse besitzen (vgl. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, Vorlesung 20, § 5). Bei der Untersuchung bedient sich der Verf. der Methoden der „absoluten Differentialrechnung" von Ricci. Lp.

E. Laura. Sul moto parallelo ad un piano di un fluido in cui vi sono n vortici elementari. Torino Atti 37, 469-476.

Sind x_i, y_i die Koordinaten eines Flüssigkeitsteilchens,

$$P = -\frac{1}{\pi} \Sigma_{ik}\, m_i\, m_k \log \varrho_{ik},$$

so hängt die Integration der Bewegungsgleichungen für die Wirbel der Flüssigkeit von einer Differentialgleichung erster Ordnung

$$\partial f/\partial t + (P, f) = 0$$

ab; die Bewegungen, welche von der Zeit unabhängig sind, genügen der Gleichung $(P, f) = 0$. Außer dem Integrale $P =$ const. existieren noch die drei anderen

$$f_1 = \Sigma x_i = \text{const.},\quad f_2 = \Sigma m_i\, p_i = \text{const.},$$
$$f_3 = \Sigma m_i\,(x_i^2/m_i^2 + p_i^2) = \text{const.}$$

Der Verf. beweist nach dem Vorbilde der von A. Mayer für die Integrale der Dynamik angestellten Untersuchung, daß diese drei Integrale die einzigen sind, welche nicht von der Form der Funktion P abhängen, ferner daß sie eine Gruppe bilden, welche eine einzige distinkte Funktion enthält oder aber ein System in Involution zweiter Ordnung. Bildet man

$$f = -\Sigma m_i\,(f_3 + f_2^2 + f_1^2)$$
$$= -\Sigma_{ik}\, m_i\, m_k \left[\left(\frac{x_i}{m_i} - \frac{x_k}{m_k}\right)^2 + (p_i - p_k)^2\right],$$

so ergibt sich: Die Summe der Produkte der Quadrate der Abstände von n Wirbeln zu je zweien in die Intensität der Wirbel, deren Abstand betrachtet wird, erhält sich während der ganzen Bewegung ungeändert. Zuletzt werden die zur Erledigung der Aufgabe bei n Wirbeln erforderlichen Operationen bestimmt. Lp.

J. Larmor. Vortex spirals. Nature 66, 630.

Die Theorie der „Wirbelspiralen" ist von Hicks ersonnen (vgl. F. d. M. 26, 900, 1895), nicht von FitzGerald, wie nach einem Zitate neuerdings geschlossen werden könnte. Lp.

E. Zermelo. Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche. Erste Mitteilung. Zs. f. Math. u. Phys. 47, 201-237.

Der Verf. gibt in der Einleitung, der wir hier folgen, eine gedrängte Übersicht über seine Untersuchungen. Die Arbeit versucht es, die Strömung einer inkompressiblen, reibungslosen (zweidimensionalen) Flüssigkeit in einer Kugelfläche einer ebenso systematischen Theorie zu unterwerfen, wie sie für ebene Strömungen bereits existiert und namentlich in Poincarés „Théorie des tourbillons" (1893) ziemlich vollständig dargestellt ist. Das Bestreben des Verf. geht darauf hin, die Darstellung möglichst einheitlich und unabhängig von fremdartigen Voraussetzungen zu gestalten. Der ganzen Entwicklung liegen ausschließlich die hydrodynamischen Hauptgleichungen in orthogonalen Flächenkoordinaten zugrunde, die gleich im Anfange eingeführt werden. Unter diesem Gesichtspunkte ist die von Kirchhoff zuerst auf das Problem angewandte stereographische Abbildung der Kugel auf die Ebene nur beiläufig benutzt worden, obwohl sich mit ihrer Hülfe verschiedene Eigenschaften der Ebene auf die Kugel übertragen lassen, die hier direkt abgeleitet werden. Diese Methode der Abbildung ist eben keine prinzipielle, sondern nur von beschränkter Anwendbarkeit; sie bezieht sich nur auf das jeweilige momentane Vektorfeld, aber nicht auf die Bewegung der Wirbel, auf den zeitlichen Verlauf der Erscheinung. So ist namentlich das Problem der stationären Strömung durchaus nicht durch Abbildung zu lösen, und vollends das „Gleichgewichtsproblem" der Strudel hat in der Ebene überhaupt kein Analogon. Aus demselben Grunde ist auch auf die elektromagnetische Deutung keine Rücksicht genommen. Diese Analogie gilt nur in bezug auf mögliche Strömungszustände, nicht auf ihre zeitliche Veränderung, die vielmehr der Hydrodynamik ganz charakteristisch ist.

Der Kern der verwendeten Methode ist in dem Begriffe des „einfachen Strudels" zu suchen, d. h. eines isolierten Strudelpunktes bei konstanter (von Null verschiedener) Wirbeldichte (curl) auf der ganzen übrigen Kugel, während die früheren Autoren immer nur Strudelpunkte (unendlich dünne Wirbel) in sonst wirbelfreier Flüssigkeit betrachtet hatten. Auf diesem Begriffe ruhen fast alle weiteren Entwicklungen und verdanken ihm ihre zwanglose Formulierung bei Vermeidung störender Nebenbedingungen. Das im letzten Kapitel behandelte „Problem der drei Strudel" als eine spezielle Anwendung der vorausgehenden allgemeinen Theorie dürfte namentlich interessieren durch eine gewisse formale Analogie mit dem Kreiselproblem und eine geometrische mit dem Dreikörperproblem.

Kap. I. Die Flüssigkeitsbewegung auf einer beliebigen Fläche. § 1. Die Grundgleichungen in Gaußschen Koordinaten. § 2. Der Massenfluß und die Inkompressibilität. § 3. Die Zirkulation und das Wirbelmoment. Das Geschwindigkeitspotential. § 4. Das Helmholtzsche Theorem und die Bewegung der Wirbel. § 5. Die Erhaltung der lebendigen Kraft.

Kap. II. Anwendung der allgemeinen Theorie auf die Kugel. § 1. Die Grundformeln in stereographischen und Polarkoordinaten. § 2. Der ein-

fache Strudel und das sphärische Potential. § 3. Die Erhaltung des Schwerpunktes. § 4. Stationäre Strömungen. — Man sieht aus diesem Inhaltsverzeichnisse, daß die vorliegende Veröffentlichung den angekündigten Gegenstand noch nicht erschöpft. Lp.

— — — — —

W. Stekloff. Mémoire sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini. Toulouse Ann. (2) 4, 171-219.

Die Hauptgedanken dieser Arbeit sind von dem Verf. bereits 1893 in seiner russischen Schrift über die Bewegung eines festen Körpers in einer unbegrenzten Flüssigkeit ausgesprochen worden (F. d. M. **25**, 1499). Gegenwärtig legt er die Einzelheiten seiner Untersuchungen dar. Für die natürlichste Methode zur Aufstellung der Differentialgleichungen des Problems erklärt er die Dirichletsche, welche das betrachtete Problem auf dasjenige der Bewegung eines freien festen Körpers zurückführt, der gegebenen äußeren Kräften und den Druckkräften der Flüssigkeiten senkrecht zur Oberfläche des Körpers unterworfen ist.

In dem ersten Kapitel der vorliegenden Abhandlung werden gemäß der erwähnten Methode die Bewegungsgleichungen unter den folgenden allgemeinen Voraussetzungen aufgestellt: 1. Der feste Körper wird begrenzt von einer geschlossenen Oberfläche (S) von beliebiger (endlicher) Ordnung des Zusammenhanges, die überall eine bestimmte Tangentialebene hat. 2. Im Innern des Körpers befindet sich eine endliche Anzahl q von Hohlräumen, die von geschlossenen Oberflächen mit denselben Eigenschaften wie (S) begrenzt und mit nicht zusammendrückbaren Flüssigkeiten gefüllt sind. 3. Der feste Körper ist beliebigen äußeren Kräften unterworfen; die Flüssigkeiten sind Kräften unterworfen, die eine Kräftefunktion besitzen. 4. Die Geschwindigkeit der Bewegung der den beweglichen festen Körper enthaltenden Flüssigkeit, sowie diejenige der in den Hohlräumen enthaltenen Flüssigkeiten folgt aus einem Potential, und die betrachteten Flüssigkeiten sind nicht zusammendrückbar und ideal.

Die Integration dieser Differentialgleichungen bietet bekanntlich fast unüberwindliche Schwierigkeiten, selbst in dem Falle der Abwesenheit jeder beschleunigenden Kraft. Daher ist zunächst dieses letztere einfachste Problem zu untersuchen; das geschieht im zweiten Kapitel der Abhandlung, indem noch angenommen wird, daß die Oberfläche des Körpers einfach zusammenhängend ist. Hierzu wird eine allgemeine Methode benutzt, nämlich die Methode der Integration durch sukzessive Approximationen, die bei jedem festen Körper anwendbar ist, falls das Verhältnis $\varepsilon = \varrho/M$, wo ϱ die Dichtigkeit der unbegrenzten Flüssigkeit, M die gesamte Masse des Körpers und der die Hohlräume anfüllenden Flüssigkeiten ist, einen hinlänglich kleinen Wert hat. Diese Methode führt das allgemeine Problem auf die wohlbekannte Integration der Bewegungsgleichungen eines freien festen Körpers und auf diejenige gewisser linearer Differentialgleichungen mit variabeln Koeffizienten zurück, welche letztere auf Quadraturen führt.

Da die Gleichungen der Bewegung für $\varepsilon = 0$ periodische Lösungen zulassen, so kann dies auch nach bekannten Sätzen von H. Poincaré für hinreichend kleine Werte von ε eintreten. Die Lösung dieser interessanten Frage bildet den Gegenstand des Kapitels III der Abhandlung; hier wird die Existenz unendlich vieler periodischer Lösungen nachgewiesen, die bei jedem starren Körper vorkommen. Lp.

W. Stekloff. Remarque sur un problème de Clebsch sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini et sur le problème de M. de Brun. C. R. **135**, 526-528.

Das de Brunsche Problem lautet: Die Bewegung eines starren Körpers zu finden, dessen Moleküle von einer festen Ebene proportional der Entfernung angezogen werden, wenn angenommen wird, daß der Körper in der anziehenden Ebene einen festen Punkt hat. Der Verf. weist nach, daß dieses Problem und das bekannte hydrodynamische Problem von Clebsch (Math. Ann. **3**, 238-262; F. d. M. **2**, 733, 1870) auf dieselben Differentialgleichungen führen, und daß daher die bekannten Lösungen der letzteren Aufgabe auch auf die erstere Anwendung finden. Lp.

---

de Bussy. Résistance due aux vagues satellites. C. R. **134**, 813-818, 882-885.

Folgende zwei Aufgaben werden behandelt: 1. Bestimmung des Gesetzes, nach welchem der von den Begleitwellen herrührende Widerstand sich ändert, wenn man von einer Geschwindigkeit zu einer anderen auf einem Schiffe übergeht, dessen Länge derart angenommen wird, daß die vorn gebildeten Wellen keinen Einfluß auf die hinten gebildeten ausüben können. 2. Bestimmung des Gesetzes, nach welchem der von den Begleitwellen herrührende Widerstand sich ändert, wenn man bei gleichbleibender Geschwindigkeit von einem Kiele C auf einen anderen C_1 übergeht, der aus dem ersten durch Multiplikation aller transversalen Ordinaten mit einem konstanten Faktor λ hervorgeht.

Auf einem Schiffe, bei welchem der Widerstand eine stetige Funktion der Geschwindigkeit ist, wächst der von den Begleitwellen herrührende Widerstand proportional der sechsten Potenz der Geschwindigkeit. Wenn zwei ähnliche Schiffe, deren Ähnlichkeitsverhältnis $\varkappa$ ist, sich mit korrespondierenden Geschwindigkeiten V und $V\sqrt{\varkappa}$ bewegen, so geben sie Anlaß zu Systemen ähnlicher Wellen, deren Ähnlichkeitsverhältnis dasselbe ist wie das der Schiffe. Die Begleitwellen, welche den verschiedenen Geschwindigkeiten eines und desselben Schiffes entsprechen, bilden ähnliche Systeme. Ihre Dimensionen sind dem Quadrate der Schiffsgeschwindigkeit proportional. Für zwei ähnliche Schiffe, die sich mit derselben Geschwindigkeit bewegen, bilden die Begleitwellen zwei identische Systeme.

Ist R der von der Unterhaltung der Begleitwellen herrührende Widerstand an einem mit der Geschwindigkeit V fahrenden Schiffe C, so hat man, um den entsprechenden Widerstand R_1 für die nämliche Geschwindigkeit bei einem Schiffe C_1 zu erhalten, dessen Kiel aus dem von C durch Vergrößerung aller transversalen Ordinaten in dem Verhältnisse λ gebildet ist, R mit dem Faktor λ^4 zu multiplizieren.

Die zweite Note bringt verschiedene Versuchsreihen als Belag für den Satz, daß die Höhe der Begleitwellen dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Lp.

C. Zakrzewski. Sur les oscillations d'un disque plongé dans un liquide visqueux. Krak. Anz. 1902, 235-242.

Die Abhandlung führt die Untersuchungen weiter, die früher von Maxwell (1866), O. E. Meyer (1861) und dessen Schülern L. Großmann (1880) sowie Th. S. Schmidt (1882) angestellt sind (vgl. F. d. M. **14**, 787, 1882). Der Verf. stützt sich auf die jüngst veröffentlichten Arbeiten von L. Natanson (vgl. F. d. M. **32**, 832, 1901 u. in diesem Bande). Seine rein mathematische Arbeit geht von den Annahmen aus, daß die Flüssigkeit keiner anderen einwirkenden Kraft unterliegt als der Zähigkeit, daß sie inkompressibel und somit der Druck im Innern konstant ist, und daß die Bewegung so langsam ist, um die Vernachlässigung der Produkte der Geschwindigkeit in ihre Ableitungen zu gestatten. Bei diesen Annahmen kommt man für die Winkelgeschwindigkeit ψ zu der „Telegraphistengleichung“

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\frac{1}{T}\frac{\partial\psi}{\partial t}-A^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0,$$

in der T die „Relaxationsdauer“ für die fragliche Flüssigkeit, A^2 das Verhältnis der Starrheit zur Dichtigkeit bezeichnet, die z-Achse senkrecht zur Scheibe ist. Durch die Einführung von T in die Rechnung entstehen Formeln von allgemeinerer Art als bei den früheren Autoren. Der Verf. meint, daß dadurch vielleicht eine bessere Übereinstimmung zwischen dem nach dieser Methode bestimmten Werte des Zähigkeitskoeffizienten und dem aus dem Ausflusse aus einer Kapillare erthaltenen erzielt werden könnte. Lp.

L. Natanson. Sur la propagation d'un petit mouvement dans un fluide visqueux. Krakau Anz. 1902, 19-35.

In der Abhandlung ‚Sur les lois de la viscosité‘ (Krak. Anz. 1901, 95-111; F. d. M. **32**, 795) hat Verf. die Spannungsdehnungsgesetze eines Körpers aufgestellt, der die Eigenschaften der Zähigkeit wiedergeben sollte. Hier wird eine der Folgerungen dieser Theorie ausgeführt, indem die Fortpflanzung einer kleinen Bewegung in einem solchen Körper untersucht wird.

Die am Anfang wiedergegebenen Spannungsdehnungsgesetze sind aus den gewöhnlichen der Elastizitätstheorie abgeleitet durch Hinzufügung

der beiden Bedingungen, daß erstens bei konstanter Deformation der Spannungszustand exponentiell abnimmt, und daß zweitens jeder frühere Deformationszustand den augenblicklichen Spannungszustand, exponentiell mit der zeitlichen Nähe zunehmend, beeinflußt.

Die hieraus hervorgehenden Ansätze werden in die Gleichgewichtsbedingungen eines kontinuierlichen Mediums eingesetzt und daraus Gleichungen für die Fortpflanzung der Dilatation und der Rotationen bei Abwesenheit von äußeren Kräften abgeleitet, die den Wellengleichungen der Elastizitätstheorie entsprechen und dieselben als speziellen Fall umfassen. Es zeigt sich, daß die von Clebsch angegebene Zerfällung der Bewegung in eine rein transversale und eine rein longitudinale Wellenbewegung auch hier immer möglich ist.

Sodann wird der Fall der Anwesenheit äußerer Kräfte betrachtet, und die Bewegungsgleichungen werden mit den von Navier, Poisson, Stokes, Maxwell, Stefan, O. E. Meyer usf. aufgestellten verglichen. Die Gleichungen lassen sich nur bei longitudinalen Wellen durch Annahme einer sehr kleinen Relaxationszeit zur Übereinstimmung bringen, jedoch nicht für transversale Wellen.

Zum Schluß wird noch ein, ebenen Wellen entsprechendes, partikulares Integral behandelt und auf die Anwendbarkeit der Ansätze auf elastische Nachwirkung plastischer Körper hingewiesen. Rr.

L. Natanson. Sur la fonction dissipative d'un fluide visqueux. Krak. Anz. 1902, 488-494.

In mehreren Abhandlungen der Jahre 1901 und 1902 hat der Verf. eine Verallgemeinerung der Theorie der Viskosität von Poisson und Stokes angestrebt. Die Grundvorstellung, welche diesen Untersuchungen zugrunde liegt, geht auf Poisson zurück und ist von Maxwell aufgenommen und ausgebildet worden; sie besteht in der Hypothese der Relaxation. Das Phänomen entsteht nach jener Annahme fortwährend im Innern aller flüssigen Körper. Die Geschwindigkeit, mit der es vor sich geht, ändert sich beträchtlich je nach den Umständen. Dieselbe kann ungemein groß sein, ohne je unendlich zu werden; oft jedoch ist sie nur wenig von Null verschieden. Mit Hülfe dieser Vorstellung wird die folgende Form der „dissipativen Funktion" aufgestellt (der Name ist 1873 von Lord Rayleigh gebraucht):

$$\chi = \varepsilon^{-/T}\{p^0_{xx} - p^0)e + (p^0_{yy} - p^0)f + (p^0_{zz} - p^0)g$$
$$+ p^0_{yz}a + p^0_{zx}b + p^0_{xy}c\}$$
$$- \{2\mu(eF + fF + gG) + \mu(aA + bB + cC) + \lambda\varpi\Theta\}.$$

Setzt man in ihr die Zeit $t = 0$, so verschwinden die Glieder mit E, F, G, A, B, C, Θ, weil diese Größen Integrale zwischen den Grenzen 0 und t sind; $\varepsilon^{-t/T}$ wird 1, und χ geht somit in die übliche Form der dissipa-

tiven Funktion über. Aus der neuen Gestalt dieser Funktion wird noch eine „bemerkenswerte Eigenschaft“ hergeleitet, die, wie zuletzt gezeigt wird, mit einem bekannten Theorem der Elastizitätstheorie in engem Zusammenhange steht. Lp.

L. Natanson. Über die Deformation einer plastisch-viskosen Scheibe. Zs. f. phys. Chem. 48, 185-202.

L. Natanson. Sur la déformation d'un disque plastico-visqueux. Krak. Anz. 1902, 494-512.

Eine zylindrische Scheibe von kreisförmigem Querschnitte und geringer Höhe bestehe aus einem plastisch zähen Stoffe, z. B. Pech; sie hafte an den beiden horizontalen Wänden, zwischen denen sie komprimiert wird, und habe seitlich nur den Druck der Atmosphäre auszuhalten. Unter den angenommenen Bedingungen dehnt sich die Scheibe seitlich aus, indem die Radien der Querschnitte zunehmen (mit Ausnahme der Radien der Grundflächen). Die Arbeit erörtert die Gesetze, welche diese Art der Deformation beherrschen.

Zunächst wird das in solcher Art gestellte Problem unter verschiedenen Hypothesen, die nachher fallen gelassen werden, mathematisch behandelt. Die erste besteht in der Annahme, daß die Substanz der Scheibe einer gewöhnlichen zähen Flüssigkeit vergleichbar, jedoch mit einem sehr beträchtlichen Koeffizienten der inneren Reibung begabt sei, und im besonderen, daß sie den von Navier, Poisson, Stokes und andern aufgestellten Gesetzen gehorche. Andere Hypothesen dienen zur Vereinfachung der Differentialgleichungen der Aufgabe und führen schließlich auf die Form:

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \mu \nabla^2 u = 0$$

und die entsprechenden für die anderen Koordinaten. Die mathematische Behandlung dieser Gleichungen nach zwei verschiedenen Methoden ergibt schließlich die Formel:

$$\Pi = \frac{-3\mu}{l^3}\left\{l^2 + R_0^2\left[\left(\frac{l_0}{l}\right)^{\frac{1}{2}} - l\right]\right\}\frac{dl}{dt},$$

wo l die Dicke der Scheibe, Π der Druck auf die Flächeneinheit der Scheibe ist. Ist Π als Funktion der Zeit gegeben, so ist diese Gleichung sofort integrierbar.

Unter Verzicht auf die früher zugelassenen Hypothesen geht dann der Verf. an die Behandlung seiner Aufgabe, indem er die verallgemeinerte Theorie der Viskosität benutzt, die er in mehreren früheren Arbeiten aufgestellt hat. Dadurch wird eine Formel gewonnen, welche die Relaxationsdauer T enthält und zu Diskussionen nach verschiedenen Richtungen Anlaß gibt. Lp.

N. Joukowsky. **Über die Reibung der Flüssigkeit bei großer Differenz der Geschwindigkeit in ihrer Strömung.** Moskau 1902, 1-13 (Russisch).

Diese Arbeit enthält den Bericht, welchen der Autor auf dem fünften Wasserleitungskongresse in Kiew erstattet hat. Darin werden seine Versuche über die Veränderung des Druckes in den Röhren, längs deren Achse ein Faden mit großer Geschwindigkeit bewegt wird, geschildert. Dieser Faden wird auf zwei Rollen gebracht und bildet so einen unendlichen Faden. Die untere Rolle wird in einem mit Wasser gefüllten Gefäße befestigt, die obere, die über derselben auf einer vertikalen Linie befestigt ist, wird durch einen Elektromotor in Bewegung gebracht. Der Teil des Fadens, der von der unteren Rolle sich nach oben bewegt, geht in das untere Ende einer in das Wasser getauchten vertikalen Röhre und kommt aus deren oberem Ende, welches mit einem Gummihütchen bedeckt ist, in dem sich ein Löchlein zum Durchlaufen des Fadens befindet, heraus.

Bei den Versuchen zeigte sich ein Wachsen des Wasserdruckes in der Richtung der Fadenbewegung proportional der Entfernung vom unteren Ende der Röhre. Was die Abhängigkeit des Wasserdruckes von der Geschwindigkeit des Fadens betrifft, so zeigte sich, daß dieser Druck annähernd proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit ist, obschon bei der Beobachtung Röhren von sehr kleinem Diameter und sehr dünne Fäden angewandt wurden. (Nach dem Poiseuilleschen Gesetze hätte man eine Proportionalität ersten Grades mit der Geschwindigkeit erwarten können.) Bei bedeutender Geschwindigkeit trat ein sehr bedeutendes Wachsen des Druckes ein; so erhielt man z. B. bei einem ein Meter langen Glasröhrchen vom Durchmesser 2,8 mm und einem Faden vom Durchmesser 0,3 mm und bei einer Geschwindigkeit des Fadens von 10,7 m in der Sekunde im oberen Ende der Röhre ein Zunehmen des Druckes bis auf 20 m der Wassersäule. Jk.

N. Joukowsky. **Zur Frage nach der Größe des Durchmessers einer Wasserdrucksäule, welche durch eine lange Röhre mit einem geöffneten Wasserreservoir vereinigt ist.** Bull. Mosk. Polyt. Ges. **11**, 349-351 (Russisch).

In diesem Artikel betrachtet der Autor eine Wasserdrucksäule, welche in der Nähe der Pumpstation auf eine lange Wasserleitungsröhre (die Länge der Röhre l und deren Durchschnittsfläche σ) gestellt ist. Die Röhre verbindet die Pumpstation mit einem Wasserreservoir von sehr großer Breite. Hierbei wird die Frage nach den Schwingungen des Wassers in der Wasserdrucksäule gelöst, welche bei eintretendem Stillstand der Pumpen erfolgen.

Der Autor nimmt folgende Bezeichnung an:

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = \zeta,\ \frac{x}{h} = \xi,\ \frac{2hg}{v_0^2}\frac{h}{l}\frac{\omega}{\sigma} = K,$$

wo v_0 die Wassergeschwindigkeit in der Röhre bei permanenter Bewegung. v die Geschwindigkeit des Wassers und der Röhre bei Schwingungen desselben, h die Niveaudifferenz in der Säule und im Reservoir bei permanenter Strömung des Wassers, x diese Niveaudifferenz bei Schwingungen des Wassers bezeichnet.

Indem der Autor beobachtet, daß der Bruch $v_0^2/2gh$ in der Praxis eine geringe Größe hat, wenn l groß ist, findet er, daß die veränderlichen Größen ζ und ξ der folgenden Differentialgleichung genügen:

$$\frac{d\zeta}{d\xi} - k\zeta + k\xi = 0.$$

Mit Hülfe des Integrals dieser Gleichung wird das Verhältnis ξ' der größten Amplitude der Schwingungen des Wassers in der Säule zu der Größe h bestimmt.

Dieses Verhältnis genügt folgender Gleichung:

$$-\xi' + \frac{1}{k}(1 - e^{-k(1+\xi')}) = 0.$$

In dem Artikel werden Zahlenbeispiele aus der Praxis der Moskauer Wasserleitung gebracht, aus denen hervorgeht, daß das Verhältnis ξ' bis zu $\frac{1}{2}$ gelangen kann. Jk.

A. Fliegner. Der Druck in der Mündungsebene beim Ausströmen elastischer Flüssigkeiten. Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich **47**, 21-42.

Fortsetzung der Abhandlung, über deren ersten Teil in F. d. M. **28**, 827, 1897 referiert ist. Die dort benutzten Formeln werden zunächst in einem nicht gerade wesentlichen Punkte geändert; doch muß zu diesem Zwecke der ganze Gedankengang zur Begründung der Änderungen wiederholt werden. Die Wiedergabe der gewonnenen Formeln ist hier nicht möglich. Aus zweien der abgeleiteten Gleichungen folgt, daß der Grenzdruck, welcher die Ausflußmenge zu einem Maximum macht, in der Mündungsebene eine Geschwindigkeit erzeugt, die kleiner bleibt als die zur dortigen Temperatur gehörige Schallgeschwindigkeit. Das Maximum der Ausflußmenge könnte nur dann mit der Schallgeschwindigkeit erreicht werden, wenn die Bewegung widerstandslos stattfände; ein äußerer Wärmeaustausch übt auf diese Verhältnisse keinen Einfluß aus. Dieses Ergebnis stimmt mit den Belichtungsversuchen überein, nach welchen die Geschwindigkeit in der Mündungsebene kleiner als die Schallgeschwindigkeit bleibt. Die Frage, welche in dem ersten Teile der Arbeit als nur durch den Versuch lösbar bezeichnet wurde, nämlich nach dem Zusammenhange zwischen den drei Pressungen p_i innen, p_m in der Mündungsebene und p_a außen, wird auch jetzt noch nicht zur Entscheidung gebracht. Am Schlusse des gegenwärtigen Teiles schildert der Verf. das Verfahren, durch welches er eine Bestätigung seiner Formeln versucht hat. „Die vorstehende Untersuchung sollte namentlich nur zeigen, daß in der Tat ein bestimmter Zusammenhang zwischen den drei Pressungen p_i, p_m und

p_a besteht, und wie man im wesentlichen nach einer genaueren Berechnung vorgehen müßte. Bei den Anwendungen wird man sich dagegen mit einer einfacheren, empirischen Formel begnügen." Lp.

S. Tschaplygin. Über Gasstrahlen. Wissenschaftl. Abh. Mosk. Universität. 1902, 1-121 (Russisch).

Verf. gibt eine Methode der Lösung des Problems von der Bewegung eines idealen Gases unter folgenden Bedingungen: Die Masse des Gases ist unendlich groß, die Strömung ist permanent und wirbellos, überall parallel einer Ebene; der Strom ist durch gerade Wände begrenzt, von welchen das Gas in Form von Strahlen sich ablöst; der thermische Prozeß ist adiabatisch (der Druck p wird mit der Dichtigkeit ϱ durch die Formel $p = k\varrho^\gamma$ verbunden).

Indem der Verf. τ als eine Größe, welche dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, und θ als den Winkel der Geschwindigkeit mit der x-Achse als unabhängige Variabeln annimmt, findet er folgende Beziehungen:

$$\varrho = \varrho_0(1-\tau)^\beta,\quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = (1-\tau)^\beta \frac{\partial y}{\partial \psi},\quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = -(1-\tau)^\beta \frac{\partial x}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 2\tau(1-\tau)^{-\beta}\frac{\partial \psi}{\partial \tau},\quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = -\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau}(1-\tau)^{-\beta-1}\frac{\partial \psi}{\partial \tau},$$

wo $\beta = 1/(\gamma-1)$, φ das Geschwindigkeitspotential, ψ die Strömungsfunktion bedeutet.

Ferner beweist der Verf., daß die Gasströmung vollständig durch die Grenzbedingungen bestimmt wird, wenn die Gasgeschwindigkeit auf den Strahlenflächen kleiner als die entsprechende Schallgeschwindigkeit ist. [τ_0, der entsprechende Wert von τ, ist kleiner als $1/(2\beta+1)$.] Das Verhältnis des maximalen und minimalen Druckes wird hierbei kleiner als $\left(\frac{2\beta+1}{2\beta}\right)^{\beta+1}$.

Sodann erklärt der Verf. die Ursachen, infolge deren die permanente Bewegung unmöglich ist, wenn die oben erwähnte Bedingung nicht besteht. (Einige solcher unmöglichen Fälle werden vom Autor ausführlich behandelt.)

Im Verlauf der ganzen folgenden mathematischen Analyse ist angenommen, daß die Bedingung $\tau < 1/(2\beta+1)$ besteht. Unter dieser Voraussetzung liefert der Verf. eine Methode der Lösung des Problems über die Gasstrahlen, so oft in dem entsprechenden Problem über die Wasserstrahlen die Funktionen φ und ψ durch folgende konvergierende Reihen

$$\psi = A + B\theta + \Sigma B_n \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^n \sin(2n\theta + \alpha_n),$$

$$\varphi = C - B \lg \sqrt{\tau} - \Sigma B_n \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^n \cos(2n\theta + \alpha_n)$$

sich ausdrücken lassen.

Das Gasstrahlenproblem wird unter denselben Grenzbedingungen durch folgende Formeln gelöst:

$$\psi = A + B_0 + \Sigma B_n \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \sin(2n\theta + \alpha_n),$$

$$\varphi = C + B(1-\tau)^{-\beta} - \frac{B}{2}\int (1-\tau)^{-\beta} \frac{d\tau}{\tau}$$

$$- (1-\tau)^{-\beta} \Sigma B_n \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \cos(2n\theta + \alpha_n).$$

Hier ist y_n eine hypergeometrische Reihe $F(a_n, b_n, 2n+1, \tau)$, wobei

$$a_n + b_n = 2n - \beta, \quad a_n b_n = -\beta_n (2n+1);$$

$$y_{n,0} = F(\tau_0), \quad x_n = 1 + \frac{\tau}{n y_n} \frac{d y_n}{d\tau}.$$

Dank einigen vom Verf. gefundenen Eigenschaften der Funktionen y_n und x_n werden die Reihen, welche die Funktionen φ und ψ bestimmen, absolut und gleichmäßig konvergierende Reihen. Alsdann gibt der Verf. eine Methode zu einer annähernden Bestimmung der Funktionen y_n und x_n, indem er den Grad der Genauigkeit der zu diesem Zwecke gegebenen Formeln zeigt.

Die vom Verf. gefundene allgemeine Methode der Lösung des Gasstrahlenproblems wird durch zwei Beispiele erläutert: 1. die Bestimmung der Strömung der Gase aus einem unendlich großen Gefäße mit geraden Wänden, die auf einer und derselben Geraden liegen; 2. die Bestimmung des Druckes unendlicher Gasströme auf eine Platte.

Im ersten Falle findet der Verf. folgende Stromfunktionen:

$$\frac{\pi}{Q}\psi = -\theta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \sin 2n\theta$$

und gibt eine genaue und darnach eine einfachere, annähernde Formel für die Kompression des Strahles, d. h. für das Verhältnis der Strahlenbreite in der Unendlichkeit zur Breite der Gefäßöffnung.

Die letztere Formel ist folgende:

$$\frac{b}{a} = \frac{\pi}{\pi + 2 - 5 s_0 + 1,9 s_0^2},$$

wo $\beta \doteq 2,5$ angenommen und $s_0 + 1$ gleich dem Verhältnisse der absoluten Temperatur des Gases in den entfernten Punkten des Gefäßes und der absoluten Temperatur des Gases auf der Strahlenfläche ist. Die gegebene Formel drückt die Erscheinung gut aus, wie durch Vergleichung

mit den Erfahrungsdaten folgt, auch in dem Falle, wenn der äußere Druck bedeutend kleiner ist als der von der Analyse geforderte (Versuch von Hirn).

Im zweiten Falle, wenn die Gasströmung symmetrisch um die Platte herumgeht, ergibt sich

$$\frac{\pi}{Q}\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \sin 2n\theta\,(1-\cos 2nm),$$

wo m in der gezeigten Weise mit der Breite l der Platte, mit der Geschwindigkeit v in den entfernten Punkten der Gasströmung und mit der Dichtigkeit ϱ_1 des Gases in diesen Punkten verbunden ist. Der volle Druck R auf die Platte wird mit Hülfe der Funktionen $x_{n,0}$ durch eine ziemlich komplizierte genaue Formel ausgedrückt.

Indem die angenäherten Ausdrücke der Funktionen $x_{n,0}$ und das Gas als unendlich angenommen werden, wird für R folgende einfachere Formel erhalten:

$$R = l\varrho_1 v^2 \frac{\pi}{\pi + 4 - 10s + 7s^2}.$$

Hier ist β wieder gleich 2,5 genommen und $s = \frac{v^2}{5c^2}$, wo c die Geschwindigkeit des Strahles in den entfernten Punkten des Stromes bedeutet. Diese Formel genügt gleichfalls den Erfahrungsdaten, auch in dem Falle, wenn die Geschwindigkeit des Stromes (oder die Geschwindigkeit der Platte in den umgebenden Gasen) bedeutend größer als die zulässige Grenzgeschwindigkeit ist, obschon die Umstände des Versuches dabei ganz verschieden sind (wie sich aus den Daten der Ballistik ergibt).

Für Fälle, wo die Gasgeschwindigkeit nicht sehr groß ist (geringer als 100 Meter in der Stunde), benutzt der Verf. eine einfache angenäherte Methode zur Lösung des Problems über die Gasstrahlen. Diese Methode besteht in folgendem:

Man kann, wie das der Verf. zeigt, annehmen, daß

$$\varphi + i\psi = f(\sigma + i\theta),$$

wo

$$i = \sqrt{-1},\quad \sigma = \int_{\tau}^{\tau_0} \frac{(1-\tau)^{\beta}}{\tau}\,d\tau.$$

Die Vorteile dieser Methode bestehen darin, daß man sie auf beliebige Probleme von Gasströmen, welche durch gerade Wände begrenzt sind, anwenden kann. Diese Methode benutzt der Autor zur Bestimmung des Druckes eines Gasstromes auf eine Platte, indem die Geschwindigkeit des Stromes in sehr entfernten Punkten unter einem gegebenen Winkel zur Platte gerichtet ist. Hierbei wird die Druckkraft annähernd proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit. (Der Proportionalkoeffizient ändert sich bis 2 Prozent, indem er schneller als die Geschwindigkeit wächst.) Jk.

J. H. Hume-Rothery. On one explanation of the soaring of birds. Messenger (2) 32, 115-130.

„Der Zweck der folgenden Untersuchung ist die Auffindung der wahren Erklärung des Aufflugs der Vögel unter besonderer Berücksichtigung ihrer Kreisbewegung und wirklicher praktischer Bedingungen. Ich habe die indische Weihe (Milvus Govinda) beobachtet, wie sie bei schönem Wetter und schwachem Winde bei Abwesenheit von Windstößen oder Böen wieder und wieder in einem Kreise herumflog mit gleichförmiger Bewegung und regungslosen Schwingen, indem nur eine gelegentliche Änderung der Stellung des Schwanzes zum Steuern (nicht zum Antrieb) die einzige Bewegung war. Dies geschah auf flachem Lande, über einem Garten, nahe einem Hause. Der Vogel erreichte allmählich größere Höhen. Ich erinnere mich nicht eines Abtreibens der Bahn nach der Windrichtung. Seit Vollendung der Rechnungen habe ich entdeckt, daß Lord Rayleigh (Manchester Mem. 1899, No. 5) unter anderen die Ursache bezeichnet hat, die ich als die hauptsächlichste betrachte; doch hat er nicht bewiesen, daß sie genügt, oder überhaupt praktische Bedingungen berücksichtigt. Ich werde das Problem auf der Basis der indischen Weihe behandeln, die ich gesehen habe, obgleich ich durch die höchste Autorität vielleicht im ganzen Reiche belehrt bin, daß die Kreisbewegung für alle auffliegenden Vögel gleich charakteristisch ist." Am Schlusse der Zahlenrechnungen, die wir nicht wiedergeben können, werden die Ergebnisse wie folgt zusammengefaßt: „Wir haben gesehen, daß ein allmähliches Anwachsen oder Abnehmen in der Windstärke ein nicht ungewöhnliches Vorkommnis ist, daß die Bewegung in einer geneigten Kreisbahn bei einem solchen Winde einen Vogel befähigt, aus dem Winde einen Ersatz an Energie zu beziehen, dessen Betrag dazu genügt (jedenfalls in dem Beispiel der Weihe), den unvermeidlichen Verlust mehr als wett zu machen. Eine aufwärts gerichtete Windkomponente kann zwar einen Vogel stützen, gibt aber keinen Grund für die fortgesetzte Kreisbewegung eines Vogels. Daher meine ich, es sind starke Gründe vorhanden, die darauf schließen lassen, daß, mag der Vogel auch manche andere Unterstützung erhalten, er beim Auffluge in einem Kreise einen Wind benutzt, der zunimmt oder abnimmt, während er aufsteigt." Lp.

Weitere Literatur.

G. R. Bodmer. Hydraulic motors and turbines. For engineers, manufacturers, and students. London: Whittaker. 582 S. 12mo.

Irv. P. Church. Diagrams of mean velocity of uniform motion of water in open channels, based on the formula of Ganguillet and Kutter. New York: Wiley and Sons. London: Chapman and Hall. 11 Diagramme u. 1 S. Text. [Nature 66, 439.]

T. C. Fidler. Calculations in hydraulic engineering: a practical textbook for the use of students, draughtsmen, and engineers; with numerous illustrations and examples. Part 2: Calculations in hydrokinetics. New York: Longmans. IX u. 203 S. 8°.

U. GRASSI. Studi d' idrodinamica. Pisa: Nistri. 84 S. 8°.

R. HARTMANN. Beiträge zur Wirbelbewegung. Diss. Braunschweig. 31 S. 8°.

J. KESSLER. Berechnung und Konstruktion der Turbinen. Eine kurzgefaßte Theorie in elementarer Darstellung mit erläuternden Rechnungsbeispielen. Dritte vermehrte und verbesserte Auflage. Hildburghausen: Petzoldt. III u. 52 S. 8°.

Kapitel 5.

Potentialtheorie.

T. J. I'A. BROMWICH. On the potential of a single sheet. Arch. der Math. u. Phys. (3) **2**, 295-297.

Das einfache Verfahren, mittels dessen Weingarten (Acta Math. **10**, F. d. M. **19**, 1034, 1887) die Unstetigkeit der zweiten Differentialquotienten eines Körperpotentials beim Übergang von einem äußeren zu einem inneren Punkte abgeleitet hat, wird hier benutzt, um aus den bekannten Formeln für die ersten Differentialquotienten eines Flächenpotentials die Unstetigkeit der zweiten Ableitungen dieses Flächenpotentials beim Durchgang durch die Fläche zu ermitteln. Zur Vereinfachung wird dabei die Fläche durch das oskulierende Paraboloid ersetzt. Weiter wird gezeigt, daß die erhaltenen Resultate mit den von Poincaré (Théorie du potentiel Newtonien) auf anderem Wege gefundenen übereinstimmen. Wn.

E. R. NEUMANN. Zur Integration der Potentialgleichung vermittels C. Neumanns Methode des arithmetischen Mittels. Zweiter Aufsatz. Math. Ann. **56**, 49-114.

Während in dem ersten Aufsatz (s. F. d. M. **32**, 773, 1901) die Methode des arithmetischen Mittels, unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen, zur Lösung der Randwertaufgabe auf ein einfach zusammenhängendes ebenes oder räumliches Gebiet angewandt war, werden im zweiten mehrfach zusammenhängende Bereiche in Betracht gezogen, ein Fall, der in den Untersuchungen anderer Autoren bisher immer ausgeschlossen war. Hier ergibt sich nun sofort ein wesentlicher Unterschied gegen früher. Schon die Untersuchung eines von zwei (sich nicht schneidenden) Kurven oder Flächen begrenzten Gebietes zeigt, daß die im ersten Aufsatz definierte Konfigurationskonstante niemals kleiner als 1 sein kann, der Hilbertsche Satz demnach auf ein solches Gebiet nicht anwendbar ist. Es ist daher zunächst eine passende Modifikation des Begriffs der Konfigurationskonstante c zu suchen. Diese Modifikation besteht darin, daß unter c der größte Wert verstanden wird, den die Öffnungsfunktion (betreffs derselben vergleiche das Referat über den ersten Aufsatz) annehmen kann,

wenn ihre beiden Pole auf ein und derselben, aber beliebigen begrenzenden Kurve oder Fläche liegen. Diese Konfigurationskonstante c eines mehrfach zusammenhängenden, von m (sich nicht schneidenden) Kurven oder Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ begrenzten Gebiets besitzt nun die Eigenschaft, mit Δ, der größten der Einzelschwankungen von m auf $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ willkürlich vorgeschriebenen Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_m$ multipliziert, eine obere Grenze zu liefern für die sämtlichen Einzelschwankungen der aus $f_1, f_2, \ldots, f_m$ hergeleiteten Funktionen $f'_1, f'_2, \ldots, f'_m$. Ist c ein echter Bruch, so folgt weiter, daß mit wachsendem n die sämtlichen Einzelschwankungen der Funktionen $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \ldots, f_m^{(n)}$ sich immer mehr der Null nähern, d. h. daß sich diese Funktionen auf den einzelnen Kurven, resp. Flächen immer weniger von Konstanten unterscheiden; aber diese Konstanten (die Konvergenzkonstanten) haben im allgemeinen auf den verschiedenen Kurven oder Flächen verschiedene Werte. Das führt weiter zu folgendem Resultat: „Ist ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet gegeben, begrenzt von m geschlossenen Kurven oder Flächen, und sind auf diesen stetige, sonst aber willkürliche Werte $f_1, f_2, \ldots, f_m$ vorgeschrieben, so können wir, sofern nur die Konfigurationskonstante c des Gebietes kleiner als 1 ist, diese Werte stets durch Hinzufügen passend gewählter additiver Konstanten $k_1, k_2, \ldots, k_m$ so modifizieren, daß die Methode des arithmetischen Mittels, angewandt auf diese neuen Werte $f_1 + k_1, f_2 + k_2, \ldots, f_m + k_m$, uns ohne weiteres eine Fundamentalfunktion des betrachteten Gebietes liefert, welche diese letzteren Werte zu Randwerten besitzt.“

Hiernach kann man die Methode des arithmetischen Mittels in ihrer ursprünglichen Gestalt nicht ohne weiteres auf mehrfach zusammenhängende Bereiche anwenden, sondern erst, wenn man zuvor die auf den einzelnen Grenzen vorgeschriebenen Werte um gewisse Konstanten vermehrt hat. Aber dieser Übelstand läßt sich beseitigen, wenn man der Lösung der Randwertaufgabe nicht direkt die Form einer Neumannschen Reihe gibt, sondern zu einer solchen noch das Potential gewisser materieller Punkte hinzufügt. So erhält man für ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{J}$, begrenzt von Kurven, bezw. Flächen, deren eine, σ_1, die anderen, $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_m$, umschließt, folgendes Resultat: „Will man diejenige Fundamentalfunktion von $\mathfrak{J}$ herstellen, welche auf $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ willkürlich daselbst vorgeschriebene Werte $f_1, f_2, \ldots, f_m$ annimmt, so kann man, falls nur die Konfigurationskonstante des Gebietes $\mathfrak{J}$ kleiner als 1 ist, folgendermaßen verfahren: Man denke sich in gewissen innerhalb σ_2, bezw. $\sigma_3, \ldots$, bezw. σ_m beliebig gelegenen Punkten zunächst willkürlich angenommene Massen $M_2, M_3, \ldots, M_m$ konzentriert, bezeichne ihr Potential mit V und bestimme alsdann nachträglich diese Massen so, daß die auf Grund der Werte

$$\varphi_1 = f_1 + V_1, \quad \varphi_2 = f_2 + V_2, \ldots, \varphi_m = f_m + V_m$$

gebildeten auf einander folgenden Funktionen $\varphi', \varphi'', \varphi'''$ etc. auf allen begrenzenden Kurven, bezw. Flächen gegen ein und dieselbe Konstante

konvergieren. Sodann bestimme man vermittels der Methode des arithmetischen Mittels die Fundamentalfunktion Y_i des Gebietes $\mathfrak{J}$, welche die solchermaßen bestimmten Werte $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ zu Randwerten besitzt. Alsdann ist $\psi_i = Y_i - V_i$ die gesuchte Fundamentalfunktion von $\mathfrak{J}$ mit den Randwerten $f_1, f_2, \ldots, f_m$." Ein ähnliches Resultat gilt auch für den Fall, wo die m Grenzkurven, resp. -flächen neben einander liegen und das Gebiet sich außerhalb derselben ins Unendliche erstreckt.

Alle so abgeleiteten Resultate erfordern, daß die oben definierte Konstante c einen Wert besitzt, der kleiner als 1 ist. Daß diese Bedingung wirklich erfüllt sein kann, wird durch Berechnung des Wertes von c für ein von zwei Kreisen begrenztes ebenes Gebiet gezeigt. Für den von zwei konzentrischen Kreisen mit den Radien R_1 und R_2 $[R_1 > R_2]$ begrenzten Ring findet man

$$c = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{R_2}{R_1}\right),$$

wo arctg im ersten Quadranten zu nehmen ist. Mittels der Transformation durch reziproke Radien folgt dann, daß die Konfigurationskonstante eines von zwei getrennten Kreisen begrenzten Gebietes stets kleiner als 1 ist, mag der eine Kreis innerhalb des andern oder beide neben einander liegen.

Wn.

E. R. Neumann. Neue Integraleigenschaften sukzessiver Potentiale. Gött. Nachr. 1902, 242-258.

Es bezeichne $\mathfrak{J}$ den Innen-, $\mathfrak{A}$ den Außenraum einer geschlossenen Fläche σ, ferner sei

$$(d\sigma)_p = \left(\frac{\partial \frac{1}{\varepsilon_p}}{\partial \nu}\right) d\sigma$$

(ν die Normale von $d\sigma$, ε_p die Entfernung des Elements $d\sigma$ von einem Punkte p). Bildet man dann, ausgehend von irgend welchen auf σ willkürlich, aber stetig vorgeschriebenen Werten f_s, die Doppelbelegungspotentiale:

$$W_p = \frac{1}{2\pi}\int f_\sigma (d\sigma)_p, \qquad W_{is} + W_{as} = 2f'_s,$$

$$W'_p = \frac{1}{2\pi}\int f'_\sigma (d\sigma)_p, \qquad W'_{is} + W'_{as} = 2f''_s,$$

$$W''_p = \frac{1}{2\pi}\int f''_\sigma (d\sigma)_p, \qquad \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

[W_{is} und W_{as} sind die Werte von W_p, wenn p von innen, resp. von außen sich dem Punkte s der Fläche σ nähert]; bezeichnet man ferner mit dem Symbol $[\varphi, \psi]_{\mathfrak{J}}$ das über den Innenraum von σ erstreckte Integral

$$[\varphi, \psi]_{\mathfrak{J}} = \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) d\tau,$$

ebenso mit $[\varphi, \psi]_{\mathfrak{A}}$ das analoge, über den Außenraum von σ erstreckte Integral, so ist:

$$(1) \quad [W^{(\varkappa)}, W^{(\lambda)}]_{\mathfrak{J}} = [W^{(\varkappa+1)}, W^{(\lambda-1)}]_{\mathfrak{J}}$$
$$= [W^{(\varkappa+2)}, W^{(\lambda-2)}]_{\mathfrak{J}} = \cdots = I^{(\varkappa+\lambda)},$$

d. h. diese Integrale sind nicht von den einzelnen Indizes $\varkappa$, λ, sondern nur von ihrer Summe abhängig. Diese Eigenschaft wird, da H. A. Schwarz zuerst ähnliche Eigenschaften gewisser ebener Integrale untersucht hat, als „Schwarzsche Integraleigenschaft", die Integrale $I^{(\varkappa+\lambda)}$ werden als „Schwarzsche Integrale" bezeichnet.

Bildet man weiter eine zweite Reihe von Doppelbelegungspotentialen $\mathfrak{W}_p, \mathfrak{W}'_p, \mathfrak{W}''_p, \ldots$, indem man von einer anderen Funktion $\mathfrak{f}$ statt von f ausgeht, so ist:

$$(2) \quad [W^{(\varkappa)}, \mathfrak{W}^{(\lambda)}]_{\mathfrak{J}} = [W^{(\varkappa+1)}, \mathfrak{W}^{(\lambda-1)}]_{\mathfrak{J}}$$
$$= [W^{(\varkappa+2)}, \mathfrak{W}^{(\lambda-2)}]_{\mathfrak{J}} = \cdots = K^{(\varkappa+\lambda)}.$$

Die Gleichungen (1) und (2) gelten auch, wenn man überall den Index $\mathfrak{J}$ durch $\mathfrak{A}$ ersetzt.

Eine analoge Eigenschaft besitzen auch die folgenden sukzessiven Potentiale von einfachen Flächenbelegungen:

$$V_p = \frac{1}{2\pi} \int \frac{g_\sigma}{\varepsilon_p} d\sigma, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{is} + \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{as} = 2 g'_s,$$
$$V'_p = \frac{1}{2\pi} \int \frac{g'_\sigma}{\varepsilon_p} d\sigma, \quad \left(\frac{\partial V'}{\partial \nu}\right)_{is} + \left(\frac{\partial V'}{\partial \nu}\right)_{as} = 2 g''_s,$$
$$V''_p = \frac{1}{2\pi} \int \frac{g''_\sigma}{\varepsilon_p} d\sigma, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Es ist nämlich:

$$(3) \quad [V^{(\varkappa)}, V^{(\lambda)}]_{\mathfrak{J}} = [V^{(\varkappa+1)}, V^{(\lambda-1)}]_{\mathfrak{J}} = \cdots = L^{(\varkappa+\lambda)};$$

und allgemeiner ist, wenn $\mathfrak{V}_p, \mathfrak{V}'_p, \mathfrak{V}''_p, \ldots$ eine zweite Reihe von Potentialen darstellen, die man erhält, wenn man statt von g_s von $\mathfrak{g}_s$ ausgeht (g_s und $\mathfrak{g}_s$ sind unabhängig von einander):

$$(4) \quad [V^{(\varkappa)}, \mathfrak{V}^{(\lambda)}]_{\mathfrak{J}} = [V^{(\varkappa+1)}, \mathfrak{V}^{(\lambda-1)}]_{\mathfrak{J}} = \cdots = M^{(\varkappa+\lambda)}.$$

Endlich ist

$$(5) \quad [W^{(\varkappa)}, V^{(\lambda)}]_{\mathfrak{J}} = [W^{(\varkappa+1)}, V^{(\lambda-1)}]_{\mathfrak{J}}$$
$$= [W^{(\varkappa+2)}, V^{(\lambda-2)}]_{\mathfrak{J}} = \cdots = N^{(\varkappa+\lambda)};$$

und in den Gleichungen (3) bis (5) kann man ebenfalls den Index $\mathfrak{J}$ überall durch $\mathfrak{A}$ ersetzen.

Setzt man speziell

$$\text{(a)}\quad \mathfrak{f}_s = \frac{1}{E_{as}}, \qquad \text{(b)}\quad \mathfrak{f}_s = \frac{1}{E_{is}},$$

wo E_{as} die Entfernung eines Oberflächenpunktes s auf σ von einem festen äußeren Punkte a, E_{is} die Entfernung des Punktes s von einem festen inneren Punkte i ist, unterscheidet man ferner für diese speziellen Fälle die zugehörigen Funktionen $\mathfrak{W}$ durch ein angehängtes a, resp. i, so gelten die Gleichungen:

$$(6^a)\quad W_a'^{(n)} + W_a^{(n+1)} = -\frac{1}{4\pi}\{[W^{(n-q)}, \mathfrak{W}_a^{(q)}]_{\mathfrak{J}} + [W^{(n-q)}, \mathfrak{W}_a^{(q)}]_{\mathfrak{A}}\},$$

$$(6^b)\quad W_i'^{(n)} - W_i^{(n+1)} = \frac{1}{4\pi}\{[W^{(n-q)}, \mathfrak{W}_i^{(q)}]_{\mathfrak{J}} + [W^{(n-q)}, \mathfrak{W}_i^{(q)}]_{\mathfrak{A}}\}.$$

Da die Aggregate auf den linken Seiten von (6^a) und (6^b) gerade in der C. Neumannschen Methode des arithmetischen Mittels auftreten, so geben diese Gleichungen ein Mittel, die Frage nach der Konvergenz der Neumannschen Reihen auf die nach der Konvergenz der ihnen zugehörigen Schwarzschen Integrale I^n zurückzuführen. Wn.

S. ZAREMBA. Sur l'intégration de l'équation $\Delta u + \xi u = 0$. Journ. de Math. (5) 8, 59-117.

S. ZAREMBA. Sur les méthodes de la moyenne arithmétique de Neumann et de Robin dans le cas d'une frontière non connexe. Krak. Anz. 1902, 457-488.

In den vorliegenden Arbeiten handelt es sich ebenso wie in früheren Aufsätzen des Verf. (s. F. d. M. **31**, 375, 1900; **32**, 368, 369, 776, 1901) um die bekannten klassischen Probleme, eine Funktion u zu bestimmen, die in einem gegebenen Gebiete der Laplaceschen Gleichung genügt, falls an der Grenze entweder $\frac{\partial u}{\partial N}$ (Problem von Robin) oder u selbst (Dirichletsches Problem) gegebene Werte annimmt. Der Verf. erweitert die Aufgabe nach einer doppelten Richtung. Einmal nimmt er an Stelle der Laplaceschen Gleichung die allgemeinere:

$$(1)\qquad \Delta u - \mu^2 u = 0,$$

in der μ einen positiven Wert hat, während zugleich die Grenzbedingung im ersten Fall (Problem von Robin) wird:

$$(2)\qquad \left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_e - \left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_i = \lambda\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_e + \left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_i\right\} + 2\varphi.$$

In (2) bezeichnen N_e die äußere, N_i die innere Normale der Grenzfläche

S, φ eine gegebene Funktion, λ einen Parameter. Über die (geschlossene) Fläche S werden dieselben Annahmen gemacht, wie in einer früheren Arbeit des Verf. (vergl. F. d. M. **32**, 369, 1901).

Zunächst wird gezeigt, daß durch die Gleichungen (1) und (2) u eindeutig bestimmt ist, falls $|\lambda| < 1$, ebenso für $\lambda = -1$, während für $\lambda = +1$ noch die weitere Bedingung $\mu = 0$ hinzukommen muß. Weiter wird u als Funktion von λ betrachtet und nach Potenzen von λ entwickelt:

$$(3) \qquad u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda^k,$$

wo

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(S)} \varphi \frac{e^{-\mu r}}{r} ds, \quad u_k = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{(S)} \left[\left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial N}\right)_e + \left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial N}\right)_i\right] \frac{e^{-\mu r}}{r} ds.$$

Neben dieser Reihe wird die folgende betrachtet:

$$(4) \qquad \sigma = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \lambda^k,$$

wo

$$\sigma_0 = \varphi, \quad 2\sigma_k = \left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial N}\right)_e + \left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial N}\right)_i.$$

Dann läßt sich zeigen, daß die Reihen (3) und (4) denselben Konvergenzradius haben, und zwar ist derselbe > 1, fall μ einen gewissen positiven Wert überschreitet. Die Reihen (3) und (4) konvergieren dann also noch für $|\lambda| = 1$ (und zwar für alle Punkte des Raumes), d. h. man kann eine Funktion u bestimmen, die der Gleichung (1) genügt und die Eigenschaft hat, daß entweder $\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_i$ oder $\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_e$ an der Fläche S gegebene Werte annehmen. Übrigens läßt sich die Reihe (3) summieren:

$$(3\text{a}) \qquad u = \int\limits_{(S)} \sigma \frac{e^{-\mu r}}{r} ds.$$

Neben der erwähnten Lösung u von (1) und (2), die eine analytische Funktion von λ ist und außerhalb des Konvergenzkreises nur einzelne einfache Pole besitzt, existieren noch andere, die keine analytischen Funktionen von λ sind, aber sich von u nur für einzelne isolierte Werte von λ unterscheiden.

Für den Fall $\mu = 0$, wo (1) in die Laplacesche Gleichung übergeht, fällt einer der Pole der Funktion u in $\lambda = +1$, und u läßt sich so darstellen:

$$u = \frac{P}{1-\lambda} + u',$$

wo P und u' Flächenpotentiale darstellen, und zwar hat P auf S einen

konstanten Wert. Ist $\int \varphi ds = 0$, so wird auch $P = 0$, und dann gilt das oben für den Fall $\mu > 0$ ausgesprochene Resultat auch für $\mu = 0$, womit das Robinsche Problem erledigt ist.

Die Erweiterung des Dirichletschen Problems (Teil II der ersten Arbeit), d. h. die Bestimmung einer Funktion v, die der Gleichung (1) genügt sowie der Grenzbedingung

$$(5) \qquad (v)_i - (v)_e = \lambda[(v)_i + (v)_e] + 2\varphi,$$

stützt sich auf die im Teil I abgeleiteten Resultate. Man bestimme das Potential v_0 einer Doppelbelegung:

$$v_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \varphi \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-\mu r}}{r}\right) \cos\psi ds$$

[ψ der Winkel der inneren Normale von ds mit dem Radius r], ferner eine Funktion u, die der Gleichung (1) und der Grenzbedingung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_e - \left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_i = \lambda\left[\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_e + \left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_i\right] + 2\frac{\partial v_0}{\partial N}$$

genügt, wobei $\frac{\partial v_0}{\partial N}$ als kontinuierlich vorausgesetzt wird. Dann setze man für das Innere von S

$$v' = \frac{\lambda u + v_0}{1 - \lambda},$$

dagegen für den Außenraum von S:

$$v' = \frac{\lambda u + v_0}{1 + \lambda},$$

so stellen diese Funktionen v' eine Lösung von (5) dar. Übrigens kann man auch v' durch das Integral darstellen:

$$v' = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \{\lambda[(v')_i + (v')_e] + 2\varphi\} \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-\mu r}}{r}\right) \cos\psi ds,$$

und die Funktion $(v')_i + (v')_e$ bleibt sowohl für $\lambda = +1$, als für $\lambda = -1$ endlich. Auch für v existieren außerdem Lösungen, die nicht analytische Funktionen von v sind.

Zum Schluß wird aus den vorstehenden Resultaten noch eine Erweiterung der Neumannschen Methode des arithmetischen Mittels abgeleitet, eine Erweiterung, bei der Gleichung (1) an Stelle der Laplaceschen Gleichung, $\frac{1}{r} e^{-\mu r}$ an Stelle von $\frac{1}{r}$ tritt.

In der zweiten Arbeit, zu deren Abfassung der Verf. durch eine Arbeit von E. R. Neumann veranlaßt ist, werden die Resultate der ersten auf solche Bereiche übertragen, die von mehreren (sich nicht schneidenden) Flächen begrenzt werden. Hinsichtlich der Methode des arithmetischen

Mittels ergeben sich dabei dieselben Resultate, die vorher E. R. Neumann (s. das Referat S. 793) abgeleitet hatte, auf einem Wege, der von dem dieses Autors verschieden ist und weniger Beschränkungen hinsichtlich der Natur der Grenzflächen erfordert. Analoge Resultate werden auch für die Robinsche Methode gefunden. Wn.

W. Stekloff. Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **19**, 191-259, 455-490.

Der Verf. rekapituliert zunächst verschiedene Resultate seiner früheren Arbeiten (vergl. F. d. M. **31**, 731, 733, 1900; **32**, 777, 1901), modifiziert die dort gegebenen Beweise und verallgemeinert einige früher von ihm aufgestellte Sätze. Insbesondere gibt er einen neuen Beweis für das sogenannte Fundamentaltheorem (F. d. M. **31**, 731), sowie für die Existenz der Poincaréschen harmonischen Funktionen, endlich für die Konvergenz einer auch von Zaremba untersuchten Reihe (es ist die Reihe (3) des vorhergehenden Referates für $\mu = 0$). Als Bedingung der Gültigkeit der Neumannschen Methode des arithmetischen Mittels für eine Fläche S, welche die in F. d. M. **31**, 731 angegebenen Eigenschaften besitzt, findet er, daß die auf S gegebene Funktion f so beschaffen ist, daß das Potential der Doppelbelegung

$$W_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S)} \frac{f\cos\varphi}{r^2}\,ds$$

normale Derivierte auf S besitzt.

Das zweite Kapitel wendet die im ersten erhaltenen Resultate auf folgende Aufgaben an: 1. Stationärer Temperaturzustand eines homogenen festen Körpers, 2. Abkühlung eines solchen, 3. Schwingungen eines in einem festen Gefäß eingeschlossenen Gases. — Das letzte Kapitel ist dem Studium der sogenannten Fundamentalfunktionen (s. F. d. M. **31**, 733, sowie auch das folgende Referat) gewidmet sowie der Entwicklung eines Flächenpotentials und der ersten Ableitungen desselben nach diesen Funktionen. Die zahlreichen Sätze, in denen der Verf. seine Resultate zusammenfaßt, lassen sich nicht in Kürze wiedergeben (vgl. S. 807). Wn.

S. Zaremba. Détermination du cas, où les fonctions fondamentales de M. Poincaré sont déductibles de celles de M. Le Roy ou de celles de M. Stekloff. Krak. Anz. 1902, 35-43.

T. Levi-Civita. Sur les surfaces (S) de M. Zaremba. Krakau. Anz. 1902, 263-270.

Die sogenannten Fundamentalfunktionen einer Fläche (S) haben folgende Bedeutung: Sie bilden eine Reihe von Funktionen $u_1, u_2, u_3, \dots$ deren jede sowohl für den Innen-, als für den Außenraum von (S) der

Laplaceschen Gleichung genügt, während an der Fläche (S) selbst die Poincaréschen Fundamentalfunktionen der Bedingung genügen:

$$(1)\qquad \left(\frac{\partial u_k}{\partial N}\right)_e - \left(\frac{\partial u_k}{\partial N}\right)_i = \lambda_k \left\{\left(\frac{\partial u_k}{\partial N}\right)_e + \left(\frac{\partial u_k}{\partial N}\right)_i\right\},$$

die Le Royschen, die zum Unterschiede mit $v_1, v_2, v_3, \ldots$ bezeichnet werden mögen, der Bedingung

$$(2)\qquad \left(\frac{\partial v_k}{\partial N}\right)_e - \left(\frac{\partial v_k}{\partial N}\right)_i = \xi_k \cdot \varphi \cdot v_k,$$

die Stekloffschen endlich, $w_1, w_2, w_3, \ldots$, der Bedingung:

$$(3)\qquad \left(\frac{\partial w_k}{\partial N}\right)_i + \eta_k \varphi \cdot w_k = 0.$$

Darin bezeichnen λ_k, ξ_k, η_k gewisse Konstanten, die als charakteristische Zahlen der verschiedenen Funktionen bezeichnet werden, φ eine auf (S) positive und kontinuierliche Funktion, N_e und N_i die äußere und innere Normale von (S). Le Roy und Stekloff hatten nun nachzuweisen gesucht, daß sich ihre Fundamentalfunktionen für beliebige Flächen (S) auf die von Poincaré reduzieren lassen, so daß mit der Existenz der letzteren auch die der beiden anderen Klassen von Fundamentalfunktionen festgestellt wäre. Diese Beweise sind jedoch, wie Stekloff selbst und gleichzeitig Korn bemerkt haben, nicht stichhaltig. Zaremba hat daher die Untersuchung von neuem aufgenommen und findet, daß die in Rede stehende Reduktion für beliebige Flächen (S) nicht möglich ist, daß vielmehr, wenn sie möglich sein soll, die Fläche (S) folgende Eigenschaft besitzen muß: Sind A und B zwei beliebige Punkte der Fläche, α, β die Winkel, welche die Normalen in A und B mit AB, resp. BA bilden, so muß eine Funktion $\psi(M)$ [M ein auf (S) liegender veränderlicher Punkt] existieren von der Beschaffenheit, daß für alle Lagen von A und B

$$(4)\qquad \psi(A)\cos\beta = \psi(B)\cos\alpha$$

ist.

Levi-Civita untersucht die Bedeutung der Bedingung (4) und findet durch Betrachtung zweier Punkte, die auf einer asymptotischen Linie von (S) liegen, daß (4) nur erfüllt werden kann, wenn (S) entweder eine Fläche zweiter Ordnung oder eine Zylinder- oder eine Kegelfläche ist. Für andere Flächen ist daher die Reduktion der verschiedenen Fundamentalfunktionen auf einander nicht möglich. Wn.

U. Amaldi. Tipi di potenziali che, divisi per una funzione fissa, si possono far dipendere da due sole variabili. Palermo Rend. **16**, 1-45.

Die Arbeit schließt sich eng an einen Aufsatz von Levi-Civita über

Potentiale, die nur von zwei Variabeln abhängen (F. d. M. **30**, 697, 1899) an und sucht die Potentiale zu bestimmen, die die Eigenschaft haben, daß sie, mit einem geeigneten Faktor multipliziert, sich durch Funktionen von nur zwei Variabeln ausdrücken lassen. An die Spitze der Arbeit wird die etwas allgemeinere Aufgabe gestellt, die allgemeinste kontinuierliche Gruppe von Punkttransformationen zu ermitteln, durch die ein von drei Variabeln abhängiges Potential in ein andres, ebenfalls von drei Variabeln abhängiges Potential, multipliziert mit einer andern Funktion der Variabeln, übergeht. Es ergibt sich, daß nur die zehngliedrige konforme Gruppe von Punkttransformationen des gewöhnlichen Raumes diese Eigenschaft besitzt. Soll bei der Transformation ein Potential wieder in ein Potential übergehen ohne Hinzufügung eines Faktors, so gehört die Transformation zu der siebengliedrigen Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen, wie schon Levi-Civita in dem oben zitierten Aufsatz nachgewiesen hat. Ganz analog wie in diesem Aufsatz wird auch die weitere Untersuchung geführt. Ist u ein Potential, w eine gegebene Funktion, so wird auf die Gleichung, die sich für $v = \frac{u}{w}$ aus $\Delta u = 0$ ergibt, eine der im ersten Abschnitt ermittelten infinitesimalen Transformationen angewandt und untersucht, wann v nach der Transformation nur von zwei Variabeln abhängt (binär ist). Die Funktion w ist übrigens nicht willkürlich gegeben, sondern für jede Transformation eine bestimmte. Ferner wird gezeigt, daß, wenn zwei in der allgemeinen konformen Gruppe enthaltene Gruppen äquivalent sind, dasselbe auch von den zu den betreffenden Gruppen gehörenden binären Potentialen gilt. Zur Bestimmung der möglichen Typen von Potentialen der verlangten Art hat man daher die verschiedenen Typen von konformen Gruppen zu klassifizieren. Das könnte durch Anwendung der Lieschen Methode zur Bestimmung aller Untergruppen einer kontinuierlichen Gruppe geschehen; doch würde die Benutzung dieser allgemeinen Methode sehr mühsame Rechnungen erfordern. Einfacher gelangt der Verf. zum Ziele durch Benutzung einer Bemerkung von F. Klein (Math. Ann. **5**, 257; F. d. M. **4**, 411, 1872), nach der man die konforme Gruppe des gewöhnlichen Raumes durch stereographische Projektion derjenigen projektiven Gruppe einer Kugel Q_3 des Euklidischen Raumes S_4 von vier Dimensionen erhält, bei der Q_3 in sich selbst übergeht. Die Untersuchung der Untergruppen dieser projektiven Gruppe führt zu dem Resultate, daß alle konformen Gruppen des gewöhnlichen Raumes, mit Ausnahme eines einzelnen Typus, der Ähnlichkeitsgruppe äquivalent sind. Da die zur Ähnlichkeitsgruppe gehörigen Potentiale, die nur von zwei Variabeln abhängen, von Levi-Civita bestimmt sind, so ist nur die Betrachtung jenes Ausnahmefalles nötig. Dieser entspricht der infinitesimalen Transformation*):

*) Die Formel für Xf enthält im Original (S. 31) einen Druckfehler, indem dort θ an Stelle von $\frac{1}{\theta}$ steht.

$$Xf \equiv 2\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$+\frac{1}{\theta}\left[2zx\frac{\partial f}{\partial x} + 2zy\frac{\partial f}{\partial y} + (1+z^2-x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial z}\right] = 0,$$

wobei θ einen Parameter bezeichnet. Als die beiden Variabeln σ_1, σ_2, durch die nach der Transformation $\frac{u}{w} = v$ ausgedrückt wird, sind zwei unabhängige Lösungen von $Xf = 0$ zu nehmen. Die Flächen σ_1 bilden eine Schar von Ringflächen. Nimmt man als dritte Flächenschar σ_3 die Kugeln, welche die Ringflächen senkrecht schneiden, so ergeben sich zwischen den rechtwinkligen Koordinaten und den neuen Variabeln die Beziehungen:

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} x = \dfrac{\cos\sigma_1}{1-\sin\sigma_1\sin\sigma_3}\cos(\sigma_2+\theta\sigma_3), \\[2ex] y = \dfrac{\cos\sigma_1}{1-\sin\sigma_1\sin\sigma_3}\sin(\sigma_2+\theta\sigma_3),\quad z = \dfrac{\sin\sigma_1\cos\sigma_3}{1-\sin\sigma_1\sin\sigma_3}. \end{cases}$$

Für den Faktor w erhält man den Wert $(1-\sin\sigma_1\sin\sigma_3)^{\frac{1}{2}}$. Transformiert man endlich die Gleichung $\Delta u = \Delta(vw) = 0$ auf die Variabeln $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und beachtet, daß v von σ_3 unabhängig ist, so ergibt sich das Resultat: „Jede Lösung der Gleichung

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} \sin 2\sigma_1\dfrac{\partial v}{\partial\sigma_1^2} + 4\dfrac{\sin^2\sigma_1+\theta^2\cos^2\sigma_1}{\sin 2\sigma_1}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\sigma_2^2} \\[2ex] \qquad\qquad + 2\cos 2\sigma_1\dfrac{\partial v}{\partial\sigma_1} - \dfrac{3}{4}\sin 2\sigma_1 v = 0 \end{cases}$$

liefert, mit dem Faktor $\sqrt{1-\sin\sigma_1\sin\sigma_3}$ multipliziert, ein Raumpotential.“ Der Verf. bezeichnet ein solches Potential als loxodromisches, da die Kurven $\sigma_1 = \text{const}$, $\sigma_2 = \text{const}$ loxodromische Linien der Ringflächen sind.

Ist v von σ_2 unabhängig, so gibt die Lösung von (II), mit demselben Faktor wie vorher multipliziert, ein symmetrisches loxodromisches Potential, und diesem kann man folgende Deutung geben: Verteilt man auf der z-Achse eine Masse mit der Dichtigkeit $\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$, so induziert diese auf einer der Ringflächen σ_1, diese als leitend angenommen und mit der Erde verbunden, eine elektrische Verteilung, deren Potential ein symmetrisches loxodromisches Potential ist.

Die Frage, ob es noch andere Potentiale der verlangten Art gibt, die nicht einer kontinuierlichen Gruppe entsprechen, wird nicht erledigt.

Wn.

R. MARCOLONGO. Sulla funzione di Green di grado n per la sfera. Palermo Rend. **16**, 230-235.

Der Verf. hatte bereits im vorigen Jahre eine einfache Methode zur Bestimmung der Greenschen Funktion n-ter Ordnung, G_n, für das Innere einer Kugel mitgeteilt. Im Anschluß daran leitet er hier aus seinen Formeln verschiedene Eigenschaften von G_n ab. Aus der Bedingung, daß G_n im Innern der Kugel der Gleichung $\Delta_{2n} G_n = 0$ genügt, während an der Kugeloberfläche

$$(1) \qquad G_n = r^{2n-3}, \quad \frac{\partial^i G_n}{\partial \nu^i} = \frac{\partial^i r^{2n-3}}{\partial \nu^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

wird [r der Abstand vom Pol, ν die innere Normale], folgt, daß G_n die Form hat:

$$(2) \qquad G_n = r^{2n-3} \varphi(x),$$

und zwar ist

$$x = \frac{r_1}{r}, \qquad r_1 = \frac{\varrho}{a} r',$$

wo a den Kugelradius, ϱ den Abstand des Pols vom Zentrum bezeichnet. r' den Abstand eines Punktes im Innern der Kugel vom Bilde des Pols. Ferner ist $x\varphi(x)$ eine ganze Funktion vom Grade $2n-2$, die nur gerade Potenzen enthält. Die Bedingungen (1) ergeben weiter

$$\varphi(1) = 1, \varphi'(1) = \varphi''(1) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(1) = 0,$$

und daraus folgt, daß

$$x^2 \varphi'(x) = c \cdot (x^2 - 1)^{n-1},$$

$x\varphi(x) - x$ durch $(x-1)^n$ teilbar ist. Damit erhält man für G_n die einfachen Formeln:

$$\frac{\partial G_n}{\partial r_1} = (-1)^n \frac{1.3.5\ldots 2n-3}{2.4.6\ldots 2n-2} \frac{(r_1^2 - r^2)^{n-1}}{r_1^2},$$

$$G_n - r^{2n-3} = (-1) \frac{(r_1 - r)^n}{r_1} f(r, r_1),$$

wo f eine ganze Funktion von r und r_1 vom Grade $n-2$ mit positiven Koeffizienten ist. Für gerade n ist daher $G_n \geqq r^{2n-3}$, für ungerade n ist $G_n \leqq r^{2n-3}$. Verkleinert man bei festgehaltenem Pol den Kugelradius, und bezieht sich G_n auf die größere, G_n' auf die kleinere Kugel, so ist $G_n' < G_n$ für gerade n, $G_n' > G_n$ für ungerade n.

Zum Schluß wird speziell die biharmonische Funktion

$$G_2 = \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_1} + \frac{1}{2} r_1$$

betrachtet, für die

$$r \leqq G_2 < a + \varrho$$

ist. Wn.

C. SOMIGLIANA. Sul potenziale elastico. Annali di Mat. (3) 7, 129-140.

Der Verf. hatte bereits in zwei früheren Arbeiten (s. F. d. M. **25**, 1567, 1893/94; **26**, 712, 1895) gezeigt, daß diejenigen Transformationen, welche das elastische Potential invariant lassen, genau den Symmetrieverhältnissen der Kristalle entsprechen. In der vorliegenden Arbeit gibt er eine vereinfachte Ableitung seiner früheren Resultate. Sind u, v, w die Komponenten der elastischen Verrückung, bezogen auf ein rechtwinkliges Achsensystem x, y, z, und u', v' w' dieselben Komponenten, bezogen auf ein andres rechtwinkliges System x', y', z', und setzt man, wie üblich,

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x'_{x'} = \frac{\partial u'}{\partial x'} \text{ etc. etc.,}$$

so hat man, falls das zweite System aus dem ersten durch Drehung um die z-Achse entsteht, die Beziehungen:

$$(1) \begin{cases} \text{a)} \; x'_{x'} - y'_{y'} + i x'_{y'} = e^{2ia}(x_x - y_y + i x_y), \\ \text{b)} \; x'_{x'} + y'_{y'} = x_x + y_y, \\ \text{c)} \; z'_{x'} + i y'_{z'} = e^{ia}(z_x + i y_z), \\ \text{d)} \; z'_{z'} = z_z. \end{cases}$$

Es ist zu ermitteln, welche Funktionen zweiter Ordnung der sechs Größen $x_x, \dots, y_z$ bei der Transformation ungeändert bleiben. Falls α beliebig ist, folgen aus (1) sofort die fünf Invarianten der Rotation:

$$(x_x + y_y)^2, \; z_z^2, \; (x_x + y_y) z_z, \; (x_x - y_y)^2 + x_y^2, \; z_x^2 + y_z^2;$$

und das aus ihnen gebildete elastische Potential enthält fünf Konstanten.

Andere Funktionen zweiter Ordnung erhält man, wenn man die Gleichungen a), resp. c) mit sich selbst multipliziert, ferner a) mit b), c), d). Diese sind aber nicht mehr für beliebige α invariant, sondern nur für $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, falls n einen der Werte 2, 3, 4 hat. So ergeben sich acht zyklische Invarianten für $n = 2$, je zwei für $n = 3$ und $n = 4$; mit Hinzunahme der fünf Rotationsinvarianten werden diese Zahlen 13, 7, 7.

Drei weitere Klassen von Invarianten ergeben sich, wenn man zu jeder der zyklischen Gruppen eine Rotation um eine zur Achse der zyklischen Gruppen senkrechte Achse (und zwar um den Winkel π) hinzufügt. Die Zahlen der Konstanten dieser Gruppen sind (die Rotations- und zyklischen Invarianten zusammengerechnet) resp. 9, 6, 6. Eine letzte Klasse von Invarianten endlich erhält man, wenn man zur ersten der letztgenannten drei Gruppen eine Rotation um eine ternäre Achse hinzufügt, die zu den ursprünglichen drei senkrechten Achsen symmetrisch ist. Für diese letzte Klasse enthält der Ausdruck des elastischen Potentials nur drei Konstanten.

Die für das elastische Potential (das im allgemeinen 21 Konstanten enthält) ermittelten sieben speziellen Formen entsprechen je einer der

Kristallformen, die sich aus der Theorie der Kristallstruktur ergeben. Bemerkt werden mag noch, daß, wenn man für das elastische Potential eine Funktion von $x_x, \ldots, y_z$ von höherem als dem zweiten Grade annehmen würde, man neue Invarianten erhalten, aber auf einen Widerspruch mit dem Gesetz der Rationalität der Indizes geführt würde. Wn.

G. PIRONDINI. **Le linee e le superficie sulle quali un agente fisico qualunque ha un' intensità data da un legge arbitraria.** Batt. G. **40**, 1-15.

Gewisse Aufgaben der geometrischen Optik über die Intensität des Lichtes in Punkten, auf Linien und Flächen bei Annahme einer oder mehrerer punktförmigen Lichtquellen werden hier dahin erweitert, daß an Stelle des Lichtes ein beliebiges physikalisches Agens, an Stelle der Gesetze für die Ausbreitung des Lichtes allgemeinere Gesetze angenommen werden; und zwar soll die Intensität des Agens in einem freien Punkte des Raumes $= f(R)$ sein (R ist der Abstand von der punktförmigen Quelle), in einem Punkte einer Linie oder Fläche $= f(R, \cos\vartheta)$, falls ϑ den Winkel zwischen Strahl und Normale, resp. Hauptnormale bezeichnet. Für unendlich entfernte Quellen wird f von R unabhängig. Die ziemlich einfachen Aufgaben, die sowohl mathematisch wie physikalisch von geringem Interesse sind, führen meist auf gewöhnliche Differentialgleichungen, zu deren Integration man aber über die obigen Funktionen f spezielle Annahmen machen muß.

Zur Charakterisierung der Aufgaben führen wir folgendes an: 1. Es sind zwei strahlende Zentren gegeben (für beide hat die Funktion f verschiedene Werte); es ist die Linie oder Fläche zu bestimmen, für deren Punkte zwischen den Intensitäten, die von beiden Quellen herrühren, eine gegebene Relation besteht. 2. Bei Vorhandensein einer Quelle ist auf einem Zylinder oder einer Rotationsfläche die Kurve zu bestimmen, längs deren die Intensität gegebene (von Punkt zu Punkt veränderliche oder konstante) Werte hat. Wn.

Weitere Literatur.

C. FR. GAUSS. Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte. Hrsg. v. A. Wangerin. Zweite, ergänzte Auflage. Leipzig: W. Engelmann. 71 S. 8° (Ostwalds Klassiker, No. 2).

B. O. PEIRCE. Elements of the theory of the Newtonian potential function. Third revised and enlarged edition. Boston: Ginn. XIV u. 490 S. 12mo.

C. ALESSANDRI. Potenziali nei campi di forze newtoniane. Bergamo Ist. ital. d'arti grafiche. 29 S. 8°.

Elfter Abschnitt.

Mathematische Physik.

Kapitel 1.

Molekularphysik, Elastizität und Kapillarität.

A. Molekularphysik und Allgemeines.

W. A. Steklow. Allgemeine Methoden der Lösung von Problemen der mathematischen Physik. Herausgegeben von der math. Ges. Charkow. 291 S. (1901, russisch).

Die Mehrzahl der Aufgaben der mathematischen Physik läßt sich auf die Lösung der Probleme von Dirichlet und C. Neumann zurückführen, d. h. auf das Auffinden des Potentials V für ein Gebiet, auf dessen geschlossener Grenzfläche i die Werte von V_i, resp. $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_i$ gegeben sind.

Die erste strenge Lösung des Problems von Dirichlet hat C. Neumann (1870) gegeben, aber nur für eine begrenzte Klasse von geschlossenen Konvexflächen, welche nämlich in jedem Punkte nur eine bestimmte Tangentialebene besitzen. Obgleich das sogenannte Dirichletsche Prinzip in einer sehr allgemeinen Form von H. Poincaré (1889) aufgestellt worden ist, kann man doch nicht die Lösung des Problems von Dirichlet in einer ebenso allgemeinen Form als gefunden betrachten, da in den späteren dieser Frage gewidmeten Untersuchungen von H. Poincaré (1896) einerseits die Gleichheit der Werte von $\partial V/\partial n$ an beiden Seiten einer Doppelschicht, andrerseits selbst die Existenz von $\partial V/\partial n$ angenommen ist, was noch zu beweisen war.

Das Problem von Carl Neumann befindet sich in nahezu derselben Lage; auch hier ist die strenge Lösung nur für die bestimmten Konvexflächen bekannt. Nur in der letzten Zeit ist das Theorem über die Existenz von $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_i$ (A. Liapunow, 1898) bewiesen, aber auch

nur für diejenigen Flächen, auf welche die C. Neumannsche Methode des arithmetischen Mittels anwendbar ist.

Nach einem vorbereitenden Kapitel I (S. 17-64) beweist der Verf. (Kap. II und III, S. 64-138), daß die sogenannte Methode von Robin (1887) die Lösung der Aufgabe über die Elektrizitätsverteilung auf jeder geschlossenen Fläche S zuläßt, welche folgenden Bedingungen Genüge leistet:

1. In jedem Punkte besitzt S eine bestimmte Tangentialebene.

2. Um jeden Punkt p_0 von S kann man eine so kleine Kugel konstruieren, daß jede Gerade, welche der Normale von S in p_0 parallel läuft, den im Innern der Kugel liegenden Teil von S in nicht mehr als einem Punkte schneidet.

3. Der spitze Winkel ϑ zwischen den Normalen zu S in zwei beliebigen Punkten p_0, p genügt der Bedingung, daß $\vartheta < ar$ ist, worin r die Strecke $p_0 p$, a eine endliche positive Zahl bedeutet; a ist von der Lage von p, p_0 unabhängig.

4. Auf die Fläche S ist ein besonderes Theorem anwendbar, welches der Verf. das Fundamentaltheorem von H. Poincaré nennt. Die gewonnenen Resultate werden dann auf einige der einfachsten Aufgaben der analytischen Wärmetheorie angewandt; unter anderem wird die vollkommene Lösung der Aufgabe über die stationäre Temperatur gegeben.

Im Kap. IV (S. 139-190) wird bewiesen, daß die Methode von C. Neumann auf alle Flächen anwendbar ist, die den Bedingungen 1 bis 4 genügen, wenn nur V_i selbst gewissen Bedingungen von sehr allgemeinem Charakter gehorcht. Dieser Beweis wird in zwei verschiedenen Formen gegeben.

Das letzte Kap. V (S. 191-271) ist der Theorie der sogenannten Fundamentalfunktionen gewidmet.

Zunächst beweist der Verf., unabhängig von dem Dirichletschen Prinzip, die Existenz einer gewissen Art von fundamentalen Funktionen, die im allgemeinen von den ebenso genannten Funktionen von E. Le Roy verschieden sind, jedoch wie diese letzteren in gewissen Fällen sich in die Funktionen von H. Poincaré verwandeln. Ferner wird gezeigt, daß die Methode der Lösung der Aufgabe von Dirichlet mit Hilfe der fundamentalen Funktionen auf alle die Flächen anwendbar ist, welche die Bedingungen 1 bis 4 erfüllen (vgl. das Referat S. 800). Ghr.

F. Pettinelli. Un nuovo procedimento per trovare molte relazioni note ed ignote frà le quantità fisiche. Cuneo. 70 S. [Journ. de Phys. (4) **1**, 594-599.]

Nach der ausführlichen Anzeige der Schrift im Journ. de Phys. besteht das Wesen der Methode darin, aus den Dimensionsformeln der physikalischen Größen durch Verknüpfung mit anderen und durch Anwendung der elementaren Rechenoperationen Formeln von der Dimension Null abzuleiten und das Ergebnis als Konstanz von Eigenschaften aus-

zusprechen, ohne daß diese Konstanz bei Einsetzung der durch Versuche ermittelten Zahlen immer bestätigt wird. Lp.

H. Andriessen. **Das absolute Maßsystem.** Unterrichtsbl. f. Math. **8**, 50-55.

Versuch zur Aufstellung eines neuen Maßsystems. Lp.

A. Korn. Sur les vibrations universelles de la matière. C. R. **134**, 31-33.

Der Verf. gibt einen kurzen Überblick über die Grundgedanken seiner bezüglichen Schriften (vergl. F. d. M. **29**, 666, 1898; **30**, 709, 1899; **31**, 790, 1901) und weist kurz nach, wie die mathematische Behandlung zu den Gleichungen $\Phi = 0$ und $\Delta\Phi + k^2\Phi = 0$ auf einer Oberfläche und innerhalb derselben führt. Lp.

A. Korn. Mechanische Vorstellungen über die sogenannten Fernwirkungen. Naturw. Wochenschr. (2) **1**, 330-332.

Nach kurzem Hinweise auf die Ätherstoßtheorie erläutert der Verf. die von C. A. Bjerknes begründete, von ihm selbst weiter ausgebildete Pulsationstheorie. Hiernach bringt die Grundschwingung des den Raum erfüllenden, inkompressibeln Kontinuums die Newtonsche Gravitation hervor. Der erste Oberton erzeugt eine der fünften Potenz der Entfernung umgekehrt proportionale Abstoßung, durch welche man zu einer mechanischen Interpretation der Maxwellschen Gastheorie gelangt. Als Folge des zweiten Obertones ergeben sich die Kapillarkräfte, usw.

Lp.

J. H. Poynting. Recent studies in gravitation. Smithsonian Rep. for 1901, 199-214.

Abgedruckt aus Proceedings of the Royal Institution of Great Britain **16**, part 2, Nov. 1901; ein Vortrag vor der Royal Institution vom 23. Febr. 1900 über die neueren Arbeiten zur Bestimmung der Gravitationskonstante und über die negativen Resultate der Versuche zur Bestimmung der Wirkungsart der Gravitation (Austin und Twing 1897, Mackenzie 1895, Poynting und Gray 1899). Lp.

P. Lebedew. Die physikalischen Ursachen der Abweichungen vom Newtonschen Gravitationsgesetze. Physik. Zs. **4**, 15-18; Astrophys. Journ. **16**, 155-161; Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **37**, 220-226.

Ein Vortrag vor der Astronomischen Gesellschaft in Göttingen am 4. August 1902. Zur Erklärung der Abwendung der Kometenschweife von der Sonne sind mehrere Hypothesen aufgestellt, die der Reihe nach aufgezählt werden: Kepler, Newton, Euler, de Mairan und du Fay,

Olbers (Bessel und Bredichin), Zöllner, endlich die Lichtdrucktheorie, ausgesprochen von Maxwell und Bartoli, gestützt durch die Versuche von Lebedew und Lodge. Über diese Versuche vergleiche man den Beitrag des Verf. zu den Rapports du Congrès international de Physique 2, 133-140. Hiernach ist die resultierende Wirkung F der Sonne auf einen kugelförmigen Körper vom Radius r cm und der Dichte δ (auf Wasser als 1 bezogen) in Einheiten der Gravitation

$$F = 1 - 10^{-4} \cdot r^{-1} \delta^{-1},$$

falls r groß ist gegen die Dimensionen der Wellenlängen der Sonnenstrahlung. Wenn $2r$ kleiner als 1 cm ist, kann diese Abweichung erst nachgewiesen werden. Lp.

P. Gerber. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation. Prog. Realprogymn. Stargard. 24 S.

Die Abhandlung ergänzt die frühere Arbeit des Verf.: „Die räumliche und zeitliche Ausbreitung der Gravitation" (Zs. f. Math. u. Phys. 43, 93-104). In dem Referate über diesen Aufsatz (F. d. M. 29, 669, 1898) war schon angedeutet, daß die einleitenden Betrachtungen von sehr allgemeiner Art waren, weshalb sie nicht gerade überzeugend wirkten, und daß eine Auseinandersetzung mit den entgegenstehenden Ergebnissen der Rechnungen von Astronomen vermißt wurde. Beides wird jetzt nachgeholt. Während in der ersten Veröffentlichung gleich mit der Vorstellung eines zeitlich sich ausbreitenden Potentials begonnen wurde, wird jetzt die bloße Tatsache zum Ausgangspunkte genommen, „daß die Gravitation auf einer Wirkung beruhe, die Zeit brauche, um sich fortzupflanzen. Die Einmischung hypothetischer Elemente in die Reihe der Überlegungen ist völlig vermieden. Was sich weiter daraus ergibt, ist also allein durch jene Annahme bedingt; und alle Rechnungsmethoden, die sich damit nicht in Einklang befinden, müssen als unzureichend betrachtet werden." In der Besprechung der bezüglichen astronomischen Arbeiten zeigt sich der prinzipielle Unterschied der Vorstellungen des Verf. von denen der übrigen Autoren, so daß nach seiner Anschauung die Schlußweisen jener Astronomen alle mit Fehlern behaftet sind. — Zur Vervollständigung der früheren Arbeit wird dann im vorletzten Abschnitte der Gang der Rechnungen am Merkur in den Grundzügen hinzugefügt; hieraus war ja die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des „Zwangszustandes" im umgebenden Mittel zu 305 500 km in der Sekunde berechnet worden. Der letzte kurze Abschnitt von einer Seite enthält allgemeine Überlegungen. Lp.

Lord Kelvin. On the clustering of gravitational matter in any part of the universe. Lond. Phil. Mag. (6) 3, 1-9.

Der Aufsatz beschäftigt sich hauptsächlich mit der Ermittlung der Zeiträume, die erforderlich sind, damit sich gleichmäßig im Raum verteilte Materie um bestimmte Konzentrationspunkte sammelt. Verf. rechnet

z. B. aus, daß eine Kugel vom Radius $3{,}09.10^{16}$ Kilometer aus vollkommen kompressibler Flüssigkeit von der Dichte $1{,}61.10^{-22}$ siebzehn Millionen Jahre braucht, um allein unter dem Einfluß der Gravitation auf die Dichte von 0,0161 zusammenzuschrumpfen, und nur ungefähr zwei Stunden mehr, um die Dichte ∞ zu erreichen, und daß die Geschwindigkeit der Kontraktion der Oberfläche bei Erreichung der ersten Phase in Richtung des Radius bereits 291000 km in der Sekunde, also etwa den Wert der Lichtgeschwindigkeit beträgt. Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, Hypothesen über die Einwirkung der Materie auf den Äther und das Erglühen der Materie zu diskutieren. Br.

N. N. Schiller. Über die von Hrn. W. P. Jermakow vorgeschlagene Änderung der Gesetze von Newton. Kiew. Univ. Ber.; auch Sep. 10 S. (1901, russisch).

Kritisches über den genannten Aufsatz, der in F. d. M. **31**, 672, 1900 besprochen worden ist. Der Verf. zeigt, daß die Behauptungen von Jermakow nicht nur mit der gewöhnlichen Mechanik, sondern auch mit einander in schreiendem Widerspruch stehen. Ghr.

J. Haedicke. Die Lösung des Rätsels von der Schwerkraft durch die Versuche von Huygens. Ein Beitrag zur wissenschaftlichen Weltanschauung. Leipzig: Joh. Ambr. Barth. 48 S. gr. 8°.

Ein neuer Versuch zur Erklärung der Gravitation. „Ein zylindrisches Gefäß ist um seine Achse drehbar; es ist angefüllt mit Wasser und enthält außerdem einige beliebig geformte Körper. Sobald das Gefäß in Drehung um seine senkrechte Achse versetzt wird, bewegen sich alle Körper gegen die Peripherie hin; wird es dann plötzlich angehalten, bewegen sich alle Körper zum Zentrum der Rotation hin. . . . Die Rotation einer Achse, welche sich durch ein Medium schichtenweise mit abnehmender Winkelgeschwindigkeit ausbreitet, bewirkt eine Anziehung entfernter Körper zum Zentrum der Rotation.“ Wir fügen hinzu, daß der Verf. selbst sagt: „In beiden Versuchen wird das Zentrum von einer linearen Achse gebildet.“ Dieses ist die „Lösung des Rätsels“. Ref. verzichtet darauf, die weiteren Ausführungen näher zu kennzeichnen oder zu widerlegen. Newton wird als Mathematiker charakterisiert, dem die Beschäftigung mit der Physik ein Hinabsteigen gewesen sei. Es lohnt nicht, gegen solche Ansichten ein Wort zu sagen. Lp.

Sp. Dj. Grujić. Das Wesen der Anziehung und Abstoßung. Berlin: Hermann Peters. 36 S. 8°.

Der Verf. stellt zum Behufe der einheitlichen Erklärung aller Anziehungs- und Abstoßungserscheinungen die Hypothese auf: „Zwei Massen,

die neben einander rotieren, ziehen sich an, wenn sie entgegengesetzte Rotationsrichtung haben, stoßen sich dagegen ab, wenn sie nach derselben rotieren". Mit Hülfe dieser qualitas occulta werden alle Erscheinungen abgeleitet. So wird bei dem Aragoschen Versuche „die Nadel nicht etwa durch Induktionsströme (Faraday), sondern durch die Bewegung der Scheibe in Bewegung gebracht". Danach haben die Ausführungen des Grundgedankens keinen Anspruch auf Berücksichtigung.

Lp.

L. de la Rive. La transmission de l'énergie cinétique dans l'intérieur d'un corps solide quand il se meut librement sous forces extérieures. Proc. verb. Soc. Vaud. 4 juin, 1902; Bull. Soc. Vaud. (4) 38, LIII-LIV; Arch. sc. phys. et nat. (4) 14, 313-314.

Ein Umdrehungskörper bewegt sich um seinen Schwerpunkt nach einem wohlbekannten Gesetze. Die Achse beschreibt einen Kegel um eine feste Achse, während der Körper zugleich sich um seine Achse dreht. In dem Falle einer Scheibe ist die Rotationsbewegung der Kegelbewegung entgegengesetzt gerichtet mit einer etwa halb so großen Winkelgeschwindigkeit. Der Verf. hat die Bahn eines Punktes der Scheibe bestimmt, wenn man ihn als einen Massenpunkt betrachtet, der eine Kurve zu beschreiben genötigt wird; ebenso die tangentiale und die normale Beschleunigung. Diese werden durch die elastischen Spannungen geliefert, die also für einen und denselben Punkt von einem Augenblick zum nächsten veränderlich sind. Ebenso verhält es sich mit der Geschwindigkeit und der kinetischen Energie, die periodisch variiert. In dem betrachteten Körper findet also, wenn man ihn als auf Achsen bezogen betrachtet, die mit derselben Bewegung behaftet sind, Wanderung der Energie von einem Punkte zu einem andern statt. — Man betrachte nun in Gedanken eine Scheibe, die als „Energiescheibe" bezeichnet wird und nur mit der Kegelbewegung behaftet ist. In jedem Augenblicke sind die Bedingungen der Geschwindigkeit und der elastischen Spannung bei allen Punkten dieser Scheibe dieselben. Sie hängen nämlich nur von der Lage der Momentanachse ab, die an der Kegelbewegung teilnimmt. Andererseits kann die wirkliche Scheibe angesehen werden, als drehte sie sich um ihre Achse in der gedachten Scheibe, und wenn man sie als fest betrachtet, so ist es die Energiescheibe, die sich in entgegengesetztem Sinne dreht und in der wirklichen Scheibe eine periodische Welle kinetischer Energie hervorruft, welche sich mit der Winkelgeschwindigkeit der Rotation bewegt. Die diese Energie erzeugende Geschwindigkeit ist normal zu der Oberfläche der Scheibe.

Lp.

V. v. Türin. Über die Intensität der Bewegungsenergie („lebendige Kraft"). Ostwalds Annalen der Naturphilosophie 1, 486-507.

Ohne Bezug auf die alte zwischen den Kartesianern und Leibnizianern erörterte Frage stellt der Verf. den Satz auf: „Als die Intensität der

Bewegungsenergie ist die Geschwindigkeit, dem Betrage und der Richtung nach, anzusehen". Begründung: „Die Intensität einer Energieart ist dadurch und nur dadurch definiert, daß bei deren Gleichheit in einem Gebilde Energieverwandlungen und Übergänge unausführbar, bei deren Ungleichheit aber ausführbar sind, wobei die Intensitätsunterschiede sich auszugleichen suchen". Demgemäß sagt der Verf., eine Energiemenge $\frac{1}{2}mv^2$ habe die Intensität v. Diese Sprechweise wird auf Vorgänge in der Theorie der Elektrizität und der Wärme angewandt; Ref. vermag jedoch den Schlüssen nicht zu folgen. Lp.

G. Jäger. Der innere Druck, die innere Reibung, die Größe der Molekeln und deren mittlere Weglänge bei Flüssigkeiten. Wien. Ber. **111**, 697-706.

In Weiterbildung der Grundannahmen für die kinetische Theorie der Flüssigkeiten und parallel zu den entsprechenden Ableitungen der Gastheorie gewinnt Verf. eine Anzahl Beziehungen für die im Titel genannten Größen. Für Quecksilber ergibt sich z. B. der Durchmesser der molekularen Wirkungssphäre zu 38.10^{-9} cm und die freie Weglänge erheblich kleiner zu 6.10^{-9} cm. Br.

Leduc et Sacerdote. Sur la cohésion des liquides. Journ. de Phys. (4) **1**, 364-381.

G. Bakker. Interprétation des expériences de MM. Leduc et Sacerdote sur la cohésion des liquides. Journ. de Phys. (4) **1**, 716-719.

Aus verschiedenen Experimenten, unter anderem aus dem Hängen einer Wassersäule in einer vertikalen, oben geschlossenen Glasröhre bei Verminderung des Druckes gegen das untere offene Ende, schließen Leduc und Sacerdote auf einen hohen Wert der Kohäsion des Wassers, indem sie gleichzeitig den Irrtum bei der Bestimmung aus dem Zerreißen einer an der unteren Fläche einer Wagschale haftenden Wasserschicht darlegen. Bakker meint dagegen, daß auch sie nicht die Kohäsion einer Flüssigkeit gemessen haben, sondern, gerade wie Gay-Lussac in dem zuletzt erwähnten Versuche, einen Druck, weil der hydrostatische Druck im Innern einer Flüssigkeit als die Differenz zwischen dem thermischen Drucke und der Kohäsion aufzufassen ist. Die neuen Versuche der ersten beiden Verf. (wie übrigens van der Mensbrugghe schon früher ganz ähnliche angestellt hat) sind daher als ein wichtiger Beitrag zur Kenntnis der Isothermen einer Flüssigkeit anzusehen. Lp.

Lord Kelvin. On the weights of atoms. Lond. Phil. Mag. (6) **4**, 177 bis 198 und 281-301.

Eine kritische Zusammenstellung verschiedener Betrachtungsweisen

zur Ermittelung von Maximalwerten der Molekularsphären oder der Molekularmassen, insbesondere für die aus der kinetischen Gastheorie abgeleiteten und die von der Farbe durchsichtiger Medien ausgehenden Methoden. Namentlich für die letztgenannten werden eigentliche Formelentwicklungen gegeben. Br.

F. Regnani. La teoria atomica ed il commune elemento dei semplici chemici. Memoria decimaterza. Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. **19**, 97-122.

Allgemeine Überlegungen nicht mathematischen Inhalts, wonach die Bestandteile der Atome alle demselben Stoff angehören. Br.

G. Guglielmo. Intorno ad alcuni nuovi metodi per determinare il peso molecolare dei corpi in soluzione diluita. Nuovo Cimento (5) **3**, 236-240.

Die Methoden, die in der Hygrometrie zur Bestimmung der Spannung des Wasserdampfes und zu der des Verhältnisses zwischen dieser Spannung und der der Sättigung bei gleicher Temperatur dienen, können auch angewandt werden zur Bestimmung des Molekulargewichts gelöster Substanzen, wenn man sowohl den Dampfdruck der Lösung, als auch den des reinen Lösungsmittels ermittelt. Es wird zuerst die psychrometrische Methode mit den beiden Thermometern besprochen, hierauf die ohne Thermometer mit Hülfe von Wägungen, endlich eine hygrometrische mit Taupunktsbestimmung. Hae.

C. Jäger. Zur Theorie des photographischen Prozesses. Wien. Ber. **111**, 1132-1143.

Verf. untersucht die Abhängigkeit der Schwärzung eines Silberbildes von der Belichtungszeit und von der Konzentration und Einwirkungsdauer des Entwicklers, insbesondere die Frage, wann man Proportionalverhältnisse zwischen diesen Größen mit genügender Näherung annehmen darf. Br.

G. Oddo. Determinazione del peso molecolare col metodo ebullioscopico nelle sostanze volatili; comportamento dell' iodio. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{11}_1$, 12-20.

Betrifft die Ableitung des Molekulargewichtes einer leicht verdampfenden Flüssigkeit, die in einer anderen, ebenfalls leicht verdampfenden Flüssigkeit gelöst ist, mit Hülfe der von Planck und Nernst für diesen Fall aufgestellten Formeln. Als Beispiel dient Jod. Br.

Lord KELVIN. Molecular dynamics of a crystal. Lond. Phil. Mag. (6) **4**, 139-156.

Die Arbeit soll eine Fortsetzung einer früheren Arbeit (Proc. Roy. Soc. Edinb. 1889) sein, die „Molecular constitution of matter“ betitelt ist. Die vorliegende Arbeit gibt eine Anleitung zur Ermittlung eines formellen Wertes für die Arbeit, die erforderlich wäre, alle Moleküle eines Komplexes in unendliche Entfernung von einander zu bringen, und zwar für zwei einfache Fälle der Molekülverteilung. Die zweite Hälfte der Arbeit enthält allgemeine Betrachtungen über die Möglichkeit der Stabilität der vom Verf. ins Auge gefaßten Molekülkomplexe. Br.

G. BRUNI u. W. MEYERHOFFER. Sugli equilibri eterogenei fra cristalli misti di idrati salini isomorfi. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{11}_1$, 185-190.

Liegt eine Mischung von zwei Salzen vor, deren jedes zwei bestimmte Hydrate von entsprechendem Wassergehalt bildet, und deren korrespondierende Hydrierungsstufen beide isomorph kristallisieren, so wird doch im allgemeinen die Temperatur, bei der das eine Hydrat in das andere übergeht, bei dem einen Salz anders sein als beim andern. Die Zusammensetzung von Mischkristallen beider Salze wird deshalb eine Abhängigkeit von der Temperatur aufweisen. Die Arbeit enthält theoretische Überlegungen über den Charakter dieser Abhängigkeit. Br.

H. HILTON. A comparison of various notations employed in „theories of crystal-structure“ and a revision of the 230 groups of movement. Phil. Mag. (6) **3**, 203-212.

Eine verdienstvolle Gegenüberstellung der verschiedenen Systeme. Br.

G. TONKOVITE. Sulla variazione angolare dei cristalli per effetto della temperatura. Atti della R. Accademia Peloritana **17**, 177-197.

Der Verf. setzt sich vor, die von der Temperatur herrührenden Winkelveränderungen eines Kristalles theoretisch zu untersuchen. Er gelangt zu dem wichtigen Schlusse, daß diese Veränderungen nicht so unbeträchtlich sind, daß man dieselben in den kristallographischen Rechnungen vernachlässigen dürfe, daß man aber von diesen Veränderungen absehen darf, sobald man sich auf die Betrachtung spezieller, in jedem Kristallsysteme in unendlicher Anzahl befindlicher Winkel beschränkt, welche die Eigenschaft haben, bei jeder Temperaturveränderung konstant zu bleiben. Vi.

VL. NOVÁK. Rapports présentés au Congrès International de Physique réuni à Paris en 1900. Časopis **31**, 129-144, 214-231, 300-326, 419-436.

Inhaltsangabe der genannten Referate, welche unter den Auspizien

der „Société Française de Physique“ vorgelegt und nachher zusammengestellt und veröffentlicht wurden von Ch. Éd. Guillaume und L. Poincaré. Sda.

Weitere Literatur.

F. AUERBACH. Die Weltherrin und ihr Schatten. Ein Vortrag über Energie und Entropie. Jena: G. Fischer. III u. 56 S. gr. 8°.

O. D. CHWOLSON. Lehrbuch der Physik. I. Bd.: Einleitung. — Mechanik. — Einige Meßinstrumente und Meßmethoden. — Die Lehre von den Gasen, Flüssigkeiten und festen Körpern. Übers. von H. Pflaum. Braunschweig: Fr. Vieweg & Sohn. XX u. 791 S. gr. 8°.

V. CRÉMIEU. A new point of view about gravitation, and a proposed experiment. Rep. Brit. Ass. Glasgow. 561-562, 1901.

A. DESPAUX. Cause des énergies attractives. Paris: F. Alcan. XIII u. 248 S.

P. GARISCH. Die Vibration im Universum. (Mit besonderer Berücksichtigung der Elektrizität.) Leipzig: Luckhardts Buchhdl. 57 S. gr. 8°

TH. GROSS. Kritische Beiträge zur Energetik. II. Hermann von Helmholtz und die Erhaltung der Energie. Berlin: M. Krayn. X u. S. 73 bis 236. gr. 8°.

H. HELMHOLTZ. Über die Erhaltung der Kraft (1847). 6. Tausend. Leipzig: W. Engelmann. 60 S. 8° (Ostwalds Klassiker Nr. 1).

V. A. JULIUS. Der Äther. Vortrag. Aus dem Holländischen von G. Siebert. Leipzig: Quandt & Händel. II u. 52 S. gr. 8°.

H. A. LORENTZ. Considérations sur la pesanteur. Arch. Néerl. (2) 7, 325-342.

Französische Übersetzung der Abhandlung, über die in F. d. M. 31, 748, 1900 berichtet ist.

M. PLANCK. Über die Verteilung der Energie zwischen Äther und Materie. Ann. der Phys. (4) 9, 629-641.

Vergl. F. d. M. 32, 892, 1901.

ED. RIECKE. Lehrbuch der Physik zu eigenem Studium und zum Gebrauche bei Vorlesungen. 1. Band: Mechanik und Akustik. Optik. 2. Band: Magnetismus, Elektrizität. Wärme. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig: Veit & Co. XVI u. 534, XII u. 666 S. gr. 8°.

R. SCHWEITZER. Die Energie und Entropie der Naturkräfte mit Hinweis auf den in dem Entropiegesetze liegenden Schöpferbeweis. Köln: J. P. Bachem. 59 S. gr. 8°.

J. B. STAUB. Der Magnetismus als Universalfaktor im Weltenbau. Eine von Grund aus neue naturharmonische Erklärung der Ursache der Bewegungen und Formierung des Universums. Leipzig: G. Schlemminger. 20 S. gr. 8°.

B. Elastizitätstheorie.

R. Marcolongo. Teoria matematica della elasticità. Parte prima. Anno scolastico 1901-1902. 230 S. Parte seconda. Anno scolastico 1902-1903. 168 S. Reggio Calabria: Massara. 8° (lithogr.)

Erster Teil. — Kap. 1. Die harmonischen und polyharmonischen Funktionen und die Greenschen Sätze. Kap. 2. Die Newtonschen Potentialfunktionen. Kap. 3. Die Gleichgewichts- und Bewegungsgleichungen der elastischen Körper. Kap. 4. Die Elastizitätsgleichungen der anisotropen Körper. Kap. 5. Allgemeine Sätze über isotrope Körper; die Bettische Integrationsmethode der Elastizitätsgleichungen. Kap. 6. Das Boussinesq-Cerrutische Problem. Kap. 7. Die Deformation einer isotropen Kugel. Kap. 8. Das St. Venantsche Problem über die Deformation zylindrischer Stäbe. Kap. 9. Die Deformation zylindrischer Scheiben. Kap. 10. Die Voigtschen Probleme und die Bestimmung der Elastizitätskonstanten der Kristalle.

Zweiter Teil. — Kap. 11, 12. Das Gleichgewicht und die Bewegung unendlich dünner Stäbe und Scheiben. Kap. 13, 14. Anwendung der Elastizitätstheorie auf Optik: Interferenz, Polarisation, Doppelbrechung in kristallinischen Mitteln. Vi.

R. Marcolongo. La deformazione del diedro retto isotropo per speziali condizioni ai limiti. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{11}_1$, 318-324.

Behandlung eines bereits von Somigliana im Februarheft der Rend. Acc. Linc. 1902 erledigten Problems auf Grund der allgemeinen Methode von Betti-Cerruti (vgl. unten S. 819). Jhk.

M. Gebbia. Le deformazioni tipiche dei corpi solidi elastici. Annali di Mat. (3) **7**, 141-230.

Der Verf. definiert drei Typen von Verschiebungen in einem elastischen unendlichen Körper. Der erste Typ ist hervorgerufen durch kontinuierlich in einem begrenzten endlichen Teil des Körpers angreifende Massenkräfte, besitzt gewisse Stetigkeits- und Endlichkeitseigenschaften und genügt den Gleichgewichtsbedingungen; der zweite Typ ist erzeugt durch Oberflächenkräfte an einer inneren geschlossenen Fläche und genügt außer gewissen Stetigkeits- und Endlichkeitsbedingungen wieder den Gleichgewichtsbedingungen; der dritte Typ endlich ist bedingt durch Entfernung oder Hinzufügung von Materie in einer geschlossenen, endlichen Fläche und entspricht einer Doppelschicht von Oberflächenkräften.

Es wird nun gezeigt, daß sich jede beliebige Deformation aus diesen dreien zusammensetzt, und durch Zurückführung auf die Probleme der Potentialtheorie wird die Bestimmung der Verschiebungen aus den wirkenden Kräften durch bestimmte Integrale geleistet. Die Methode wird sodann auch für eine Verteilung der Kräfte auf offenen Flächen und für den endlichen Körper erweitert und die Übereinstimmung der Resultate mit denen von Somigliana erwähnt. Rr.

P. Appell. Sur les expressions des tensions en fonction des déformations dans un milieu élastique homogène et isotrope. Nouv. Ann. (4) **2**, 193-197.

Eine geometrische Methode zur Herleitung der Ausdrücke für die sechs Funktionen N_i, T_i $(i = 1, 2, 3)$ durch die Verrückungen u, v, w. Das Verfahren kommt auf die Ermittlung des Zusammenhanges der beiden Oberflächen zweiter Ordnung zurück, welche als Leitfläche der Spannungen und Oberfläche der Deformationen bei Sarrau (Nouv. Ann. (3) **7**, 505 bis 552, 1888) und im dritten Bande des „Traité de Mécanique rationnelle" des Verf. vorkommen. Die beiden Oberflächen haben dieselben Kreisschnittsebenen. Lp.

Lord Kelvin. A new specifying method for stress and strain in an elastic solid. Phil. Mag. (6) **3**, 95-97, 444-448.

Verf. schlägt vor, statt der drei elementaren Längen- und der drei elementaren Flächenverzerrungen die Verzerrungen von sechs Kanten eines Elementartetraeders einzuführen, und gibt die einfachsten diesbezüglichen Formeln. Das Spannungsellipsoid berührt z. B. die vier Flächen des verzerrten Tetraeders in ihren Mittelpunkten. Br.

O. Tedone. Saggio di una teoria generale delle equazioni dell' equilibrio elastico per un corpo isotropo. Annali di Mat. (3) **8**, 129-180.

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Integration der Elastizitätsgleichungen durch bestimmte Integrale für den Fall, daß Massenkräfte fehlen und entweder Verschiebungen oder Kräfte an der Grenzfläche gegeben sind.

Zunächst werden die Elastizitätsgleichungen auf die Form der Laplaceschen Potentialgleichung gebracht und unter Voraussetzung der Kenntnis einer der beiden Greenschen Funktionen des betrachteten Raumes integriert. Sodann wird für den Fall des durch eine Ebene begrenzten unendlichen Halbraumes unter Beachtung aller möglichen Grenzbedingungen die jedesmal nötige Greensche Funktion wirklich bestimmt und so das Problem erledigt.

Im nächsten Teil wird dasselbe für den durch eine Kugelfläche begrenzten elastischen Körper geleistet und schließlich die Lösung der ersten Aufgabe als ein Sonderfall der zweiten abgeleitet. Die Abhandlung stellt sich als eine Fortführung und Verallgemeinerung der Arbeiten von Betti und Cerruti dar. Rr.

G. Combebiac. Sur les équations générales de l'élasticité. S. M. F. Bull. **30**, 108-110.

In einer Bemerkung wird die Erweiterung der Elastizitätsgleichungen für den Fall, daß Drehmomente auf ein Elementarparallelepiped wie bei magnetischen Feldern wirken, gezeigt. Diese Erweiterung ist bekannt. Rr.

J. H. MICHELL. The inversion of plane stress. Lond. M. S. Proc. **34**, 134-142.

Verf. hat in einer früheren Arbeit eine Spannungsfunktion, genannt ψ, aufgestellt, durch deren Ableitungen sich die Spannungen für ebene Spannungszustände darstellen, und die bei Abwesenheit von Massenkräften die Gleichung $\nabla^4 \psi = 0$ erfüllt. Hier wird gezeigt, wie die bekannten Lösungen einfacher Aufgaben dazu benutzt werden können, um mit Hülfe der Abbildung durch reziproke Radien bisher unbekannte Lösungen neuer Aufgaben zu finden, und zum Schluß wird die Erweiterung auf den Raum angedeutet. Rr.

L. V. ROSSI. A proposito delle esperienze del sig. J. Hartmann sulla distribuzione delle deformazioni nei metalli soggetti a sforzi. Ven. Ist. Atti **61** [(8) 4], 357-376.

Nachdem der Verf. sich umsonst Mühe gegeben hat, die Hartmannschen Linien bei gezogenen Proben zu erzeugen, und von anderen Seiten über ein gleiches Mißlingen Bericht gegeben ist, kommt er zu dem Schluß, daß diese Erscheinung nicht als eine allgemeine und notwendige angesehen werden kann. Auf Grund einfacher Betrachtungen versucht er den Beweis zu erbringen, daß die Theorie der Elastizität keine Erklärung der Entstehung dieser Linien liefern kann.

Dem allgemein verständlichen Aufsatze kann man einen gewissen wissenschaftlichen Wert insofern zusprechen, als er vielleicht dazu beitragen wird, die Hartmannschen Linien von einem anderen Standpunkt aus zu betrachten, als bis jetzt geschehen ist. Vianello. (Rr.)

H. LAMB. On Boussinesq's problem. London M. S. Proc. **34**, 276-284.

Das von Boussinesq stammende Problem des unendlichen, durch eine Ebene begrenzten Körpers mit gegebenen Verschiebungen oder Kräften an der Grenzebene wird mit Hülfe der Darstellung einer willkürlichen Funktion durch bestimmte, Besselsche Funktionen enthaltende Integrale für symmetrische Lastverteilung gelöst. Die Übereinstimmung der Resultate mit denen andrer Methoden wird gezeigt und zum Schluß die Anwendbarkeit des Verfahrens auf die Theorie der Platten angedeutet.

Rr.

C. SOMIGLIANA. Sul principio delle immagini di Lord Kelvin e le equazioni dell' elasticità. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{11}_1$, 145-154; Nuovo Cimento (5) **3**, 288-296.

Es handelt sich hier um eine Erweiterung des Boussinesqschen Problems und seiner Lösung durch Potentialfunktionen. Die Erweiterung bezieht sich auf die Anisotropie mit einer Symmetrieebene parallel der Begrenzungsebene des nach der andern Seite unendlich ausgedehnten

Mediums, ferner auf die Übertragung auf das ebene Dieder und Trieder und die Berücksichtigung gewisser Sätze von Grenzbedingungen durch Zusammensetzung von verschiedenen, durch Spiegelung an der Grenzebene aus einander erhaltenen Integralen. Rr.

H. Reissner. Mechanische Analogie zur Elastizität. Berl. Math. Ges. Ber. 1, 40-43.

H. Reissner. Anwendungen der Statik und Dynamik monocyklischer Systeme auf die Elastizitätstheorie. Ann. der Phys. (4) 9, 44-79.

Nach einer historischen Einleitung über die bisherige Anwendung der Dynamik, insbesondere der kräftelosen Dynamik auf die Physik, die in dem Hertzschen Buch über die Prinzipien der Mechanik ihre Krönung gefunden hat, geht Verf. daran, zunächst die vollkommen elastischen Körper nach den Hertzschen Vorschriften aufzubauen. Es zeigt sich, daß alle ihre Eigenschaften, auch die thermoelastischen, durch ein monozyklisches System mit sechs Parametern, d. h. langsam veränderlichen Koordinaten, den sechs Deformationskomponenten der Elastizitätstheorie, im allgemeinsten Fall vollständig wiedergegeben werden. Sowohl für ein vollkommenes Gas, als auch für eine Flüssigkeit, als auch für den allgemeinen elastischen Körper mit 21 Elastizitätskonstanten werden die Massenkoeffizienten des monozyklischen Systems, von Hertz a genannt, ausgewertet. Insbesondre werden hierbei die Einwände von Poincaré gegen die Helmholtzsche kinetische Theorie entkräftet.

Verf. argumentiert nun weiter, daß es kein vollkommen monozyklisches System geben könne, und daß deswegen der Gedanke naheliege, die Abweichungen desselben vom vollkommen zyklischen Verhalten zur Darstellung der immer vorhandenen Abweichung der wirklichen Körper vom vollkommen elastischen Verhalten, insbesondre der inneren Reibung und der elastischen Nachwirkung, zu benutzen, erstere durch die Berücksichtigung der Geschwindigkeit der Parameter, letztere durch das Auftreten der zyklischen Koordinate selbst in dem Massenkoeffizienten a. Für diese Erweiterung werden die Ansätze gegeben. Rr.

E. Ascione. Nuova contribuzione sulla resistenza alla flessione. Acc. Peloritana 16, 159-173.

Die Prinzipien der Biegungstheorie werden hier auf elementarem Wege entwickelt. Vi.

J. Hadamard. La théorie des plaques élastiques planes. American M. S. Trans. 3, 401-422.

Die Abhandlung beschäftigt sich mit den mathematischen Voraussetzungen und der Ableitung der Theorie dünner, ebener Platten und

sucht den Forderungen von Hilbert (Congrès des Mathématiciens, Paris, 1900) an mathematische Strenge gerecht zu werden. Es zeigt sich, daß gewisse Forderungen an die Größenordnungen und die Differenzierbarkeit der auftretenden Funktionen und ihrer Ableitungen gestellt werden müssen, und daß das Randgebiet dabei eine besondere Rolle spielt. Die Betrachtungen entziehen sich der genauen Inhaltsangabe eines Referats.

Rr.

J. H. MICHELL. The flexure of a circular plate. Lond. M. S. Proc. **34**, 223-228.

Mit Hülfe der Abbildung durch reziproke Radien wird aus der von Clebsch gegebenen Lösung des Falles einer eingespannten, kreisförmigen, in der Mitte durch eine Einzellast beanspruchten dünnen Platte die Lösung für den Fall einer exzentrisch angreifenden Last gefunden, die aber gleichfalls von Clebsch schon gegeben war.

Es wird gezeigt, daß es sich mathematisch um die Auffindung der Greenschen Funktion für die Differentialgleichung $\Delta^4 w = 0$ innerhalb einer kreisförmigen Begrenzung handelt. Hingedeutet wird ferner auf das mathematisch ähnliche Problem der langsamen Strömung einer zähen Flüssigkeit.

Rr.

T. BOGGIO. Sull' equilibrio delle membrane elastiche piane. Ven. Ist. Atti **61** [(8) **4**], 619-636.

Verf. betrachtet den Fall einer elastischen, ebenen, isotropen Membran, die durch in der Ebene der Membran liegende Randkräfte deformiert wird. Unter der Voraussetzung, daß die Membranfläche durch Polynome auf einen Kreis konform abgebildet werden kann, hatte er die Lösung schon in einer früher hier besprochenen Arbeit gegeben; jetzt erweitert er diese Lösung auf den Fall, daß die genannte konforme Abbildung durch irgendwelche rationale Funktionen möglich ist.

Rr.

H. HEIMANN. Die Festigkeit ebener Platten bei normaler, konstanter Belastung. Zs. f. Math. u. Phys. **48**, 126-134.

Unter der Voraussetzung, daß die Verschiebungen der Punkte einer Platte in eine nach steigenden Potenzen des Abstandes z von der Mittelebene fortschreitende Reihe, deren Koeffizienten nur Funktionen des Ortes in der Mittelebene sind, entwickelt werden dürfen, integriert Verf. die allgemeinen Elastizitätsgleichungen für den Fall senkrechter, konstanter Belastung und wendet die Lösung auf die kreisförmige und die elliptische Platte an.

Er nimmt an, daß die Verschiebungen am Rande gegeben (beobachtet) sind. Nicht behandelt ist der Fall, daß die Randverschiebungen von den Randkräften abhängig sind (elastische Auflagerung). Am Schluß findet sich die nach des Ref. Ansicht irrtümliche Angabe, daß Grashof die

Unmöglichkeit der analytischen Lösung der Elastizitätsgleichungen für die rechteckige eingespannte Platte nachgewiesen hätte. Rr.

R. W. H. T. HUDSON. Note on the conditions of equilibrium of a flexible membrane under hydrostatic pressure. Messenger (2) **31**. 159-160.

Beweis der bezüglichen Formel bei Besant, Hydrostatik (5. Aufl. 1891, S. 178), ohne spezielle Annahme über die Gestalt der **Membran**. Lp.

L. N. G. FILON. On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load. Lond. Phil. Trans. **198** (A). 147-233.

Verf. untersucht drei Arten der Deformation eines elastischen Zylinders, bei dem der Druck auf die Endflächen nicht gleichmäßig ist. Die erste betrifft Prüfungszylinder für Zerreißungsmaschinen und dgl., die verstärkte Endringe haben, an deren Innenseiten die Zugklauen usw. angreifen, die zweite den entgegengesetzten Fall, bei denen die Endflächen ringförmig eingeklemmt sind, so daß sie seitlich nicht ausweichen können und nun eine Zusammenpressung erfahren, die dritte endlich das analoge Problem für zwei auf die Endflächen ausgeübte Torsionswirkungen. Benutzt werden Zylinderkoordinaten. Die Lösung wird in einer für solche praktischen Fälle üblichen Spezialisierung unter Eingehen auf alle Einzelheiten gegeben, sowohl in bezug auf den allgemeinen Ansatz, wie auf die praktischen Entwicklungen, wie endlich auf numerische Beispiele. Br.

FR. PURSER. On the application of Bessel's functions to the elastic equilibrium of a homogeneous isotropic cylinder. Dublin Trans. **32** (Section A), 31-60.

In erster Stelle betrachtet die Schrift das Gleichgewicht eines (Kreis-) Zylinders, der durch Oberflächenzugkräfte beansprucht wird nur unter den Voraussetzungen, daß erstens die Verrückungen bloß radial oder axial sind von der Form $f(r, z)$, wo r der Abstand eines Punktes von der Zylinderachse und z parallel zu dieser Achse genommen ist, und daß zweitens die Verrückungen symmetrisch sind in bezug auf die durch den Mittelpunkt der Achse senkrecht zu ihr gelegte Ebene. Die Lösungen der Gleichungen des Gleichgewichts werden zuerst für den Fall gefunden, bei dem die Mantelfläche normalen Beanspruchungen unterworfen wird und die Endflächen ohne Krafteinwirkung gelassen werden. Die beiden Fälle, bei denen (I) die Höhe des Zylinders unendlich klein im Verhältnis zu seinem Radius ist, und (II) die Höhe beträchtlich im Verhältnis zum Radius ist, werden etwas eingehender behandelt. Die Betrachtung des Falles, bei welchem auch normale Beanspruchung der

Endflächen vorhanden ist, wird danach in Angriff genommen, und dann wird der allgemeine Fall erörtert, bei dem auch scherende Beanspruchung über die Mantelfläche und die Endflächen hinweg geschieht. Hiernach wird die Voraussetzung der Symmetrie bei den Verrückungen fallen gelassen, und nur die normale Richtung der Zugkräfte wird beibehalten. Schließlich werden gewisse Anwendungen gegeben, von denen wir die folgenden erwähnen wollen: ein Zylinder unter der Einwirkung der Schwere als einer Körperkraft, ein schwimmender Zylinder, ein von einer horizontalen Ebene unterstützter Zylinder. Gbs. (Lp.)

A. Gros. Le problème des surfaces chargées debout. Solution dans le cas du cylindre de révolution. C. R. **134**, 1041-1043.

Es sei ein hohler Kreiszylinder von schwacher Wandstärke im Verhältnis zum Radius gegeben, der gleichmäßig in der Achsenrichtung belastet ist; man soll die kleinste Dicke bestimmen, die einer gegebenen Belastung entspricht, oder umgekehrt die größte Belastung, die einer gegebenen Dicke entspricht, derart, daß die Wand in aller Strenge die zylindrische Form, von der sie zufällig vielleicht abgewichen ist, wieder annimmt, sobald die störende Ursache verschwunden ist. Der Verf. entwickelt zwei nicht übereinstimmende Formeln, indem er einmal die Wandung in Längsprismen teilt und das elastische Gleichgewicht jedes Elementarprismas ausdrückt, das anderemal die transversale Elastizität in Rechnung stellt. Wenn beiden Formeln genügt wird, außerdem ein Sicherheitskoeffizient eingeführt wird, so gilt die Lösung für sicher.

Lp.

K. Esipoff. Über einen Fall der Deformation eines rotierenden Zylinders. Bulletin der Moskauer Polytechnischen Gesellschaft **11**, 190 bis 192 (Russisch).

Diese Arbeit gibt eine kurze Behandlung der Untersuchung von C. Chree in dessen Abhandlung „On the equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates". (Cambr. Trans. **14**, Teil III, 1889). Jk.

H. Bouasse. Sur les courbes de déformation des fils (deuxième partie, chap. IX). Toulouse Ann. (2) **4**, 357-446.

Der Verf. setzt die sorgfältigen Versuche über das Verhalten von tordierten und gezogenen Drähten fort. Nach einer Beschreibung einer neuen Versuchsanordnung folgt eine Fülle von Versuchsreihen und Kurven, aus deren Mannigfaltigkeit es aber nicht gelingt, auch nur qualitative Gesetze abzuleiten. Demgemäß bestreitet Verf. in mehreren angehängten Noten auch die verschiedenen Theorien über Nachwirkung, Strukturveränderung, Elastizitätsgrenze usw. von Marchis, Duhem, Szily, Leduc und Sacerdote u. a. Rr.

E. Ovazza. Contributo alla teoria delle molle pneumatiche. Torino Atti **37**, 421-431.

In dieser nicht sehr umfangreichen Abhandlung untersucht der Verf. die Wirkungsweise der einfachen und doppelten (mit zwei Kolben versehenen) pneumatischen Federn. Mit Hülfe einiger verhältnismäßig einfachen Formeln legt er die Grundeigenschaften beider Anordnungen klar und gibt dem Leser einen Begriff von der Wichtigkeit ihrer Ausnutzung.

Auf die Hauptanwendung dieser Federn übergehend, untersucht der Verf. ihre Wirkung bei den Lufthämmern. Die entwickelten Gleichungen, die dank einigen vereinfachenden Annahmen in klarer und kurzer Form erscheinen, geben einen allgemeinen Überblick über den Vorgang.

Eine eingehendere Untersuchung der Werte der eingeführten Konstanten hätte allerdings zur Vollkommenheit der Abhandlung wesentlich beigetragen, wahrscheinlich ohne den Umfang übermäßig auszudehnen.

Vianello. (Rr.)

W. Cassie. On the measurement of Young's modulus. Phil. Mag. (6) **4**, 401-410.

Die Versuche beziehen sich auf die Beobachtung der Schwingungen eines schweren Körpers, der bifilar an zwei Drähten aus dem zu untersuchenden Material aufgehängt ist. Die Formeln dienen nur zur Berechnung der Versuchsergebnisse. Br.

Lord Rayleigh. On the pressure of vibrations. Phil. Mag. (6) **3**, 338-346.

Auf verschiedene Weise werden Formeln für den Druck abgeleitet, den die Schwingungen fester oder gasförmiger Materie auf die Grenzflächen ausüben, sowohl für Spezialfälle, wie allgemein. Br.

J. Nabl. Über die Longitudinalschwingungen von Stäben mit veränderlichem Querschnitte. Wien. Ber. **111**, 846-856.

Nachdem allgemein die Gleichung für die longitudinalen Schwingungen eines Stabes aufgestellt ist, dessen Oberfläche aus irgend einer Rotationsfläche um die Längsachse gebildet wird, behandelt Verf. ausführlich den physikalisch interessanten Fall eines Stabes mit kreisförmigem Querschnitt, der von einem Ende zum andern konisch verläuft. Der gewonnene Ansatz gilt auch für einen sich stetig verjüngenden Stab mit quadratischen Endflächen. Aus dem Vergleich der Schwingungszahlen eines konischen Stabes mit denen eines zylindrischen geht hervor, daß jeder Ton des konischen Stabes höher ist als der entsprechende des zylindrischen. Die ersten Partialtöne des konischen Stabes sind nicht mehr harmonisch wie bei einem zylindrischen, nähern sich aber mit wachsender Schwingungszahl ziemlich rasch den harmonischen Obertönen.

Der theoretisch geforderte Wert des Verhältnisses der Schwingungszahl des Grundtones eines pyramidenstutzförmigen Stabes zu der eines prismatischen ergab sich experimentell befriedigend genau dadurch, daß der prismatische Stab so lange gekürzt wurde, bis beide Grundtöne übereinstimmten. Das Verhältnis der Stablängen ergab dann die Schwingungszahlen. Rr.

O. WALDSTEIN. Über longitudinale Schwingungen von Stäben, welche aus parallel zur Längsachse zusammengesetzten Stücken bestehen. Wien. Ber. **111**, 930-934.

Werden im Falle der longitudinalen Erregung Querschwingungen des zusammengesetzten Stabes vernachlässigt, so ergibt sich die folgende Schwingungsgleichung, die in einfacher Weise durch die spezifischen Gewichte und die Elastizitätskoeffizienten der Materialien bestimmt ist:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\varrho_1 q_1 + \varrho_2 q_2}{E_1 q_1 + E_2 q_2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Aus den Schwingungszahlen der einzelnen Teile ergibt sich die des gesamten Stabes zu

$$N^2 = \frac{\Sigma q \varrho n^2}{\Sigma q \varrho}.$$

Versuche mit zusammengesetzten Stäben aus Fichten- und Birnbaumholz im Vergleich mit einem Monochord ergaben eine gute Übereinstimmung mit der Theorie. Rr.

H. BRELL. Über die Anwendung des Prinzips des kleinsten Zwanges auf die Schwingungen einer Saite. Wien. Ber. **111**, 1038-1045.

An der Hand der Lagrangeschen Gleichungen ist das Problem der Bewegung einer Saite, die man sich aus diskreten Punkten aufgebaut denkt, von Lord Rayleigh und H. v. Helmholtz behandelt. Nach einer Bemerkung von A. Wassmuth ist das Gaußsche Prinzip des kleinsten Zwanges der Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen dann vorzuziehen, wenn die Vereinigung aller Lagrangeschen Gleichungen angestrebt wird. Daher wendet der Verf. dieses Prinzip auf das Problem der schwingenden Saite an, um im Sinne jener Bemerkung eine gewisse Vereinfachung zu erzielen. Lp.

H. S. CARSLAW. Note on the use of Fourier's series in the problem of the transverse vibrations of strings. Edinb. M. S. Proc. **20**, 23-28.

Die Note bezieht sich auf die Differenzierbarkeit der die Lösung bildenden Reihe. Gbs. (Lp.)

E. Kohl. Über die Transversalschwingungen einer elastischen Kugel. Ann. der Phys. (4) 7, 516-553.

Die behandelte Frage hängt physikalisch mit der Entstehung der Lichtwellen vom Gesichtspunkt der elastischen Lichttheorie aus zusammen.

Untersucht werden die Schwingungen und Wellen des transversal elastisch vorausgesetzten Lichtäthers, die durch eine Torsionsschwingungen ausführende Kugel erregt werden, wenn an der Oberfläche der Kugel Äther und Materie dieselben Verschiebungen erfahren.

Zuerst entwickelt Verf. zu diesem Zweck die Ausdrücke für die Amplituden torsionaler Kugelwellen, im zweiten Abschnitt solche für die Amplituden stehender Torsionsschwingungen der Kugel selbst und zeigt sodann mit Hülfe des Energieprinzips, daß die Energie in einen, fortschreitenden Wellen entsprechenden und einen andern, der Mitführung des Mediums in der Nähe der Kugel entsprechenden, eine Dämpfung hervorrufenden Teil zerfällt.

Die umfangreichen mathematischen Ableitungen, die auf Reihenentwicklungen nach Laméschen Produkten beruhen, scheinen keine ungezwungene Übereinstimmung mit der Erfahrung zu ergeben, während die am Schluß aufgestellten Ergebnisse über longitudinale Kugelwellen in verschiedenen Punkten durch den Versuch bestätigt werden. Rr.

H. Bouasse. Sur les petites oscillations de torsion. Journ. de Phys. (4) 1, 21-33.

Durch genaue Betrachtung der Vorgänge bei den Torsionsschwingungen eines Drahtes unter Berücksichtigung der vom Verf. in größeren Arbeiten gewonnenen Ergebnisse über die permanenten Deformationen wird der Schluß begründet: „Über die kleinen Torsionsschwingungen wissen wir etwa nur so viel, wie schon Coulomb ausgesagt hatte. Der Gegenstand harrt behufs einer angemessenen Behandlung eines Physikers, der ihm viel Geschicklichkeit und ausreichende Mühe zu opfern willens ist.“ Lp.

H. Reissner. Schwingungsaufgaben aus der Theorie des Fachwerks. Diss. Techn. Hochsch. Berlin. 28 S. gr. 8°.

In einer früheren Arbeit (Zeitschr. f. Bauwesen 1899, 477) hat der Verf. die freien, erzwungenen und gedämpften Schwingungen eines Fachwerks, das vom Zustande der Ruhe ausgeht, unter der Annahme betrachtet, daß sich alle Durchbiegungen während der Bewegung in demselben Verhältnisse ändern. Zur vorliegenden Arbeit ist er durch eine Äußerung von Müller-Breslau angeregt worden, es könnte eine genauere Verfolgung des Problems der Fachwerkdynamik wohl auf Grund des d'Alembertschen Prinzips ohne allzu große mathematische Schwierigkeiten durchführbar sein. Wie die Untersuchung ergeben hat, führen in der Tat für die kleinen Schwingungen eines beliebigen Fachwerks, das von einem

willkürlichen Anfangszustand in der Nachbarschaft einer stabilen Gleichgewichtslage ausgeht, verhältnismäßig einfache mathematische Entwicklungen zum Ziel.

Zuerst werden die Bewegungsgleichungen der allgemeinsten möglichen, unendlich kleinen Schwingung eines geraden Stabes, dessen Endpunkte von äußeren Kräften angegriffen werden, aufgestellt, indem nach dem d'Alembertschen Prinzipe ausgedrückt wird, daß bei einer unendlich kleinen, virtuellen Verrückung die Gesamtarbeit der äußeren, der inneren und der Trägheitskräfte verschwindet. Die Diskussion der erhaltenen Gleichungen in ihrer Anwendung auf ein Fachwerk ergibt dann allgemeine Vorschriften zur Behandlung derartiger Aufgaben. Die Durchführung der Rechnungen geschieht für zwei Beispiele: 1. Ein Massenpunkt III von der Masse μ ist durch zwei Stäbe 1 und 2 von der Länge l, dem Querschnitte F, dem Elastizitätsmodul E, dem Trägheitsradius k an zwei feste Punkte I und II angeschlossen; in den Stäben herrscht die gleiche Anfangsspannung S. 2. Die Schwingungen eines steifen Rahmens aus zwei vertikalen gleich langen Stäben 1 und 2 und einem horizontalen 3, wenn die Fußpunkte von 1 und 2 gelenkig sind. Jedoch ist nur das erste Beispiel in größerer Breite bis auf zahlenmäßige Darstellung, die dann auch graphisch veranschaulicht wird, durchgearbeitet worden. Beim zweiten Beispiel hält die Untersuchung nach der Aufstellung der Frequenzgleichung der antisymmetrischen (wagerechten) Schwingung inne.

Die hier gegebene Theorie der unendlich kleinen Schwingungen bezieht sich auf Fachwerke mit ruhenden Lasten. Als eine praktische Folgerung der Untersuchung ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, daß bei Systemen, in deren Knotenpunkten beträchtliche Lasten angreifen, sämtliche Massen auf die Knotenpunkte verteilt werden dürfen, und daß es gestattet ist, die Trägheit der Stäbe, d. h. ihre Eigenschwingungen, zu vernachlässigen. Diese Annäherung führt zur Aufstellung totaler Differentialgleichungen und zu einer endlichen Anzahl von Schwingungszahlen.

Lp.

H. F. B. Müller-Breslau. Die graphische Statik der Baukonstruktionen. Dritte wesentlich vermehrte Auflage. Band II. Erste Abteilung: Formänderung ebener Fachwerke. — Untersuchung der ebenen, statisch unbestimmten Fachwerke. Mit 436 Textfiguren und 7 lithograph. Tafeln. Leipzig: Baumgärtners Buchhdl. XII u. 480 S. gr. 8° (1903).

Bei einem Werke, das in dritter Auflage erscheint (vgl. die Anzeige des ersten Bandes der zweiten Auflage F. d. M. **19**, 908, 1887) und einen Gelehrten zum Verf. hat, der zu den Ersten seines Faches gehört, genügt es eigentlich, die Tatsache des Erscheinens einer neuen Auflage zu registrieren. Wir wollen jedoch an der Hand des Vorwortes die Dinge hervorheben, die von dem Verf. als wesentlich bezeichnet sind.

Die vorliegende Abteilung der Statik der Baukonstruktionen stellt sich die Aufgabe, die Formänderungen ebener Fachwerke und die Theorie

des statisch unbestimmten ebenen Fachwerkes möglichst vollständig darzustellen. Den Ausgangspunkt bildet das Gesetz der virtuellen Verrückungen und der aus diesem gefolgerte, zuerst von Maxwell für einen einfachen Sonderfall bewiesene, darauf vom Verf. erweiterte Satz von der Gegenseitigkeit der elastischen Formänderungen als analytische Grundlage für die Konstruktionen der graphischen Statik.

In der Einleitung werden die Grundgesetze der neueren analytischen Theorie unter der Voraussetzung hergeleitet, daß für den Baustoff eine Proportionalitätsgrenze besteht und die Beanspruchung innerhalb dieser Grenze liegt.

Der übrige Inhalt des Buches ist auf zwei Abschnitte verteilt. Der Abschnitt I lehrt in §§ 1 bis 4 die verschiedenen Darstellungsweisen der Knotenpunktsverschiebungen ebener Fachwerke, und zwar in erster Linie die zeichnerischen Verfahren, nebenbei aber auch den in vielen Fällen einfacheren rechnerischen Weg. § 5 enthält sodann als Fortsetzung der Einleitung eine Reihe von Aufgaben über das statisch unbestimmte Fachwerk und zeigt, daß sich die Ermittlung der statisch nicht bestimmbaren Größen stets mit Hülfe von einfachen Verschiebungsplänen durchführen läßt, und daß der vorgetragene Lehrstoff selbst bei Behandlung verwickelterer Fälle nicht im Stiche läßt. Damit ist die Theorie des ebenen Fachwerks abgeschlossen.

Der Abschnitt II enthält lediglich Anwendungen. Die wichtigsten statisch unbestimmten Träger werden ausführlicher betrachtet, zuerst der Zweigelenkbogen, sodann die versteiften Stabbogen, der beiderseits eingespannte Bogen, der Balken auf mehreren Stützen, verschiedene seltenere Anordnungen statisch unbestimmter Balken-, Bogen- und Kettenbrücken und die mehrteiligen Fachwerkbalken. Den Schluß der reichhaltigen Aufgabensammlung bildet die Untersuchung eines vierteiligen, dreifach statisch unbestimmten Netzwerks. Alle Untersuchungen des Abschnittes II sind als Beispiele zur Erläuterung der allgemeinen Theorie aufgefaßt worden. Dieses Verfahren hat der Verf. in seiner Lehrerpraxis als vorteilhaft erkannt, weil es die Bewältigung des wichtigen Lehrstoffs ohne großen Zeitaufwand gestattet und mehr als eine Gebrauchsanweisung für die Behandlung leichter Aufgaben bietet. Lp.

J. Weingarten. Über den Satz vom Minimum der Deformationsarbeit. Arch. der Math. u. Phys. (3) **2**, 233-239.

Der im Titel genannte Satz wird ohne Zuhülfenahme der Variation der Deformationsarbeit bewiesen und seine Fassung gegen diejenige von Castigliano für den Fall vorgeschriebener Stützenverschiebungen erweitert. Rr.

A. Francke. Bogen mit elastisch gebundenen Widerlagern. Zs. f. Math. u. Phys. **47**, 15-22.

A. FRANCKE. Der Spitzbogenträger mit elastisch gebundenen, drehbaren Widerlagern. Zs. f. Math. u. Phys. 47, 23-28.

A. FRANCKE. Der Spitzbogenträger mit Scheitelgelenk und sprungweise veränderlichem Trägheitsmoment. Zs. f. Math. u. Phys. 48, 201-208.

A. FRANCKE. Zeichnerische Ermittlung der Kräfte im Kreisbogenträger mit und ohne Kämpfergelenke. Zs. f. Math. u. Phys. 48, 193-200.

Gibt die teils graphische, teils analytische Durchrechnung der oben angeführten Fälle der Statik der Baukonstruktionen. Rr.

A. F. JORINI. Momento medio di flessione nella trave continua. Lomb. Ist. Rend. (2) 35, 313-325.

M. PANETTI. Contributo alla trattazione grafica dell' arco continuo su appoggi elastici. Torino Mem. (2) 51, 307-333.

Die statische Untersuchung eines aus mehreren Bogen bestehenden Bauwerkes (wie z. B. eines gemauerten Viaduktes mit hohen Pfeilern) bietet so große Schwierigkeiten, daß eine allgemeine Behandlung noch immer in der technischen Literatur vermißt wird. In der vorliegenden Abhandlung erklärt der Verf. ein neues Verfahren, welches von W. Ritter (Zürich) mit Hülfe der Theorie der Zentralellipse aufgestellt worden ist und demnächst in dem IV. Bande der Anwendungen der graphischen Statik erscheinen wird.

Der Verf. betrachtet zuerst einen einfachen Fall, um die Grundsätze des Verfahrens zu erklären: Es handelt sich immer um die Zusammensetzung der Zentralellipsen der verschiedenen Teile des Bauwerkes. Es folgt eine eingehende Untersuchung der Eigenschaften der zur Lösung führenden geometrischen Elemente, welche zur Konstruktion eines antipolaren Dreiecks dienen. Jede Kraft, deren Wirkungslinie mit einer der drei Seiten desselben zusammenfällt, liefert in ganz einfacher Weise die entsprechenden, statisch nicht bestimmbaren Größen. Eine beliebige Kraft wird nach den drei Seiten des Dreiecks zerlegt, wodurch die Aufgabe sofort lösbar wird.

Die ausführliche Behandlung eines numerischen Beispiels erleichtert das Verständnis der betreffenden Theorie. Es wird auch dabei auseinandergesetzt, wie man gewisse Größen rechnerisch für den Fall ermitteln kann, daß die graphische Konstruktion die gewünschte Genauigkeit nicht gestattet.

Zum Schluß leitet der Verf. noch die Einflußlinie der statisch nicht bestimmbaren Größen ab, was als eine willkommene Vervollständigung des Verfahrens anerkannt werden muß. Der (ebenfalls angeführte) Vergleich einiger Einflußlinien nach der genauen Behandlung und unter An-

nahme fest eingespannter Kämpfer läßt den Einfluß der benachbarten Teile auf jeden einzelnen Bogen deutlich erkennen. Vianello. (Rr.)

A. Sommerfeld. Beiträge zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre. Phys. Zeitschr. 3, 266-271, 286-291.

An Versuchen und Rechnungsergebnissen wird die Wichtigkeit dynamischer Beanspruchungen in der Festigkeitslehre nachgewiesen. Zunächst macht der Verf. auf die Resonanzerscheinungen aufmerksam, wobei besonders ein Versuch mit einem, auf einem Tisch stehenden Elektromotor bemerkenswert ist, bei dem zwei Drittel der aufgewandten Arbeit durch Resonanz des Tisches verloren gehen.

An weiteren Beispielen wird sodann auch bei Torsionsschwingungen der Unterschied zwischen statischem und dynamischem Widerstand gezeigt: für mehrere Fälle werden einfache Rechenregeln angegeben, wobei besonders bemerkenswert der Ersatz von periodischen durch lineare Funktionen ist, wo es sich um kleine Argumente handelt. Rr.

M. Radaković. Über die Bewegung eines Motors unter Berücksichtigung der Elastizität seines Fundamentes. Zs. f. Math. u. Phys. 48, 28-39.

Die Ergebnisse der Sommerfeldschen Arbeit (vergl. das vorstehende Referat) sind mit verfeinerten Hülfsmitteln von Wirtinger bestätigt worden. Daher schien es dem Verf. „nicht ohne Interesse zu sein, diese Verhältnisse theoretisch zu untersuchen, indem man das Wesentliche der Erscheinung auf eine mechanische Aufgabe zurückführt“. Diese Aufgabe ist schematisch so gebildet, daß sie die Bedingungen des Experiments in der Hauptsache aufnimmt und der analytischen Behandlung ohne Schwierigkeit zugänglich ist. Die Ergebnisse der Rechnung stimmen dann auch mit den bei jenen Versuchen gemachten Erfahrungen überein. Lp.

A. Sommerfeld. Zur Theorie der Eisenbahnbremsen. Sonderabdr. Denkschr. Techn. Hochschule Aachen. 15 S. 4°.

Die qualitativ schon einigermaßen bekannten Vorgänge beim Bremsen von Eisenbahnzügen werden mathematisch unter Benutzung der von Galton, Wichert u. a. gefundenen Reibungsgesetze präzisiert. Hierbei zeigt es sich, daß es zwei kritische Werte des Bremsdruckes gibt, oberhalb deren Gleiten und Rollen, bezw. reines Gleiten eintritt. Es werden Formeln angegeben für Bremszeiten und Bremswege bei konstantem und veränderlichem Bremsdruck, in denen bestimmte Integrale auftreten, die sich über die Versuchskurven der Reibungsgesetze erstrecken, und es bestätigt sich die Betriebserfahrung, daß es nicht bloß für Materialabnutzung,

sondern auch für Bremszeit und Weg am günstigsten ist, wenn niemals Gleiten zwischen Rad und Schiene eintritt. Rr.

P. ROTH. Die Festigkeitstheorien und die von ihnen abhängigen Formeln des Maschinenbaues. Zs. f. Math. u. Phys. 48, 285-316. Auch: Diss. Berlin (Techn. Hochsch.) 45 S. 8°.

Nach einer Diskussion der verschiedenen Festigkeitstheorien auf Grund neuerer Versuche wird der Mohrschen Theorie der Vorzug gegeben, wenn sie auch in einzelnen Punkten Voigtschen Versuchen widerspräche.

Sodann werden für einige Spannungszustände des Maschinenbaus die zuläßigen Grenzen nach Mohrs Anschauung bestimmt und mit den früher üblichen Grenzwerten verglichen. Rr.

N. JOUKOWSKY. Über die Festigkeit des Velozipedrades. Moskau. Math. Samml. 23, 724-739 (Russisch).

Der Autor bemerkt, daß man infolge der großen Zahl n der Radspeichen, welche die Radfelge mit der Radachse verbinden, annehmen kann, daß ihre Wirkung auf die Felge gleichmäßig auf den ganzen Felgenumfang verteilt ist. Dabei wird auf jedes Element des Radkreises $r d\varphi$ eine anziehende Kraft p wirken, welche durch folgende Formel ausdrückbar ist:

$$p = \mu d\varphi\, \delta r, \quad \mu = \frac{\varepsilon \sigma n}{2\pi r},$$

wo r der Radius des Rades, δr die Variation der Speichenlänge, ε der Modul der Elastizität des Speichenstoffes, σ die Fläche des Speichendurchschnittes ist.

Unter der Einwirkung des Druckes Q auf die Achse des auf den Boden sich stützenden Rades wird in letzterem eine Deformation hervorgerufen, infolge deren die Speichen eine Variation δr erleiden. Der Autor betrachtet δr als Funktion des Winkels φ, welchen die Speiche mit dem oberen vertikalen Radius des Rades bildet, und nimmt an:

$$\frac{d(\delta r)}{d\varphi} = \zeta.$$

Zur Bestimmung dieser Funktion ζ wird folgende Differentialgleichung gefunden:

$$\frac{d^4\zeta}{d\varphi^4} + 2\frac{d^2\zeta}{d\varphi^2} + (1 + \lambda^2)\zeta = 0.$$

Hier ist $\lambda^2 = \mu r^3/EJ$, wo E der Elastizitätsmodul des Felgenstoffes ist, J das Trägheitsmoment des radialen Durchschnittes der Radfelge in

bezug auf die Achse, welche durch den Schwerpunkt dieser Fläche parallel der Radachse gezogen ist.

Das Integral dieser Gleichung wird unter der Bedingung der Symmetrie des deformierten Rades bezüglich der Vertikale mit Hülfe nur einer willkürlichen Konstante C in folgender Form ausgedrückt:

$$\zeta = C\{\cos(\beta\pi)\sinh(\alpha\pi)\sin(\beta\varphi)\cosh(\alpha\varphi) - \sin(\beta\pi)\cosh(\alpha\pi)\cos(\beta\varphi)\sinh(\alpha\varphi)\},$$

wo

$$\lambda = \operatorname{tg}\psi, \quad \alpha = \frac{\sin\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{\cos\psi}}, \quad \beta = \frac{\cos\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{\cos\psi}}.$$

Zur Bestimmung des Konstante C wird folgende Formel gegeben:

$$\frac{Q}{\mu} = \frac{4\alpha\beta C}{(\alpha^2+(\beta-1)^2)(\alpha^2+(\beta+1)^2)}(\cosh^2(\alpha\pi) - \cos^2(\beta\pi)).$$

Mit Hülfe der Funktion ζ bestimmt der Autor δr und $\delta\varphi$, wobei die letzte kleine Größe die Speichenverschiebung darstellt. Am Schlusse der Arbeit werden die Vereinfachungen betrachtet, die in den gefundenen Formeln entstehen, wenn λ einen großen Wert hat. (In gewöhnlichen Velozipedrädern ist λ^2 ungefähr $= 300$.) Jk.

Considère. Étude théorique de la résistance à la compression du béton fretté. C. R. 135, 365-368.

Considère stellt für die von ihm erfundene Konstruktion des ringverstärkten Betons eine Näherungsberechnung auf, indem er den Widerstand der spiralförmigen Eiseneinlagen eines Druckstabes gegen Querdilatation einführt. Rr.

L. Lecornu. Sur les volants élastiques. J. de l'Éc. Pol. (2) 7, 9-27.

Die Erfindung des französischen Ingenieurs Raffard besteht in der Anbringung radial geführter, elastisch gelagerter Massen in der Nähe der Felge eines Schwungrades, um den Gleichförmigkeitsgrad der Umdrehungsgeschwindigkeit zu erhöhen. Verf. macht nun darauf aufmerksam, daß bei der Änderung der Winkelgeschwindigkeit Schwingungen der elastisch geführten Massen entstehen müssen, deren Einfluß einer rechnerischen Prüfung bedarf. Der Einfachheit wegen wird nur eine Zusatzmasse angenommen und gezeigt, daß deren Einfluß gegen Stöße unwesentlich ist. Nachdem sodann auf die Schwierigkeit der Behandlung endlicher Geschwindigkeitsänderung hingewiesen ist, werden die Bewegungsgleichungen für kleine Geschwindigkeitsänderungen integriert, und die Erscheinung

wird als eine Schwingung um einen stationären Bewegungszustand dargestellt. Es zeigt sich, daß tatsächlich die Vorrichtung einen ausgleichenden Einfluß bei allmählichen Geschwindigkeitsänderungen hat und ein Schwungrad von bestimmten Eigenschaften leichter zu bauen erlaubt als die üblichen. Rr.

N. Bujnitzki. Zum Entwurfe provisorischer Land- und Küstenbefestigungen. Mitt. über Art. u. Genie 33, 286-310.

Der Artikel ist aus dem russischen Ingenieurjournal Nr. 11, 1901, vom österreichischen Major v. Debno-Gologórski übersetzt. Außer den konstruktiven Einzelheiten werden Berechnungen aus der Festigkeitslehre gegeben, so unter anderen über das Eindringen von Langgeschossen in verschiedene Medien, mit Benutzung von ähnlichen Darstellungen bei Sabudski. Lp.

G. Ramisch. Auflösung verschiedener Aufgaben aus der modernen Festigkeitslehre. Mitt. üb. Art. u. Genie 33, 1047-1064.

Zwei Aufgaben aus der Theorie des Fachwerkes nebst zugefügten Zahlenbeispielen. Lp.

A. Schülke. Über Dach- und Brückenkonstruktionen. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 33, 163-176.

Zu Schüleraufgaben werden die ersten Fragen dieser Theorie verarbeitet, ohne daß jedoch die Elastizitätstheorie herbeigezogen wird. Lp.

Weitere Literatur.

C. Bach. Elastizität und Festigkeit. Die für die Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmäßige Grundlage. Mit in den Text gedruckten Abbildungen und 18 Tafeln in Lichtdruck. 4. Auflage. Berlin: J. Springer. XXII u. 650 S. gr. 8°.

E. Bousse. Die Gewichtsberechnung der Eisenkonstruktionen. Zum Gebrauch im Brücken-, Eisenhoch- und Schiffbau, sowie im Hütten- und Maschinenbaufach. Leipzig: Th. Thomas. V u. 104 S.

J. Kriemler. Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren vollkommen elastischer auf Biegung beanspruchter Stäbe mit besonderer Berücksichtigung der Knickvorgänge. Habilitationsschrift. Karlsruhe: G. Braunsche Hofbuchdr. IV u. 56 S. gr. 8°.

J. Kübler. Die Berechnung der Kessel- und Gefäßwandungen. 1. Teil: Aufstellung der allgemeinen Gleichungen. Mit einem Anhang: Welches Hindernis versperrt in der Knicktheorie den Weg zur richtigen Erkenntnis? Leipzig: B. G. Teubner. 52 S. gr. 8°.

J. KÜBLER. Noch einmal die richtige Knickformel. Zs. f. Math. u. Phys. **47**, 367-374.

J. KÜBLER. Die Theorie der Knickelastizität und Festigkeit. Leipzig: B. G. Teubner. 29 S. 8° (5 Fig. und eine zweifarb. Tafel.)

E. PATTON. Beitrag zur Berechnung der Nebenspannungen infolge starrer Knotenverbindungen bei Brückenträgern, mit fünf Zusammenstellungen von Zeichnungen, zum Gebrauche beim Entwerfen eiserner Brücken. Hannover: K. L. Ricker. III u. 62 S. Fol.

CARL SCHMID. Statik und Festigkeitslehre. Lehrheft, nebst vielen Beispielen und einer Aufgabensammlung für Festigkeitslehre, elementar bearbeitet für den Gebrauch an der Schule und in der Praxis. Dritte erweiterte Auflage. Stuttgart: J. B. Metzler. VIII u. 119 S. hoch 4°.

C. Kapillarität.

G. BAKKER. Théorie de la capillarité. 3e mémoire. Journ. de Phys. (4) **1**, 105-115.

In der zweiten Abhandlung (F. d. M. **31**, 779, 1900) war für die Kräftefunktion der Molekularkräfte der Ausdruck aufgestellt worden

$$\varphi(r) = -fe^{-qr}/r.$$

Gegenwärtig gibt der Verf. statt dieses Ausdrucks und der zugehörigen Differentialgleichung andere Formeln, die den früheren äquivalent sind. Danach wird der allgemeine Ausdruck für den molekularen Druck K und die Kapillarkonstante H abgeleitet und gezeigt, daß die Laplacesche Gleichung $\lambda + \varrho g z = \pm H\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ bestehen bleibt, auch wenn man im Widerspruch mit der Laplaceschen Hypothese annimmt, daß die Dichte ϱ von Punkt zu Punkt sich ändert. Nach weiterer Berechnung der Kapillarkonstante mit Hülfe des thermischen Druckes wird zuletzt gezeigt, daß das letzte Kapitel der thermodynamischen Kapillaritätstheorie von van der Waals im Widerspruch mit den anderen steht, und daß dieses von der Vernachlässigung gewisser Glieder herrührt.

Lp.

F. KNAUFLER. Über die Verschiebung des osmotischen Gleichgewichts durch Oberflächenkräfte. Wien. Ber. **111**, 935-945.

Es werden Formeln abgeleitet für den Unterschied in der Konzentration einer Lösung in zwei Räumen, die durch eine gekrümmte Oberfläche mit merklicher Oberflächenspannung von einander oder von einem vom Dampf des Lösungsmittels erfüllten Raum getrennt sind. Es muß innerhalb eines konvex begrenzten kapillaren Raumes eine stärkere Konzentration herrschen als innerhalb eines konkav begrenzten. Die Differenz hängt in einfacher Weise vom Krümmungsmaß der Begrenzungs-

fläche ab. Es ist nämlich, wenn ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien dieser Fläche, σ die Oberflächenspannung, s das spezifische Gewicht der Flüssigkeit und m das Molekulargewicht des gelösten Stoffes bedeuten, der Konzentrationsüberschuß $\Delta C = \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) \frac{2\sigma}{s} \cdot \frac{m}{RT}$. Eine praktische Anwendung auf das Färben von Baumwollenfasern (die kapillare Hohlräume haben) wird gegeben. Br.

G. Morera. Stabilità delle configurazioni di equilibrio di un liquido in un tubo capillare di rotazione attorno ad un asse verticale. Rom. Acc. L. Rend. (5) **11**$_1$, 223-228.

In einem nichtzylindrischen, aber eine Rotationsfläche bildenden Kapillarrohr ist bekanntlich eine Reihe von Gleichgewichtszuständen denkbar, die abwechselnd stabil und labil sind. Verf. weist nach, daß man alle diese Stellen in einfacher Weise durch Schnittpunkte der Meridiankurve mit einer bestimmten, einer gleichseitigen Hyperbel sehr ähnlichen Kurve finden kann. Br.

J. Mathieu. Über die Kapillarität der Lösungen. Ann. der Phys. (4) **9**, 340-366.

Vom mathematischen Standpunkt aus interessiert aus dieser Arbeit nur die Ableitung einer Differentialgleichung zwischen der Steighöhe h in einer Kapillarröhre und der Verdünnung U einer darin aufsteigenden Lösung, die bekanntlich in der Röhre stärker verdünnt ist als im Raum außerhalb. Sie hat, wenn M das Molekulargewicht des Lösungsmittels, p dessen Dampfdruck in der dünneren, p_0 in der stärkeren Lösung bedeuten, die Form: $dh/dU = (RT/Mg) \cdot \ln(p/p_0)$. Br.

H. Hilton. Note on capillarity constants of crystal faces. Phil. Mag. (6) **8**, 144-148.

Verf. weist nach, daß der von Wulff (Zs. f. Kristallogr. u. Mineral. **34**, 520 ff.) gegebene Satz, daß die Kapillaritätskonstanten der Flächen eines Kristalls sich wie die Normalen auf diese Flächen verhalten müssen, zwar richtig, aber falsch abgeleitet ist. Br.

J. J. van Laar. Sur l'asymétrie de la courbe électrocapillaire. Arch. Néerl. (2) **7**, 443-459.

1. „Eine genaue theoretische Prüfung des Kapillarelektrometers lehrt uns, daß die Oberflächenspannung als Funktion der Ladung der Oberfläche nicht durch die einfache Gleichung $\gamma = \varphi_0 - k\omega^2$ ausgedrückt wird, sondern durch die Beziehung $\gamma = \varphi_0 - A\omega - (k + \beta)\omega^2$.

2. Die Koeffizienten A und β sind nicht die nämlichen für eine negative Ladung der Lösung (Δ negativ) und für eine positive. 3. Die elektrokapillare Kurve setzt sich also aus zwei sehr unterschiedlichen parabolischen Teilen zusammen, die sich für $\Delta = 0$ wieder vereinigen, und deren aufsteigender Teil eine viel stärkere Steigung hat als der absteigende. 4. Der aufsteigende Teil hat ein Maximum, das nicht notwendig mit der Stelle zusammenfällt, wo $\Delta = 0$. 5. Wir haben damit alle Besonderheiten der elektrokapillaren Kurve erklärt, die bisher unaufgeklärt blieben. 6. Nach Nr. 4. ist das Lippmannsche Elektrometer ein Apparat, der kein Vertrauen verdient, wenn es sich um die genaue Bestimmung der Potentialdifferenzen zwischen einem Metall und einem Elektrolyten handelt." Lp.

Kapitel 2.

Akustik und Optik.

A. Akustik.

W. C. L. van Schaik. Wellenlehre und Schall. Autorisierte deutsche Ausgabe bearbeitet von H. Fenkner. Braunschweig: Friedr. Vieweg und Sohn. XI u. 358 S. gr. 8°.

Der deutsche Herausgeber sagt im Vorwort: „Die Bearbeitung des van Schaikschen Werkes wird schon aus dem Grunde manchem willkommen sein, weil kaum ein deutsches Sonderwerk existiert, das in so engem Rahmen auf Grundlage der mathematischen Wellentheorie eine allgemeine Übersicht über das Gesamtgebiet der akustischen Erscheinungen gibt. Es ist mein Bestreben gewesen, die deutsche Ausgabe so durchzuführen, daß sie nach Form und Inhalt dem Originalwerk möglichst entspricht; an manchen Stellen erschien es mir jedoch notwendig, die Darstellung durch erläuternde Zusätze zu ergänzen. Die Verlagsbuchhandlung hat alles aufgeboten, um das Werk durch Einfügung einer größeren Anzahl zweckentsprechender Figuren gediegen auszustatten." Wir haben nur hinzuzufügen, daß die mathematische Begründung der Wellentheorie ohne Zuhülfenahme der Infinitesimalrechnung geschieht; damit ist der Standpunkt des Buches gekennzeichnet, das für eine Kenntnisnahme der physikalischen Akustik sehr nützlich sein wird.

Lp.

Lord Rayleigh. Some general theorems concerning forced vibrations and resonance. Phil. Mag. (6) 8, 97-117.

Ausgehend von einem möglichst voraussetzungslosen Ansatz über allgemeine Schwingungsvorgänge, entwickelt Verf. die Folgen die sich ergeben, wenn gewisse Zwangsbedingungen hinzutreten, indem er Werte für die durch die entsprechenden äußeren Kräfte geleistete Arbeit ab-

leitet. Die Entwicklungen gelten speziell dem Falle der Resonanz. Sie halten sich immer möglichst allgemein und abstrakt, werden aber zum Teil an elektrischen und akustischen Beispielen veranschaulicht. Das Verständnis der Arbeit setzt die Kenntnis der Theory of sound des Verf. voraus. Br.

C. W. Oseen. Bidrag till teorien för vågrörelse i strömmar. Acta Lund. **38**, 34 S.

Die Abhandlung enthält zuerst einige allgemeine Bemerkungen über die Wellenbewegung in einem bewegten Mittel. Sodann wendet sich der Verf. zu seiner eigentlichen Aufgabe, der Wellenbewegung in einem gleichmäßig fortschreitenden Mittel. Für die partielle Differentialgleichung dieser Wellen:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2u_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + u_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a^2 \Delta \varphi,$$

(φ das Geschwindigkeitspotential, u_0 die konstante Geschwindigkeit des Mittels, a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen) wird das partikulare Integral gefunden:

$$\varphi = \frac{A\left(t + \frac{u_0 x - \sqrt{a^2 x^2 + (a^2 - u_0^2)(y^2 + z^2)}}{a^2 - u_1^2}\right)}{\sqrt{a^2 x^2 + (a^2 - u_0^2)(y^2 + z^2)}}$$

$$+ \frac{B\left(t + \frac{u_0 x + \sqrt{a^2 x^2 + (a^2 - u_0^2)(y^2 + z^2)}}{a^2 - u_0^2}\right)}{\sqrt{a^2 x^2 + (a^2 - u_0^2)(y^2 + z^2)}},$$

wo A und B willkürliche Funktionen sind. Mit Hülfe dieses Integrals wird die Kirchhoff-Helmholtzsche Theorie und das Huygenssche Prinzip verallgemeinert. Das partikulare Integral wird dann zu einer analytischen Ableitung des Dopplerschen Prinzips benutzt. Zuletzt macht der Verf. einige Bemerkungen über die entsprechenden Fragen in der Theorie der ebenen Wellenbewegung. Bdn.

J. Nabl. Über die Longitudinalschwingungen von Stäben mit veränderlichem Querschnitt. Wien. Ber. **111**, 846-856.

O. Waldstein. Über longitudinale Schwingungen von Stäben, welche aus parallel zur Längsachse zusammengesetzten Stücken bestehen. Wien. Ber. **111**, 930-934.

H. Brell. Über die Anwendung des Prinzips des kleinsten Zwanges auf die Schwingungen einer Saite. Wien. Ber. **111**, 1038-1045.

Referat auf S. 824 u. 825. Lp.

J. TUMA. **Eine Methode zur Vergleichung von Schallstärken und zur Bestimmung der Reflexionsfähigkeit verschiedener Materialien.** Wien. Ber. **111**, 402-410.

Gelegentlich einer rein experimentellen Untersuchung wird die Druckänderung in einem Resonator berechnet, der aus einem einerseits geschlossenen Rohre besteht, dessen Länge gleich einer ungeraden Zahl von Wellenlängen ist. Jene Druckänderung ergibt sich leicht aus der Formel, die den Schwingungszustand der Röhre darstellt unter Berücksichtigung der einmal oder mehrmals am Boden und an der freien Luft reflektierten Wellen. Wn.

P. JUPPONT. **Sur les modulations et la formation des gammes tempérées.** Toulouse Mém. (10) **2**, 441-457.

Es wird die Theorie der temperierten Tonleiter eingehend erörtert und gezeigt, daß, wenn man den Umfang eines Kreises in zwölf gleiche Teile teilt und die Teilpunkte als Repräsentanten der zwölf halben Töne der temperierten Tonleiter ansieht, man die verschiedenen Akkorde durch einfache geometrische Figuren darstellen kann. So ergeben der Durchmesser und das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck die verminderte Quinte etc. — Der Verf. wünscht ferner, daß für die temperierte Tonleiter eine besondere Terminologie und besondere Zeichen für Erhöhung und Vertiefung um einen halben Ton eingeführt werden. Wn.

A. GUILLEMIN. **Échelle universelle des mouvements périodiques graduée en savarts et millisavarts.** Journ. de Phys. (4) **1**, 504-506.

An Stelle der Oktave und des Kommas will der Verf. in die Akustik zwei andere Einheiten für die Intervalle zweier Töne einführen: 1. Den „savart“, definiert durch das Intervall $\Sigma = 10:1$, 2. den „millisavart“, definiert durch das Intervall

$$\sigma = \frac{434{,}3 + \frac{1}{2}}{434{,}3 - \frac{1}{2}},$$

wobei 434,3 die Schwingungszahl einer einzuführenden Normalstimmgabel sein soll. Dabei ist $\operatorname{Log} \Sigma = 1$, $\operatorname{Log} \sigma = 0{,}001$, unter Log den Briggischen Logarithmus verstanden. Wn.

B. Theoretische Optik.

J. BOUSSINESQ. **Démonstration générale de la construction des rayons lumineux par les surfaces d'onde courbes.** C. R. **135**, 559-563.

Der Verf. weist nach, daß die Huygenssche Konstruktion der Wellenfläche und des zu einer Welle gehörigen Strahls auch dann noch

richtig bleibt, wenn die Differentialgleichungen für die Lichtbewegung Ableitungen der Verrückungen nach der Zeit und den Koordinaten enthalten, die die zweite Ordnung übersteigen. Wn.

A. Cotton. Sur les ondes lumineuses stationnaires. Journ. de Phys. (4) 1, 689-708.

Die wesentlich experimentelle Arbeit enthält einige erläuternde theoretische Überlegungen ohne analytische Entwicklungen. Wn.

M. Planck. Über die Natur des weißen Lichtes. Ann. der Phys. (4) 7, 390-400.

Hinsichtlich der Natur des weißen Lichtes stehen sich zwei Ansichten gegenüber. Gouy sieht die Wellen des weißen Lichtes als zusammengesetzt an aus lauter absolut regelmäßigen, einfach periodischen Schwingungen von konstanter Schwingungszahl, Amplitude und Phase. Demgegenüber meint Carvallo, daraus, daß die durch ein Beugungsgitter getrennten Komponenten des weißen Lichtes durchaus nicht mit einander interferenzfähig sind, folge, daß sie auch nicht als regelmäßige Sinusschwingungen angesehen werden können. Hier wird nun gezeigt, daß diese einander gegenüberstehenden Ansichten im Grunde sehr wohl verträglich sind. Denn der Lichtvektor Z eines geradlinig polarisierten Strahles an einem bestimmten Ort läßt sich, als Funktion der Zeit betrachtet, für die ganze Dauer T des der Betrachtung zugrunde gelegten Zeitraums stets in eine Fouriersche Reihe entwickeln, und daraus ergibt sich die Intensität der Strahlung, gemessen durch den Mittelwert des Quadrats von Z, ebenfalls in Form einer Fourierschen Reihe, und zwar nicht nur die Intensität J der Gesamtstrahlung, sondern auch die Intensität J_1 der in der Gesamtstrahlung enthaltenen monochromatischen Strahlung einer bestimmten Schwingungszahl $\frac{n_0}{T} = \nu_0$. Diese letztere Intensität hängt nun keineswegs allein ab von der Amplitude C_{n_0} einer einzelnen Partialschwingung des Lichtvektors Z, sondern sie ist erst durch das Zusammenwirken aller derjenigen Partialschwingungen bedingt, deren Ordnungszahlen n nahe an n_0 liegen. Gerade in diesem Punkte liegt nun die Erklärung der oben erwähnten Meinungsverschiedenheit. Denn die tatsächliche, von Carvallo in den Vordergrund gestellte Unmöglichkeit jeglicher Interferenz zwischen benachbarten Farben des Spektrums beruht nicht auf einer besonderen, komplizierten Eigenschaft der Elemente des Lichts, der Partialschwingungen, sondern lediglich auf der unregelmäßigen Anordnung dieser an sich absolut einfachen Elemente.

Die Frage nach der Natur des weißen Lichtes beantwortet der Verf. so: Normales weißes Licht von konstanter Intensität ist vollständig definiert 1. durch die Verteilung der Energie auf die verschiedenen Teile

des Spektrums, 2. durch den Satz, daß innerhalb eines schmalen Spektralbezirks, in welchem die Energieverteilung als gleichmäßig angesehen werden kann, die Energien (Quadrate der Amplituden) und die Phasenkonstanten der einzelnen einfach periodischen Partialschwingungen, in welche der Lichtvektor zerlegt werden kann, absolut unregelmäßig (im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung) angeordnet sind. Die Wahl der Grundperiode T der Fourierschen Reihe ist dabei ganz gleichgültig, wenn nur T hinreichend groß ist gegen die Dauer einer jeden in Betracht kommenden Partialschwingung. — Man kann übrigens den zweiten Satz auch direkt auf das ganze Spektrum anwenden. Dann wird der erste Satz überflüssig.

Bemerkt werden mag noch, daß die vorliegende Arbeit keine analytischen Entwicklungen enthält. Die Formeln für die Intensität werden früheren Arbeiten des Verf. entnommen. Wn.

J. Boussinesq. Réflexion et réfraction par un corps transparent animé d'une translation rapide: équations du mouvement et conséquences générales. C. R. **135**, 220-225.

J. Boussinesq. Réflexion et réfraction par un corps transparent animé d'une translation rapide: ondes réfléchies et réfractées; amplitude des vibrations. C. R. **135**, 269-273.

J. Boussinesq. Réflexion et réfraction par un corps animé d'une translation rapide: construction des rayons, indépendante de la translation, et rotation, paraissant au contraire en dépendre, du plan de polarisation du rayon réfracté. C. R. **135**, 309-314.

J. Boussinesq. Extension du principe de Fermat, sur l'économie du temps, au mouvement relatif de la lumière dans un corps transparent hétérogène, animé d'une translation rapide. C. R. **135**, 465-470.

Der Verf. stellt die Grundgleichungen für die Lichtschwingungen in einem isotropen Körper auf, der sich schnell im freien Äther bewegt. Er nimmt dabei an, daß auf den ein Körpermolekül umgebenden Äther außer der elastischen Kraft des umgebenden Äthers ein Widerstand wirkt, der der relativen Beschleunigung proportional ist und für die der x-Achse parallele Verrückungskomponente ξ den Wert hat:

$$-\varrho A\left\{\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+2V_x\frac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial t}+2V_y\frac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial t}+2V_z\frac{\partial^2\xi}{\partial z\,\partial t}\right\}.$$

Darin sind ϱ die Dichtigkeit des Äthers, A eine dem bewegten Körper eigentümliche Konstante, V_x, V_y, V_z die Komponenten der Geschwindigkeit des Körpers. Von letzteren wird angenommen, daß sie mit der Geschwindigkeit ω des Lichtes im freien Äther vergleichbar, aber doch so klein sind, daß man ihre Quadrate gegen ω^2 vernachlässigen kann.

Die Gleichungen für die Lichtbewegung in solchen Körpern nehmen, auf ein im Raum festes Koordinatensystem bezogen, die Form an:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{N^2}{\omega^2}\left[\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+2\left(1-\dfrac{1}{N^2}\right)\left(V_x\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial t}+V_y\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial t}+V_z\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z\,\partial t}\right)\right] \\ \qquad\qquad = \Delta_2\xi-\dfrac{\partial\theta}{\partial x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

falls θ die räumliche Dilatation bezeichnet, $N=\sqrt{1+A}$ den Brechungsindex des Körpers.

Bezieht man aber die Gleichungen nicht auf ein im Raum, sondern auf ein im Körper festes Achsensystem, so treten an die Stelle der Gleichungen (1) die folgenden:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{N^2}{\omega^2}\left\{\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-\dfrac{2}{N^2}\left(V_x\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial t}+V_y\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial t}+V_z\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z\,\partial t}\right)\right\} \\ \qquad\qquad = \Delta_2\xi-\dfrac{\partial\theta}{\partial x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (1) folgt, daß die Ätherschwingungen in einem bewegten Körper sich so vollziehen, als besäßen der Körper und der in ihm enthaltene Äther eine gemeinsame Geschwindigkeit, die $=\left(1-\frac{1}{N^2}\right)$-mal der effektiven Geschwindigkeit ist (Fresnels Koeffizient). Ferner ergibt sich aus (2) die Aberration eines Strahles, der von einer Lichtquelle ausgeht, die sich gleichzeitig mit dem durchsichtigen Körper und dem Beobachter bewegt.

Weiter werden die Gleichungen (2) auf zwei mit gleicher Geschwindigkeit im Raume bewegte Medien angewandt, und es wird der Übergang des Lichtes von einem dieser Medien zum andern untersucht. Dabei wird die Betrachtung auf rein transversale Wellen beschränkt. Die Grenzbedingungen für diesen Übergang sind: Gleichheit der der Grenze parallelen Verrückungskomponenten und Gleichheit der Elementarrotationen $\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial z}$, $\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}$ für die der Grenzfläche $x=0$ parallelen Achsen. Die Resultate sind, was die Richtung der Normalen der reflektierten und gebrochenen Wellen betrifft, von denen bei ruhenden Medien etwas verschieden. Bildet die Normale der einfallenden Welle mit dem Einfallslot den Winkel i, die Normale der reflektierten Welle den Winkel i', die der gebrochenen Welle den Winkel ϱ, und ist r der Wert von ϱ für ruhende Medien, so ist:

$$i' = i - \frac{V}{\omega}\,\frac{\sin(\theta + i)}{N}, \quad \varrho = r - \frac{V}{\omega}\,\frac{\sin(\theta - r)}{N'},$$

falls V die Translationsgeschwindigkeit beider Medien ist, θ der Winkel, den die in der Einfallsebene liegende Komponente von V mit der Normale bildet; N und N' sind die Brechungsindizes beider Medien. Auch die Formeln für die Amplituden der gebrochenen und reflektierten Wellen weichen etwas von den entsprechenden Formeln für ruhende Medien ab.

Anders verhält es sich mit der Richtung der Strahlen, die, da die Wellenflächen nicht mehr konzentrische, sondern exzentrische Kugeln sind, nicht mit den Wellennormalen zusammenfallen. Für die Richtungen der reflektierten und gebrochenen Strahlen ergeben sich bei der hier benutzten Näherung, die V^2 vernachlässigt, keine Abweichungen von den entsprechenden Richtungen in ruhenden Medien. Wohl aber hat die Bewegung der Medien einen Einfluß auf die Drehung der Polarisationsebene bei der Brechung. Der Verf. wendet seine Formeln auf die Fizeauschen Versuche an, welche eine Abhängigkeit der in Rede stehenden Drehung von der Erdbewegung ergeben. Er findet aus den Formeln eine Änderung der Drehung, die zwar in demselben Sinne erfolgt, wie die von Fizeau beobachtete, aber nur etwa den dritten Teil der beobachteten beträgt. Diese Nichtübereinstimmung schreibt er der Schwierigkeit der Beobachtungen zu.

Schließlich wird die Lichtfortpflanzung in einem bewegten Medium für den Fall betrachtet, daß der Brechungsexponent mit x sich langsam ändert. Auch für diesen Fall besteht für die Strahlen die Gleichung

$$N^2 \sin^2 i = \text{const.},$$

es gilt also das Fermatsche Prinzip. Ferner ist die Richtung der transversalen Verrückungen δ in verschiedenen Punkten desselben Lichtstrahls nicht dieselbe, vielmehr dreht sich δ beim Fortschreiten der Welle. In verschiedenen Punkten einer und derselben Welle kann δ beliebig variieren, nur muß die Änderung von δ kontinuierlich sein.

Wn.

E. R. von Oppolzer. Erdbewegung und Äther. Wien. Ber. **111**, 244-254; Ann. der Phys. (4) 8, 898-907.

Nach Doppler erleidet ein Wellenstrahl, der auf ein rotierendes und der Wellenfortpflanzung fähiges Objekt trifft, außer der gewöhnlichen Brechung noch eine andere Ablenkung. Der Verf. berechnet diese Ablenkung für das von einem Stern ausgehende und auf die Erde gelangende Licht unter der Annahme, daß mit der Erde eine Ätherhülle von der Höhe H rotiert. Er findet dafür, falls a den Erdradius, Ω die Rotationsgeschwindigkeit der Erde, c die Geschwindigkeit des Lichtes, δ die Deklination des Sternes und z seine Zenitdistanz bezeichnet, den Wert:

$$\varrho = \Omega \frac{a}{c} \cos\delta \left[\sqrt{\cos^2 z + 2\frac{H}{a} + \frac{H^2}{a^2}} - \cos z\right],$$

und zwar stellt ϱ eine Korrektion des scheinbaren Ortes in Rektaszension vor. Er berechnet dann für $\delta = 0$ und verschiedene z die zugehörigen Werte von ϱ unter der Annahme $H = 300$ km, resp. $H = 1000$ km. Es ergeben sich bei der ersten Annahme Werte von ϱ bis 0,007, bei der zweiten Annahme bis 0,012 Zeitsekunden. Die vorliegenden Beobachtungen reichen aber nicht aus, um hieraus etwas über den Wert von H, also über die Mitführung des Äthers bei der Erdrotation zu ermitteln; denn die Differenzen, welche bei Bestimmung der Rektaszension desselben Sternes aus oberer und unterer Kulmination auftreten, sind größer, als sie sich nach obiger Formel ergeben würden, und daher persönlichen Auffassungsfehlern zuzuschreiben.

Zum Schluß wird darauf hingewiesen, daß vielleicht die „rotatorische Ablenkung" im Laboratorium verifiziert werden kann, nämlich durch Beobachtung an einer rotierenden, durchsichtigen zylindrischen Scheibe.

Wn.

H. A. Lorentz. La théorie de l'aberration de Stokes dans l'hypothèse d'un éther qui n'a pas partout la même densité. Arch. Néerl. (2) 7, 81-87.

Übersetzung der Abhandlung aus Amst. Ak. Versl. 7, 523-529, 1899. „Bekanntlich muß man nach der von Stokes entwickelten Theorie annehmen, daß der Äther eine rotationslose Bewegung besitzt und an jedem Punkte der Erdoberfläche dieselbe Geschwindigkeit hat wie dieser Planet in seiner jährlichen Bewegung. Ich habe früher bewiesen, daß diese beiden Bedingungen sich widersprechen; aber jener Beweis findet nur auf einen Äther Anwendung, der überall dieselbe Dichte hat. Planck in Berlin hat die Güte gehabt, mir die Bemerkung zu machen, daß man beide Bedingungen befriedigen könne, indem man den Äther als zusammendrückbar annimmt, und zwar als fähig, unter der Einwirkung der Schwere rings um die Erde ganz wie eine Gasmasse verdichtet zu werden. Zwar müßte immer ein Gleiten stattfinden, aber die relative Geschwindigkeit des Äthers inbezug auf die Erde könnte so klein gemacht werden, wie man will. Dazu brauchte man nur eine hinreichende Verdichtung anzunehmen. Folgendes ist die Rechnung, die Planck hierüber angestellt, und deren Veröffentlichung an dieser Stelle er mir gestattet hat."

Die Entscheidung zwischen dieser Theorie und der in den Hertzschen Gleichungen enthaltenen bleibt der Zukunft vorbehalten. Lp.

H. A. Lorentz. De intensiteit der straling in verband met de beweging der aarde. Amst. Ak. Versl. **10**, 804-808.

Die Größe der Energie, die durch eine Fläche senkrecht zur Richtung der Bewegung der Erde absorbiert wird, ist bis auf Größen höherer Ordnung von dieser Bewegung unabhängig. Dieser aus früheren Be-

trachtungen des Verf. sich ergebende Satz zeigt, daß die Fizeausche Annahme nicht richtig ist, nach welcher ein Unterschied bestehen soll zwischen den Intensitäten der Strahlung einer Lichtquelle in der Richtung der Bewegung der Erde und in der entgegengesetzten Richtung. Lp.

H. A. Lorentz. De draaing van het polarisatievlak in lichamen die zich bewegen. Amst. Ak. Versl. **10**, 793-804.

Zurückweisung eines Einwandes von Larmor gegen eine Annahme des Verf. in dem „Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern" (Leiden, 1895) und Nachweis, daß nach Beseitigung eines Fehlers bei Larmor (Aether and matter. Cambridge, 1900) die Resultate des englischen Gelehrten mit denen der zitierten Schrift übereinstimmen. Lp.

W. M. Hicks. On the Michelson-Morley experiment relating to the drift of the aether. Phil. Mag. (6) **3**, 9-42, 256.

Gibt eine genaue Theorie und Diskussion der Fehlerquellen des im Phil. Mag. Dez. 1887 beschriebenen Versuchs über die eventuelle Mitnahme von Äther durch die bewegte Erde. Br.

D. P. A. Verryp. Het interferentie-vlak bij de ringen van Newton en bij eenige andere verschijnselen (Die Interferenzebene bei Newtons Farbenringen und bei anderen Erscheinungen). Arnhem: G. J. Thieme. 80 S. 8°.

Anschließend an die Untersuchungen von Sohncke und Wangerin (Wied. Ann. **12** u. **20**) sucht der Verf. zu bestimmen, wo, das heißt in welcher Ebene, die mittels einer Lichtquelle von endlicher Ausbreitung erzeugten Interferenzstreifen am deutlichsten wahrzunehmen seien. Das Prinzip, welches der Rechnung zugrunde liegt, ist folgendes. Wenn zwei von demselben Punkte P der Lichtquelle ausgehende Strahlen in einem Punkte Q interferieren, denke man sich den Lauf der Lichtstrahlen umgekehrt, also von Q nach P gehend. Man erhält auf diese Weise in P zwei verschiedene Wellenfronten S_1 und S_2, je nachdem das Licht den einen oder den anderen Weg von Q nach P zurückgelegt hat. Es zeigt sich nun, daß nur dann die Interferenzstreifen in Q vollkommen deutlich wahrzunehmen sind, wenn die Fronten S_1 und S_2 in der Umgebung von P zusammenfallen. Aus diesem Prinzipe läßt sich ein Kriterium für die Deutlichkeit der Interferenz in einem gegebenen Punkte Q ableiten. Man hat zwei parallel einfallende Lichtstrahlen aufzufinden, welche Q längs zweier verschiedenen Wege erreichen, und je geringer anfänglich der Abstand dieser parallelen Strahlen war, um so deutlicher

ist die Interferenz in Q wahrnehmbar. Die Resultate der Rechnung sind denjenigen von Sohncke und Wangerin völlig gleich, und dieser Umstand veranlaßt den Verf., den wahren Grund dieser Übereinstimmung näher zu ermitteln. Kl.

J. Macé de Lépinay. Sur les franges des lames minces au voisinage de la réflexion totale. Journ. de Phys. (4) **1**, 491-498.

Allgemeine Überlegungen (ohne analytische Entwicklungen) zur Erklärung der Beobachtungen, insbesondere der Jaminschen überzähligen Streifen. Wn.

J. Macé de Lépinay. Sur une nouvelle méthode pour la mesure optique des épaisseurs. C. R. **134**, 898-900.

J. Macé de Lépinay et H. Buisson. Sur une nouvelle méthode de mesure optique des épaisseurs. C. R. **135**, 283-286.

Beschreibung einer neuen Messungsmethode kleiner Dicken. Die Methode stützt sich auf bekannte Formeln für die Abhängigkeit der Ordnung der Interferenzstreifen von der Dicke der zugehörigen Schicht. Wn.

P. Magini. Sull' uso del reticolo di diffrazione nello studio dello spettro ultravioletto. Rom. Acc. L. Rend. (5) **11**$_2$, 305-311; Nuovo Cimento (5) **4**, 402-407.

Beschreibung einer Beobachtungsmethode, die auf Anwendung eines Rowlandschen Konkavgitters beruht. Dabei werden die bekannten Formeln für die Beugung an einem solchen Gitter benutzt. Wn.

E. Edser and E. Senior. The diffraction of light from a denser to a rarer medium, when the angle of incidence exceeds its critical value. Phil. Mag. (6) **4**, 346-352.

Betrifft eine Aufstellung für die Art der Ätherstörung, die im Falle der totalen Reflexion in der Grenzzone des optisch dünneren Mediums stattfindet, und einzelne Versuche zur Bestätigung der aufgestellten Formeln. Br.

C. Neumann. Bemerkungen über Metallreflexion und totale Reflexion. Leipz. Ber. **54**, 92-100.

Es handelt sich nicht um eine Theorie der im Titel genannten Phänomene, sondern nur um einige geometrische Regeln, die sich direkt aus den Beobachtungen ergeben. Die Regeln beziehen sich einmal auf die relative Phasenverzögerung δ der beiden Komponenten eines beim Einfall linear polarisierten Lichtstrahles. Bei der Metallreflexion wird

$\delta = 0$, wenn der Einfallswinkel $i = 0$ ist, sodann wächst δ mit i derart, daß $\delta = \frac{1}{2}\lambda$ für $i = 90^0$ ist. Bei der totalen Reflexion ist $\delta = 0$ für den Grenzwinkel der totalen Reflexion, nimmt dann mit wachsendem i zunächst zu bis zum Werte $\delta = \frac{1}{8}\lambda$, um nachher wieder abzunehmen; für $i = 90^0$ ist wieder $\delta = 0$.

Eine zweite Regel bezieht sich auf die Lage der wiederhergestellten Polarisationsebene zur ursprünglichen. Für die totale Reflexion ist die erstere Ebene das Spiegelbild der zweiten in bezug auf die zur Einfalls- und Spiegelebene senkrechte Ebene E. Bei der Metallreflexion geht die eine Ebene aus der andern durch zweimalige Reflexion (an E und an der Einfallsebene) hervor.

Auch die betreffenden analytischen Ausdrücke werden angegeben, und schließlich wird die Übereinstimmung der hier dargelegten Vorstellung mit der von F. Neumann gezeigt. Wn.

W. Voigt. Über die absolute Verzögerung der Lichtschwingungen durch Reflexionen. Gött. Nachr. 1902, 259-267.

Es werden die bekannten Formeln für die Phasenverzögerung des Lichtes bei Reflexionen, die unter verschiedenen Umständen stattfinden, zusammengestellt und eingehend diskutiert. Die allgemeinen Reflexionsformeln für die ebene Grenze zwischen zwei absorbierenden Medien sind im allgemeinen zu kompliziert, vereinfachen sich aber für normalen Einfall.

Besonders wichtig ist die Diskussion der Formeln für die Reflexion an der Grenze des leeren Raumes und eines schwach absorbierenden Mediums. Hier wird für variierende Einfallswinkel der Gang der (absoluten und relativen) Phasenverzögerung eingehend erörtert. Geht man dann zum Fall verschwindender Absorption über, so fällt eine Unbestimmtheit fort, die bei direkter Anwendung der Fresnel-Neumannschen Formeln auftritt. Ist nämlich δ_p die Verzögerung für die Schwingungskomponente parallel der Einfallsebene, δ_s die Phasenverzögerung für die Schwingungskomponente senkrecht zur Einfallsebene, so ergibt der erwähnte Grenzübergang, daß für alle Einfallswinkel δ_p den Wert π hat, während δ_s bei dem Polarisationswinkel um π springt. — Auch die betreffenden Formeln für die totale und die Metallreflexion werden diskutiert. Endlich wird für die wichtigsten Fälle der Verlauf der Verzögerung graphisch dargestellt. Wn.

J. Boussinesq. Sur la dispersion anomale, en corrélation avec le pouvoir absorbant des corps pour les radiations d'une période déterminée. C. R. 134, 1389-1394.

Wie schon viele andere Autoren vor ihm, zieht der Verf. zur Erklärung der anomalen Dispersion ein Mitschwingen der Körperatome mit dem Äther heran; und zwar macht er für die Bewegung δ' eines Körper-

moleküls M, im Falle dasselbe Schwingungen von der Periode τ_0 absorbiert, den Ansatz:

$$(1) \qquad M\frac{d^2\delta'}{dt^2} + M\frac{4\pi^2}{\tau_0^2}\delta' = A\varrho\varpi'\frac{d^2\delta}{dt^2}.$$

Darin bezeichnet δ die Verrückung des Äthers, ϱ dessen Dichtigkeit, ϖ' das Volumen von M, A eine Konstante. Aus (1) folgt, wenn Äther und Molekül eine Schwingung von der Periode τ vollführen, für das Verhältnis der Amplituden der Wert:

$$(2) \qquad \frac{\delta'}{\delta} = \frac{A\varrho\varpi'}{M}\,\frac{\tau_0^2}{\tau_0^2 - \tau^2}.$$

Zugleich ist $\delta = 0$ für $\tau = \tau_0$, d. h. es findet Absorption statt. Für die Bewegung der Ätherteilchen wird angenommen, daß dieselbe bedingt ist 1. durch die elastischen Wirkungen der übrigen Ätherteilchen, 2. durch den Widerstand der in dem Äther enthaltenen Körpermoleküle, der proportional der relativen Beschleunigung gesetzt wird. Dabei wird für δ' der aus (2) folgende Wert genommen. Aus der so für δ erhaltenen Differentialgleichung folgt für den Brechungsindex, wenn man von der gewöhnlichen Dispersion abstrahiert:

$$(3) \qquad n^2 = n_0^2\left[1 + \frac{\alpha'^2}{1+\alpha}\,\frac{\varrho}{\varrho'}\,\frac{\tau_0^2}{\tau^2 - \tau_0^2}\right],$$

wo α und α' gewisse dem Körper eigentümliche Konstanten sind, ϱ' die Dichtigkeit der im Äther enthaltenen ponderablen Moleküle. Trotz der Kleinheit von $\frac{\varrho}{\varrho'}$ kann der zweite Summand recht beträchtliche Werte annehmen, wenn τ nahe gleich τ_0 ist. Wn.

M. Planck. Zur elektromagnetischen Theorie der Dispersion in isotropen Nichtleitern. Berl. Ber. 1902, 470-494.

Nach einem kurzen Überblick über die bisherige Entwicklung der verschiedenen Dispersionstheorien stellt der Verf. als Ziel seiner Arbeit hin, auf Grund der bekannten molekularen Vorstellungen nicht eine möglichst umfassende, sondern eine möglichst einfache Theorie aufzustellen und demgemäß nicht möglichst viele, sondern möglichst wenige unabhängige Konstanten in dieselbe einzuführen. Seine Grundvorstellungen sind: Alle Moleküle des Mediums werden als ruhend und ihre Dimensionen als verschwindend klein gegen ihre Entfernungen angenommen. Von allen Wechselwirkungen zwischen ihnen wird abgesehen, außer von denjenigen, welche durch die von ihnen emittierten, durch den reinen Äther von einem Molekül zum andern sich fortpflanzenden elektromagnetischen Wellen bedingt werden. Die Moleküle selbst sind als Resonatoren von bestimmter Eigenperiode gedacht, in denen beliebig

gerichtete elektrische Schwingungen um eine stabile Gleichgewichtslage stattfinden können. Durchgeführt wird die Rechnung nur für eine einzige Molekülgattung und eine einzige Eigenperiode.

Den Hauptunterschied der hier entwickelten Theorie gegen sämtliche bisher aufgestellte Theorien bildet die Behandlung der Dämpfung. Als Ursache der Dämpfung wird nämlich lediglich die Energieabgabe durch Strahlung angesehen, welche mit jeder Schwingung, die Wellen in das umgebende Medium emittiert, untrennbar verbunden ist und in vollkommen bestimmter Weise von der Amplitude und der Frequenz der Schwingungen abhängt. Die Einführung dieser Art Dämpfung erfordert gar keine neue Konstante; und es werden somit sämtliche Erscheinungen der Dispersion und der Absorption eines Mediums auf drei charakteristische Konstanten zurückgeführt: Die Anzahl N der Moleküle in der Volumeneinheit, die Frequenz n_0 der Eigenperiode eines Moleküls und das logarithmische Dekrement σ seiner Schwingung.

Die Hauptaufgabe der Theorie ist, die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes für ein Medium aufzustellen, das aus Äther und in demselben eingebetteten Molekülen von der angenommenen Beschaffenheit besteht. Es wird gezeigt, daß unter gewissen Annahmen die gesuchten Gleichungen sich auf dieselbe Form bringen lassen wie die für ein homogenes Medium. Die hauptsächlichste dieser Annahmen ist, daß die Betrachtung auf solche Vorgänge beschränkt wird, deren Veränderlichkeit klein ist gegenüber der Dichtigkeit der Verteilung der Resonatoren, oder für periodische Wellen, deren Wellenlänge groß ist gegen den Abstand zweier benachbarten Resonatoren. Diese Beschränkung muß übrigens in jeder Dispersionstheorie eingeführt werden. Ferner muß man, um geordnete Vorgänge zu erhalten, nicht die Feldgrößen selbst, sondern gewisse Mittelwerte derselben einführen.

Zu den unter diesen Voraussetzungen abgeleiteten allgemeinen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes kommt noch eine Gleichung, welche die Abhängigkeit des elektrischen Momentes $\mathfrak{f}$ irgend eines der Moleküle von der dasselbe anregenden elektrischen Kraft ausdrückt. Bei Berechnung dieser Kraft kann man alle Moleküle, welche innerhalb einer gewissen um das betrachtete Molekül beschriebenen Kugelfläche liegen, außer Betracht lassen, da ihre Wirkungen sich gegenseitig kompensieren. Daher gelten für jedes Molekül die Gesetze für die Schwingungen eines isolierten Resonators; und zwar genügt $\mathfrak{f}$ der Gleichung:

$$(19) \qquad \mathfrak{f}'' + \frac{\sigma n_0}{\pi}\mathfrak{f}' + \left(n_0^2 - \frac{2\sigma N c^3}{n_0}\right)\mathfrak{f} = \frac{3\sigma c^3}{2\pi n_0}\mathfrak{E},$$

wo $\mathfrak{E}$ die elektrische Kraft des Feldes bezeichnet, c die Lichtgeschwindigkeit im freien Äther; die Ableitungen von $\mathfrak{f}$ sind nach der Zeit genommen. Dabei ist der Koeffizient von $\mathfrak{f}$ stets positiv, d. h. es ist

$$(20) \qquad \frac{2\sigma N c^3}{n_0^3} = g < 1.$$

Beschränkt man die Betrachtung auf den Fall, daß in dem bezüglich der Koordinaten y, z unbegrenzten Medium ebene Wellen, die in der xz-Ebene polarisiert sind, in der Richtung der positiven x-Achse fortschreiten, so reduzieren sich die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{f}$ auf ihre Komponenten $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{f}_y$, und die allgemeinen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes geben, nach Elimination der magnetischen Kraft, für $\mathfrak{E}_y$ die Gleichung:

$$(22) \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2} + 4\pi N \frac{\partial^2 \mathfrak{f}_y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2}.$$

Für ebene, einfach periodische Wellen ist ferner zu setzen:

$$(23) \qquad \mathfrak{E}_y = A e^{n\left(it - \frac{p}{c}x\right)}, \quad \mathfrak{f}_y = a e^{n\left(it - \frac{p}{c}x\right)},$$

und darin ist die Schwingungsfrequenz n als reell, die Konstanten A, a, p dagegen sind als komplex anzunehmen. Dann gibt der imaginäre Teil von $p = \varkappa + i\nu$ den Brechungsexponenten ν, der reelle Teil den Extinktionskoeffizienten $\varkappa$ der Wellenamplitude. Die Einsetzung der Ausdrücke (23) in (19) und (22) gibt nach Elimination von A und a eine Gleichung für p^2, und aus dieser folgen für $\varkappa$ und ν die Werte:

$$\nu^2 = \frac{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha)^2 + \beta^2} + (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha)}{2(\alpha^2 + \beta^2)},$$

$$\varkappa^2 = \frac{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha)^2 + \beta^2} - (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha)}{2(\alpha^2 + \beta^2)},$$

worin

$$(24) \qquad \alpha = \frac{n^2 - (1-g) n_0^2}{3 g n_0^2}, \quad \beta = \frac{\sigma n}{3\pi g n_0}$$

ist; g hat dieselbe Bedeutung wie in (20).

Aus diesen Formeln wird eine Reihe von Folgerungen gezogen. σ und daher β sind im allgemeinen kleine Zahlen; wenn also nicht α nahe $= 0$ ist, was für den Wert $n_1 = n_0 \sqrt{1-g}$ von n eintritt, oder nahe gleich 1, was $n = n_2 = n_0 \sqrt{1+2g}$ erfordert, so lassen sich ν^2 und $\varkappa^2$ in sehr schnell konvergierende, nach Potenzen von β fortschreitende Reihen entwickeln. Bleibt man schon bei den niedrigsten Potenzen stehen, so erhält man für $n < n_1$ $(\alpha < 0)$ und für $n > n_2$ $(\alpha > 1)$ die Näherungsformeln:

$$(25) \qquad \nu^2 = 1 - \frac{1}{\alpha}, \quad \varkappa^2 = \frac{\beta^2}{4\alpha^2(\alpha - 1)}.$$

Diese Näherungsformeln gelten für das Gebiet der normalen Dispersion. Die Formel für ν^2 ist mit der Lorentzschen Dispersionsformel identisch, nur daß g hier eine andre Bedeutung hat als bei Lorentz. Speziell wird für $n = 0$ (unendlich lange Wellen):

$$\nu^2 = \frac{1+2g}{1-g}, \quad \varkappa = 0.$$

Aus der Formel für $\varkappa^2$ (25) läßt sich ferner ableiten, welche Dicke eine Schicht des Mediums haben muß, um die Amplitude einer Welle durch Absorption um einen bestimmten Bruchteil ihres Wertes zu vermindern. Wenn $\varkappa$ auch sehr klein ist, so kann die Absorption doch bei längeren Schichten, z. B. bei der Sonnenstrahlung durch die Atmosphäre, von Bedeutung werden.

Das Gebiet $n_1 < n < n_2$ $(0 < \alpha < 1)$ ist das der anomalen Dispersion. Hier treten an Stelle der Gleichungen (25) die folgenden:

$$(26) \qquad \nu^2 = \frac{\beta^2}{4\alpha^3(1-\alpha)}, \quad \varkappa^2 = \frac{1}{\alpha} - 1.$$

In dieses Gebiet gehört $n = n_0$, ferner die kleinen Spektralbezirke, welche die singulären Stellen n_1 und n_2 umschließen. — Hier existiert ein „Streifen der metallischen Absorption"; als solcher wird der Bezirk bezeichnet, für den $\varkappa > 1$ ist. Als Grenzen für denselben ergeben sich die Werte n', n'', für die

$$n'^2 = n_0^2(1-g), \quad n''^2 = n_0^2(1+\tfrac{1}{2}g)$$

ist, während die zugehörigen Wellenlängen

$$\lambda'^2 = \frac{\lambda_0^2}{1-g}, \quad \lambda''^2 = \frac{\lambda_0^2}{1+\frac{1}{2}g}$$

sind. Der Streifen metallischer Absorption schließt die Wellenlänge λ_0 der Eigenschwingung der Moleküle in sich ein; doch liegt diese nicht in der Mitte des Streifens, sondern weiter nach der Seite der kürzeren Wellen hin. Wn.

D. A. Goldhammer. Die gegenwärtigen Anschauungen über die Magnetisierung des Lichtes. J. russ. phys. chem. Ges. **34**, 255-3.. (Russisch).

In der elektromagnetischen Lichttheorie von Maxwell gehen die physikalischen Konstanten des Mediums nur in die Beziehung zwischen der Stromdichte (u, v, w) und der elektrischen Kraft (P, Q, R) ein. Im Äther nämlich ist z. B. $4\pi u = \frac{\partial P}{\partial t}$ usw., in einem gewöhnlichen isotropen Körper aber $4\pi u = D\frac{\partial P}{\partial t} + 4\pi\frac{P}{k}$ usw., wo D die Dielektrizitätskonstante, k den spezifischen Widerstand bezeichnet; in einem äolotropen Medium würden D, k von der Richtung abhängen. Dem entsprechend nimmt der Verf. für einen homogen in der Richtung z magnetisierten isotropen Körper die Beziehung:

$$(1)\quad \begin{cases} 4\pi u = D_x \dfrac{\partial P}{\partial t} + \dfrac{4\pi P}{k_x} + \left(\sigma Q + \dfrac{4\pi}{\varrho}\dfrac{\partial Q}{\partial t}\right), \\ 4\pi v = D_x \dfrac{\partial Q}{\partial t} + \dfrac{4\pi Q}{k_x} - \left(\sigma Q + \dfrac{4\pi}{\varrho}\dfrac{\partial P}{\partial t}\right), \\ 4\pi w = D_z \dfrac{\partial R}{\partial t} + \dfrac{4\pi R}{k_z}, \end{cases}$$

wo D_x, D_z, k_x, k_z die durch die Magnetisierung geänderten D, k sind, σ und ϱ aber zwei magnetooptische Konstanten bedeuten. Die Beziehung (1) gilt für jeden monochromatischen Lichtstrahl von der Periode T; die Konstanten sind Funktionen von T, welche die Theorie der Dispersion zu bestimmen hat.

Die Gleichung (1) nebst den anderen, ungeändert bleibenden, Gleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie geben für alle magnetooptischen Erscheinungen in Eisen, Nickel und Kobalt eine ganz richtige und vollkommene Beschreibung bis in die kleinsten Einzelheiten. Sehr kleine Unterschiede zwischen der Theorie und den Beobachtungen treten nur dann ein, wenn man $D_x = D_z$, $k_x = k_z$ setzt, also von der magnetischen Doppelbrechung in diesen Metallen absieht, die aber bisher der Beobachtung entging. Die Theorie sagt also diese Doppelbrechung voraus. Bedeuten N, K den Brechungs- und den Absorptionskoeffizienten des Mediums vor der Magnetisierung, so hat man bekanntlich

$$N^2 - k^2 = D, \quad 2NKg = \frac{4\pi}{k}, \quad q = \frac{2\pi}{T}.$$

Wird jetzt der Körper magnetisiert, so können nach der Theorie in der Richtung der Magnetisierung (z-Achse) sich nur zirkularpolarisierte (rechts und links drehende) Strahlen fortpflanzen, indem für jeden Strahl N, K verschieden werden, und zwar bekommt man für beide Strahlen:

$$N_r^2 - K_r^2 = D_x + \frac{\sigma}{q}, \quad 2N_r K_r q = 4\pi\left(\frac{1}{k_x} - \frac{q}{\varrho}\right),$$

$$N_l^2 - K_l^2 = D_x - \frac{\sigma}{q}, \quad 2N_l K_l q = 4\pi\left(\frac{1}{k_x} + \frac{q}{\varrho}\right).$$

Für Gase sind N_r, N_l, N nahezu gleich 1; K^2 ist gegen N^2 sehr klein; das Maximum der Absorption wird vor der Magnetisierung durch die Bedingung $Kq = \text{Max.}$ gegeben, nach der Magnetisierung aber durch die Gleichungen $K_r q = \text{Max.}$, $K_l q = \text{Max.}$ Man hat darin die Erklärung des Zeemanschen Phänomens durch Absorption, des sogenannten axialen Doublets. Die Perioden beider absorbierten Strahlen fallen verschieden aus, und zwar liegen sie in erster Annäherung symmetrisch gegen die ursprüngliche Periode, also $T_r = T + \alpha$, $T_l = T - \alpha$. Der Magnetisierungseffekt äußert sich daher in der Verdoppelung der Absorptionslinien und in der Änderung des Polarisationszustandes.

Die magnetische Drehung der Polarisationsebene in Gasen φ ergibt sich proportional zu $N_r - N_l$; entnimmt man daher die Abhängigkeit von N von der Wellenlänge aus irgend einer Dispersionstheorie, so läßt sich dann auch φ als Funktion der Wellenlänge z. B. graphisch darstellen. In dieser Weise bekommt man eine vollkommene Übereinstimmung der Theorie mit den Versuchen von Macaluso und Corbino, die äußerst starke φ in der Umgebung von Absorptionslinien gefunden haben.

Geht der Lichtstrahl äquatorial, d. h. senkrecht zur z-Achse, so gibt die Theorie

$$N_x = N_r N_l, \quad 2 K_x q = K_r q + K_l q.$$

Man erhält somit eine Erklärung für das sogenannte Triplet von Zeeman und für die von Voigt entdeckte magnetische Doppelbrechung in Gasen. Der Gangunterschied der beiden Strahlen δ ist proportional zu

$$N_r + N_l - 2N.$$

Analog wie früher läßt sich auch jetzt die Abhängigkeit von δ von der Wellenlänge mit Hülfe einer beliebigen Dispersionstheorie ableiten. Als solche benutzt man am besten die Elektronentheorie. Ghr.

L. H. Siertsema. Berekening van e/m uit de magnetische draaing van het polarisatievlak, voor stoffen zonder absorptieband in het zichtbare spectrum. Amst. Ak. Versl. **10**, 499-502.

Nach Fitzgerald wird die magnetische Drehung erklärt durch Annahme einer Verschiebung der Dispersionskurve $n = f(\lambda)$. Durch Hinzunahme der elementaren, die Größe dieser Verschiebung bestimmenden Theorie des Zeeman-Effekts ergibt sich für die magnetische Drehungskonstante:

$$\varrho = \frac{e}{m} \cdot \frac{\lambda}{2V} \cdot \frac{dn}{d\lambda}.$$

Hieraus kann man mit Hülfe der Dispersionsbestimmungen und magnetischen Drehungskonstanten e/m berechnen. Lp.

A. Korn u. K. Stoeckl. Studien zur Theorie der Lichterscheinungen. Ann. der Phys. (4) **8**, 312-325; **9**, 1138-1148.

Bekanntlich bedürfen die Grundgleichungen der Optik, auch die der elektromagnetischen Lichttheorie, zur Erklärung der magneto-optischen Erscheinungen sowie der Dispersion und Aberration einer Ergänzung. Diesen Ergänzungsgliedern wird in der vorliegenden Arbeit eine eigenartige Deutung gegeben, indem jedes magnetische Teilchen aufgefaßt wird als schnell um seine (magnetische) Achse rotierend mit einer Geschwindigkeit, die dem magnetischen Moment proportional ist. (Es ist

dies dieselbe Anschauung, mittels deren der eine Verf. den Erdmagnetismus mit der Erdrotation in Zusammenhang gebracht hat, vgl. F. d. M. **29**, 753, 1898.)

In dem ersten der beiden Aufsätze wird das Zeemansche Phänomen erklärt. Dazu denken die Verf. in dem dielektrischen Medium, durch welches sich die Lichtwellen fortpflanzen, leitende Teilchen eingelagert, die zugleich Rotationen ausführen. Die Rotationsachsen sind im allgemeinen ungeordnet, werden aber, wenn ein magnetisches Feld vorhanden ist, gerichtet. In einem solchen Medium gelten, wie sich durch einfache Überlegungen ergibt, für den Vektor X, Y, Z der elektrischen Kraft Gleichungen, deren erste lautet:

$$(1) \qquad \frac{d^2X}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 X + \varkappa\left\{\gamma\frac{dY}{dt} - \beta\frac{dZ}{dt}\right\}.$$

Das zweite Glied rechts stellt den Einfluß der Rotation der Teilchen dar; α, β, γ sind proportional den magnetischen Komponenten des Feldes, τ ist die Schwingungsdauer der Eigenschwingung der Teilchen ohne Rotation.

Wendet man die Gleichungen (1) auf ebene Wellen an, die sich in der Richtung der z-Achse fortpflanzen (so daß $Z = 0$), und nimmt zugleich das magnetische Feld parallel der z-Achse (also $\alpha = \beta = 0$), so erhält man zwei Wellen mit den Schwingungsdauern

$$T = \tau\left(1 \pm \frac{\varkappa}{4\pi}\gamma\tau\right).$$

Es müssen sich also an Stelle der ursprünglichen, der Schwingungsdauer τ entsprechenden Spektrallinie zwei zur ursprünglichen symmetrische Linien (T_1 und T_2 entsprechend) ergeben, von denen die eine linke, die andere rechte Zirkularpolarisation aufweist (Zeemans Doublets). Ebenso ergeben sich für $\beta = \gamma = 0$ aus (1) die Zeemanschen Triplets, allerdings unter Hinzunahme einer longitudinalen Schwingungskomponente. Zur Erklärung der von Cornu beobachteten Quadruplets muß man noch eine positive oder negative Ladung der Teilchen hinzunehmen.

Im zweiten Aufsatz, der die Drehung der Polarisationsebene im magnetischen Felde behandelt, werden zunächst die Gleichungen (1) durch die Annahme einer Einwirkung der verschiedenen Teilchen auf einander modifiziert. Infolge dieser Einwirkung tritt auf der rechten Seite von (1) noch das Glied $k\frac{dX_a}{dt}$ hinzu, und zwar stellt X_a die x-Komponente der elektrischen Kraft an der Stelle des betrachteten Teilchens dar, wenn man dasselbe durch den Äther ersetzt. Die so modifizierten Gleichungen (1) werden weiter in das Gewand der hydrodynamischen Theorie der elektrischen Erscheinungen gekleidet (betreffs dieser Theorie vgl. F. d. M. **29**, 666, 1898), wodurch jeder Begriff eine rein mechanische Bedeutung erhält. Ferner wird noch eine zweite Formelgruppe hinzugenommen, die für ein aus Äther und leitenden Teilchen zusammengesetztes Dielektrikum

gilt, und es wird dann gezeigt, daß beide Formelgruppen mit den von Voigt (s. F. d. M. **30**, 754, 1899) aufgestellten Gleichungen übereinstimmen. Letztere aber stellen die Erfahrung bezüglich der magnetischen Drehung der Polarisationsebene sehr gut dar. Wn.

W. Voigt. Neue Beobachtungen über magneto-optische Erscheinungen in Absorptionsstreifen. Gött. Nachr. 1902, 305-311.

Theoretische Erklärung einer neuen Erscheinung, die Zeeman in den Absorptionsstreifen einer in einem Magnetfeld befindlichen Natriumflamme, deren Licht durch ein Quarzkeilsystem gegangen, parallel zu den Kraftlinien beobachtet hat. Die Erscheinung besteht in einem System tiefdunkler geradliniger, schiefliegender Interferenzstreifen in den Absorptionsstreifen D_1 und D_2; in D_2 zeigen sich außerdem zwischen den Interferenzstreifen tiefdunkle Querverbindungen von entgegengesetzter Neigung.

Zur Erklärung der Erscheinung wird die Intensität des durch die verschiedenen Teile des Zeemanschen Apparats gegangenen Lichts berechnet und daraus durch geometrische Hülfsmittel das Wesentliche über den Verlauf der Interferenzlinien erschlossen. Wn.

W. Voigt. Über einige neuere Beobachtungen von magneto-optischen Wirkungen. Ann. der Phys. (4) 8, 872-889.

Der erste Teil des Aufsatzes bezieht sich auf neue Beobachtungen von Corbino über magnetische Drehung der Polarisationsebene in den Absorptionsstreifen des Natriumdampfes. Der Verf. sucht nachzuweisen, daß diese Beobachtungen ebenso wie analoge neuere von Zeeman sich zwanglos der Theorie fügen.

Der zweite Teil betrifft Versuche von Majorana mit magnetisierbaren Flüssigkeiten. Der Verf. deutet eine Theorie dieser Versuche an. Er geht von einem ähnlichen, nur etwas modifizierten Ansatz aus wie in einer früheren Arbeit (vgl. F. d. M. **30**, 754, 757, 1899), teilt ohne Ableitung einige sich daraus ergebende Formeln für die Brechungs- und Absorptionsindizes eines solchen Mediums mit und zieht aus diesen Formeln Folgerungen, die auch mit späteren Beobachtungen von Majorana übereinstimmen. Wn.

J. Grünwald. Über die Ausbreitung elastischer und elektromagnetischer Wellen in einachsig-kristallinischen Medien. Wien. Ber. **111**, 411-485.

Während man sich in der Optik in der Regel darauf beschränkt, die Gesetze abzuleiten, nach denen sich ebene Wellen in irgend einem Medium fortpflanzen, wird hier die Ausbreitung beliebiger Wellen in

einachsigen kristallinischen Medien untersucht, und zwar sowohl unter Zugrundelegung der elastischen, als der elektromagnetischen Lichttheorie. Von den beiden sich darbietenden Fragen 1. nach der Ausbreitung eines vorgeschriebenen Anfangszustandes bei Abwesenheit äußerer störender Einflüsse, 2. nach der Wellenbewegung, welche in einem anfänglich ruhenden Medium durch gegebene äußere Einwirkungen hervorgerufen werden, wird zunächst die zweite für ein elastisches Medium beantwortet. Für die elastischen Verrückungen u, v, w in einem solchen gelten, falls die Achse des einachsigen Mediums parallel z ist, die Gleichungen:

$$
(\mathrm{I})\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \Delta u + (a^2 - c^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + (g^2 - a^2)\frac{\partial \theta}{\partial x} + X,\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \Delta v - (a^2 - c^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + (g^2 - a^2)\frac{\partial \theta}{\partial y} + Y,\\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a^2 \Delta w + (g^2 - a^2)\frac{\partial \theta}{\partial z} + Z,
\end{aligned}\right.
$$

und zwar bezeichnet θ die räumliche Dilatation, X, Y, Z sind die Komponenten der störenden äußeren Kraft. Von ihnen wird angenommen, daß sie eindeutige Funktionen von x, y, z, t sind, die für $t < \tau_0$ verschwinden, die ferner nebst ihren ersten Ableitungen endlich, stetig und differenzierbar sind, während ihre zweiten Ableitungen endlich und stetig sind.

Besonders einfach gestaltet sich die Untersuchung, wenn man in (I) die beiden Konstanten g und a als gleich annimmt, wodurch die räumliche Dilatation von selbst fortfällt. In diesem Falle ist das allgemeine Integral der dritten Gleichung bekannt:

$$
w = \frac{1}{4\pi a^2}\iiint Z\left(x', y', z', t - \frac{r}{a}\right)\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r},
$$

$$
r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,
$$

wobei die Integration über den ganzen Raum auszudehnen ist. Ähnliche Lösungen werden nun für die beiden ersten Gleichungen gesucht. Eine längere Rechnung, auf deren Einzelheiten hier nicht eingegangen werden kann, führt zu dem Resultate:

$$
u(x, y, z, t) = \iiint f_1\, dx'\,dy'\,dz', \quad v(x, y, z, t) = \iiint f_2\, dx'\,dy'\,dz',
$$

wo

$$
4\pi f_1 = \frac{1}{c^2 \varrho}\left[X - \frac{X(x'-x) + Y(y'-y)}{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}(x'-x)\right]^{x', y', z', t - \frac{\varrho}{c}}
$$

$$
+ \frac{1}{a^2 r}\left[\frac{X(x'-x) + Y(y'-y)}{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}(x'-x)\right]^{x', y', z', t - \frac{r}{a}}
$$

$$+\frac{1}{a}\int_{t'=t-\frac{\varrho}{a}}^{t'=t-\frac{r}{a}}\left[X|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+Y|'\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y}\right]dt',$$

ist und ein ähnlicher Ausdruck für f_2 gilt. Darin ist

$$\varrho^2=\frac{a^2}{c^2}(x'-x)^2+\frac{a^2}{c^2}(y'-y)^2+(z'-z)^2,$$

$$\chi=\log\frac{\sqrt{a^2(t-t')^2-(z-z')^2}}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}}.$$

$X|'$ bedeutet, daß in dem Ausdruck für X x, y, z, t durch x', y', z', t' zu ersetzen sind, während in den beiden ersten Gliedern der rechten Seite von f_1 zwar auch x, y, z durch x', y', z', aber t durch $t-\frac{\varrho}{a}$, resp. durch $t-\frac{r}{a}$ zu ersetzen sind.

Dem ersten Teile von f_1 und f_2 entspricht eine Elementarwelle, die vom Erregungszentrum x', y', z' auf den konzentrischen Rotationsellipsoiden $\varrho_1 = a(t-t')$ fortschreitet, die extraordinäre Welle; die zugehörigen elastischen Verschiebungen erfolgen senkrecht zum Hauptschnitt, d. h. zu der durch die Punkte x, y, z; x', y', z' parallel der kristallographischen Hauptachse gelegten Ebene. Dem zweiten Teile von f_1 und f_2 entspricht die ordinäre Welle, die auf konzentrischen Kugeln $r = a(t-t')$ fortschreitet; in ihr erfolgen die elastischen Verschiebungen im Hauptschnitt. Der Ausdruck für w gehört zu dieser ordinären Welle. Die dem dritten Teile von f_1 und f_2 entsprechende intermediäre oder Zwischenwelle breitet sich nicht in Wellenflächen aus; sie erfüllt vielmehr in jedem Augenblicke t den ganzen zwischen der extraordinären

$$[\varrho = a(t-t')]$$

und der ordinären $[r = a(t-t')]$ Wellenfläche enthaltenen Raumteil und schreitet so mit den genannten Wellen fort. In sehr großer Entfernung von den durch die Einwirkung äußerer Kräfte gestörten Teilen des Mediums sind übrigens die Zwischenwellen im Vergleich zu den beiden andern von verschwindend kleiner Intensität. Bei Wellenbewegungen, die den optischen ähnlich sind, wird man also von den Zwischenwellen ganz absehen können. Immerhin liegt in ihrem Auftreten in der allgemeinen Lösung ein bemerkenswertes Resultat.

Die vorstehenden Ausdrücke für u, v, w lassen sich nach Einführung von Polarkoordinaten, deren Pol der Punkt x, y, z ist, umformen. So erhält man für w den Ausdruck:

$$w=\int_{t'=-\infty}^{t'=t} w_z[Z]_{t'}\,dt',$$

wo

$$w_z[Z]_{t'} = \frac{1}{4\pi a^2} \iint Z|' \frac{dS}{t-t'}$$

ist, und zwar ist in dem letzten Ausdruck die Integration über die Oberfläche S einer Kugel vom Radius $r = a(t - t')$ auszudehnen. Ähnliche Umformungen werden auch für u, v hergeleitet. Der Ausdruck $w_z[Z]_{t'}$ hat eine einfache Bedeutung: es ist die nach der z-Achse genommene Komponente jener elastischen Verschiebung, welche in dem anfänglich als ruhend gedachten Medium durch die Wirkung einer Stoßkraft Z, welche im Zeitintervall $(t' - dt', t')$ angreift, im Punkte x, y, z zur Zeit $t\ (> t')$ hervorgerufen wird. Diese Deutung von $w_z[Z]_{t'}$ und den analogen in u, v auftretenden Ausdrücken ermöglicht nun sofort auch eine Lösung der ersten der obigen Aufgaben. Dabei wird w durch ein Doppelintegral dargestellt, u, v durch Summen aus je zwei Doppelintegralen und einem dreifachen Integral. Die Lösung für w lautet, wenn die Anfangsbedingungen sind: $w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial t} = \mathfrak{w}_0(x, y, z)$ zur Zeit $t = t_0$:

$$w = \frac{1}{4\pi a^2 (t - t_0)} \iint \mathfrak{w}_0|' dS,$$

wobei die Integration wieder über die Kugelfläche S mit dem Radius $r = a(t - t_0)$ zu erstrecken ist. Ist zur Zeit $t = 0$ nicht $w = 0$, so kommt rechts noch ein Glied dazu.

Die für den Spezialfall $g = a$ erhaltenen Resultate lassen sich sofort auf den Fall $g \gtrless a$ übertragen, wenn man nur rein transversale Wellen betrachtet, also $\theta = 0$ nimmt. Dazu ist erforderlich:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Dieselben Aufgaben, welche im ersten Teil für ein elastisches Medium gelöst sind, werden im zweiten Teil für elektromagnetische Wellen in einachsigen Medien behandelt, d. h. in Medien, in denen zwei von den drei Dielektrizitätskonstanten gleich sind. Für die magnetischen Kraftkomponenten folgen dann aus den Maxwell-Hertzschen Gleichungen sofort Gleichungen von der Form (1), darin $g = a$ und $X = Y = Z = 0$ gesetzt; und aus den magnetischen Kraftkomponenten ergeben sich in bekannter Weise die elektrischen. Die vorher für ein elastisches Medium abgeleiteten Lösungen der ersten Aufgabe (Ausbreitung eines gegebenen Anfangszustandes ohne äußere störende Einflüsse) lassen sich daher sofort auf die elektromagnetischen Wellen übertragen. Auch hier treten also die drei oben besprochenen Wellen auf. Dabei hat die magnetische Kraft dieselbe Richtung wie vorher die elastische Verrückung, während die elektrische Kraft senkrecht darauf steht.

Was endlich die zweite Aufgabe für die elektromagnetischen Wellen betrifft, so muß man hier von vorn herein die Maxwell-Hertzschen Gleichungen durch Zusatzglieder modifizieren, welche den äußeren Störungen

entsprechen und als Strömungen aufzufassen sind. Auch hier gelingt die Zurückführung der Gleichungen auf dieselbe Form, die schon bei den elastischen Medien auftrat, und es ergibt sich folgendes Resultat: Das elektromagnetische Feld läßt sich aus einem Vektorpotential, welches den Strömungen entspricht, und aus einem skalaren Potential, welches den durch diese Strömungen erzeugten wahren Ladungen entspricht, in ganz derselben Weise ableiten, wie das in der alten Fernwirkungstheorie geschieht. Das Resultat unterscheidet sich aber dadurch wesentlich von den Ergebnissen der alten Theorie, daß auch der zeitlichen Ausbreitung der elektromagnetischen Zustände Rechnung getragen wird; und zwar pflanzt sich das Vektorpotential von den verschiedenen Erregungsstellen in Wellen fort, welche aus ordinären, extraordinären und intermediären Wellenteilen bestehen, während das skalare Potential von den Stellen, an denen wahre Ladungen vorhanden sind, lediglich in extraordinären Wellen fortschreitet. Wn.

G. Quesneville. De la double réfraction elliptique et de la tétraréfringence du quartz dans le voisinage de l'axe. Paris: Gauthier-Villars. XIV u. 361 S. (1898).

J. Walker. The differential equations of Fresnel's polarisation-vector with an extension to the case of active media. Lond. Roy. Soc. Proc. **70**, 37-43.

Ein andrer Ansatz für die Fresnelschen Gleichungen über die Fortpflanzung des Lichtes in optisch einachsigen Kristallen stellt diese dar durch drei Vektoren, von denen einer der Polarisationsvektor ist. Die Formeln zeigen eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit denen der elektromagnetischen Lichttheorie. Die Anwendung auf optisch zweiachsige Medien ist nicht ohne weiteres möglich, gelingt aber näherungsweise durch Einführung eines zweiten Polarisationsvektors. Br.

T. J. I'A. Bromwich. Note on the wave surface of a dynamical medium aeolotropic in all respects. Lond. M. S. Proc. **34**, 307-321.

Der Aufsatz knüpft an eine Arbeit von Macdonald an, über die in F. d. M. **31**, 795, 1900 berichtet ist. Wie dort, wird auch hier für das Potential V der elastischen Kräfte eine homogene Funktion zweiten Grades der sechs Komponenten der relativen Verschiebung und der drei Komponenten der Elementarrotation gesetzt, d. h. es wird angenommen, daß auch eine bloße Rotation eines Elements elastische Kräfte hervorruft. Dieser Ansatz für V kommt auf dasselbe hinaus, als wenn für V eine homogene Funktion zweiter Ordnung der neun Größen

$$w_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x},\quad w_2 = \frac{\partial u_1}{\partial y}, \dots, w_9 = \frac{\partial u_3}{\partial z}$$

gesetzt wird:

$$(1) \qquad 2V = \Sigma c_{rs} w_r w_s \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, 9;\ c_{rs} = c_{sr}),$$

wo u_1, u_2, u_3 die Komponenten der Verrückung eines Teilchens sind. Ferner wird hier der Ansatz dahin verallgemeinert, daß für die kinetische Energie T der Volumeneinheit eine homogene Funktion zweiten Grades der drei Größen

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = u_1', \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = u_2', \quad \frac{\partial u_3}{\partial t} = u_3'$$

angenommen wird:

$$(2) \qquad 2T = \Sigma a_{rs} u_r' u_s' \qquad (r, s = 1, 2, 3),$$

deren Koeffizienten $a_{rs} = a_{sr}$ konstant sind. Die elastischen Gleichungen nehmen dann die Form an:

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial u_1'}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial w_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial w_2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial w_3}\right),$$

. . . .

Wendet man diese Grundgleichungen auf ebene Wellen an, die sich in der Richtung l, m, n mit der Geschwindigkeit v fortpflanzen, so ergeben sich zwischen v und den Richtungskosinus $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ der zugehörigen Verrückungen drei Gleichungen der Form

$$(4) \qquad v^2 \frac{\partial A}{\partial \alpha_r} = \frac{\partial B}{\partial \alpha_r} \qquad (r = 1, 2, 3),$$

wo

$$A = \Sigma a_{rs} \alpha_r \alpha_s \qquad (r, s = 1, 2, 3),$$
$$B = (P_1 \alpha_1 + P_2 \alpha_2 + P_3 \alpha_3)^2$$

ist, während die P lineare Funktionen von l, m, n sind, deren Koeffizienten von den in (1) auftretenden Konstanten c_{rs} abhängen. — Die Elimination der α aus den drei Gleichungen (4) gibt eine Gleichung dritten Grades für v^2, deren Wurzeln v_1^2, v_2^2, v_3^2 seien. Es wird dann gefragt: Wie müssen die Konstanten c_{rs} in dem Ausdruck (1) von V beschaffen sein, damit zwei dieser Wellen rein rotatorische sind, d. h. nur von den Komponenten der Elementarrotation $\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}$ etc. abhängen. Die Frage beantwortet sich verhältnismäßig einfach, wenn man die definite quadratische Form A durch die Summe dreier Quadrate darstellt, die Form B durch dieselben Quadrate, multipliziert resp. mit v_1^2, v_2^2, v_3^2. Den resultierenden Ausdruck für V, der 16 Koeffizienten enthält (statt der ursprünglichen 45), übergehen wir hier.

Weiter wird die Gleichung der Wellenfläche für das betrachtete Medium abgeleitet. Die Wellenfläche ist eine Fläche vierter Ordnung, die man aus der Fresnelschen Wellenfläche erhält, wenn man in der Gleichung der letzteren an Stelle der Koordinaten lineare Funktionen der Koordinaten setzt. Dieselbe Gleichung ist für die Wellenfläche von

Heaviside aus der elektromagnetischen Lichttheorie abgeleitet (s. F. d. M. **17**, 1026, 1885).

Zum Schluß werden die Bedingungen dafür gesucht, daß zwei der drei Wellen, die sich in dem Medium nach einer gegebenen Richtung fortpflanzen, rein transversal (statt vorher rotatorisch) sind. Man gelangt dann zu ganz analogen Resultaten wie vorher, auch in bezug auf die Wellenfläche. Wn.

C. Raveau. Sur l'observation de la réfraction conique intérieure ou extérieure. Journ. de Phys. (4) **1**, 387-390.

Fällt ein Strahlenbündel von kleiner Öffnung auf eine zweiachsige Kristallplatte mit parallelen Grenzflächen, und ist einer der Strahlen des Bündels der einen optischen Achse parallel, so entsteht aus letzterem allein (vermöge der inneren konischen Refraktion) im Innern der Platte ein Strahlenkegel, der beim Austritt in einen Zylinder übergeht. Aus den übrigen Strahlen des einfallenden Bündels entstehen beim Austritt Strahlen, die in Normalebenen durch die Erzeugenden des erwähnten Zylinders verteilt sind, und die in diesen Ebenen von einem Punkte ausgehen, dessen Lage auf der Austrittsfläche durch die äußere konische Refraktion bestimmt ist. Wn.

A. Cornu. Détermination des trois paramètres optiques principaux d'un cristal, en grandeur et en direction, par le réfractomètre. Journ. de Phys. (4) **1**, 136-147.

Abdruck einer Arbeit, über die im vorigen Jahre berichtet ist (F. d. M. **32**, 830, 1901). Wn.

W. Voigt. Beiträge zur Aufklärung der Eigenschaften pleochroitischer Kristalle. Gött. Nachr. 1902, 48-91; Ann. der Phys. (4) **9**, 367-416.

W. Voigt. Weiteres zur Aufklärung der Eigenschaften pleochroitischer Kristalle. Gött. Nachr. 1902, 269-277.

Die merkwürdigen Erscheinungen, welche Platten aus pleochroitischen Kristallen, normal zu einer optischen Achse geschnitten, im konvergenten Lichte zeigen, hatte der Verf. für optisch einachsige Kristalle sowie für optisch zweiachsige von rhombischer Symmetrie bereits im Jahre 1884 (s. F. d. M. **16**, 899) theoretisch abgeleitet, später für Kristalle beliebiger Symmetrie in seinem Kompendium der theoretischen Physik. Da auch diese allgemeineren Entwicklungen noch eine gewisse Lücke zeigen, nimmt der Verf. die Aufgabe hier aufs neue in Angriff und entwickelt und diskutiert Formeln, welche für Kristalle beliebiger Symmetrie die ganze Umgebung der optischen Achsen gleichmäßig umfassen.

Den Ausgangspunkt der Untersuchung bilden die Grundformeln der elektromagnetischen Lichttheorie, verbunden mit der Annahme, daß zwischen den Komponenten X, Y, Z der elektrischen Kraft und den

Komponenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ der elektrischen Polarisation Beziehungen von der Form bestehen:

$$v^2 X = (a_{11} + ib_{11})\mathfrak{X} + (a_{12} + ib_{12})\mathfrak{Y} + (a_{13} + ib_{13})\mathfrak{Z},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die sechs Konstanten a_{hk} sind die Komponenten eines Tensortripels a_1, a_2, a_3 (des Polarisationstripels), die b_{hk} die Komponenten eines zweiten Tripels b_1, b_2, b_3 (des Absorptionstripels). Durch beide Tripel ist der Kristall für eine bestimmte Farbe charakterisiert. Jedem Tripel ist ein Ovaloid (Elastizitätsfläche) zugeordnet; beide Flächen haben aber verschiedene Hauptachsen. Die Normalen auf den Kreisschnitten der beiden Ovaloide werden als Polarisations-, resp. Absorptionsachsen bezeichnet; bei verschwindender Absorption sind die Polarisationsachsen mit den optischen Achsen identisch. In bezug auf die gegenseitige Lage der Polarisations- und der Absorptionsachsen, die für die beobachtbaren Erscheinungen von großer Bedeutung ist, liegt eine große Fülle von Möglichkeiten vor. Selbst bei den einfachsten zweiachsigen Kristallen sind sechs, resp. acht Fälle möglich.

Werden die Grundgleichungen auf ebene Wellen angewandt, die sich parallel der z-Achse im Kristall fortpflanzen, so nehmen sie die Form an:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial t^2} = (a_{22} + ib_{22})\frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial z^2} - (a_{12} + ib_{12})\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial t^2} = (a_{11} + ib_{11})\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial z^2} - (a_{12} + ib_{12})\frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial z^2};$$

und daraus folgen sofort zwei Gleichungen zwischen den komplexen Amplituden $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ sowie der komplexen Geschwindigkeit $o = \omega : (1 - i\varkappa)$, wo ω die reelle Geschwindigkeit, $\varkappa$ den Absorptionsindex bezeichnet; letzterer wird so klein angenommen, daß man sein Quadrat gegen 1 vernachlässigen kann. Die eingehende Diskussion der Folgerungen aus den so erhaltenen Gleichungen bildet den Hauptinhalt der Arbeit. Von den Resultaten führen wir folgende an: In jeder Richtung pflanzen sich im Kristall zwei elliptisch polarisierte Wellen fort. Die beiden derselben Wellennormale entsprechenden Schwingungsellipsen sind einander ähnlich, dabei gekreuzt gelegen und werden in gleicher Richtung umlaufen. Die beiden Geschwindigkeiten werden einander gleich für zwei ganze Fächer von Richtungen, die (nahezu) je in einer Ebene liegen und je eine Polarisationsachse als Mittellinie besitzen. Auch die Absorption ist für die beiden längs einer Richtung sich fortpflanzenden Wellen verschieden, so daß im ganzen zwei Wellenflächen existieren, die eine für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω, die andere für die Absorption $k = 2\omega^2\varkappa$. Dabei entsprechen sich die oberen und unteren Hüllen der beiden Flächen nicht gegenseitig, sondern der oberen Hülle für ω^2 entspricht ein Gebilde, zusammengesetzt aus der Hälfte der oberen und der Hälfte der unteren Hülle von k. Es existieren ferner zwei Paare von ausgezeichneten Richtungen, in denen sowohl die Geschwindig-

keiten, als auch die für die Absorption maßgebenden Größen k für beide Wellen gleich sind. Für diese Richtungen, die Windungsachsen des absorbierenden Kristalls genannt werden, gehen die Schwingungsellipsen in Kreise über. Für die Lage dieser Windungsachsen wird eine einfache Konstruktion angegeben.

Weiter werden die Erscheinungen untersucht, die eine normal zu einer Polarisationsachse geschnittene Platte eines pleochroitischen Kristalls beim Hindurchblick mit oder ohne Polarisationsinstrumente zeigt. Zur Vereinfachung wird die Platte als Stück einer Kugelschale betrachtet, in deren Zentrum sich das Auge des Beobachters befindet, und auf die von außen her Licht auffällt. Es zeigt sich, daß bei geeigneten Werten der Achsenverhältnisse der durch die Platte gehenden elliptischen Schwingungen Ringe um die Polarisationsachsen auftreten müssen. Darin, daß solche idiophanen Ringe wirklich beobachtet werden, liegt ein Beweis für die Existenz der gleichsinnig rotierenden elliptischen Wellen. Die Ringe sind am deutlichsten, wenn die einfallende Polarisationsebene einer der beiden zu der Polarisationsachse gehörenden Polarisationsrichtungen parallel ist, und treten dann in den Absorptionsbüscheln auf, fehlen aber in der dazu normalen Richtung.

Die für die Umgebung einer Polarisationsachse durchgeführten Rechnungen lassen sich fast ohne Änderung auf die Umgebung einer Absorptionsachse übertragen. Ein Unterschied in den Resultaten wird nur dadurch bedingt, daß bei den bekannten Kristallen gewisse Konstanten, die im ersten Falle kleine Größen sind, im zweiten sehr groß werden.

Zum Schluß wird noch aus den Formeln der Theorie gefolgert, daß, wenn das einfallende Licht zirkular polarisiert ist und ohne Analysator beobachtet wird, in der Umgebung einer Windungsachse mehr Licht fortgepflanzt werden muß als in der Umgebung der zweiten zu demselben Paare gehörigen Achse. Es muß also in der Intensitätsverteilung eine Unsymmetrie stattfinden. Eine solche hat der Verf. denn auch experimentell nachgewiesen.

In der zweiten Arbeit wird eine Schwierigkeit, auf die die Theorie führt, eingehend erörtert. Ist an einen Kristall eine Ebene normal zu einer Windungsachse angeschliffen, und fällt auf diese Fläche eine ebene Welle normal ein, so haben die beiden im Innern erregten Schwingungen im allgemeinen unendliche, bei ein wenig schiefem Einfall beliebig große Amplituden. Damit hängt eine unter gewissen Umständen eintretende Unbestimmtheit der fortgepflanzten Intensität eng zusammen. Um diese Schwierigkeit zu heben, untersucht der Verf. den Vorgang an einer derartigen Fläche genauer, indem er auch die dort reflektierte Welle mit berücksichtigt. Es zeigt sich dann, daß trotz des Unendlichwerdens der Teilamplituden die Komponenten der magnetischen Kraft im Kristall überall endlich sind, da sich in den Ausdrücken für diese Komponenten die in den Windungsachsen selbst unendlich werdenden Glieder fortheben. Auch eine Unbestimmtheit jener Komponenten ist in den Windungsachsen nicht vorhanden. Wn.

W. Voigt. On the behaviour of pleochroitic crystals along directions in the neighbourhood of an optic axis. Phil. Mag. (6) 4, 90-97.

Unter der Voraussetzung, daß die Hauptabsorptionsachsen mit den optischen Hauptachsen eines Kristalls nicht zusammenfallen, werden Ausdrücke für die Intensität der beiden gebrochenen Strahlen in der Nähe einer optischen Hauptachse abgeleitet und die Kurven gleicher Intensität und größter Intensitätsabnahme bestimmt. Br.

C. Geometrische Optik.

A. Gleichen. Lehrbuch der geometrischen Optik. Leipzig: B. G. Teubner. XIV u. 511 S. 8°.

Seit Jahrzehnten haben unsere optischen Werkstätten in immer steigendem Maße die Notwendigkeit erkannt, sich bei der Konstruktion neuer Instrumente von den Ergebnissen voraufgegangener Durchrechnung des Strahlenganges leiten zu lassen. Die zielbewußte Ausführung solcher Rechnungen ist aber weniger eine Wissenschaft als eine Kunst und Sache des Taktes und der Erfahrung. Die Heranbildung geeigneter mathematischer Kräfte ist daher lange Zeit auf persönliche Überlieferung und Anleitung angewiesen gewesen. Wir besitzen zwar schon seit 1893 die „unvergleichliche" Theorie der optischen Instrumente nach Abbe von S. Czapski, aber die reiche Fülle dieses Buches erschließt sich wohl erst dem Kenner der Materie. Dagegen erscheint das vorliegende Lehrbuch von Gleichen geeignet, wegen der methodischen Darstellung den Anfänger und wegen seiner Vollständigkeit auch den weiter fortgeschrittenen Praktiker zu befriedigen. In letzter Hinsicht seien hier erwähnt die außerordentlich reichen Literaturangaben, die Mitteilungen über Konstruktionsdaten bewährter oder historisch interessanter Linsenkombinationen, die lehrreichen Ausführungen über die viel umstrittene Gültigkeit der Petzvalschen Formel; in erster Beziehung konnte sich der Verf. auf seine vielfachen Einzelveröffentlichungen und die Erfahrungen einer langen Lehrtätigkeit stützen; z. B. dürfte gleich im Anfang die anschauliche Ableitung der allgemeinen Eigenschaften eines unendlich dünnen astigmatischen Strahlenbündels ungeteilten Beifall finden. Zahlenbeispiele, Tabellen, Zusammenstellungen von durchgehenden Formeln und solcher für spezielle Systeme sind reichlich vorhanden; u. a. füllt die vollständige Durchrechnung eines Doppelanastigmaten von P. Goerz 46 Seiten.

Der Verf. hat es für zweckmäßig erachtet, nie mit der allgemeinen Theorie zu beginnen, sondern die einschlägigen Entwicklungen immer erst am speziellen und konkreten Fall darzutun; dabei sind natürlich Wiederholungen unvermeidlich gewesen, aber ein schlimmer Übelstand hat sich außerdem eingestellt: das durch die Richtung bedingte Vorzeichen der Krümmungsradien und Schnittweiten ist an verschiedenen Stellen des Buches verschieden zu interpretieren. Beim durchgehenden

Studium entstehen freilich keine Schwierigkeiten, da der Wechsel der Zählweise jedesmal angegeben ist; aber beim gelegentlichen Nachschlagen von Formeln ist man über ihren Sinn unsicher und auf zeitraubendes Rückwärtslesen angewiesen. R. M.

W. H. Roever. Brilliant points and loci of brilliant points. Annals of Math. (2) 3, 113-128.

Wenn von einem leuchtenden Punkt P ein Strahl auf eine Fläche fällt und von dort reflektiert wird, so daß er in die als punktförmig gedachte Pupille eines Auges fällt, so heißt der Punkt, in dem die Reflexion stattfindet, Glanzpunkt („brilliant point"). Der Autor setzt nun als reflektierende Fläche ein System von Kugeln voraus, deren Mittelpunkte sämtlich auf einer beliebig gekrümmten Linie liegen. In bezug auf ein gegebenes Punktepaar P und P' bilden dann die Glanzpunkte eine zusammenhängende Linie auf dieser Kugelschar, deren analytische Gleichung er ganz allgemein darstellt. Man kann solche Linien bei geeigneter Versuchsanordnung als leuchtende oder glänzende Linien sichtbar machen. Der Autor gibt davon zwei Beispiele: Läßt man eine spiegelnde Gerade (Speiche eines sich drehenden Rades) um ihren einen Endpunkt um eine zu ihr senkrechte Achse schnell rotieren, so erscheinen einem beobachtenden Auge die nach einander folgenden Eindrücke von leuchtenden Punkten bekanntlich neben einander zu bestehen, wodurch der Eindruck des Vorhandenseins einer leuchtenden Linie erzeugt wird. In ähnlicher Weise erzeugt eine schnell rotierende Kreissäge von einem leuchtenden Punkte infolge der vielen kleinen durch den Schmirgel erzeugten Schrammen scheinbar eine leuchtende Linie, die aus Glanzpunkten besteht. In den beiden letzteren Fällen sind, wie der Autor nachweist, die leuchtenden Linien vom vierten Grade, können jedoch bei gewissen Lagen der Punkte P und P' auch zu Kegelschnitten degenerieren. Glu.

C. Juel. Sur les caustiques planes. Kjöb. Overs. 1902, 179-190.

Der Verf. untersucht sowohl die „Katakaustiken" wie die „Diakaustiken". Der Brechungskoeffizient sei n, und ein Lichtpunkt O sende einen Strahl aus, der eine ebene Kurve in M treffe; nun wird ein Kreis konstruiert mit M als Zentrum und OM/n als Halbmesser. Die Einhüllungsfläche dieses Kreises wird die prinzipale Wellenkurve genannt. Der Hauptsatz des Verf. ist jetzt: Wenn man von dem Zeichen des Brechungskoeffizienten und von einer Ähnlichkeitstransformation abstrahiert, so findet eine Reziprozität statt zwischen der brechenden Kurve und der prinzipalen Wellenkurve. Denn wird die prinzipale Wellenkurve als die brechende Kurve betrachtet, dann ist die prinzipale Wellenkurve hierzu eine Kurve, die mit der ursprünglich gegebenen Kurve ähnlich und ähnlich gelegen ist.

Mittels dieses Satzes werden aus bekannten Sätzen über Wellenkurven und brechende Kurven neue hergeleitet.

Darnach wird gezeigt: Wenn zwei brechende Kurven mit demselben Brechungskoeffizienten invers sind (mit der Inversionspotenz k^2), dann sind auch die prinzipalen Wellenkurven invers, doch haben sie die Inversionspotenz $k^2(n^2-1)/n^2$.

Dies wird dazu verwendet, den bekannten Satz über die drei Brennpunkte der Descartesschen Ovale herzuleiten. V.

C. Viola. Le deviazioni minime della luce mediante prismi birifrangenti. Rom. Acc. L. Rend. (5) 11_2, 24-32.

Es wird abgeleitet, daß für ein Prisma aus einem doppelbrechenden Medium der Fall gleichen Eintritts- und Austrittswinkels eines Lichtstrahls nicht bloß dann das Minimum der Ablenkung bedeutet, wenn die Senkrechte im Querschnitt des Prismas auf der Winkelhalbierenden in eine der optischen Hauptebenen fällt, sondern daß auch, wenn dies nicht der Fall ist, bestimmte Bedingungen für die Orientierung von Polarisationsebene und Auffallsrichtung anzugeben sind, für die ebenfalls ein Minimum der Ablenkung aus der Gleichheit von Auffalls- und Austrittswinkel resultiert. Br.

R. Straubel. Über die Abbildung einer Ebene durch ein Prisma. Ann. der Phys. (4) 8, 63-80.

Bei der Behandlung wird der im Prisma zurückgelegte Weg berücksichtigt; die Untersuchung wird in zwei Fällen durchgeführt. Lp.

R. Straubel. Über einen allgemeinen Satz der geometrischen Optik und einige Anwendungen. Verh. Deutsche Phys. Ges. 4, 328-334.

I. Ein unendlich dünner ebener Büschel gehe von einem Punkte mit dem Öffnungswinkel dw aus und habe an einer beliebigen Stelle seiner nach dem Prinzip der kürzesten Zeit konstruierten Bahn die lineare Breite ds'; von einem Punkte in ds' gehe ein zweiter unendlich dünner Büschel, so daß die Achsen zusammenfallen, mit dem Öffnungswinkel dw' und der linearen Breite ds im ersten Punkte; dann lautet der Satz

$$n ds \cdot dw = (\ )',$$

wo die Klammer nebst Akzent bedeutet, daß alle links vorkommenden Größen den Akzent bekommen sollen. Steht das (mit dl bezeichnete) Element nicht senkrecht zum Büschel, sondern bildet seine Normale mit diesem den Winkel w, so ist $n \cdot \cos w \cdot dl = (\ )'$.

II. Für räumliche Büschel mit den Öffnungen $d\omega$ und $d\omega'$ und den Querschnitten dq und dq' lautet der entsprechende Satz:

$$n^2 d\omega\, dq = (\ )'.$$

Bildet die Normale des Flächenelementes (mit df bezeichnet) den Winkel ϑ mit dem Büschel, so ist $n^2 \cdot \vartheta \cos \vartheta \cdot d\omega \cdot df = (\ )'$. — Die Anwendungen beziehen sich auf I. die Photometrie, II. die Dioptrik der Atmosphäre, III. die Abbildungslehre. Lp.

R. Straubel. Zusammenhang zwischen Absorption und Auflösungsvermögen. Verh. Deutsche Phys. Ges. 4, 323-327.

Behandlung der Frage, wie das Auflösungsvermögen eines idealen optischen Instrumentes von der in ihm vorhandenen Absorption abhängt, oder wie sich das Diffraktionsbild ändert, wenn man die Absorption in dem Instrumente berücksichtigt. Es werden nur die beiden einfachsten und wichtigsten Fälle behandelt: Der Fall eines Prismas oder Prismensatzes und der einer Linse oder eines Linsensystems. Ferner wird die Betrachtung auf die sogenannte Fraunhofersche Beugungserscheinung beschränkt. Lp.

Ch. Rivière. Réflexion et réfraction d'un pinceau lumineux par une surface sphérique. Revue de math. spéc. 12, 473-476.

Von einem leuchtenden Punkte A fällt auf eine reflektierende sphärische Fläche mit dem Mittelpunkte C ein kegelförmiges Bündel von Lichtstrahlen. Die reflektierten Strahlen vereinigen sich (wenn von Größen höherer Ordnung abgesehen wird) in einem Punkte A'. Die Achse des einfallenden Lichtkegels trifft die Fläche in S, der reflektierte Strahl SA' schneidet AC in A''. Setzt man

$$CS = r, \quad AS = \sigma, \quad SA' = \sigma', \quad SA'' = \sigma'',$$

und bezeichnet man den mittleren Einfallswinkel mit i, so ergeben sich die beiden Formeln

$$\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma'} = \frac{2}{r \cos i}, \quad \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma''} = \frac{2 \cos i}{r}.$$

Ist $\cos i = 1$, so wird $\sigma'' = \sigma'$, und wenn man $\sigma = p$, $\sigma'' = \sigma' = p'$ setzt, so ergeben beide Formeln $1/p + 1/p' = 2/r$.

Wird der Strahlenkegel an der sphärischen Fläche gebrochen, so vereinigen sich die gebrochenen Strahlen in einem Punkte A', und der gebrochene Strahl SA' trifft AC in A''. Setzt man in diesem Falle $AS = \varrho$, $SA' = \varrho'$, $SA'' = \varrho''$, und bezeichnet man die mittleren Einfalls- und Brechungswinkel mit i und i' und den Brechungsindex mit n, so ergeben sich die beiden Formeln

$$\frac{\cos^2 i}{\varrho} - \frac{n \cos^2 i'}{\varrho'} = \frac{\cos i - n \cos i'}{r},$$

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{n}{\varrho''} = \frac{\cos i - n \cos i'}{r}.$$

Soll $\varrho'' = \varrho'$ werden, so liefern diese Formeln die Beziehungen $\varrho' = \frac{1}{n}\varrho$ und $\varrho = r\cdot(\cos i + n \cos i')$.

Die beiden Formeln für die Brechung werden identisch, wenn i und i' klein sind. Setzt man in diesem Falle

$$\varrho = p_1,\ \varrho' = \varrho'' = p_2,\ n = n_2 : n_1,$$

so erhält man

$$\frac{n_1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} = \frac{n_1 - n_2}{r}.$$

Zch.

H. Bouasse. **Sur les focales dans les milieux isotropes.** Journ. de Phys. (4) **1**, 201-207.

Erleidet ein von einem leuchtenden Punkte ausgegangenes unendlich dünnes Strahlenbündel beliebige Brechungen, so hat es nach einem Satze von Sturm (1844) die Eigenschaft, daß alle Strahlen durch zwei unendlich kleine Linien (die Sturmschen Fokallinien) gehen. Die Fokallinien liegen in zwei zueinander senkrechten, durch einen der Strahlen gehenden Ebenen und stehen auf letzterem Strahle senkrecht. Der Satz läßt sich leicht beweisen, wenn man beachtet, daß alle von einem Punkte ausgegangenen Strahlen nach jeder Brechung auf einer gewissen Fläche senkrecht stehen. Man braucht daher nur ein unendlich dünnes Bündel von Normalen einer beliebigen Fläche zu betrachten und das in Betracht kommende unendlich kleine Flächenstück durch das oskulierende Paraboloid zu ersetzen, so kann man aus den Gleichungen der Normalen des Paraboloids den Satz sofort ablesen.

Die Sturmschen Fokallinien sind aber nicht die einzigen Linien, welche diese Eigenschaft besitzen. Betrachtet man nämlich ein Normalenbündel einer Fläche S, das an dem Flächenpunkte O liegt, sind ferner π_1 und π_2 die Ebenen der Hauptnormalschnitte von O, C_1 und C_2 die Krümmungsmittelpunkte dieser Hauptnormalschnitte, und denkt man sich in der Ebene π_1 ein durch den Punkt C_2 gehendes unendlich kleines Flächenstück, sodann ein ebensolches Stück in π_2 durch den Punkt C_1: so haben alle beliebigen in diesen unendlich kleinen Flächenstücken gelegenen Linien dieselbe Eigenschaft, da die Entfernung der Normalen des Bündels von den genannten Linien unendlich klein von der zweiten Ordnung ist. Es existieren also zwei Verschwindungsflächen (aires d'amincissement).

Wn.

H. Opitz. **Über die Frage nach den Brennlinien eines sehr dünnen astigmatischen Strahlenbündels und ihre Bedeutung für das Bildpunktproblem der geometrischen Optik.** Berl. Math. Ges. Ber. **1**, 53-54.

Diesem viel versprechenden Titel folgen nur einige, ziemlich zusammenhangslose Sätze aus bekannten Literaturstellen über astigmatische

Brennlinien. Die beiden wichtigsten Arbeiten auf diesem Gebiete, nämlich Gullstrand: Archiv für Physiologie **2**, 1891 und Nov. acta regiae societ. Ups. scient. (3) **20**, 1901 sind dabei jedoch nicht erwähnt.

Zum Schlusse wird die bekannte Frage diskutiert, in welchem der beiden astigmatischen Bildpunkte ein Auge eigentlich den Bildpunkt wahrnimmt. Verf. scheint sich der Ansicht zuzuneigen, daß hier in erster Linie der sagittale Bildpunkt in Frage kommt, in welchem wegen der Comafreiheit bekanntlich eine Strahlenvereinigung von höherer Ordnung herrscht als im meridionalen Bildpunkt. Gln.

L. Matthiessen. Von der astigmatischen Strahlenbrechung in einer Vollkugel bei schiefer Inzidenz und von den adjungierten Fixpunkten. Ann. der Phys. (4) **7**, 381-389.

L. Matthiessen. Über die Bedingungsgleichungen der aplanatischen Brechung von Strahlenbündeln in beliebigen krummen Oberflächen. Ann. der Phys. (4) **9**, 691-702.

Die erste Arbeit geht auf eine Abhandlung von Reusch in Tübingen von 1867 ein; es handelt sich in ihr um die Abszissengleichungen konjugierter Punkte bei schiefer Inzidenz in eine sphärische Fläche. Der zweite Aufsatz beschäftigt sich mit den Bedingungen dafür, daß die Brechung eines homozentrischen Strahlenbündels in einer beliebigen Fläche wieder homozentrisch oder aplanatisch werde. Lp.

L. Matthiessen. Über unendliche Mannigfaltigkeiten der Örter der dioptrischen Kardinalpunkte von Linsen und Linsensystemen bei schiefer Inzidenz. Zs. f. Math. u. Phys. **48**, 39-49.

Der Autor geht aus von der Betrachtung der bekannten sechs Kardinalpunkte eines zentrierten Systems (zwei Brennpunkte, zwei Hauptpunkte, zwei Knotenpunkte) und weist darauf hin, daß man derartige Ausgangspunkte für die Zählung der Schnittweiten in beliebiger Anzahl aufstellen kann. Für das paraxiale Gebiet empfehlen sich die sechs oben genannten offenbar durch die schönen geometrischen Eigenschaften, die ihnen innewohnen, und die insbesondere die Konstruktion des austretenden Strahles außerordentlich einfach gestalten. Betrachtet man jedoch unendlich dünne Bündel, die unter endlicher Neigung ein zentriertes System durchdringen und dabei bekanntlich in einen sagittalen und einen meridionalen Teil zerfallen, und sucht man alsdann die Schnittweiten vor der ersten und nach der letzten Brechung auf Fixpunkte zu beziehen, so wird man in den einzelnen Fällen je nach der besonderen Natur des brechenden Systems Punkte zu finden imstande sein, die den Abbildungsgleichungen eine besonders einfache Form geben. Der Autor weist dies zunächst an einem Strahlenbündel nach, das unter endlicher

Neigung eine beiderseits von demselben Medium umgebene Vollkugel durchdringt. Als Fixpunkte, für welche die Abbildungsbeziehungen eine besonders einfache Form annehmen, werden die Fußpunkte der von dem Mittelpunkt der Kugel auf die Richtung des einfallenden und austretenden Strahles gefällten Lote gefunden. Diese Punkte haben, wie dem Verf. anscheinend nicht bekannt ist, noch die merkwürdige Eigenschaft, frei von „Coma" zu sein, d. h. drei vom ersten Punkte ausgehende, einander unendlich nahe Strahlen im Meridionalschnitt schneiden sich nach der Brechung streng, d. h. ohne Aberration, im zweiten Punkte. Die Aufstellung geeigneter Fixpunkte wird dann noch für den Fall durchgeführt, daß die brechende Vollkugel beiderseits von verschiedenen Medien umgeben ist, und ferner für den Fall einer Linse von endlicher Dicke.

Gln.

H. Strauss. Über die Klassifikation dioptrischer Systeme. Ungar. Ber. 18, 308-340.

Der Autor geht von der Tatsache aus, daß man aus den allgemeinen für ein zentrisches optisches System gültigen Abbildungsgleichungen, wobei die Schnittweiten z. B. auf die Hauptpunkte bezogen sind, keinen Schluß ziehen kann, ob die definitiven Bilder reell oder virtuell sind. Zu dieser Entscheidung muß man außerdem die Lage der letzten brechenden Fläche des Systems kennen. Die bisher in der geometrischen Optik übliche Einteilung der Systeme in positive und negative erscheint dem entsprechend dem Autor nicht ausreichend zur Klassifikation, und er entwickelt demnach sowohl an einfachen Linsen wie an Kombinationen solcher die Bedingungen, d. h. die Beziehungen zwischen den optischen Konstanten des Systems, welche erfüllt sein müssen, damit das definitive Bild reell oder virtuell, d. h. in Lichtrichtung hinter oder vor der letzten brechenden Fläche liegt. Diese Bedingungen müssen sich der Natur der Sache nach in Form von Ungleichheiten darstellen. Auffallend ist, daß der Autor, von den Formeln für die auf die Hauptpunkte bezogenen Schnittweiten ausgehend, die bekannten auf die Brennweiten bezüglichen Gleichungen entwickelt und durch einige Andeutungen im Text erkennen läßt, daß er dieses letztere Formelsystem für neu hält. Zum Schluß wird noch der Nachweis geliefert, daß eine einzelne konvexe Kugelfläche, bei der im Bildraum der höhere Brechungsexponent herrscht, durchaus nicht unter allen Umständen das auffallende Licht konvergenter macht. Das Gegenteil tritt nämlich ein, wenn der einfallende Strahl die optische Achse zwischen Kugelmittelpunkt und Scheitel schneidet. Zum Beweise hierfür wird ein ziemlich umfangreicher mathematischer Apparat in Bewegung gesetzt, während sich nach Ansicht des Referenten diese Frage einfach durch die Bemerkung erledigt, daß der gebrochene Strahl im dichteren Medium zum Einfallslot gebrochen wird.

Gln.

S. Bloch. Théorie des lentilles épaisses. Revue de math. spéc. 12, 521-524.

Der Verf. findet die Fundamentalbeziehungen für dicke Linsen durch Verallgemeinerung der Newtonschen und der Lagrange-Helmholtzschen Gleichungen.

Eine brechende Kugelfläche trenne zwei Medien mit den Brechungsexponenten n_1 und n_2. A_1 und A_2 seien die Brennpunkte in bezug auf das erste und zweite Medium, a_1 und a_2 deren Abstände vom Scheitel, P_1 und P_2 zwei konjugierte Punkte. Dann lautet die Newtonsche Formel $A_1 P_1 \cdot A_2 P_2 = a_1 \cdot a_2$. Wird das zweite Medium von einem dritten mit dem Index n_3 durch eine brechende Kugelfläche getrennt, deren Mittelpunkt auf $P_1 P_2$ liegt, und sind P_2 und P_3 in bezug auf diese Fläche konjugiert, so folgt aus der obigen Formel

$$F_1 P_1 \cdot F_3 P_3 = -\frac{a_1 a_2 b_2 b_3}{A_2 B_2^2};$$

hierin bedeuten F_1 und F_3 die Brennpunkte für das erste und das dritte Medium, B_2 den Brennpunkt der zweiten Fläche bezüglich des zweiten Mediums, b_2 und b_3 die Scheitelabstände der Brennpunkte B_2 und B_3.

Sind F und F' die Brennpunkte eines beliebigen Systems zentrierter Flächen für die beiden äußeren Medien, P und P' zwei konjugierte Punkte, A_1 und A_2 die Brennpunkte der ersten, B_2 und B_3 diejenigen der zweiten, C_3 und C_4 die der dritten Fläche usw., $a_1, a_2, b_2, b_3, c_3, c_4, \ldots$ die entsprechenden Scheitelabstände, und setzt man

$$\pi = FP,\ \pi' = F'P',\ \sigma = A_2 B_2,\ \sigma' = B_3 C_3 \ldots,$$

$$\varphi = \mp \frac{a_1 b_2 c_3 d_4 \ldots}{\sigma \sigma' \sigma'' \ldots},\ \varphi' = \frac{a_2 b_3 c_4 d_5 \ldots}{\sigma \sigma' \sigma'' \ldots},$$

so ist $\pi \cdot \pi' = \varphi \cdot \varphi'$.

Ist $y_1 = P_1 Q_1$ eine kleine, auf der Achse einer Kugelfläche senkrechte Strecke, $y_2 = P_2 Q_2$ ihr Bild, und sind δ_1, δ_2 die Winkel, welche ein von P ausgehender Strahl vor und nach der Brechung mit der Achse bildet, so lautet die Lagrange-Helmholtzsche Formel

$$n_1 y_1 \operatorname{tg} \delta_1 = n_2 y_2 \operatorname{tg} \delta_2,$$

wenn man mit n_1 und n_2 die Brechungsexponenten der beiden Medien bezeichnet. Diese Formel läßt sich unmittelbar auf den Fall eines Systems mehrerer zentrierter Flächen ausdehnen. Es ist nämlich $yn \operatorname{tg} \delta = y'n' \operatorname{tg} \delta'$, wenn man unter y' das definitive Bild von y und unter n und n' die Indizes der beiden äußern Medien versteht.

Aus diesen Relationen folgt die lineare Vergrößerung

$$g = \varphi : \pi = \pi' : \varphi'.$$

Zch.

V. Grünberg. Zur Theorie der mikroskopischen Bilderzeugung. Leipzig: J. A. Barth. 90 S. 8°.

In dem 90 Seiten umfassenden Werk findet man in ziemlich starker Anlehnung an das bekannte Handbuch der allgemeinen Mikroskopie von Dippel eine übersichtliche Darstellung über die mikroskopische Bilderzeugung nach Abbe. Zum Verständnis der Abbeschen Lehren bedarf der Leser der Kenntnis sowohl der allgemeinen dioptrischen Abbildungslehre als auch der Elemente der Beugungstheorie. Beides hat der Verf. der eigentlichen Theorie des Mikroskops vorausgeschickt, so daß das Werk dadurch den Charakter einer in sich abgeschlossenen Monographie erhält. In methodischer Beziehung möchte Referent doch darauf hinweisen, daß in der etwa 60 Seiten umfassenden Darstellung der allgemeinen Abbildungslehre die Herleitung der Fundamentalsätze nicht immer auf die einfachste und anschaulichste Weise erfolgt ist. So ist z. B. der bekannten Konstruktion von Weierstraß, aus der die Eigenschaften der aplanatischen Punkte der Kugel erhellen, nicht gedacht. Der Grund hierfür ist wohl darin zu suchen, daß der Verf. bei der Abfassung des Werkes, wie er selbst angibt, nur einen sehr kleinen Teil der geometrisch-optischen Literatur berücksichtigt hat. Gln.

J. D. Everett. Contributions to the theory of the resolving power of objectives. Phil. Mag. (6) 4, 166-171.

Betrifft Überlegungen über die Grenze, bei der die Beugung in Fernrohren und Mikroskopen anfängt, für die Definition des Bildes schädlich zu werden. Br.

A. Daubresse. Note sur le goniomètre portatif à prismes. Revue d'Art. 59, 329-345.

Beschreibung eines für militärische Zwecke konstruierten Goniometers, bei welchem an Stelle der Planspiegel der Sextanten Prismenspiegel benutzt sind, nebst der Theorie dieses Instrumentes. Lp.

W. Ludwig. Die Horopterkurve mit einer Einleitung in die Theorie der kubischen Raumkurve. Halle a. S.: M. Schilling. 36 S. gr. 8°.

Die Arbeit ist eine Begleitschrift zu den sechs Modellen zur Theorie der kubischen Raumkurve, die von dem Verf. im Verlage von Martin Schilling in Halle a. S. veröffentlicht sind. Diese Modelle umfassen die kubische Ellipse, die kubische Hyperbel, die kubische parabolische Hyperbel, die kubische Parabel, die abwickelbare Fläche der Tangenten der kubischen Ellipse und schließlich den Horopter. Der Verf. zeigt im ersten Teil der Arbeit, wie eine kubische Raumkurve durch drei projektive Ebenenbüschel, resp. durch zwei kollineare Bündel erzeugt wird, und erläutert die verschiedenen möglichen Formen der kubischen Raumkurve

an seinen Modellen. Im zweiten Teil der Arbeit wird unter Voraussetzung einiger vereinfachenden Annahmen über die Bewegung des Bulbus in seiner Höhle und über den Strahlengang des Lichtes im Auge die Gleichung des Horopters hergeleitet, d. h. des Ortes derjenigen Punkte, die von den menschlichen Augen einfach gesehen werden, wenn ein bestimmter Punkt des Raumes fixiert wird. Die Kurve des Horopters ist doppelt gekrümmt und vom dritten Grade, liefert also ein Beispiel für die Theorie der kubischen Raumkurven. Zum Schluß der Arbeit wird die Form des Horopters diskutiert für die vier typischen Fälle der Lage des fixierten Punktes, nämlich rechts oben oder unten und links oben oder unten, und ferner werden diejenigen beiden speziellen Fälle betrachtet, in denen die Kurve dritten Grades in einen Kreis und eine Gerade zerfällt. Gln.

F. Schuh. Die Horopterkurve. Zs. f. Math. u. Phys. 47, 375-399.

Unter den gewöhnlichen vereinfachenden Annahmen, daß ein als „Kernpunkt“ definierter Punkt (vereinigter Knotenpunkt) mit dem Drehpunkt des Auges zusammenfalle und das Listingsche Gesetz über die Augenstellung gültig sei, werden rein geometrisch die Eigenschaften der Horopterkurve sehr eingehend untersucht und insbesondere die Formen diskutiert, welche diese Kurve für verschiedene Stellungen des Fixationspunktes annimmt. Schließlich wird der Ort der Fixationspunkte für den Fall gesucht, daß der Horopter in eine Gerade und in einen Kegelschnitt zerfällt. Gln.

A. Gleichen. Die Scheitelkrümmung der Bilder auf der Netzhaut des Auges unter Berücksichtigung der Linsenschichtung. Verh. Deutsche Phys. Ges. 4, 13-24.

Das Gesetz der Schichtungen der Linse im Auge ist von L. Matthiessen aufgefunden worden. Die Aufstellung der Differentialgleichung, die den Weg eines Lichtstrahls durch die geschichtete Linse bestimmt, und ihre Integration ist von L. Hermann (1878/82) bewirkt worden. In der gegenwärtigen Abhandlung wird auf Grund des Matthiessenschen Gesetzes die Krümmung der Bilder auf der Netzhaut untersucht; es wird nämlich unter der Voraussetzung, daß das Objekt ein Rotationskörper zur optischen Achse ist, diejenige Fläche gesucht, auf welcher in erster Annäherung das Bild sich befindet. Die Untersuchung wird mittels des folgenden Petzvalschen Satzes geführt: Unter Voraussetzung eines planen, achsensenkrechten Objektes ist der reziproke Wert des Krümmungshalbmessers R' des Bildes am Scheitel gleich der Summe der Produkte aus den reziproken Werten der Brennweiten $1/f_k$ in die reziproken Werte der Brechungsexponenten $1/n_k$ der einzelnen Bestandlinsen. Über diesen Satz werden einige historische Bemerkungen vorausgeschickt. Lp.

T. Bolas, G. E. Brown. A practical guide to the choice, use, and testing of photographic objectives. London: Dawbarn and Ward. VI u. 176 S. [Nature 66, 75.]

Kapitel 3.

Elektrizität und Magnetismus.

W. Brüsch. Grundriß der Elektrotechnik für technische Lehranstalten. Leipzig: B. G. Teubner. XI u. 168 S. gr. 8°. 204 Fig.

Der vorliegende Grundriß ist aus Vorträgen entstanden, die der Verf. teils an der Bergschule zu Tarnowitz, teils vor Beamten der Zeche „König und Königin Luise" zu Zabrze O. S. und anderer Hüttenwerke gehalten hat. Bringt er auch inhaltlich nichts Neues, so zeichnet er sich doch durch eine große Zahl prächtiger Holzschnitte und durch Beherrschung des Stoffes und Einfachheit in der Darstellung aus; der Grundriß ist daher vorzüglich geeignet als Lehrbuch. Hae.

G. S. Ohm. Anhang zur Theorie der galvanischen Kette. Ungar. Ber. 18, 202-228.

Eine verschollene Abhandlung Ohms, die der italienischen Ausgabe seines Werkes: „Die galvanische Kette usw., 1847" angehängt war; sie stützt sich auf Voltas Kontakttheorie. Es werden Ausdrücke für die Energie des Stromes abgeleitet, wenn der äußerlich unveränderliche Zustand eingetreten ist, und für kurze und lange Leiter verglichen; Formeln für Sekundärsäulen schließen sich an. Gt.

W. Sutherland. The electric origin of molecular attraction. Phil. Mag. (6) 4, 625-645.

Die Arbeit enthält keine eigentliche Theorie, wie ihr Titel vermuten läßt, sondern mehr allgemeine Überlegungen darüber, ob es möglich wäre, eine Theorie mathematisch durchzubilden, wonach die Moleküle als Systeme zweier entgegengesetzt geladenen Hälften aufzufassen wären und sich mit einer Molekularkraft anzögen, die (innerhalb der Molekularsphäre) der vierten Potenz der Entfernung ihrer Mitten umgekehrt proportional zu setzen wäre. Auf solche Moleküle würden sich dann die Gesetze und Resultate für Elementarmagnete anwenden lassen, sodaß man das für endliche Entfernungen gültige Gravitationsgesetz aus dieser Hypothese ohne weiteres ableiten könnte. Ein elektrisches Feld wäre z. B. durch gleiche Richtung der Systeme zu erklären, und es wird diskutiert, in wieweit es denkbar ist, die elektrischen Erfahrungstatsachen und Gesetze

durch diese Hypothese darzustellen. Im gleichen Sinne wird die Eignung der Grundannahme für die Darstellung anderer, bereits entwickelter Theorien und mathematisch-analytischer Methoden besprochen. Br.

J. D. van der Waals jr. Statistische electro-mechanica. Amst. Ak. Versl. **11**, 79-88, 243-249.

Die Behandlung eines Inbegriffs mechanischer Systeme, welche Gibbs mit Erfolg in seinem Werke: „Elementary principles in statistical mechanics“ unter Zugrundelegung der Gesetze von der Erhaltung der Phasendichte und der kanonischen Verteilung eingeführt hat, dehnt Verf. auf die elektromagnetischen Systeme aus; er wird hierdurch zu einer Darstellung der schwarzen Strahlung geleitet. An die Stelle der Gibbsschen kanonischen Verteilung tritt hier eine andere, die Verf. die „quasikanonische“ nennt. — In der zweiten Abhandlung werden die Ergebnisse unter bestimmten Annahmen geprüft. Gt.

H. A. Lorentz. De grondvergelijkingen voor electromagnetische verschijnselen in ponderabele lichamen, afgeleid uit de electronentheorie. Amst. Ak. Versl. **11**, 305-318

Nach dem Verf. durchdringt der Äther auch die Elektronen, so daß in diesen die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes gelten. Er unterscheidet drei Arten von Elektronen, die der Leitung, der Polarisation und der Magnetisation. Indem er die Mittelwerte der gegenseitigen Beziehungen dieser zum Äther aufstellt, gelangt er wieder zu den bekannten Feldgleichungen. Hae.

H. A. Lorentz. Théorie simplifiée des phénomènes électriques et optiques dans des corps en mouvement. Arch. Néerl. (2) 7, 64-80.

Übersetzung der Abhandlung aus Amst. Ak. Versl. 7, 507-522, 1899. „In früheren Untersuchungen habe ich angenommen, daß alle elektrischen und optischen Erscheinungen, welche ponderable Körper zeigen, durch kleine geladene Teilchen (Elektronen) erzeugt werden, die in einem Dielektrikum an feste Gleichgewichtslagen gebunden sind, die sich aber in einem Leiter, abgesehen von einem der Reibung vergleichbaren Widerstande, frei bewegen können. Nach dieser Anschauung wäre ein elektrischer Strom nichts anderes als eine fortschreitende Bewegung dieser Elektronen und die dielektrische Polarisation eines nichtleitenden Mediums eine Abweichung aus ihren Gleichgewichtslagen. Ich habe vorausgesetzt, daß die Elektronen sich bewegen können, ohne den Äther, für den sie vollkommen durchlässig sind, mit fortzureißen. Während ich dann für den Äther die gewöhnlichen elektromagnetischen Gleichungen annahm, habe ich für die Elektronen gewisse Relationen angesetzt, zu denen man durch sehr einfache Betrachtungen geführt wird. Dadurch habe ich ein

Gleichungssystem erhalten, das zur Erklärung zahlreicher Erscheinungen genügt. Im Verlaufe dieser Forschung haben gewisse mathematische Kunstgriffe es mir ermöglicht, durch eine kurze Überlegung zu Schlüssen zu gelangen, die ich ohne sie nur durch viel ausgedehntere Entwicklungen erhalten hätte. Jetzt will ich zeigen, wie man die Theorie noch weiter vereinfachen kann, indem man die Gleichungen einigen passend gewählten Umformungen unterwirft.“ Lp.

M. Abraham. Dynamik des Elektrons. Physikal. Zeitschr. 4, 57-63; Gött. Nachr. 1902, 20-41.

Der Verf. gibt folgendes als Resultat seiner Abhandlung an: Das Problem der Dynamik des Elektrons ist das einfachste Problem der elektromagnetischen Mechanik. Das nur translatorisch bewegte Elektron entspricht dem materiellen Punkte, das rotierende dem starren Körper der gewöhnlichen Mechanik. Auch sind die Annahmen über Form und Ladungsverteilung des Elektrons möglichst einfach gehalten, und dennoch ist die Dynamik des Elektrons weit komplizierter, als es die entsprechenden Aufgaben der gewöhnlichen Mechanik sind. Nur für eine spezielle Klasse von Bewegungen, für die ausgezeichneten Bewegungen, die gleichzeitig quasistationär sind, ließen sich die Lagrangeschen Gleichungen in der aus der analytischen Mechanik bekannten Form deduzieren; für solche Bewegungen gilt selbstverständlich auch diejenige Formulierung der Lagrangeschen Mechanik, welche man das Hamiltonsche Prinzip nennt. Wird der Gültigkeitsbereich der analytischen Mechanik in gewisser Weise eingeschränkt, so erfährt er wiederum in anderer Hinsicht eine sehr wesentliche Erweiterung. Denn die gewöhnliche Mechanik materieller Körper bezieht sich auf sehr geringe Geschwindigkeiten, die Dynamik des Elektrons gilt bis nahe an die Lichtgeschwindigkeit heran. Auch hier erweist sich das Lagrangesche System der Mechanik als richtig; nur sind es kompliziertere Formen der Lagrangeschen Funktion, die in der elektromagnetischen Mechanik gelten, Formen, die bei langsamer Bewegung in die von der gewöhnlichen Mechanik als gültig angenommenen übergehen.

Diese Erweiterung des Machtbereichs der analytischen Mechanik beschränkt sich auf den gewöhnlichen, dreidimensionalen, euklidischen Raum. Allein sie berücksichtigt diejenigen physikalischen Eigenschaften des Raumes, welche in den Maxwell-Hertzschen Differentialgleichungen ihren mathematischen Ausdruck finden. Die aufgestellte Theorie nimmt eine kontinuierliche Raumerfüllung des Äthers an, d. h. eine exakte Gültigkeit jener Differentialgleichungen für Differenzen, die klein sind gegen den Radius des Elektrons, und für Feldstärken, welche die unserer Messung zugänglichen billionenfach übertreffen. Rns.

W. KAUFMANN. La déviation magnétique des rayons Becquerel et la masse électromagnétique des électrons. C. R. 135, 577-579.

Frühere Arbeiten des Verf. (Gött. Nachr. 1902. S. 291-296) hatten gezeigt, daß die Masse des Elektrons rein elektromagnetischer Natur sei. Inzwischen wurden die Versuche mit bedeutend wirksamerem, reinem Radiumchlorür wiederholt und ergaben nur mittlere Abweichungen von 1 bis 1,4 $^0/_0$ von den nach der Theorie von Abraham berechneten Werten. Man kann demnach die Masse des Elektrons als ganz elektromagnetisch betrachten; d. h. das Elektron ist nur eine auf eine Oberfläche oder einen Raumteil von sehr kleinen Dimensionen (ungefähr 10^{-13} cm) verteilte elektrische Ladung. Fr.

W. KAUFMANN. Die elektromagnetische Masse des Elektrons. Physikal. Zeitschr. 4, 54-57; Gött. Nachr. 1902, 291-296.

Die Masse der die Becquerelstrahlen bildenden Elektronen ist von der Geschwindigkeit abhängig; die Abhängigkeit ist genau darstellbar durch die Abrahamsche Formel.

Ist β gleich dem Quotienten aus der Geschwindigkeit q des Elektrons und der des Lichtes c, ε die Ladung des Elektrons in E. M. E., μ_0 der Wert der elektromagnetischen Masse für kleine Geschwindigkeiten, so ist

$$\frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{\varepsilon}{\mu_0} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\psi(\beta)},$$

$$\psi(\beta) = \frac{1}{\beta^2}\left[\frac{1+\beta^2}{2\beta} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1\right].$$

Es ist demnach die Masse der Elektronen rein elektromagnetischer Natur. Der für kleine Geschwindigkeiten berechnete Wert stimmt innerhalb der Beobachtungsfehler mit dem für Kathodenstrahlen gefundenen überein.

Rns.

P. DRUDE. Zur Elektronentheorie der Metalle. Ann. der Phys. (4) 7, 687-692.

Der Verf. berichtigt in dieser Arbeit ein Versehen, welches durch einen Vorzeichenfehler in seiner Abhandlung Ann. der Phys. (4) 1, 585 (1900) entstanden ist, indem er die hierdurch erforderliche Änderung der Resultate angibt. Rns.

P. CURIE. Sur la constante de temps caractéristique de la disparition de la radioactivité induite par le radium dans une enceinte fermée. C. R. 135, 857-859.

Für die Abnahme der Radioaktivität wird folgende empirische Formel angegeben:

$$J = J_0 e^{-\frac{t}{\theta}},$$

wo $\theta = 4{,}970 \cdot 10^5$ Sekunden. Wn.

J. STARK. Ionentheorie der elektrischen Selbstentladung. Ann. der Phys. (4) 7, 919-931.

Unter Selbstentladung wird der Übergang eines elektrischen Feldes aus der statischen in die dynamische Form verstanden, und es wird gezeigt, daß die Theorie der Selbstentladung identisch ist mit der Theorie des Eintrittes der Ionisierung durch Ionenstoß. Demnach ist die Selbstentladung bedingt durch zweifache Grenzionisierung.

Wenn unter Anfangsspannung derjenige Wert der Elektrodenspannung verstanden wird, bei dessen Überschreitung Selbstentladung erfolgt, und mit $V(x, y, z)$ die Funktion bezeichnet wird, welche die elektrische Spannung in einem Punkte zwischen den Elektroden darstellt, und welche auf der Entladeelektrode den Wert V_e, auf der anderen den Wert V_0 hat, und deren Anfangswert mit V_a bezeichnet wird, so gelten, wenn ΔV_m die Ionisierungsspannung des positiven Ions ist, die beiden Gleichungen:

$$V_a = V_e - V_0, \qquad \Delta V_m = V_e - V(\lambda_p).$$

Hieraus folgt

$$V_a = \Delta V_m + V(\lambda_p) - V_0,$$

welche Gleichung das allgemeine Gesetz für die Anfangsspannung der Selbstentladung darstellt.

Auch nach Eintritt der Selbstentladung muß fortgesetzt Ionisierung durch Ionenstoß statthaben; dabei darf aber die Elektrodenspannung der selbständigen Strömung bei Verringerung der Stromstärke nicht unter einen bestimmten Wert, die Minimalspannung der Selbstentladung, sinken. Die Berechtigung obiger Theorie wird nachgewiesen an dem bis jetzt vorliegenden Versuchsmaterial, d. i. bei den Messungen über die Funkenspannung und denen über die Anfangs- und Minimalspannung des Spitzenstromes. Rns.

J. J. E. DURACK. Lenard rays. Phil. Mag. (6) 4, 29-45.

Enthält in theoretischer Beziehung die Anfänge einer kinetischen Theorie für die gegenseitige Einwirkung von Elektronen und Molekülen auf Grund von Hypothesen J. J. Thomsons. Br.

P. J. KIRKBY. On the electrical conductivities produced in air by the motion of negative ions. Phil. Mag. (6) 3, 212-225.

Betrifft eine bestimmte Versuchsanordnung für die Ermittelung der sekundären Ionisationswirkung, die frei bewegliche (durch Röntgenstrahlen

erzeugte) negative Ionen hervorbringen, und Formeln zur Darstellung der Resultate. Br.

H. S. Allen. A preliminary note on the relation between primary and secondary Röntgen radiation. Phil. Mag. (6) 8, 126-128.

Aufstellung einfacher Formeln für die Ionisationswirkung und Erzeugung sekundärer Strahlen für normale Röntgenstrahlen. Br.

R. K. McClung. The rate of recombination of ions in gases under different pressures. Phil. Mag. (6) 8, 283-305.

Von Rutherford ist abgeleitet, daß bei einem von Röntgenstrahlen ionisierten Gas nach Erlöschen der Röntgenstrahlen die Anzahl der freien Ionen durch Wiedervereinigung mit einer Geschwindigkeit abnimmt, die, abgesehen von einem für ein Gas konstanten, aber für verschiedene Gase verschiedenen Faktor, gleich dem Quadrat der jeweilig noch vorhandenen freien Ionen ist. Verf. gibt eine Versuchsanordnung an, aus deren meßbaren Größen man die Konstante bestimmen und mit Hülfe dieser die bis zur Reduktion der Ionenzahl auf die Hälfte erforderliche Gesamtzeit berechnen kann. Der Vergleich mit dem Versuch ergibt, daß die Rutherfordsche Formel richtig ist, und zwar unabhängig vom Druck. Br.

J. J. Thomson. On some of the consequences of the emission of negatively electrified corpuscles by hot bodies. Phil. Mag. (6) 4, 253-262.

Betrifft in der Hauptsache eine Berechnung der Einwirkung, die elektrische Wellen auf Elektronen ausüben, die von glühenden Körpern ausgesandt werden. Es ergibt sich eine Abstoßung, die z. B. zur Erklärung der Kometenschwänze benutzt werden kann. Die Einwirkung solcher Elektronen auf materielle Teilchen, gegen die sie stoßen, muß eine sekundäre Form der Energieausstrahlung bewirken, für deren Berechnung ebenfalls ein formeller Ansatz angedeutet wird. Br.

Cl. A. Skinner. On conditions controlling the drop of potential at the electrodes in a vacuum-tube discharge. Phil. Mag. (6) 4, 490-504.

In theoretischer Hinsicht arbeitet Verf. mit der Annahme, daß ein frei bewegliches, gegen eine Leiterplatte stoßendes Ion von dieser elastisch zurückgeworfen wird, aber nicht bis zur ursprünglichen Entfernung, sondern weniger weit, da es bei der Berührung einen Teil seiner Ladung verliert, und daß sich dieser Prozeß immer wiederholt. Die Rückstoßentfernungen bilden dann eine abnehmende geometrische Reihe, aus der die Gesamtzeit,

die erforderlich ist, bis das Ion an der Platte zur Ruhe kommt, berechnet wird. Der übrige Inhalt der Arbeit ist experimentell-physikalischer Natur.

Br.

E. RUTHERFORD and A. G. GRIER, Deviable rays of radioactive substances. Phil. Mag. (6) 4, 315-330.

Enthält eine Berechnung des Verhältnisses der Energiemengen, die von den nicht ablenkbaren und den ablenkbaren Strahlen der radioaktiven Substanzen durch Ionisierung umgebender Gase den Substanzen entführt werden.

Br.

G. GIORGI. Sul sistema di unità di misure elettromagnetiche, con osservazione del Prof. Luigi Donati. Nuovo Cimento (5) 4, 11-37.

G. GIORGI. Unità razionali di elettromagnetismo. Ingegneria Moderna Napoli. 9 S. 4⁰.

Die bemerkenswerte Arbeit des Verf., der Ingenieur ist, kommt zu dem Resultat, daß als praktisches Maßsystem sich ein solches empfiehlt, wo das Watt die Einheit des Effekts angibt; dann ist das Volt die Einheit für die elektromotorische Kraft und den magnetischen Strom, das Ampère diejenige für elektrischen Strom und magnetomotorische Kraft; doch ist bei letzterer der Faktor 4π unterdrückt, der so viele Unbequemlichkeiten bereitet. Das Giorgische System ist ein Meter-Kilogramm-Sekunden-System, in dem sich elektrische und magnetische Einheiten bequem darstellen lassen, das aber auch in einfacher Beziehung zu den mechanischen Einheiten steht; so ist z. B. die Krafteinheit gleich 102 g, die Druckeinheit gleich $10^{-5}.1,02$ Atmosph.

Hae.

Experiments for improving the construction of practical standards for electrical measurements. Brit. Ass. Rep. 1902, 53-58.

In einem Nachtrage zu diesem Berichte werden einige Punkte erörtert, die mit der Definition der Wärmeeinheit zusammenhängen (vgl. F. d. M. 27, 765, 1896). Eine mögliche Änderung von Satz II des Berichtes von 1896 wird angegeben, ist aber formell nicht zur Annahme gelangt.

Gbs. (Lp.)

W. PEDDIE. A construction for the force at any point due to electric point-charges or ideal magnets, with an extension to continuous distributions. Edinb. M. S. Proc. 20, 73-75.

AOB ist ein Durchmesser eines Kreises; P_1 und P'_1 sind inverse Punkte in bezug auf den Kreis, wo OP'_1P_1 senkrecht zu AOB sei; von P'_1 und P_1 werden die Lote P'_1Q_1 und $P_1Q'_1$ bezw. auf AP'_1 und AP_1 gefällt, die AOB in Q_1 und Q'_1 treffen. Dann ist:

$$OQ_1 = AO^2/OP_1^2,\quad OQ_1' = AO^2/OP_1'^2,\quad OQ \cdot OQ_1' = AO^2,$$

so daß Q und Q_1 inverse Punkte sind. OQ_1 stellt der Größe nach die Kraft in O dar, welche von einer Masse oder Ladung von der Größe AO^3 in P_1 herrührt, während die Richtung der Kraft um einen rechten Winkel gedreht ist. Eine ähnliche Konstruktion werde für einen Punkt P_2 nahe bei P_1 gemacht; dann wird die Kraft in O, welche von einem Magneten $P_1 P_2$ von der Polstärke AO^3 herrührt, der Größe nach durch $Q_1 Q_2$ dargestellt, während die Richtung der Kraft senkrecht gegen $Q_1 Q_2$ ist. Es wird gezeigt, wie das Verfahren zu verallgemeinern ist, so daß es die Aufgabe der Bestimmung der Anziehung eines direkten Systems auf die der Bestimmung des Schwerpunktes des Bildsystems zurückführt, und umgekehrt. Gbs. (Lp.)

J. Buchanan. Note on a paper by Fleming and Ashton, entitled „on a model which imitates the behaviour of dielectrics". Phil. Mag. (6) 8, 240-243.

Betrifft die Theorie einer auf der Viskosität einer Flüssigkeit beruhenden Modellanordnung zur Veranschaulichung der Vorgänge in einem Dielektrikum (Phil. Mag. 1901, Aug.) und führt aus, daß die Zustandsänderung der Modellanordnung der Fourierschen Differentialgleichung $\partial v/\partial t = K \cdot \partial^2 v/\partial x^2$ folgt. Br.

N. N. Bulgakow. Berechnung der elektrostatischen Kapazität für den Vibrator von A. S. Popow. J. russ. phys. chem. Ges. 34, 209-222 (Russisch).

Bei der Funkentelegraphie nach Popow wird als Vibrator ein langer dünner Draht (Länge 40 mm, Dicke 1 mm) verwendet, der vertikal aufgestellt ist. Das Potential des Drahtes sei konstant $= V_0$; die Erde kann man als eine unbegrenzte leitende Ebene vom Potential 0 betrachten. Man sucht die Kapazität des Drahtes. Der Verf. betrachtet den Draht als ein sehr langes Rotationsellipsoid und findet, daß

$$C = L/2 \ln \frac{L}{\delta\sqrt{3}},$$

wo L die Länge, δ die Dicke des Drahtes bedeuten. Es wird gezeigt, daß das Potential des Feldes eines geladenen Rotationsellipsoides, das mit seiner großen Achse normal zu einer unbegrenzten Ebene mit dem Potential 0 steht, als Summe $V_1 + V_2$ dargestellt werden kann. Dabei ist V_1 durch die Ladung $+Q$ auf dem gegebenen Ellipsoid bedingt, das man sich als isoliert im Raum denkt; stellt man sich in einer zur Ebene symmetrischen Lage ein anderes, mit dem ersten identisches Ellipsoid vor, nur mit $-Q$ geladen und wieder isoliert im Raume, so ist V_2 durch diese Ladung $-Q$ bedingt. Dabei werden die elliptischen Koordinaten benutzt. Ghr.

N. N. Bulgakow. Zur Theorie des ebenen Kondensators. J. russ. phys. chem. Ges. **34**, 315-323 (Russisch).

Analog wie in dem vorstehenden Aufsatze betrachtet der Verf. wieder zwei gegen eine unbegrenzte Ebene symmetrisch liegende Rotationsellipsoide; nur sind jetzt deren große Achsen der Ebene parallel. Man sucht zwei Niveauflächen, welche die beiden Ellipsoide zusammen umgeben. Diese Flächen werden für Belegungen eines Kondensators genommen. Man betrachtet den Fall sehr abgeplatteter Ellipsoide und geht im Grenzfall zum ebenen Kondensator über. Ghr.

T. J. I'A. Bromwich. Note on a condenser problem. Messenger (2) **31**, 184-192.

Michell hat im Messenger (2) **23** (F. d. M. **25**, 796, 1893) gezeigt, daß eine Abbildung der komplexen Jacobischen Zetafunktion eine genaue Lösung einer gewissen Kondensator-Aufgabe liefert. Der Kondensator wird aus zwei sehr langen parallelen leitenden Streifen gebildet, die gleich sind und sich gegenüberstehen. Indem der Verf. eine direkte Lösung des Michellschen Falles zur Beleuchtung der Schwarzschen Transformation suchte, die eine konforme Abbildung eines geradlinigen Vielecks auf ein anderes bewirkt, griff er die Aufgabe von seiten der Weierstraßschen elliptischen Funktionen an, die sich als naturgemäßer erwiesen. Nach demselben Plane wie Michell vorgehend, fand Bromwich, daß bei seiner Lösung die erste Michellsche Annäherung auch noch als zweite gültig blieb, und dies wurde durch eine weitere Bearbeitung jener älteren Resultate bestätigt. Lp.

A. Lampa. Elektrostatik einer Kugel, welche von einer konzentrischen, aus einem isotropen Dielektrikum bestehenden Kugelschale umgeben ist. Wien. Ber. **111**, 593-614.

Der Radius der leitenden Kugel sei a_1, ferner a_2 der Radius der innern, a_3 jener der äußern Begrenzungsfläche des Dielektrikums, so daß $a_1 < a_2 < a_3$ ist. Die Dielektrizitätskonstante sei D, das Potential im Innern der Kugel V_i, im leeren Zwischenraum V_L, im Dielektrikum V_D, außerhalb desselben V_e. Dann gilt die Gleichung $V_i = \text{const.}$, zu der noch zwei Bedingungsgleichungen für die Begrenzungsflächen treten.

Die Lösung des Problems, das von Kugelfunktionen abhängig erscheint, wird ziemlich weit geführt; sie ist aber doch so kompliziert, daß man sich darauf beschränken muß, für einige Sonderfälle sie hinzuschreiben. Erhält die Kugel z. B. die Ladung M, und ist die Dichte auf ihrer Oberfläche konstant, so ist

$$V_i = M\left(\frac{1}{a_1} - \frac{D-1}{D}\frac{1}{a_2} + \frac{D-1}{D}\frac{1}{a_3}\right),$$

$$V_L = M\left(\frac{1}{r} - \frac{D-1}{D}\frac{1}{a_2} + \frac{D-1}{D}\frac{1}{a_3}\right);$$

$$V_D = M\left(\frac{1}{Dr} + \frac{D-1}{D}\frac{1}{a_2}\right), \quad V_e = \frac{M}{r},$$

wo r die Länge irgend eines vom Kugelmittelpunkte gezogenen Radiusvektors ist. Hae.

E. ALMANSI. Sopra un problema di elettrostatica. Nuovo Cimento (5) 4, 81-94, 280-286.

Will man experimentell den Wert der Dichtigkeit der Elektrizität in einem Punkte der Oberfläche eines Leiters bestimmen, so berührt man mit einem sehr kleinen Konduktor den ersteren. Ist h die Dichte der Elektrizität auf dem großen Konduktor, e die Menge der Elektrizität, die von diesem auf den kleinen übergeht, so ist $e = K \cdot h$, wo die Größe K gegeben ist durch

$$K = w + \int \frac{\partial u}{\partial z} dS.$$

Für eine Halbkugel findet der Verf. $K = 3\pi R^2$, für ein Rotationsellipsoid

$$K = \frac{\cos^2\varphi}{1 - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\operatorname{tg}\varphi} w.$$

Hae.

C. BARUS. The behaviour of the phosphorous emanation in spherical condensers. Phil. Mag. (6) 3, 80-91.

Betrifft die Ionisationsvorgänge, die durch ein im Mittelpunkt eines Hohlkugelkondensators, dessen Äußeres zur Erde abgeleitet ist, angebrachtes Phosphorstückchen erzielt werden. Es werden Formeln für die zeitliche Veränderung des Potentials der inneren Belegung abgeleitet und mit Versuchsergebnissen verglichen. Br.

A. WÜLLNER und M. WIEN. Über die Elektrostriktion des Glases. Ann. der Phys. (4) 9, 1217-1260.

Verf. führt die Versuche von Quincke und anderen über die Volumenänderung von Kugel- und Zylinderkondensatoren im elektrischen Felde weiter. Aus den Laméschen Gleichungen ergibt sich für den Elastizitätskoeffizienten E einer Hohlkugel von der Wandstärke d, dem inneren Radius r_i und der Dielektrizitätskonstante ε bei einer Elektrizitätsmenge e und einer Volumenvermehrung des inneren Hohlraumes Δv:

$$E = \frac{e^2\left(1 - \frac{5}{2}\frac{d}{r_i}\right)}{2\varepsilon r_i \Delta v}.$$

Ein entsprechender Ausdruck wird für den Zylinder abgeleitet; dabei wird mit Sacerdote gegenüber Quincke und Lorberg beachtet, daß bei gleichem Potential die Druckdifferenz auf den halbkugelförmigen Endflächen größer ist als auf den Zylinderwänden. Gt.

G. Ercolini. Influenza della durata di carica sulla deformazione dei condensatori. Nuovo Cimento (5) 3, 353-372.

Die theoretischen Erörterungen, die sich an das reiche experimentelle Material anschließen, stützen sich auf Formeln, die Pellat im Journ. de Phys. Jan. 1898 gegeben hat. Hae.

C. Carpini. Determinazione del potenziale elettrostatico mediante la deformazione d'una superficie liquida. Rom. Acc. L. Rend. (5) 11_1, 65-69.

Mit Hülfe einer von Sella herrührenden Formel bestimmt der Verf. das elektrostatische Potential einer geladenen leitenden Kugel durch die Erhebung einer unter ihr befindlichen Flüssigkeitsoberfläche; hier von Olivenöl. Hae.

J. J. van Laar. De asymmetrie der electrocapillaircurve. Amst. Ak. Versl. 10, 753-768.

Ist ω die Oberflächendichte der Ladung in der Grenzschicht, so ist die Oberflächenspannung γ beim Lippmannschen Kapillar-Elektrometer gegeben durch

$$\gamma = \varphi_0 - A\omega - (k + \beta)\,\omega^2.$$

Die Elektrokapillarkurve besteht aus zwei ganz verschiedenen Parabelstücken, die in einem Punkte zusammenstoßen; doch ist der aufsteigende Zweig steiler als der abfallende (vgl. diesen Band S. 835). Hae.

E. R. v. Schweidler. Einige Fälle der Energieumwandlung bei der Ladung von Kondensatoren. Wien. Ber. 111, 573-578.

Für die drei betrachteten Fälle ist die Bedingung gemeinsam, daß die Ladung durch Verbindung der Kondensatorbelegungen mit den Polen einer Batterie konstanter elektromotorischer Kraft bewirkt wurde, während die Beschaffenheit des Dielektrikums verschieden ist.

Für ein absolut nichtleitendes und rückstandfreies Dielektrikum gilt allgemein der Satz: Wird ein Kondensator mit einem derartigen Elektrikum durch eine Batterie konstanter elektromotorischer Kraft geladen, so ist die im Schließungskreise entwickelte Stromwärme gleich der potentiellen Energie des geladenen Kondensators, die Arbeit der Batterie daher das Doppelte dieses Betrages. Für ein schlecht leitendes, aber rückstandfreies

Dielektrikum wird eine der potentiellen Energie des Kondensators gleiche Wärmemenge in der äußeren Leitung entwickelt, daneben eine Wärmemenge infolge des stationären Stromes.

Bei der Ladung eines rückstandbildenden Kondensators wird eine der potentiellen Energie der disponiblen Ladung gleiche Wärmemenge in der Zuleitung entwickelt, ferner außer der dem stationären Strome entsprechenden Menge eine der potentiellen Energie der Rückstandladung gleiche Wärmemenge im Dielektrikum. Rns.

E. R. v. Schweidler. Einige Versuche über Leitung und Rückstandsbildung in Dielektricis. Wien. Ber. **111**, 579-592.

Handelt von dem Widerstand und der Rückstandsbildung in Glas, Papier und verschiedenen Flüssigkeiten und ist vorzugsweise experimenteller Natur. Gt.

A. Maresca. Sulla energia svolta dalla scarica oscillante di un condensatore nei tubi a vuoto. Nuovo Cimento (5) **3**, 337-352.

Der Verf. untersucht die Energie, die von der oszillierenden Entladung eines Kondensators in leeren Röhren entwickelt wird; er findet, daß zwischen der in Form von Wärme entwickelten Energie q und dem Widerstand R des übrigen Teiles des Stromkreises die Beziehung

$$q = A + B/R$$

besteht, wo A und B Konstanten sind.

Weiter findet er die Beziehung $q/V^2 = \text{Const.}$ bei vermehrtem Potential V im Gegensatz zu W. Kaufmann, der früher die Beziehung $q/V^3 = \text{Const.}$ aufgestellt hatte.

Endlich ergab sich für die in der Röhre verbrauchte Energie, daß dieselbe anfangs stieg, bei einem bestimmten Druck ein Maximum erreichte und sich bei weiterer Verdünnung wieder verminderte. Fr.

A. Garbasso. Über die Entladungen eines Kondensators durch n parallel geschaltete Drähte. Ann. der Phys. (4) 8, 890-897.

Eine Kapazität C, deren Ladung q zur Zeit t ist, wird zur Erde durch n Drähte abgeleitet.

Für das elektrische Quantum q wird sowohl für den allgemeinen Fall wie auch unter Vernachlässigung der gegenseitigen Induktion die Differentialgleichung aufgestellt, und hierauf wird für beide Fälle ein Ausdruck für die Stromintensität abgeleitet. Zum Schluß wird der Fall betrachtet, in welchem das System der n Drähte durch einen Leiter ersetzt werden kann.

Im übrigen ist die Arbeit eine Anwendung der symbolischen Rechnungsmethode, von der Lord Rayleigh in seiner Theorie des Schalles Gebrauch gemacht hat. Rns.

A. GARBASSO. Sopra una quistione di elettrodinamica. Nuovo Cimento (5) 3, 372-382.

Behandelt mathematisch die Theorie der Entladung eines Kondensators durch n parallel laufende Drähte. Namentlich dem Falle $n = 2$ wird besondere Beachtung geschenkt; es befinden sich Theorie und Experiment für diesen in guter Übereinstimmung. Hae.

A. BATTELLI e L. MAGRI. Sulle scariche oscillatorie. Nuovo Cimento (5) 3, 177-235, 257-287.

Die höchst sorgfältigen Experimental-Untersuchungen über die Schwingungsdauer eines oszillierenden Stromes stellen die Richtigkeit der Thomson-Kelvinschen Formel

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

außer Zweifel. Hae.

A. BATTELLI e L. MAGRI. Sulle scariche oscillatorie. Torino Mem. (2) 51, 335-411.

Diese außerordentlich sorgfältige experimentelle Durcharbeitung des Phänomens der oszillatorischen Entladung ergibt eine befriedigende Übereinstimmung mit der Theorie von Thomson, Kirchhoff, Neumann und Lorentz, die bis dahin nicht immer den experimentellen Ergebnissen völlig entsprach. Die Oszillationsperiode wurde durch das von einem rotierenden Spiegel auf der photographischen Platte entworfene Bild bestimmt; zugleich wurde die bei Beginn des Versuchs vorhandene Energie, die tatsächlich entladene Energie und die als Wärme im Stromkreis zerstreute Energie gemessen. Die Summe der durch die Entladung im Funken und im metallischen Stromkreis entwickelten Wärmeenergien stimmt ausreichend genau überein mit der Größe der Ladungsenergie des Kondensators. Fr.

L. MANDELSTAM. Bestimmung der Schwingungsdauer der oszillatorischen Kondensatorentladung. Ann. der Phys. (4) 8, 123-148; Diss. Straßburg.

Die Methode beruht auf dem schon von Rutherford angewandten Prinzip: „Der oszillierende Strom gabelt sich zwischen einer Selbstinduktion und dem einen Thermometerdraht eines Differentialthermometers einerseits, einem induktionslosen Widerstand und dem zweiten Thermometer anderseits. Indem man die Wärmewirkung in beiden Drähten gleich macht, sucht man einen Ohmschen Widerstand, der ebenso groß ist wie der scheinbare induktive, wodurch bei gegebener Selbstinduktion sich die Schwingungszahl bestimmt.“ Die Ströme werden als quasistationär, die durch bekannte Methoden bestimmten Selbstinduktionskoeffi-

zienten auch für schnelle Schwingungen als richtig angenommen. Die Schwingungsdauer wird dann für zwei Versuchsanordnungen berechnet, durch die Versuche die Methode bestätigt, und es werden die Grenzen der Anwendbarkeit bestimmt. Fr.

E. Alessandrini. Sull'elettricità sviluppata per gorgoglio d'aria in acqua. Nuovo Cimento (5) 4, 389-402.

Für die Elektrisierung von Luftblasen beim Durchgang durch Wasser leitet Verf. als Ausdruck des Potentials die Formel ab:

$$V = \frac{k}{m+p}\left(1 - e^{-(m+p)t}\right);$$

er prüft dieselbe auch für den Fall, daß das Wasser Beimengungen von anderen Substanzen enthält. Hae.

J. Stark. Nachtrag über die Gültigkeitsgrenze des Ohmschen Gesetzes. Ann. der Phys. (4) 7, 932-934.

Verf. ersetzt eine von ihm (Ann. der Phys. 5) aufgestellte Formel durch eine andere, welche aussagt, „daß die Abnahme der Kraft auf der mittleren freien Weglänge klein sein muß im Verhältnis zur Kraft am Ende der freien Weglänge.“ Gt.

W. Feussner. Über Stromverzweigung in netzförmigen Leitern. Ann. der Phys. (4) 9, 1304-1329.

Für die Berechnung der Stromstärke in netzförmig verbundenen Drähten gestatten die Kirchhoffschen Sätze, die Stromstärke in jedem Zweige als Quotienten zweier Determinanten darzustellen. Aber die Ausrechnung derselben ist selbst nach der neueren Methode von W. Ahrens (Math. Ann. 49, 311, 1897) eine sehr umständliche. Es ist daher wünschenswert, leichtere Wege zu kennen, um die gesuchten Größen zu erhalten.

Nach Definition eines Drahtnetzes und des Begriffes eines Verzweigungspunktes führt Verf. die allgemeine Aufgabe auf die einfachere zurück, die Stromstärken in einem beliebigen Netz bei der Wirkung nur einer elektromotorischen Kraft E zu bestimmen.

Die Entwicklung von Nenner und Zähler geschieht nicht rein mathematisch, sondern mit Hülfe einfacher physikalischer Sätze gelangt Verf. in bezug auf den Nenner N zu dem Satze:

Das N eines beliebig gegebenen Netzes ist eine Summe, deren einer Summand der Widerstand w_a eines beliebigen Drahtes a des Netzes multipliziert mit dem N eines Netzes ist, das aus dem gegebenen durch Wegnahme von a entsteht, und dessen anderer Summand das N eines Netzes ist, das aus dem gegebenen durch Wegnahme von a und Zusammenlegung der beiden Netzpunkte entsteht, die a verband.

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes wird die Bildung des Nenners der i für ein gegebenes Netz auf die Betrachtung immer einfacherer Netze zurückgeführt.

In ähnlicher Weise wird die Vorschrift für die Bildung des Zählers gewonnen. Diese allgemeinen Betrachtungen finden im weiteren ihre Anwendung auf die Netze im einzelnen von zwei bis fünf Verzweigungspunkten. Rns.

BERTHELOT. Recherches sur les forces électromotrices. C. R. **134**, 793-807.

Unterscheidet die scheinbare chemische Wärme, die wahre chemische Wärme und die Voltawärme einer Batterie. Gt.

P. STRANEO. Misura della diffusione elettrolitica dei numeri di trasporto e della mobilità dei ioni. Rom. Acc. L. Rend. (5) **11**$_1$, 58-65, 171-177.

Es sollen der Diffusionskoeffizient und die Überführungszahlen unter Ausschluß von Diaphragmen so bestimmt werden, daß bei der Messung nur eine geringe Konzentrationsänderung stattfindet. In der ersten Abhandlung wird die Untersuchung des Falles einer verdünnten Lösung eines einzigen Elektrolyten, in der zweiten der Fall durchgeführt, wo die Lösung des Elektrolyten nicht vollständig dissoziiert ist. Die elektromotorische Kraft ergibt sich entweder

$$E = 2 \cdot \frac{866 \cdot 10^{-4}}{n'} \cdot \frac{T(1-n)^2}{D'} \cdot \frac{i}{q} L \cdot \frac{\varepsilon}{c_0} \text{ Volt},$$

oder

$$E = 1732 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1+(k-1)\alpha}{n' c_0} \cdot \frac{(1-n)^2}{D_1} \cdot T \cdot \frac{i \varepsilon L}{q} \text{ Volt},$$

indem sich Verf. auf die Nernstsche und auf die Ficksche Formel stützt. Hae.

G. DI CIOMMO. Sulla conducibilità elettrica dei liquidi isolanti e dei loro miscugli. Nuovo Cimento (5) **3**, 97-121.

Die Abhandlung, von der ein Auszug in Phys. Zeitschr. **3**, 373-374 erschienen ist, handelt von der Leitfähigkeit flüssiger Kohlenwasserstoffe und ihrer Mischungen. Je nach der Größe des Widerstandes der Flüssigkeit werden zwei verschiedene Methoden angewandt, entweder mit Hülfe eines Quadrantenelektrometers, oder (die „Methode des Ladungsverlustes“) mit Hülfe eines Kondensators. Bei allen Flüssigkeiten zeigen sich Spuren von Leitfähigkeit. In bestimmten Fällen zeigt sich, daß die Mischung eine höhere Leitfähigkeit besitzt als die Bestandteile. Gt.

W. Nernst u. E. H. Riesenfeld. Über elektrolytische Erscheinungen an der Grenzfläche zweier Lösungsmittel. Ann. der Phys. (4) 8, 600-608.

Es wird eine Theorie der Erscheinungen aufgestellt, die durch Elektrolyse an der Grenzfläche zweier Lösungsmittel erzeugt werden. Unter Benutzung des Fickschen Diffusionsgesetzes wird die Differentialgleichung

$$\frac{\partial m_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 m_1}{\partial x_1^2}$$

mit den zugehörigen Grenzbedingungen abgeleitet, in welcher m_1 die durch den Querschnitt 1 in der Zeiteinheit hindurchdiffundierende Menge, x_1 den Abstand von der Trennungsfläche, D_1 den Diffusionskoeffizienten des Elektrolyten im ersten Lösungsmittel bedeutet. Im Integral m_1 tritt das Wahrscheinlichkeitsintegral auf. Eine weitere Quadratur liefert die Konzentration. Es zeigt sich folgendes Gesetz: „Der Elektrolyt diffundiert in die beiden Lösungsmittel nach Maßgabe des Teilungsverhältnisses und des Verhältnisses der Quadratwurzeln aus den Diffusionskoeffizienten.“ Schließlich wird eine Methode zur Bestimmung der Überführungszahl angegeben (vgl. F. d. M. **32**, 859, 1901). Gt.

W. Hittorf. Bemerkungen zum Aufsatze der Herren Nernst und Riesenfeld: Über elektrolytische Erscheinungen an der Grenzfläche zweier Lösungsmittel. Ann. der Phys. (4) 9, 243-245.

Nernst hatte den Erscheinungen, welche dünne Darmhäutchen in Salzlösungen beim Durchgange des elektrischen Stromes zeigen, eine Deutung gegeben, welche Verf. nicht für richtig halten kann. Dieses aus zwei Gründen, von denen für den einen, daß die Überführungszahlen in der gequollenen Masse unverändert bleiben, in der Abhandlung der experimentelle Nachweis erbracht wird. Rns.

W. Sutherland. Ionization, ionic velocities, and atomic sizes. Phil. Mag. (6) 3, 161-177.

Enthält in theoretischer Beziehung die Ableitung einer Formel für die spezifische molekulare Leitungsfähigkeit eines Elektrolyten in Abhängigkeit von den übrigen Größen, die für den elektrolytischen Leitungsvorgang von Bedeutung sind. Br.

J. Stark. Über Ionisierung von Gasen durch Ionenstoß. Ann. der Phys. (4) 7, 417-439.

Die Aufgabe der vorliegenden Abhandlung besteht darin, theoretische Gesichtspunkte für die experimentelle Forschung zu gewinnen.

Sie behandelt in drei Abschnitten das Ion als Ionisator, die Ionisierung im Innern eines durchströmten Gases und die Ionisierung in der Grenzfläche

eines durchströmten Gases. In dem ersten Abschnitte finden die energetischen Verhältnisse ihre Erörterung, in dem zweiten die Schichtungsverhältnisse, in dem dritten die Grenzionisierung an der Anode und Kathode.

Rns.

C. NEUMANN. Über die Maxwell-Hertzsche Theorie. I. Abhandlung. Leipz. Abh. 27, 213-348.

Der Verf. vergleicht die Maxwell-Hertzschen Gleichungen mit den Poissonschen und kommt zu dem Ergebnisse, daß entgegen seinen eigenen früheren Behauptungen die Hertzschen Gleichungen invariant sind, wie sich aus der direkten Transformation von einem Achsensystem auf ein anderes, das sich in beliebiger Bewegung hierzu befindet, ergibt. Die Annahme, daß gewisse, über eine unendlich ferne Fläche ausgedehnte Integrale Null seien, die unmotiviert geblieben ist, wird annehmbar gemacht, da die Größen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$; $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ im Unendlichen von der Ordnung $1/\varrho^2$ sind, falls sie im betrachteten Zeitraum konstant bleiben. Elektrizität und Magnetismus sind als wirkliche Materien aufzufassen. Die Anwendung der Hertzschen Gleichungen auf Probleme der Elektrostatik und der magnetischen Verteilung zeigt u. a., daß freie Oberflächenbelegungen bei Isolatoren und freier Magnetismus bei Stahlmagneten in der Grenzschicht erscheinen, während dies bei Poisson nicht der Fall ist. Diese Unterschiede verschwinden nur, wenn Isolator und umgebende Luft gleiche Dielektrizitätskonstanten haben, oder Luft und Stahlmagnet gleiche Magnetisierungskonstanten. Fr.

C. NEUMANN. Über die Maxwell-Hertzsche Theorie. II. Abhandlung. Leipz. Abh. 27, 755-860.

Die allgemeinen Untersuchungen der ersten Abhandlung werden hier namentlich auf die stationären elektromagnetischen Zustände in ruhender Substanz in Anwendung gebracht. Zunächst wird ein ringförmig zusammengesetzter Konduktor (galvanische Kette) in freier Luft, die freie Elektrizität und ihr Potential φ, die elektrischen Dichten und Strömungen sowie der freie Magnetismus und sein Potential ψ und die magnetischen Dichten und Zustände behandelt. Im nächsten Kapitel werden für ein System von Konduktoren die Integralgesetze der ponderomotorischen Kräfte abgeleitet. Es ergibt sich dabei das Resultat, daß alle diese ponderomotorischen Wirkungen im wesentlichen völlig im Einklang sind mit denjenigen Formeln, die aus den Theorien von Poisson, Ampère und F. Neumann entspringen. — Im letzten Teil endlich wird gezeigt, daß hinsichtlich der induzierten elektrischen Ströme in der Maxwell-Hertzschen Theorie ein wesentlicher Mangel vorhanden ist, den man einstweilen schwerlich wird beseitigen können; für Wismut und weiches Eisen kann man nämlich nicht den konstanten Magnetisierungskoeffizienten der umgebenden homogenen Luft $\mu_0 = 1$ setzen, weil man dann zu unannehmbaren Resultaten gelangt.

In einer Nachschrift schlägt jedoch der Verf. vor, auch für Wismut und Eisen $\mu_0 = 1$ zu setzen und deren Magnetisierbarkeit durch Ampèresche Molekularströme zu erklären. Fr.

E. Kohl. Über eine Erweiterung der Stefanschen Entwicklung der Maxwellschen Gleichungen für ungleichartige Mittel. Monatsh. f. Math. 13, 156-184.

Diese Betrachtungen verfolgen das Ziel, die Stefanschen Entwicklungen über Elektrizitätsbewegung, die bisher nur für gleichartige Mittel Geltung hatten, auch auf ungleichartige Mittel auszudehnen und zu zeigen, daß auch die ältere Theorie auf die Maxwellschen Gleichungen führt. Der Verf. verfährt nach dem Vorbilde Boltzmanns, in dessen Werk über die Maxwellsche Theorie die Form der Fernwirkungsgleichungen entwickelt ist, die im Verein mit der Annahme, daß die Gesamtströmung überall in geschlossenen Bahnen vor sich geht, die Maxwellschen Nahewirkungsgleichungen ersetzen. Fr.

E. Carvallo. Équations générales de l'électrodynamique dans les conducteurs et les diélectriques parfaits en repos. C. R. 134, 36-39.

E. Carvallo. Électrodynamique des corps en mouvement. C. R. 134, 165-168.

Die Grundlage der Betrachtungen, aus denen der Verf. die Gleichungen der Elektrodynamik für ruhende und bewegte Körper ableitet, bilden die beiden Kirchhoffschen Gesetze: 1. Der totale Strom durch eine geschlossene Fläche ist gleich Null. 2. Die gesamte elektromotorische Kraft ist in jedem geschlossenen Stromkreise gleich Null. Hae.

Liénard. Sur l'application des équations de Lagrange aux phénomènes électrodynamiques et électromagnétiques. C. R. 134, 163-165.

Carvallo hatte behauptet, indem er als Beispiel das Barlowsche Rädchen anführt, daß die Lagrangeschen Gleichungen auf die elektrodynamischen Erscheinungen nicht anwendbar sind, besonders wenn es sich um zwei- und dreidimensionale Leiter handelt. Verf. zeigt, daß diese Einschränkung unrichtig ist, daß man vielmehr doch zu den exakten Gleichungen für jenen Apparat kommt, und er zeigt ferner, worin der Irrtum Carvallos besteht. Hae.

Ed. Riecke. Zur Bewegung eines elektrischen Teilchens in einem konstanten elektromagnetischen Felde. Ann. der Phys. (4) 7, 401-407.

Nach Festsetzung der Bezeichnung und des Koordinatensystems wird

für die Anfangsgeschwindigkeit in der Richtung y, welche die Achsen G und N zu einem rechtwinkligen System ergänzt, der Wert gefunden

$$c_0^y = \frac{c_0^f - c_0^h \cos\alpha}{\sin\alpha},$$

wenn α der Winkel der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ und der elektrischen $\mathfrak{F}$ ist.

Verschwindet die magnetische Feldintensität, so ist die Bahn des Teilchens eine Parabel, deren Achse parallel ist der Richtung der elektrischen Kraft. Verschwindet dagegen die elektrische Feldintensität, so beschreibt das Teilchen im Raum eine Schraube.

Stehen die Linien des magnetischen und des elektrischen Feldes aufeinander senkrecht ($\alpha = \frac{1}{2}\pi$), so ergibt sich für das Teilchen die Drehung in einem Kreise. Wenn die lineare Geschwindigkeit desselben größer ist als der absolute Wert der Geschwindigkeit, mit der sich der Mittelpunkt des Kreises in der Richtung der zu $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{F}$ senkrechten N-Achse verschiebt, so ist die Projektion der Bahn auf die zu der magnetischen Kraft senkrechte Ebene $\mathfrak{F}N$ eine verkürzte Cykloide. Ist dieselbe kleiner, so ergibt sich als Projektion der Bahn eine verlängerte Cykloide. Dagegen erhält man eine gewöhnliche Cykloide, wenn $c_0^h = c_0^f = 0$ ist.

Ist $\alpha = 0$, so beschreibt das Teilchen im Raume eine Schraube mit gleichmäßig zunehmender Ganghöhe. Rns.

L. Donati. Sui vettori elettromagnetici. Bologna Mem. (5) **9**, 477-489.

Verf. will in allgemeinerer Form, als es gewöhnlich geschieht, das Gesetz der Induktion aus dem Prinzip der Energie herleiten, um so auf die einfachste Weise die Charakteristik des elektromagnetischen Feldes zu erhalten. Hae.

E. Hoppe. Unipolare Induktion. Ann. der Phys. (4) **8**, 663-674.

Verf. versucht nachzuweisen, daß „in einem mit einem Magneten fest verbundenen rotierenden Leiter kein Strom induziert wird, daß also auch keine statische Elektrizitätsladung dadurch erzeugt werden kann“. Nach E. Lecher (Ann. der Phys. (4) **9**, 248) sind dies zwei verschiedene Fragen, deren erste sich bei Hoppes Versuchsanordnung von vornherein beantwortete, während die zweite nur mit ungeschlossenen Strömen entschieden werden kann. Zur Theorie benutzt Hoppe die bekannten Ausdrücke für die Komponenten der elektromotorischen Kraft, die sich für seinen Versuch spezialisieren, und erhält für das Potential der strömenden Elektrizität auf den Punkt $(x\,y\,z)$, wenn $r^2 = x^2 + y^2$ ist,

$$V = \frac{n\mu z}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \text{const.},$$

wo n die Winkelgeschwindigkeit der Rotation und μ den Magnetismus des Pols bedeutet. Gt.

W. B. Morton. On the forms of the lines of electric force and of energy flux in the neighbourhood of wires leading electric waves. Phil. Mag. (6) **4**, 302-314.

Wenn elektromagnetische Energie durch einen nicht absoluten Leiter geleitet wird, so fließt die Energie nicht immer schräg durch die Oberfläche in den Leiter hinein, sondern es kommen auch unter gewissen Umständen Stellen vor, an denen sie entweder auswärts entlang oder einwärts zurück fließt. Verf. untersucht die entsprechenden Bedingungen für den Fall zweier parallelen Leiter. Es ergibt sich, daß bei Drähten von geringem Widerstand diese Störungsregion etwa den achten Teil der Wellenlänge einnimmt, welcher Anteil bei größerem Widerstand schließlich bis auf unter ein Sechzehntel herabgeht, dann aber mit dem Widerstand wieder bis auf nahezu die Anfangsgröße wächst. Die Energie fließt im ersten Fall außerhalb vorwärts, im zweiten teils außerhalb vorwärts, teils innerhalb zurück, im dritten ganz innerhalb, aber teils vorwärts, teils zurück. Br.

N. Vasilesco-Karpen. Principe relatif à la distribution des lignes d'induction magnétique. C. R. **134**, 88-90.

Bei der praktischen Anwendung des verallgemeinerten Kirchhoffschen Gesetzes muß man den Verlauf der Induktionslinien kennen; dieser wird aus folgendem Gesetz erhalten, das Verf. aus der Kontinuitätsgleichung ableitet: In einem magnetischen Mittel, das der Einwirkung einer gewissen Anzahl magnetomotorischer Kräfte unterworfen wird, ist der Verlauf der Induktionslinien so, daß die innere Energie des Mittels ein Maximum ist. Gt.

N. Vasilesco-Karpen. Sur la réaction magnétique de l'induit des dynamos. C. R. **134**, 827-829.

Die Abhandlung deckt durch Rechnung und durch experimentelle Verifikation derselben einige Ursachen auf, durch welche die bisherige Theorie mit den Tatsachen in Widerspruch war. Rns.

G. Picciati. La teoria di Hertz applicata alla determinazione del campo elettromagnetico generato dalla traslazione uniforme d'una carica elettrica parallelamente ad un piano conduttore indefinito. Rom. Acc. L. Rend. (5) **11**$_2$, 221-229.

Nach dem Vorbilde von Levi-Civita leitet der Verf. die Kräfte der elektromagnetischen Induktion, die durch die geradlinige gleichförmige Bewegung einer elektrischen Ladung m parallel zu einer leitenden Ebene

von der Leitfähigkeit k erzeugt werden, ab. Er erhält für die Komponenten parallel zu der Ebene:

$$X_1 = \frac{d}{d\xi}\left\{\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu + \frac{m}{V}\right\} + a\frac{dU_1}{d\xi},$$

$$Y_1 = \frac{d}{d\xi}\left\{\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu + \frac{m}{V}\right\} + a\frac{dV_1}{d\xi},$$

$$L_1 = \frac{dV}{d\zeta},\quad M_1 = -\frac{dU_1}{d\zeta},$$

für die Komponenten normal zur Ebene:

$$N_1 = \frac{dU_1}{d\eta} - \frac{dV_1}{d\xi},$$

$$Z_1 = -\frac{d}{d\zeta}\left\{\frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu - \frac{m}{V}\right\}.$$

Darin ist d der Abstand der Ladung von der Ebene, c die Geschwindigkeit der Bewegung; die Koordinaten ξ, η, ζ beziehen sich auf den Ort der Ladung; $a = cA$, wo A die reziproke Lichtgeschwindigkeit;

$$V^2 = \xi^2 + (1-a^2)\,[\eta^2 + (|\zeta| + d)^2],$$

$$\tau^2 = \left(\xi + \frac{ak}{2\pi}\mu\right)^2 + (1-a^2)\,[\eta^2 + (|\zeta| + d + \mu)^2].$$

U_1 und V_1 sind definiert durch:

$$V_1 = \frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty d\mu \int_0^\infty \frac{d^2}{d\xi\, d\eta}\left(\frac{1}{\theta}\right)dv,$$

$$U_1 = \frac{ma^2k}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\mu - \frac{mak}{2\pi}\int_0^\infty d\mu \int_0^\infty \frac{d^2}{d\eta^2}\left(\frac{1}{\theta}\right)dv - \frac{am}{V},$$

endlich ist

$$\theta^2 = \left(\xi + \frac{ak}{2\pi}\mu + av\right)^2 + (1-a)^2\left[\eta^2 + \left(|\zeta| + d + \mu + \frac{k}{2\pi}v\right)^2\right].$$

Fr.

A. Righi. Ancora sulla questione del campo magnetico generato dalla convezione elettrica. Nuovo Cimento (5) 3, 71-80.

Bei den meisten Versuchen über die magnetische Wirkung elektrischer Konvektion befindet sich zwischen der bewegten Ladung und der Magnet-

nadel ein metallischer Schirm. Der Verf. hatte bereits in einer früheren Arbeit nachzuweisen versucht, daß man im allgemeinen nicht annehmen dürfe, derselbe sei auf das erzeugte Magnetfeld ohne Einfluß. Inzwischen ist das Problem von Levi-Civita mathematisch gelöst; nimmt man an, daß die Geschwindigkeit der Ladung zur Lichtgeschwindigkeit in einem sehr kleinen Verhältnis a steht, so ergeben sich die Komponenten der magnetischen Kraft parallel zu dem Schirme gleich Null, für die Komponente senkrecht zu demselben:

$$\mathfrak{M} = M \frac{1}{1+\sqrt{1+h^2}},$$

wo $h = 2\pi a/k$, M die ohne den Schirm vorhandene magnetische Kraft und k den Widerstand eines Quadratzentimeters des Schirmes für einen durch die eine Seite des Quadrats eintretenden und durch die gegenüberliegende Seite austretenden Strom bezeichnet. Für eine Geschwindigkeit der Ladung von 300 m und eine Dicke des kupfernen Schirmes von 1 mm ergibt die Rechnung $\mathfrak{M} = 0{,}08\, M$. Daß dieser Einfluß bei den bisherigen Versuchen gar nicht hervortrat, erklärt sich nach dem Verf. dadurch, daß bei der Berechnung der Fall einer geradlinig bewegten Einzelladung angenommen wurde, während bei den Versuchen die Ladungen sich auf einer in Sektoren geteilten Kreisscheibe befanden. Letzterer Fall nähert sich aber dem Fall der stationären Konvektion, für den nach der Rechnung $M = \mathfrak{M}$ wird. Fr.

A. H. Bucherer. Über das Kraftfeld einer sich gleichförmig bewegenden Ladung. Ann. der Phys. (4) 8, 326-335.

Untersucht wird die Kraft, die auf eine an der Bewegung teilnehmende Einheitsladung im Felde des bewegten geladenen Körpers ausgeübt wird. Der Äther wird als ruhend angenommen. Die elektrischen und magnetischen Erscheinungen werden als durch Elektronen bedingt erklärt, und alle Arten von Strömen werden als Abarten von Verschiebungsströmen aufgefaßt. Die von Fitzgerald erweiterte Maxwellsche Gleichung umfaßt nicht die von Röntgen bei der Bewegung eines Dielektrikums im elektrischen Felde beobachteten Ströme; auch bereiten die ihr zugrunde liegenden Annahmen der Vorstellungskraft Schwierigkeiten. Diese Erwägungen führten den Verf. dazu, das Wesen der Stromerzeugung in allen Fällen als durch eine bestimmte Bewegung der Verschiebungslinien im Äther bedingt zu erkennen. Nach Berechnung der Kraft wird, unter Benutzung der Arbeiten von Searle, die Bewegung eines geladenen Rotationsellipsoids längs der Rotationsachse betrachtet. Von besonderer Wichtigkeit erscheint die Eigenschaft der Kraft, daß sie bezüglich einer Ebene, die man sich durch den Äquator des Ellipsoides gelegt denkt, symmetrisch verteilt ist. Verf. gibt zum Schluß der Überzeugung Ausdruck, indem er sich eine eingehendere rechnerische Behandlung vorbehält, daß die Superposition der Translationsgeschwindigkeit über die Schwingungsgeschwindigkeit auch bei einem leuchtenden Punkte — einem System

von schwingenden Elektronen — die Symmetrie der Strahlung nicht stören kann. Die sorgfältigen Experimente von Michelson und Morley stehen hiermit im Einklang und sprechen somit nicht gegen die Hypothese des unbeweglichen Äthers. Fr.

A. Szarvassi. Über die magnetischen Wirkungen einer rotierenden elektrisierten Kugel. Wien. Ber. **111**, 1053-1065.

Die von Rowland experimentell untersuchte Frage, ob eine rotierende elektrische Ladung magnetische Wirkungen äußere, wird hier auf Grund der Hertzschen Gleichungen unter Anwendung von Vektorsymbolen theoretisch behandelt. Es wird zunächst gezeigt, daß Hertz' Voraussetzung, wonach die Geschwindigkeit u, welche nach der Ableitung die der Kraftlinien bedeutet, gleichzeitig die des Mediums sei, auf einen Widerspruch führt. Nimmt man dagegen an, daß die Kraftlinien sich auch relativ gegen das Medium bewegen können, so zeigt sich, daß die Rotation eines um die Achse vollkommen symmetrischen elektrischen Körpers keine magnetischen Wirkungen hat. Es werden die magnetischen Wirkungen für den Fall der Konvektion wahrer Elektrizität berechnet, und zum Schluß wird eine Anwendung auf den Erdmagnetismus gemacht. Gt.

R. Gans. Über Induktionen in rotierenden Leitern. Zs. f. Math. u. Phys. **48**, 1-28; Diss. Straßburg. 32 S.

Aus den von Hertz erweiterten Maxwellschen Gleichungen für bewegte Körper wird das elektromagnetische Feld für den Fall bestimmt, daß in einem gegebenen statischen magnetischen Felde ein leitender homogener Rotationskörper, in dessen Innerem kein wahrer Magnetismus vorhanden ist, sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um seine Achse dreht und der Vorgang stationär geworden ist. Hierzu werden unter Anwendung von Vektorsymbolen krummlinige orthogonale Koordinaten eingeführt; die Quadratur zur Bestimmung von V erfolgt durch Dekomposition. Als spezielle Fälle werden die Kugel (unter Einführung von Kugelkoordinaten), das verlängerte und das abgeplattete Rotationsellipsoid, die Aragosche Scheibe und ein unendlich langer Kreiszylinder behandelt. Zum Schluß wird an dem Beispiel der rotierenden Kugel gezeigt, daß, im Gegensatz zu Hertz, die elektromagnetische Energie gegen die kinetische nicht vernachlässigt werden darf. Gt.

T. Levi-Civita. Influenza di uno schermo conduttore sul campo elettromagnetico di una corrente alternativa parallela allo schermo. Nuovo Cimento (5) **8**, 442-455; Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{11}_1$, 163-170, 191-198, 228-237.

'Verf. untersucht auf theoretischem Wege, welchen Einfluß auf das elektromagnetische Feld eines geradlinigen sinoidalen Wechselstromes ein

Schirm in Gestalt einer metallischen Scheibe ausübt, die dem Strom parallel ist. Das Dazwischentreten des Schirms verdoppelt die Neigung der magnetischen Kraft gegen die Spur des Schirms, verringert die Maximalintensität der magnetischen Kraft in einem angegebenen Verhältnis, verzögert die Phase um eine Viertelperiode und bewirkt eine bedeutende Reduktion der elektrischen Kraft, so daß sie zu vernachlässigen ist. Die Kraftlinien sind Kreise, welche eine Parallele zum Schirm berühren. Eine experimentelle Bestätigung würde nach des Verf. Ansicht neues Licht auf die Hypothesen werfen. — Die Abhandlung im Nuovo Cimento enthält nur einen Abriß, die Akademieberichte dagegen geben die ausgeführte Entwicklung, und zwar im ersten Teil die Aufstellung des Problems, im zweiten die strenge Lösung und im dritten eine praktisch brauchbare Annäherung und physikalische Deutung. Gt.

F. MACCARONE. Conducibilità e ritardo di polarizzazione dielettrica. Nuovo Cimento (5) **4**, 313-360.

Im Anschluß an eine seiner früheren Arbeiten (Nuovo Cimento (5) **2**, 1901; Phys. Zeitschr. **4**, 1901) untersucht Verf., welchen Einfluß die Dauer des elektrischen Feldes auf die dielektrische Polarisation ausübt. Im allgemeinen (außer bei reinem Paraffin) wächst die Polarisation mit der Dauer des Feldes. Bei konstantem Felde hängt die Polarisation p von der Zeit t nach dem Gesetze ab:

$$p = A - B \cdot 10^{-ct}.$$

Dasselbe ist dem folgenden äquivalent:

$$u = \lambda X = \varrho \alpha,$$

wobei u den Strom, X die äußere elektromotorische Kraft und α die Polarisation bedeutet. Gt.

A. LAMPA. Zur Molekulartheorie anisotroper Dielektrica. Mit einer experimentellen Bestimmung der Dielektrizitätskonstante einer gespannten Kautschukplatte senkrecht zur Spannungsrichtung. Wien. Ber. **111**, 982-995.

Verf. hatte früher (Wien. Ber. **104**) die Clausiussche Theorie der Dielektrika unter der Annahme regelmäßiger Verteilung und ellipsoidischer Gestalt der leitenden Partikel verallgemeinert. In der vorliegenden Abhandlung legt er die Annahme verschieden dichter Anordnung von kugelförmigen Molekeln zugrunde. Für das Potential des Dielektrikums erhält man bei beiden Hypothesen denselben Ausdruck. Die Anwendung auf den Plattenkondensator schließt sich an. Die Ausdrücke für die „Raumerfüllung“ sind für beide Annahmen verschieden; nach des Verf. Ansicht könnte der Versuch darüber entscheiden, welche von beiden vorzuziehen ist. Zum Schluß werden an einem Beispiel die Formeln experimentell geprüft; die berechnete Dielektrizitätskonstante steht in guter Übereinstimmung mit der beobachteten. Gt.

R. Fellinger. Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten von Kristallen im homogenen elektrischen Felde. Ann. der Phys. (4) 7, 333-357.

Zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten von Kristallen besitzen wir außer den Methoden von Boltzmann und von Curie die von Graetz und Fomm. Diese letztere beruht darauf, daß in einem homogenen elektrischen Felde dielektrische Körper, von einer gegen die Feldrichtung unsymmetrischen Form, Drehmomente erleiden, denen durch die Torsion des Aufhängefadens das Gleichgewicht gehalten wird. Es werden zunächst die Formeln für ein aus einem optisch zweiachsigen Kristall geschnittenes Ellipsoid aufgestellt, dessen Achsen mit den Hauptrichtungen der Dielektrizität zusammenfallen; die Spezialisierung für ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsachse der Reihe nach die drei verschiedenen Dielektrizitätskonstanten besitzt, liefert drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Dielektrizitätskonstanten. Es folgen Spezialisierungen für dünne Scheiben und Stäbchen. Gt.

H. Muraoka und T. Tamaru. Über die Veränderung der elektrischen Leitungsfähigkeit eines Pulvers durch Induktion. Ann. der Phys. (4) 7, 554-561.

Sundorphs Versuche (Ann. der Phys. (3) **68**), bei welchen Eisen- und Nickelpulver durch Kurzschluß zu einem guten Leiter wurde, werden fortgeführt. Das Pulver wird mit den dasselbe einschließenden beiden Metallstäben als Kondensator betrachtet; nach Kirchhoff und Thomson läßt sich dann das erste maximale Potential des Kondensators entwickeln. Die Wurzeln der quadratischen Gleichung, auf welche die Differentialgleichung für die Potentialdifferenz führt, lassen unter bestimmten Annahmen erkennen, daß eine oszillatorische Entladung stattfindet.

Gt.

Ch. Féry. Sur la température de l'arc électrique. C. R. **134**, 1201-1204.

Nachdem Verf. früher eine Methode angegeben hat, mit Hülfe des Stefanschen Gesetzes die Temperatur des Bogenlichtkraters zu bestimmen, beschreibt er hier eine zweite, welche die Wiensche Strahlungsformel zugrunde legt. Aus den Versuchsergebnissen schließt er, daß die Kohle am Siedepunkt sich nicht wie ein vollkommen schwarzer Körper verhält.

Gt.

P. Janet. Quelques remarques sur la théorie de l'arc chantant de Duddell. C. R. **134**, 821-823.

Die singende Bogenlampe von Duddell ist ein bemerkenswertes Beispiel dafür, mittels kontinuierlicher elektromotorischer Kraft einen Wechselstrom zu erhalten. Von Interesse sind die Werte des Stromes und die Verteilung der Energie in den Leitungen, deren Resultate angegeben werden. Rns.

H. Diesselhorst. Zur ballistischen Methode der Messung von Elektrizitätsmengen. Ann. der Phys. (4) 9, 712-723.

Bei den meisten Anwendungen, die das ballistische Galvanometer zur Messung von Elektrizitätsmengen findet, ist die Annahme gestattet, daß die Zeitdauer des elektrischen Vorgangs gegen die des mechanischen verschwindet. Wenn dies nun eintritt, noch ehe eine merkliche Verschiebung des beweglichen Systems stattgefunden hat, so erhält das letztere eine Anfangsgeschwindigkeit, die der Elektrizitätsmenge proportional ist. Hierfür hat E. Dorn (Ann. d. Phys. (3) 17, 1882) allgemeine Formeln aufgestellt. Wenn aber die obige Voraussetzung nicht gilt, so ist die Bewegung abhängig von der Zeitdauer und der Form des durch das Galvanometer fließenden elektrischen Stromes. Verf. zeigt, daß in der von ihm gegebenen erweiterten Theorie, wie bei Dorn, die Glieder erster Ordnung fortfallen, so daß kleine Versehen in der rechtzeitigen und schnellen Erteilung der Stromstöße, wie auch die Stromform sel. noch nicht ins Gewicht fallen. Hae.

W. Williams. On the temperature variation of the electrical resistances of pure metals, and allied matters. Phil. Mag. (6) 4, 515-532.

Enthält in theoretischer Hinsicht Ableitungen über die Abhängigkeit des Widerstandes der Metalle von der Temperatur, die aber nichts Neues bringen und nur für Versuchszwecke aufgestellt sind. Br.

J. J. Thomson. On the effect of a transverse magnetic field on metallic resistance. Phil. Mag. (6) 3, 353-356.

Kurze Note, wonach die Annahme, die Stromleitung durch Metalle bestehe in einem Transport von Elektronen, zur Folge haben müsse, daß eine transversale magnetische Kraft den Widerstand erhöhe und nicht verringere, wie dies Everdingen gefolgert habe. Br.

H. du Bois. Über störungsfreie Differentialmagnetometer. Ann. der Phys. (4) 9, 938-945.

Es wird gezeigt, daß angesichts der verschiedenartigen Umstände es sich nicht empfiehlt, für Differentialmagnetometer eine bestimmte Konstruktion festzulegen, sondern daß sich eine derartige Anordnung im Einzelfalle leicht zusammenstellen läßt. Rns.

G. Giorgi. Il funzionamento del rocchetto di Ruhmkorff. Atti dell' Assoc. Elettr. Italiana 6, 15 S. gr. 8°.

Gibt unter Angabe der Literatur eine Kritik der vorhandenen Theorie des Apparates und spricht die Ansichten des Verf. aus, unter welchen

Gesichtspunkten man neues experimentelles Material sammeln müßte, um zu einer einwandfreien Theorie zu gelangen. Hae.

EUG. KLUPATHY. Zur Theorie des Wehnelt-Unterbrechers. Ann. der Phys. (4) 9, 147-163.

Aus den theoretischen Erörterungen, die an diejenigen von H. Th. Simon anknüpfen, schließt der Verf., daß die Joulewärme nicht genügt zur Verdampfung der die Elektrode umgebenden Flüssigkeitsschicht, während die Peltierwirkung, die an der Trennungsfläche des Elektrolyten und der Elektrode auftritt, wohl genügt, um an der Anode die regelmäßigen Unterbrechungen hervorzurufen und die Polareigenschaften des Unterbrechers zu erklären. Hae.

D. A. GOLDHAMMER. Über die Theorie des Flüssigkeitsunterbrechers. Ann. der Phys. (4) 9, 1070-1082.

Angeregt durch die von Klupathy an H. Th. Simons Theorie des Wehnelt-Unterbrechers geübte Kritik, stellt Verf. eine neue Theorie auf, die die Periode des pulsierenden Stromes zu bestimmen gestattet, ohne die Frage über die Ursache der Stromunterbrechungen zu berühren. Hae.

A. ROTTH. Physikalische Probleme der Gleichstrommaschine. Arch. der Math. u. Phys. (3) 3, 34-53.

Zuerst werden berichtartig die wesentlichsten Punkte besprochen, die auf die Ausgestaltung der jetzigen Gleichstrommaschine von Einfluß sind, wobei auf die noch zu erforschenden Beziehungen hingewiesen wird. Es folgt dann eine eingehendere Betrachtung der durch die Ankerrückwirkung entstehenden sogenannten Feldverzerrung, wobei sich in mehreren Fällen die Unzulässigkeit der Theorie von Kapp ergibt. Der Verf. gibt dann seinerseits, von der Kraftwirkung eines Stromfadens auf einen äußeren Punkt ausgehend, einen Weg an, der allerdings verwickelter und vorläufig der genaueren Bestimmung unzugänglich ist, andererseits aber unmittelbar die Erklärung des Drehmoments einschließt. Die Betrachtungen gehen kaum über Andeutungen hinaus und sollen vor allem neue Anregungen zum Eingehen auf die ebenso komplizierten wie interessanten magnetischen Erscheinungen der Dynamomaschine geben. Fr.

J. ZENNECK. Über induktiven magnetischen Widerstand. Ann. der Phys. (4) 9, 497-521.

Der Zweck der Arbeit ist, die Einführung des Begriffs des induktiven magnetischen Widerstands (der magnetischen Induktanz) näher zu begründen und die Brauchbarkeit desselben an einer Anzahl zum größten

Teil bekannter Erscheinungen aus dem Gebiete der langsamen elektromagnetischen Schwingungen (Wechselströme der üblichen Frequenz) zu zeigen. In dem theoretischen Teile weist der Verf. nach, daß sich geschlossene Spulen, metallische Röhren, Stäbe oder Scheiben im magnetischen Wechselfelde gegenüber der magnetischen Induktion in der Richtung ihrer Achse so verhalten, als ob ihr magnetischer Widerstand erhöht worden wäre. Bei kurz geschlossenen Spulen und Metallröhren tritt zu dem Ohmschen magnetischen Widerstand, wie er durch Dimensionen und Permeabilität bestimmt wird, noch ein induktiver magnetischer Widerstand. Bei massiven metallenen Stäben oder Scheiben erfährt außerdem noch der Ohmsche magnetische Widerstand eine Vermehrung.

Fr.

F. Braun. Über die Erregung stehender elektrischer Drahtwellen durch Entladung von Kondensatoren. Ann. der Phys. (4) 8, 199-211.

Der Fall, daß aus einem im Sinne der Geometrie geschlossenen Kreise stehende elektrische Wellen in einer offenen Strombahn erregt werden, wurde vom Verf. in die drahtlose Telegraphie eingeführt. Es werden zwei Formen unterschieden, erstens die mit sogenannter induktiver Erregung des Senders, zweitens die mit sogenannter direkter Schaltung. Beide lassen sich mannigfach kombinieren. Zunächst wird die direkte Schaltung ausführlich diskutiert. An zwei Punkten des Flaschenkreises sind zwei Drähte angelegt, die isoliert oder der eine an Erde liegend gedacht werden können. Um den Zustand des Systems kennen zu lernen, rechnet man mit den Strömungsgleichungen und erhält eine erzwungene Schwingung von der Periode des Flaschenkreises. Dieselbe ist eine Funktion der Länge der Ansatzdrähte und gleichzeitig Ortsfunktion. Das Ergebnis stimmt mit den Versuchen des Verf. und denen Lechers überein. Die Drahtlängen kann man jedoch auch durch Kapazitäten ersetzen. Nachdem die Wirkung von Platten besprochen ist, wird auf die Erdleitung eingegangen, die ähnlich wie die Platten wirkt, jedoch eine schlecht definierte Anordnung ist, weshalb nicht näher auf die Versuchsergebnisse eingegangen wird. Zum Schluß wird die Zweckmäßigkeit der von Slaby eingeführten doppelten Erdung bestritten.

Fr.

P. Drude. Zur Konstruktion von Teslatransformatoren. Schwingungsdauer und Selbstinduktion von Drahtspulen. Ann. der Phys. (4) 9, 293-339, 590-610.

Man ist bei der Konstruktion von Teslatransformatoren auf zeitraubendes Probieren angewiesen, wenn man die Schwingungsdauer der Sekundärspulen und die Selbstinduktion der Primärspulen nicht im voraus berechnen kann. Die experimentellen und theoretischen Betrachtungen führen zur Aufstellung von Tabellen. Von den Resultaten seien besonders hervorgehoben:

Die halbe Eigenwelle $\frac{1}{2}\lambda$ einer Spule konstanter Ganghöhe g hängt von der Spulendrahtlänge l, der Spulenhöhe h, dem Spulendurchmesser $2r$, der Drahtdicke δ in der Weise ab, daß

$$\frac{1}{2}\lambda = lf\left(\frac{h}{2r}, \frac{g}{\delta}, \varepsilon\right)$$

ist, wobei ε die Dielektrizitätskonstante des Spulenkernes bedeutet. Für praktisch vorkommende Fälle sind Tabellen von f aufgestellt. Innerhalb gewisser Grenzen ist $f \cdot \sqrt{h/r}$ konstant, und aus den angegebenen Zahlenwerten ist $\frac{1}{2}\lambda$ leicht zu berechnen.

Durch Anlegung einer Kapazität an ein freies Spulenende wird die Eigenperiode der Grundschwingung einer Spule vergrößert. Die Vergrößerung ist nach einer experimentell bestätigten Weise zu berechnen; sie ist stets kleiner als das Doppelte der Periode der Spule mit freien Enden.

Zur Berechnung der Selbstinduktion kurzer, weiter Spulen für schnelle Stromwechsel wird eine Formel aufgestellt, durch die die Möglichkeit gegeben ist, mit Hülfe der angegebenen Tabellen zu jedem Teslatransformator die geeignete Kapazität des Primärkreises zu berechnen.

Fr.

M. Wien. Über die Verwendung der Resonanz bei der drahtlosen Telegraphie. Ann. der Phys. (4) 8, 686-713.

In den gekoppelten Systemen, wie sie von Braun in die drahtlose Telegraphie eingeführt sind, entstehen zwei voneinander unabhängige Schwingungen mit im allgemeinen verschiedenen Schwingungszahlen und Dämpfungen. Überwiegt die Koppelung, so erhalten wir große Energien, daher Telegraphie auf weite Entfernungen, aber geringe Abstimmbarkeit. Überwiegt die Dämpfung die Koppelung, so erhält man die Möglichkeit einer ausgebildeten Resonanz. Letzteres gibt eine geringe Übertragungsweite, aber die Möglichkeit, für eine große Anzahl verschieden abgestimmter Stationen zugleich zu sprechen. Das Braunsche System liegt zwischen den beiden Grenzfällen. Fr.

M. Brillouin. Oscillations propres de réseaux de distribution. C. R. **134**, 768.

Verf. weist darauf hin, daß die von Pomey in den C. R. **134**, 696-697 über diesen Gegenstand veröffentlichten Tatsachen sich in der Abhandlung von Helmholtz vorfinden: Über die Dauer und den Verlauf der durch Stromschwankungen induzierten elektrischen Ströme. Pogg. Ann. **83**, 505-540 (1851). Rns.

M. Brillouin. Influence réciproque de deux oscillateurs voisins. Ann. de chim. et phys. (7) 27, 17-26.

Der Verf. spricht sich gegen Versuche aus, die beweisen sollen, daß die Dämpfung der vom Resonator empfangenen Welle zunimmt, wenn der Resonator dem Oszillator genähert wird. „Jede Welle, die sich im Äther ausbreitet, hat ihre eigene Dämpfung, unabhängig von dem Abstande. Was von dem Abstande abhängen kann, ist die Intensität der stark gedämpften Wellen höherer Ordnung, die der Resonator empfängt, hauptsächlich die Reaktion des Resonators auf den Oszillator und die Änderung des vibrierenden Systems, wenn der gegenseitige Abstand zunimmt.“ Mit dieser wechselseitigen Einwirkung beschäftigt sich die vorliegende Arbeit in dem einfachsten Falle, nämlich mit der Berechnung der Erscheinung für zwei kurze lineare Oszillatoren, die einem veränderlichen elektrischen Doublet gleich zu achten sind. Die mathematische Behandlung ist zwar nicht ganz durchgeführt, läßt aber einige Schlüsse auf molekulare Vorgänge ziehen. Lp.

A. Blondel. Sur les oscillographes. Journ. de Phys. (4) 1, 273-302.

Im ersten Teile dieser Abhandlung werden die neuen Modelle der elektrischen Oszillographen beschrieben. Der zweite Teil ist der mathematisch entwickelten Theorie dieser Apparate gewidmet und geht dabei von den Vorstellungen aus, die der Verf. in C. R. 1893 über den Gegenstand entwickelt hat. Somit wird im ersten Abschnitt des zweiten Teiles („Einfache Oszillographen“) die Darstellung jener älteren Arbeiten wiederholt, im zweiten Abschnitte („Bifilarer Oszillograph“) die Ausdehnung dieser Betrachtungen auf die neuen Apparate mit Hinzuziehung der Fourierschen Reihen bewirkt. Lp.

S. H. Burbury. On irreversible processes and Planck's theory in relation thereto. Phil. Mag. (6) 3, 225-240.

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Planckschen Theorie (Berl. Ber. 1897, 441-480) über den Einfluß eines Resonators auf elektromagnetische Wellen. Sie führt zunächst die Planckschen Resultate auf eine einfache Formel für einen Energieaustausch zurück und gibt dann einige ergänzende Betrachtungen über den Einfluß des Resonators auf Wellen, für die er nicht resoniert. Br.

H. Armagnat. Application des oscillographes à la méthode de résonance. Journ. de Phys. (4) 1, 345-364.

Die Arbeit zeigt, wie man die Koeffizienten in der Entwicklung nach einer trigonometrischen Reihe experimentell bestimmen kann. Lp.

G. Morera. Intorno alle oscillazioni ellettriche. Nuovo Cimento (5) 8, 382-386.

Um theoretisch die Periode eines Wechselstroms zu bestimmen, der einen fadenförmigen Leiter durchläuft, mit dem zwei elektrisierte Konduktoren verbunden sind, hat man nur die Formel von W. Thomson-Lord Kelvin, die aber dann nicht anwendbar ist, wenn die beiden Konduktoren einen vollständigen Kondensator bilden. Sie ist also im besondern nicht zu gebrauchen bei dem berühmten Versuch von Hertz, um die Periode der Oszillation des gebrauchten Oszillators zu bestimmen. Verf. stellt eine neue Formel für T auf, welche die Kelvinsche als Sonderfall in sich schließt. Hae.

R. H. Weber. Elektromagnetische Schwingungen in Metallrohren. Ann. der Phys. (4) 8, 721-751.

Die Fortpflanzung elektromagnetischer Schwingungen längs eines Drahtes ist in neuerer Zeit streng mathematisch untersucht. Wir erhalten das Problem der Schwingungen in einem Metallrohr, wenn wir uns an Stelle des Dielektrikums das Metall gelagert denken, und umgekehrt. Verf. gelangt nun zu einer allgemeinen Behandlung durch Umsetzung der Maxwellschen Gleichungen in Zylinderkoordinaten. Es werden die Grenzbedingungen abgeleitet und das Problem in geeigneter Weise vereinfacht, wobei zwei Reihen von Oberschwingungen erhalten werden, deren einfachster Fall die axialsymmetrische ist. Für die ersten nicht axialsymmetrischen Schwingungen, die bereits von Drude, V. v. Lang und Becker gefunden wurden, ergibt sich ein Wert von $3{,}415\,a$, wo a der Halbmesser der Röhre ist; Drude nahm an, er sei $4a$, was für Röhren von quadratischem Querschnitt eher zutrifft, wo die Wellenlänge gleich der doppelten Seitenlänge ist. Fr.

F. Hasenöhrl. Über die Absorption elektrischer Wellen in einem Gas. Wien. Ber. 111, 1229-1263.

Es werden die Veränderungen berechnet, welche eine ebene, geradlinig polarisierte Welle elektrischer Kraft erfährt, wenn sie ein „Gas" durchsetzt, d. h. ein Medium, das aus im Mittel gleichförmig verteilten Kugeln besteht, deren elektromagnetische Konstanten von denen des umgebenden Äthers verschieden sind. Der Verlauf freier elektrischer Schwingungen in einer Kugel und das entsprechende mechanische Problem führen auf transzendente Gleichungen, etwa

$$f_n(x) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty),$$

deren Wurzeln die möglichen Schwingungszahlen liefern, und die Koláček und Kohl für die niedrigen Werte von n diskutiert haben. Um den bei den Untersuchungen auftretenden Schwierigkeiten zu entgehen, studiert Verf. statt der Emission die Absorption elektrischer Wellen durch eine Kugel. Die Rechnung führt auf ein Absorptionsspektrum, dessen Linien

durch die Wurzeln transzendenter Gleichungen vom obigen Typus gegeben sind; dabei spielen auch die Wurzeln mit höherem Index n eine wesentliche Rolle. Die numerische Berechnung ist nur teilweise durchgeführt.
Gt.

A. Garbasso. Su la polarizzazione rotatoria dei raggi di forza elettrica. Nuovo Cimento (5) 4, 176-185.

Im Jahre 1869 ahmte Reusch die Drehung der Polarisationsebene des Quarzes durch Übereinanderlagerung von Glimmerplatten nach, die um 60° und 120° gegeneinander gedreht sind. Verf. behandelt hier das analoge Problem für elektrische Schwingungen, indem er Holzplatten verwendet. Bei ausführlicher mathematischer Diskussion ergab sich, daß durch drei parallel zu den Fasern geschnittene Tannenbretter übereinander, je 13,46 cm dick, mit ihren Fasern um je 120° gegeneinander gedreht, und mit einem Winkel von 27° 47′ 45″ zwischen den Fasern der ersten und der Schwingungsrichtung des Erregers zirkulare Polarisation erzielt würde. Eine so dicke Holzschicht würde jedoch die Schwingungen so stark absorbieren, daß der Versuch nicht ausführbar ist. Für Bretter von 2,5 und 5 cm Dicke zeigte die Berechnung jedoch auch bereits eine Drehung. Der Versuch, bei dem der Winkel zwischen den einfallenden Schwingungen und den Fasern der Platte 30° betrug, während die anderen um je 120° gedreht waren, gab jedoch bei 2,5 cm Plattendicke keine merkliche Drehung; dieselbe wurde bei Platten von 5 cm Dicke 8 bis 10°. Der austretende Strahl war geradlinig polarisiert; der Sinn der Drehung stimmte mit der Richtung, in der die Platten gegeneinander verschoben waren, überein.
Fr.

H. A. Lorentz. La théorie élémentaire du phénomène de Zeeman. Réponse à une objection de M. Poincaré. Arch. Néerl. (2) 7, 299-317.

„In einem Artikel, der in l'Éclairage électrique erschienen ist, gelangt Poincaré zu dem Schlusse, daß die wohlbekannte elementare Theorie des Zeemanschen Phänomens (die Theorie, bei der man annimmt, daß jedes Lichtmolekül ein oder mehrere bewegliche Elektronen enthält, die unabhängig von einander schwingen können) zwar von der Beobachtung eines Doublets in der Richtung der Kraftlinien Rechenschaft geben kann, aber unfähig ist, das Triplet zu erklären, welches man senkrecht zu dieser Richtung wahrnimmt. Zu diesem Resultate gelangt er nicht durch direkte Behandlung der Emission, sondern durch die Betrachtung der Absorption im magnetischen Felde, und es ist bemerkenswert, daß das nämliche Verfahren früher Voigt zu Gleichungen geführt hat, aus denen man die Existenz des Triplets abgeleitet hat. Mir scheint die Ursache dieser Unstimmigkeit in der Tatsache zu liegen, daß Poincaré in der Gleichung (6) S. 8 zu Unrecht das Glied $\varepsilon_k a\, dZ_k/dt$ fortläßt. Bevor ich aber in Einzelheiten hierüber eingehe, scheint es mir an-

gemessen, die verschiedenen Formeln, die man auf die Fortpflanzung des Lichtes in einem absorbierenden, magnetischen Kräften unterliegenden Gase anwenden kann, unter einander zu vergleichen." Lp.

G. W. Walker. On asymmetry of the Zeeman effect. Phil. Mag. (6) **3**, 247-251.

Ableitung, wonach die Unsymmetrie beim Auftauchen dreier Linien im Zeeman-Effekt durch Größen zweiter Ordnung der elektromagnetischen Feldwirkung zu erklären ist. Br.

Th. R. Lyle. On circular filaments or circular magnetic shells equivalent to circular coils, and on the equivalent radius of a coil. Phil. Mag. (6) **3**, 310-329.

Es werden folgende Sätze abgeleitet, die mit genügender Näherung gelten. Ein Solenoid, dessen Länge gleich dem Durchmesser ist, läßt sich durch einen einzigen koaxialen kreisförmigen Stromfaden ersetzen, ein Solenoid von größerer Länge durch zwei derartige Stromfäden, die in sich gleich sind, ein Solenoid von kleinerer Länge durch zwei derartige in sich ungleiche, aber in derselben Ebene liegende Stromfäden. Hierfür werden zwei Ableitungen gegeben. Die Formeln sollen zur Erleichterung der Berechnung in praktischen Einzelfällen dienen, wofür auch Beispiele gegeben werden. Erscheint ein Solenoid von zu stark abweichender Form, als daß man sich auf die Einflußlosigkeit der vernachlässigten Glieder verlassen könnte, so kann man es in Teile zerlegen und das System der für die Teile erhaltenen Stromfäden wieder als Solenoid auffassen, usf. Br.

W. Voigt. Über einige neue Beobachtungen von magneto-optischen Wirkungen. Ann. der Phys. (4) **8**, 872-889.

W. Voigt. Dispersione rotatoria magnetica nell' intorno delle righe di assorbimento. Rom. Acc. L. Rend. (5) **11**$_1$, 459-462.

O. M. Corbino. Nuove ricerche sulla polarizzazione rotatoria magnetica nell' intorno di una riga d'assorbimento. Nuovo Cimento (5) **3**, 121-132.

Corbino hatte Einwendungen gegen die von Voigt aufgestellte Theorie auf Grund der eigens von ihm angestellten Versuche erhoben; Voigt hatte widersprochen. Indem letzterer zugibt, die Versuche des zuerst Genannten falsch gedeutet zu haben, dieser die seinigen wiederholt, dehnt Voigt seine Theorie auf die neuen Erscheinungen aus, die nun auch die Beobachtungen von Majorana genügend erklärt. Hae.

W. VOIGT. Sul fenomeno Majorana. Nuovo Cimento (5) **4**, 52-55; Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{11}_1$, 505-507.

Die theoretischen Betrachtungen, welche Verf. zur **Erklärung** des Kerrschen elektrostatischen Phänomens angestellt hat, **überträgt** er hier auf das entsprechende magnetische Phänomen von Majorana; hierzu werden die linearen Differentialgleichungen zwischen den Komponenten des Schwingungsvektors K_h und der elektrischen Kraft K modifiziert durch Einführung der Wirkung eines magnetischen Feldes R unter Zugrundelegung bestimmter Hypothesen. Gt.

N. E. GILBERT. Some experiments upon the relations between aether, matter and electricity. Phil. Mag. (6) **3**, 361-380.

Enthält in theoretischer Beziehung eine Ableitung über den magnetischen Zustand der Erde, der durch ihre Rotation unter Annahme einer diesbezüglichen Wechselwirkung von Äther und Materie hervorgebracht wird. Br.

H. NAGAOKA u. K. HONDA. On the magnetostriction of steel, nickel, cobalt and nickel-steels. Phil. Mag. (6) **4**, 45-72.

Enthält in theoretischer Beziehung einen Ansatz über die Deformationen, die ein Stab bei gleichzeitiger Längs- und Zirkularmagnetisierung erleidet. Br.

Weitere Literatur.

E. ARNOLD. Die Gleichstrommaschine. Theorie, Konstruktion, Berechnung, Untersuchung und Arbeitsweise derselben. 1. Band: Die Theorie der Gleichstrommaschine. Berlin: J. Springer. XVI u. 555 S. gr. 8°.

G. JÄGER. Theoretische Physik. III. Elektrizität und Magnetismus. Verbesserte Auflage. Leipzig: G. J. Göschen. 150 S. 12° (Sammlung Göschen No. 78).

P. DUHEM. Les théories électriques de Clerk Maxwell. Étude historique et critique. Paris: A. Hermann. 228 S. 8°. [Nature **65**, 555-556.]

M. M. MACDONALD. Electric waves. Cambridge: University Press. XIII u. 200 S. 8°. [Nature **67**, 361-364, Anzeige von Larmor.]

W. REINDERS. Het galvanisch element en de phasenleer. Amst. Ak. Versl. **11**, 115-126.

M. ASCOLI. Sulla stabilità del magnetismo temporaneo e permanente. Nuovo Cimento (5) **3**, 5-70.

G. GRASSI. Sulla variazione della tensione secondaria nei trasformatori a corrente alternata. Napoli Rend. (3) **8**, 53-64.

H. E. J. G. du Bois. Over gepolariseerde asymmetrische tollen. Amst. Ak. Versl. 10. 415-422, 504-520.

Alberto Dina. Sul fattore di potenza dei motori trifasi nel caso di curve deformate. Lomb. Ist. Rend. (2) 35, 951-956.

G. de Rossi e A. Sella. Sul comportamento elettrico delle fiamme in un campo elettrostatico alternato. Nuovo Cimento (5) 4, 94-130.

E. Cohn. Über die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes für bewegte Körper. Ann. der Phys. (4) 7, 29-56.

Abdruck aus Gött. Nachr. 1901; vgl. F. d. M. 32, 851.

M. Planck. Über die von einem elliptisch schwingenden Ion emittierte und absorbierte Energie. Ann. der Phys. (4) 9, 619-628.

Abdruck aus Arch. Néerl.; vgl. F. d. M. 31, 834, 1900.

W. Voigt. Elektronenhypothese und Theorie des Magnetismus. Ann. der Phys. (4) 9, 115-146.

Abdruck aus Gött. Nachr. 1901; vgl. F. d. M. 32, 878.

Kapitel 4.

Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

N. N. Schiller. Die Grundgesetze der Thermodynamik. J. russ. phys. Chem. Ges. 34, 377-426 (Russisch).

Das Ziel der Abhandlung ist der Nachweis, daß der Begriff der Entropie ganz unabhängig von dem der Wärme, also auch unabhängig von der Verwandlung der Wärme in Arbeit aufgestellt werden kann, und daß die wesentliche Bedeutung des ersten thermodynamischen Hauptsatzes in der Aufstellung der Identität der thermischen und der mechanischen Prozesse liegt, was ohne Einführung des Hülfsbegriffes „Wärmemenge" geschehen kann. Die Temperatur t definiert der Verf. als einen Körperzustand, der einer gewissen Empfindung entspricht; der Zustand eines Körpers hängt von den Parametern $a_0, a_1, \dots, a_k$ ab, welche sich mit der Temperatur ändern. Dann ist die Zustandsgleichung eines Körpers

$$(1) \qquad t = \varphi(a_0, a_1, \dots, a_k), \text{ wo } a_0, a_1, \dots, a_k$$

die Temperaturparameter sind. Es existieren aber noch solche Parameter $a_{k+1}, \dots, a_n$, die nicht in die Gleichung (1) eingehen, aber mit t funktional verbunden sind. Alle Parameter $a_0, a_1, \dots, a_n$ werden thermische genannt. Ändern sich diese Parameter eines Körpers unabhängig von den thermischen Prozessen, welche in anderen Körpern vor sich gehen, so hat man einen adiabatischen Vorgang; mathematisch ausgedrückt lautet das:

$$(2) \qquad A_0\, da_0 + A_1\, da_1 + \cdots + A_n\, da_n = 0,$$

worin $A_0, \ldots$ von $a_0, a_1, \ldots$ abhängen. Für die umkehrbaren Vorgänge muß die Gleichung (2) ein Integral besitzen in der Form

$$\sigma(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \text{Const.},$$

oder mit Hülfe von (1) $s(t, a_0, a_1, \ldots, a_n) = \text{Const.}$ Dann läßt sich leicht zeigen, daß σ und s kein Maximum oder Minimum haben dürfen. Wird nun irgend welche Funktion von s, z. B. $S(s)$, als Maß der Verschiedenheit in den adiabatischen Vorgängen gewählt, so heißt S die Entropie.

Thermische Prozesse werden von der Arbeit äußerer Kräfte begleitet; bei den umkehrbaren Vorgängen erscheinen die arbeitenden Kräfte im Gleichgewicht; dieses Gleichgewicht wird aber nicht durch jene Kräfte selbst, auch nicht durch die Reaktion der Verbindungen gehalten, sondern durch andere Kräfte und kinetische Umstände der Bewegung. Ist nun dL die Arbeit der äußeren Kräfte, dU die Änderung der Energie, so muß sein $dU - dL = \theta dS$, worin θ eine Funktion der Parameter bedeutet, und zwar ist diese Funktion für alle Körper dieselbe. Da aber nur die Temperatur ganz willkürlich für alle Körper als dieselbe gehalten werden kann, so folgt: entweder ist $\theta = \text{Const.}$, oder θ ist für alle Körper eine und dieselbe Funktion von t. Nun ist $\theta = \text{Const.}$ unmöglich, weil zyklische Prozesse existieren, bei denen die Integralarbeit äußerer Kräfte von Null verschieden ist (Dampfmaschinen).

Auf Erfahrungstatsachen gestützt, beweist der Verf. ferner, daß θ mit t wächst; somit gelangt man zur Definition des absoluten Nullpunktes und der absoluten Temperaturskala. Die Betrachtung des Carnotschen Zykels zeigt, daß die mit Hülfe desselben aufgestellte Temperaturskala mit der absoluten zusammenfällt; dabei werden die Vorgänge im Zykel als Änderungen der Entropie bei passender Änderung von θ betrachtet.

Ferner bespricht der Verf. die Grundaufgabe der Thermodynamik (Kap. X), die nicht umkehrbaren Vorgänge (Kap. XI), die Form der Energie bei den thermischen Prozessen (Kap. XII), alles ohne über die Wärmemenge zu sprechen.

Dann folgt ein Beispiel einer mechanischen Analogie für thermische Änderungen (Bewegung einer Masse m unter Einwirkung einer Kraft), und erst zum Schluß wird die Wärmemenge als die Energiemenge definiert, welche die Änderung der Entropie bedingt. Ghr.

L. Raffy. Correspondance: à propos de la thermodynamique générale de Gustave Robin. Lettre. Darboux Bull. (2) **26**, 87-92.

In der Anzeige des nachgelassenen Werkes von Robin: „Thermodynamique générale" (F. d. M. **32**, 14, 1901), haben wir die Besprechung erwähnt, welche Duhem in Darboux Bull. (2) **25**, 174-203, von diesem Buche geliefert hat. Der Brief Raffys, des Herausgebers jener Schrift, wendet sich gegen einige Punkte der Duhemschen Anzeige. Lp.

K. v. Wesendonck. Über die Ungleichung von Clausius und die sogenannten dauernden Änderungen. Ann. der Phys. (4) 9, 1133-1137.

Eine Kritik der Duhemschen Betrachtungen über das angebliche Nichtzutreffen des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie bei Prozessen, die einer Hysterese unterliegen, dahingehend, daß die von Duhem betrachteten Prozesse nicht mit wirklichen Kreisprozessen auf eine Linie gestellt werden können. Br.

K. v. Wesendonck. Einige Bemerkungen über die Arbeit des Herrn Wiedeburg zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Ann. der Phys. (4) 7, 576-583.

Unter Bezugnahme auf eine frühere Arbeit des Verf. (F. d. M. **31**, 842, 1900) und die Arbeit von Wiedeburg (Ann. d. Phys. (4), **5**, 514-547) werden grundlegende Anschauungen zum zweiten Hauptsatze besprochen. Die Bemerkungen gelten zunächst der Temperatur der Wärmereservoire im Hinblick auf die Grenzschichtentemperaturen, die für die arbeitenden Substanzen allein in Frage kommen, wobei der Beweis von Poincaré angeführt und mit Drude auf die Nichtexistenz absoluter Temperatursprünge hingewiesen wird. Im weiteren bezeichnet der Verf. die Strahlung als nicht seine Auffassung entkräftend, da sie wenigstens teilweise als Zufuhr anderweitiger Energie anzusehen sei. Den Schluß bilden Bemerkungen über den Entropiebegriff als notwendige Folge der Grundgleichung für umkehrbare Prozesse. Rtt.

A. Denizot. Zur mathematischen Behandlung des zweiten Hauptsatzes. Ann. der Phys. (4 7, 358-368.

W. Voigt. Bemerkung zu der von Herrn Denizot gegebenen Ableitung des zweiten Hauptsatzes. Ann. der Phys. (4) 8, 472-473.

A. Denizot. Erwiderung auf die von Herrn Voigt bezüglich meines Aufsatzes über den zweiten Hauptsatz gemachten Bemerkungen. Ann. der Phys. (4) 8, 927-928.

In der mathematischen Formulierung des zweiten Hauptsatzes erscheint der reziproke Wert der absoluten Temperatur als der integrierende Faktor der vom ersten Hauptsatze gelieferten Gleichung. Denizot untersucht die Berechtigung dieser Auffassung und behandelt im Anschlusse daran den Clausiusschen Ausdruck für die umkehrbaren Prozesse mit stetiger Änderung der Gleichgewichtszustände.

Aus der Grundgleichung, die den ersten Hauptsatz ausdrückt, wird unter Voraussetzung einer Zustandsgleichung eine partielle Differentialgleichung abgeleitet und zu deren Lösung ein System simultaner Gleichungen aufgestellt, darauf der physikalische Sinn dieses Gleichungssystemes und des integrierenden Faktors untersucht. Zu dem Ende wird (für endothermische und exothermische Substanzen gültig) ein unendlich kleiner Carnotscher

Kreisprozeß betrachtet und als dessen Wirkungsgrad das negative logarithmische Differential des integrierenden Faktors gefunden. Unter Zurückgehen auf das System simultaner Gleichungen wird nun eine Beziehung zur Definition der absoluten Temperatur abgeleitet, identisch mit der von Planck, aber nicht dem zweiten Hauptsatze entnommen, sondern umgekehrt zu dessen Formulierung dienend.

Voigt bezeichnet die obige Ableitung zur Erweisung des zweiten Hauptsatzes ohne Heranziehen von Körpern bestimmter Eigenschaften als einen Trugschluß, die Annahme zur Beseitigung eines Widerspruches zwischen den beiden Werten aus der Formel für den Wirkungsgrad des unendlich kleinen Carnotschen Prozesses als irrig. Die zu dem Widerspruche führende Deutung der Doppelgleichung sei eben nicht zulässig, in Wirklichkeit resultiere aus den beiden Werten keine neue Beziehung.

In der Entgegnung hebt Denizot hervor, daß er nicht beabsichtigt habe, ohne Heranziehung bekannter Körper den zweiten Hauptsatz vollständig zu erweisen, da er ja nur umkehrbare Änderungen betrachtet habe. Im übrigen hält er seine Darlegungen aufrecht und gibt zwei kürzere Wege an, die, ohne die angezweifelte Deutung zu verlangen, zu seinem Ergebnisse führen. Rtt.

V. Fischer. Analogien zur Thermodynamik. Zs. f. Math. u. Phys. 47, 1-14.

Die Arbeit behandelt einen monozyklischen Bewegungsvorgang, dessen Gleichungen denen der Thermodynamik entsprechen. Betrachtet wird ein elastischer Ring von verhältnismäßig geringem Querschnitte in einer gleichmäßig drückenden Flüssigkeit. Die Eigenschaften eines solchen Wirbels werden durch ein ausführbares Modell versinnlicht. Der zunächst für den Gesamtdruck auf den Umfang des rotierenden Ringes (bezw. einer der Einfachheit wegen betrachteten dünnen Scheibe) gefundene Ausdruck entspricht in der Form der Grundgleichung der Gastheorie. Ein wesentlich gleicher Ausdruck ergibt sich bei Annahme eines rotierenden zylindrischen Gefäßes mit inkompressibler Flüssigkeit. Unter Benutzung der erhaltenen Beziehung zeigt sich dann die kinetische Energie der rotierenden Scheibe als Funktion der Umfangsgeschwindigkeit, des Druckes und des Volumens. Die Zuführung von Energie zu der Scheibe von einer anderen mit größerer Geschwindigkeit unter Vermittlung der Reibung legt Analogien nahe zwischen dem Energieverluste durch die Reibung und der Entropie, zwischen der Geschwindigkeit und der Temperatur.

Unter analogen Voraussetzungen für das mechanische System, wie sie für umkehrbare Wärmevorgänge nötig sind, zeigt sich nun der Ausdruck für den virtuellen umkehrbaren Prozeß in Übereinstimmung mit der Hauptgleichung der Thermodynamik, woraus analoge Formen zu den Arbeitsgleichungen bei isothermischer und adiabatischer Zustandsänderung folgen, wie auch für das Poissonsche Gesetz. Nach Durchführung weiterer dynamischer Analogien zu umkehrbaren thermischen Prozessen ergibt sich endlich für den Carnotschen Kreisprozeß vollständige formale

Ähnlichkeit der Beziehungen der mechanischen Größen mit denen der thermischen. Rtt.

W. Richards. The significance of changing atomic volume. III. The relation of changing heat capacity to change of free energy, heat of reaction, change of volume, and chemical affinity. American Acad. Proc. 38, 293-317.

Die vorliegende Fortsetzung der größeren Arbeit knüpft an Robert Mayers Erkenntnis an, wonach die Kompressionsarbeit eines Gases der entwickelten Wärme äquivalent ist, dank der Unabhängigkeit der spezifischen Wärme vom Volumen. Unter Hinweis auf die Änderungen, die bei nicht konstanter spezifischer Wärme eintreten würden, und die Analogie zwischen der chemischen Kompression und der Gaskompression (früher schon von Müller-Erzbach, Hagemann u. a. behandelt), die den Übergang zu flüssigen und festen Körpern erleichtert und die Frage des Verhältnisses der freien zur ganzen Energie der Lösung näher bringt, wird das Problem, auf das sich die folgenden Studien beziehen, dahin formuliert, ob die Änderung der spezifischen Wärme einen bestimmenden Einfluß hat auf die Größenverhältnisse bei Änderung der freien Energie und der Reaktionswärme. Da die Änderung der freien Energie nur an umkehrbaren Prozessen berechnet werden kann, so wird nach Helmholtz' Vorgang als Beispiel die galvanische Zelle herangezogen. Eingehende Betrachtungen der verschiedensten Zellen in Hinsicht auf den vorliegenden Zweck mit tabellarisch und graphisch dargestellten numerischen Werten bilden den wesentlichen Inhalt des ersten Abschnittes. In dem folgenden wird unter Bezugnahme auf Helmholtz, Nernst u. a. der Einfluß der Konzentration behandelt, und als Beispiel für die Anwendung werden die Abweichungen von dem Gesetze von Guldberg und Waage genommen. Im Schlußabschnitte wird eine Reihe von Folgerungen aus dem Vorhergehenden zusammengestellt und ebenso eine Anzahl hypothetischer Sätze gegeben, die nach des Verf. Absicht wenigstens für die nächsten Schritte weitere Fingerzeige geben sollen. Rtt.

A. Einstein. Kinetische Theorie des Wärmegleichgewichtes und des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik. Ann. der Phys. (4) 9, 417-433.

Der Verf. beabsichtigt, die auch nach den Arbeiten Maxwells und Boltzmanns verbliebene Lücke auszufüllen, die hinsichtlich der Ableitung der im Titel genannten Sätze aus rein mechanischen Prinzipien noch besteht.

Nach Aufstellung eines mechanischen Bildes für ein physikalisches System wird die Verteilung der möglichen Zustände bei verschiedenen Systemen kinetisch behandelt, die Wahrscheinlichkeit der Zustände eines Systems unter bestimmten Bedingungen. Nach Untersuchung des Vorzeichens einer vorher eingeführten Konstante wird die Bedingung für die

stationäre Verknüpfung zweier Systeme aufgesucht und dann die Bedeutung jener Konstante erörtert, die sich durch eine Gleichung der mittleren lebendigen Kraft aller Momentoiden (nach Boltzmann) ergibt. Die entwickelte Theorie, die als speziellen Fall die Maxwellsche Zustandsgleichung der idealen Gase enthält, wird weiterhin angewendet auf die absolute Temperatur, den zweiten Hauptsatz und die Berechnung der Entropie. Rtt.

A. Einstein. Über die thermodynamische Theorie der Potentialdifferenz zwischen Metallen und vollständig dissoziierten Lösungen ihrer Salze und über eine elektrische Methode zur Erforschung der Molekularkräfte. Ann. der Phys. (4) 8, 798-814.

Als Grundlage für seine Arbeit stellt der Verf. eine hypothetische Erweiterung des zweiten Hauptsatzes auf: „Man bleibt im Einklange mit der Erfahrung, wenn man den zweiten Hauptsatz auf physikalische Gemische anwendet, auf deren einzelne Komponenten beliebige konservative Kräfte wirken."

Die kinetische Untersuchung bezieht sich zunächst auf die Abhängigkeit der elektrischen Potentialdifferenz einer vollkommen dissoziierten Salzlösung und einer Elektrode aus dem Lösungsmetalle von der Konzentration und dem hydrostatischen Drucke. Eine der resultierenden Gleichungen gestattet in Verbindung mit der Nernstschen Theorie der elektrischen Kräfte im Innern dissoziierter Elektrolyte die Berechnung der E. M. K. des Konzentrationselementes. Es folgt die Untersuchung des Einflusses der Natur der Säure, des Lösungsmittels (eingeleitet durch eine kurze Theorie der konservativen Molekularkräfte in Flüssigkeiten). Die Feststellung der Abhängigkeit der Potentialdifferenz von der Natur des Lösungsmittels führt zu einer Methode zur Erforschung der Molekularkräfte. Zu einer Konstantenbestimmung werden die Glieder einer Bestimmungsgleichung aus einer Versuchsreihe bei immer denselben Lösungsmitteln entnommen, oder bei Variierung der Lösungsmittel und denselben Metallionen. Versuche selbst hat der Verf. nicht anstellen, vielmehr nur Anregung in bestimmter Richtung bieten können. Rtt.

G. J. Parks. On the heat evolved or absorbed when a liquid is brought in contact with a finely divided solid. Phil. Mag. (6) 4, 240-253.

In theoretischer Beziehung enthält die Arbeit eine kurze Aufstellung darüber, wie sich die thermodynamischen Gleichungen ändern, wenn man die bei Berührung einer Flüssigkeit mit feinen Pulvern erzeugte oder verbrauchte Wärme einführt, und welchen Einfluß dies auf die spezifische Wärme der Flüssigkeit hat. Br.

A. WASSMUTH. Apparate zum Bestimmen der Temperaturänderungen beim Dehnen und Tordieren von Drähten. Wien. Ber. **111**, 996-1012.

Zur Messung der besonders von Edlund und Hayn untersuchten Temperaturänderungen beim Dehnen von Metalldrähten hatte der Verf. schon früher den zu dehnenden Draht in Stücke zerschnitten, die nichtleitend verbunden wurden, so daß an jedem Stücke ein Thermoelement angebracht werden konnte und die in Reihe geschalteten Elemente eine entsprechend stärkere Wirkung ausübten.

Die Empfindlichkeit des Dehnungsapparates, der durch A. Naumann eine handlichere Form erhielt, kann leicht so gesteigert werden, daß sogar der Einfluß der Magnetisierung von Stahldrähten auf die Temperaturänderungen festzustellen ist. Da nunmehr dickere Drähte verwendet werden können, die Abkühlung durch Leitung und Strahlung bei der Messung deshalb von geringerem Einflusse wird, so lassen sich zur rechnerischen Verwertung der Messungen einfachere, aus den allgemeinen Gleichungen durch Reihenentwicklung abgeleitete Formeln verwenden. Durchgeführte, im einzelnen mitgeteilte Messungen ergaben gute Übereinstimmung mit der Thomsonschen Formel.

Im weiteren hat der Verf. seinen Apparat in geeigneter Abänderung zur Messung der Temperaturänderungen bei der Torsion von Drähten verwendet. Auch hier zeigte sich gute Übereinstimmung der Messungen mit der Rechnung, wie auch der beim Dehnen und beim Tordieren erhaltenen Zahlen unter sich. Die Versuche bezogen sich übrigens nur auf Stahl; doch hofft der Verf., auch andere Stoffe nach seinem Verfahren untersuchen, im besonderen auch Kautschuk auf sein vermutetes gegensätzliches Verhalten prüfen zu können. Wie sich aber aus den bisherigen Versuchsergebnissen das mechanische Wärmeäquivalent sicher bestimmen ließ, so hätte umgekehrt der lineare Ausdehnungskoeffizient berechnet werden können; auch gibt der Verf. eine kurze Entwicklung, die einen neuen Weg zeigt, die Änderung der Elastizitätskonstanten mit der Temperatur zu bestimmen. Rtt.

O. DECHANT. Über die Änderung der Diathermansie von Flüssigkeiten mit der Temperatur. Wien. Ber. **111**, 264-275.

Die Frage, ob die Diathermansie sich mit der Temperatur ändert, ist bislang wenig studiert. Dem Verf. waren nur einige Arbeiten über das Verhalten von Glas und Glimmer bekannt. Gegenstand seiner Arbeit ist die experimentelle Untersuchung von Flüssigkeiten (Wasser, Alaunlösung, Kobaltchlorür) mit teilweise neuer Versuchsanordnung. Die Untersuchungen erstreckten sich auf verschiedene Temperaturintervalle. Die Diathermansie nahm für die untersuchten Flüssigkeiten mit der Temperatur ab. Rtt.

P. Ritter. Über die Gleichung der Sättigungskurve und die durch dieselbe bestimmte maximale Arbeit. Wien. Ber. **111**, 1046-1052.

Durch geeignete Umformungen gelangt Verf. zu einer analytischen Darstellung der Sättigungskurve, die aber zu lang ist, als daß sie hier wiedergegeben werden könnte. Die maximale Verdampfungsarbeit ergibt sich dann einfach hieraus durch die gewöhnliche Methode. Br.

N. Schiller. Das Gesetz der Partialdichtigkeitsänderung eines Lösungsmittels mit der Konzentration der Lösung. Ann. der Phys. (4) 8, 588-599.

Die von einem thermodynamischen Systeme bei konstanter Temperatur geleistete äußere Arbeit läßt sich als vollständiges Differential der entsprechenden unabhängigen Variabeln darstellen. Mit Hülfe dieses Satzes werden Eigenschaften flüssiger Lösungen untersucht, und zu dem Ende wird ein thermodynamisches System betrachtet, bestehend aus zwei Volumenräumen, die mittels einer halbdurchlässigen Membran getrennt und durch zwei bewegliche Kolben nach außen abgeschlossen sind. Die Räume sind gefüllt mit Lösungsmittel, bezw. Lösung; durch Verschiebungen der beiden Kolben kann die Konzentration der Lösung beliebig geändert, die Flüssigkeit beliebig elastisch zusammengedrückt werden.

Als bemerkenswertes Ergebnis der Untersuchung erscheint der Verlauf der Änderung der Konzentration bei allmählicher Zuführung des zu lösenden Stoffes und die Bildung zweier nebeneinander unvermischt bestehenden Lösungen, wie an dem Beispiele einer wässerigen Lösung von Karbolsäure erläutert wird. Rtt.

G. Jaumann. Über die Wärmeproduktion in zähen Flüssigkeiten. Wien. Ber. **111**, 215-231; Ann. der Phys. (4) 8, 752-767.

Es darf angenommen werden, daß die Wärmeproduktion im Innern bewegter Flüssigkeiten durch „innere Reibung" auf ein einfaches Nahewirkungsgesetz zurückzuführen ist, wie etwa die Stromwärme nach dem Jouleschen Gesetze durch zwei Faktoren bestimmt ist. Für spezielle Fälle wurde u. a. von Tumlirz das Gesetz bereits angegeben; die Spur weiter zu verfolgen, ist der Zweck der Arbeit.

Zur Berechnung der Wirkung einer Flüssigkeit auf einen von ihr umschlossenen Raumteil wird die Flüssigkeit ersetzt durch die Oberflächenkräfte, deren Werte durch eine frühere Abhandlung von Stefan gestützt werden. Es wird danach die Differentialgleichung für die Reibungswärme ganz allgemein aufgestellt, wie sie Helmholtz schon früher als unter gewissen Bedingungen gültig gegeben hatte. Nach Vereinfachung der sehr komplizierten Gleichung durch Annahme der Hauptspannungsachsen als Koordinatenachsen zeigt sich, daß für die Reibungswärme die Summe der Quadrate der Hauptspannungen maßgebend ist.

Wegen der schwierigen Berechnung der Hauptspannungen wird unter Benutzung der Beziehung zwischen den Geschwindigkeitsderivierten bei inkompressiblen Flüssigkeiten weiter abgeleitet, daß die Reibungswärme für Volumenelement und Zeit proportional ist der Deformationsgeschwindigkeit, daß somit eine einfache Form des gesuchten Gesetzes gegeben ist. Die Untersuchung des Unterschiedes der Bewegungsformen quirlender Strömung und rotierender Körper und der allgemeinen Bedingungen für die Bewegung eines kleinsten Teiles einer kompressiblen und inkompressiblen Flüssigkeit als starre Masse führt zu einer sehr anschaulichen zweiten Form für die Deformationsgeschwindigkeit, die also auf wesentlich anderem Wege erhalten wird. Rtt.

T. Godlewski. Sur la pression osmotique de quelques dissolutions calculée d'après les forces électromotrices des piles de concentration. Krakau Anz. 1902, 146-163.

Die bisherigen Ergebnisse der Theorie der Lösungen beziehen sich vornehmlich auf verdünnte Lösungen. Mit Hülfe der Thermodynamik kann zwar für eine Lösung bestimmter Konzentration die Erniedrigung des Gefrierpunktes, die Erhöhung des Siedepunktes und die Erniedrigung des Dampfdruckes berechnet werden. Die dafür geltenden Formeln enthalten aber eine Funktion des Druckes, und diese Funktion ist unbekannt. Wird sie vermittelst bekannter Gefrierpunktserniedrigung eliminiert, so kann die erhaltene Formel nicht mehr auf Fragen der Dissoziation angewendet werden. Diese Elimination zu vermeiden, knüpft der Verf. an theoretische Untersuchungen von Duhem und an eigene an. (Ztschrft. f. phys. Ch. 1899, S. 748). Für eine Salzlösung, die vom Lösungsmittel durch eine halbdurchlässige Wand getrennt ist, wird eine Beziehung zwischen dem thermodynamischen Potentiale, dem osmotischen Drucke und der Kompressibilität des Lösungsmittels aufgestellt, durch die der osmotische Druck für alle Konzentrationsgrade berechnet werden kann, da die Werte der unbekannten Funktion des thermodynamischen Potentiales an der Hand von Versuchsdaten bestimmt werden können, u. a. durch die elektromotorische Kraft von Konzentrationszellen. Diesen Weg hat der Verf. beschritten. Unter Bezugnahme auf die experimentellen Untersuchungen von Moser und Helmholtz und die theoretischen von Duhem wird eine Differentialgleichung aufgestellt, durch deren graphische Integration die Funktionswerte gefunden werden können. Zu einer ähnlichen Formel ist Lehfeldt gelangt durch Betrachtung eines Kreisprozesses. (Ztschrft. f. phys. Ch. **35**, 257.)

Der größere Teil der Arbeit enthält eingehende Angaben, Tabellen und Kurven über Messungen an einer Kalomelzelle nach Helmholtz und an zwei verschiedenen Kadmiumzellen. Rtt.

J. Traube. Theorie der kritischen Erscheinungen und der Verdampfung. Beitrag zur Theorie der Lösungen. Ann. der Phys. (4) 8, 267-311.

Der einfachen Auffassung von Andrews, wonach bei der kritischen Temperatur die Dichte von Dampf und Flüssigkeit gleich sei, widersprachen anscheinend Versuche von Ramsay aus 1880, die unter gewissen Umständen bei scheinbarer Homogeneität oberhalb der kritischen Temperatur Unterschiede in der Lichtbrechung feststellten und aus der Bildung von Nebel, Streifen und Schlieren auf Diffusionsvorgänge schließen ließen. Die kurze Schilderung ähnlicher Beobachtungen andrer Forscher und einiger Versuche zu ihrer Erklärung bilden den ersten Teil der Arbeit. Es hatte sich ergeben, daß bei der kritischen Temperatur Dampf und Flüssigkeit sehr verschiedene Dichten haben können.

Im zweiten Abschnitte wird eine Kritik der Versuche und Hypothesen gegeben. Die noch nicht genügenden Versuche hat der Verf. durch eigene, im dritten Abschnitte kurz geschilderte Versuche vervollständigt.

Den größeren Teil der Arbeit bildet nun die Prüfung einer eigenen Hypothese des Verf., nach der kurz bei Unterscheidung liquidogener und gasogener Moleküle deren Mengeverhältnis durch die Temperatur bestimmt sei. Der Verf. glaubt seine Hypothese im Einklange mit der einfachen Gleichung von van der Waals und findet Bestätigung in den Arbeiten von de Heen, Berthelot, Galitzine u. a., wie auch die Anwendung auf die Verdampfungswärme, die Theorie der Lösungen usw. die Zweckmäßigkeit der Hypothese zu beweisen scheint. Rtt.

J. D. Everett. On the comparison of vapour-temperatures at equal pressures. Phil. Mag. (6) 4, 335-338.

Kurzer Vergleich der verschiedenen Formeln, die für die Abhängigkeit des Verhältnisses der absoluten Temperaturen, bei denen zwei verschiedene Dämpfe die gleiche Spannung haben, vom Druck aufgestellt sind.

Br.

U. Ancona. Sui vapori d'acqua surriscaldati. Lomb. Ist. Rend. (2) 35, 971-981.

In anderen Abhandlungen hat der Verf. schon gezeigt, wie leicht und bequem der Begriff der Entropie und des entsprechenden Diagrammes auf das Studium der Gase, der gesättigten Dämpfe und ihrer Zyklen anzuwenden ist. In dieser Abhandlung wendet er nun denselben Begriff auf die überhitzten Dämpfe und speziell auf die Wasserdämpfe an und entwickelt in einfacherer Weise, als es sonst in den Lehrbüchern geschieht, die Theorie dieser Dämpfe. Dina. (Rtt.)

G. A. ZANON. Intorno al punto critico del vapore acqueo Ven. Ist. Atti 61 [(8) 4], 19-26.

Der Verf. weist darauf hin, daß der kritische Punkt des gesättigten Wasserdampfes nicht 520° ist, wie die Berechnungen ergeben; der Grund hierfür liege in der unrichtigen Annahme, daß die spezifische Wärme $\frac{dq}{dt}$ konstant sei, während das nur für Temperaturen bis etwa 260° zutreffe.

Dina. (Rtt.)

P. DUHEM. La viscosité au voisinage de l'état critique. C. R. 134, 1272-1274.

Frühere Betrachtungen des Verf. (Sur les fluides compressibles visqueux, Referat auf S. 775 dieses Bandes) verlieren ihre Gültigkeit, sobald für Dichte und Temperatur die kritischen Werte eintreten; für die Nähe des kritischen Zustandes soll deshalb eine Erweiterung erfolgen. Bei Einführung der fraglichen Werte zeigt sich an den sehr geringen Beträgen des Differentialquotienten, daß die Dichte eines Elementes sich äußerst langsam ändert, mag sie auch beträchtlich verschieden sein von der dem Gleichgewichtszustand bei gegebener Temperatur und Pressung entsprechenden. Dieser Zustand wird als ein solcher scheinbaren Gleichgewichtes bezeichnet und nach kurzer Betrachtung der Eigenschaften dieses nicht permanenten Zustandes auf die formale Analogie mit einem physikalisch ganz verschiedenen Probleme hingewiesen (ein Körper löst sich in einer inkompressiblen Flüssigkeit, die Lösung soll nur sehr langsam in das Lösungsmittel diffundieren; die Konzentration und damit die Dichte haben sehr verschiedene Werte). Die formale Analogie findet ihr Gegenstück in der Ähnlichkeit der physikalischen Erscheinungen, einerseits der Streifen und Schlieren in der Nähe des kritischen Punktes, andererseits der Bewegungen im Inneren einer flüssigen Lösung von sehr verschiedener Konzentration.

Rtt.

H. MACHE. Über die Verdampfungswärme und die Größe der Flüssigkeitsmolekel. Wien. Ber. 111, 382-393.

Zum Ausgange der Berechnungen wird die Hypothese von Lord Kelvin genommen, die dieser selbst zur Berechnung der Größe der Dampfmolekel benutzte. Nach dieser Hypothese werden sowohl die Flüssigkeitsmolekel wie die Dampfmolekel als kleine Flüssigkeitströpfchen betrachtet und damit die Annahme gemacht, daß die in den Aggregaten zwischen den Molekeln wirkenden inneren Kräfte ersetzbar sind durch über die Oberfläche der Aggregate wirkende kapillare Spannungen. Auf dieser Grundlage wird zunächst die Verdampfungswärme berechnet als Summe der inneren Arbeit zur Lösung der Dampfmolekel aus der Flüssigkeitsmolekel und der äußeren Arbeit für die kinetische Energie der Dampfmolekel zur Überwindung des äußeren Druckes. Bei der Berechnung der kapillaren Arbeit wird angenommen, daß der Radius des sich los-

lösenden Kügelchens klein sei gegen den Radius der Flüssigkeitskugel. Der Ausdruck für die Verdampfungswärme zeigt deren Abhängigkeit vom Radius der Flüssigkeitsmolekel, in Übereinstimmung mit den auf anderem Wege erhaltenen Ergebnissen von Houllevigue. Weiterhin wird die Berechtigung untersucht, den Satz von Lord Kelvin vom Sättigungsdrucke über meßbaren Flüssigkeitskugeln zu übertragen auf molekulare Kugeln. Der jeweilige Dampfdruck zeigt sich als der Kelvinsche kapillare Überdruck. An der Hand dieser Gleichung wird der Satz erwiesen, zu dem Boltzmann u. a. auf Grund rein molekular-mechanischer Vorstellungen gelangte, daß die potentielle Energie einer Flüssigkeit gleich ihrer kinetischen sei. Demnach muß die spezifische Wärme einer Flüssigkeit doppelt so groß sein wie die ihres einatomigen Dampfes bei konstantem Volumen. Das zeigt sich in der Tat bei Quecksilber, merkwürdigerweise aber auch bei gewissen mehratomigen Dämpfen. Die vorher gewonnenen Formeln gestatten leicht die Ableitung von Ausdrücken für die Radien der Molekeln: in einer Tabelle werden die Werte für sieben Stoffe zusammengestellt. Am Schlusse endlich wird noch Bezug genommen auf die von Tumlirz empirisch gefundene merkwürdige numerische Beziehung zwischen Verdampfungswärme und Schallgeschwindigkeit. Rtt.

G. Bakker. Die innere Verdampfungswärme einer Flüssigkeit. Ann. der Phys. (4) 9, 1128-1132.

Der Verf. hatte früher einen Satz aufgestellt, wonach, Gleichheit des flüssigen und dampfförmigen Moleküls vorausgesetzt, die innere Verdampfungswärme proportional sei der Differenz der spezifischen Gewichte von Flüssigkeit und Dampf. Dieser Satz wurde von andern als Folge der Zustandsgleichung von van der Waals angesehen; der Verf. wollte aber gerade die Unabhängigkeit davon festhalten, da die Gleichung von van der Waals von diesem selbst für Flüssigkeiten für nicht mehr zuverlässig gehalten wird.

Der wesentliche Inhalt der Arbeit besteht in einer Klarstellung mißverständlicher Auffassung der früheren Veröffentlichung hinsichtlich der Grundlagen der Rechnung. Als Ausgangspunkt wird die Abhandlung von Gauß über Kapillarität angegeben, als Grund gewisser angeblicher Unstimmigkeiten die von andern Seiten übersehene Unvollständigkeit bei ihrer Annahme nur eines Druckes in der Kapillarschicht. Rtt.

M. Thiesen. Über die spezifische Wärme des Wasserdampfes. Ann. der Phys. (4) 9, 80-93.

Der von Kirchhoff bei Gültigkeit des Gasgesetzes (so bezeichnet Verf. zusammen die Gesetze von Mariotte, Gay-Lussac und Avogrado) gefundene Satz, nach dem die spezifische Wärme eines Dampfes gleich der Änderung der Verdampfungswärme mit der Temperatur ist, erweist sich bei der Anwendung auf Regnaults Versuche als nicht zutreffend.

Den Grund dafür in den angeblichen, auch von Kirchhoff angenommenen Abweichungen vom Gasgesetze in der Nähe des Kondensationspunktes zu suchen, sei irrig.

Zur Aufklärung wird der Satz in strenger Fassung abgeleitet. Die gefundene Gleichung unterscheidet sich von der Kirchhoffschen durch ein Glied, das bei streng gültigem Gasgesetze verschwindet, aber wegen der großen Verdampfungswärme, die als Faktor auftritt, von besonderem Einflusse ist. Um nun nach der Formel die spezifische Wärme des Wasserdampfes berechnen zu können, werden die spezifische Wärme des flüssigen Wassers und die Verdampfungswärme als Funktionen der Temperatur untersucht (gestützt auf die Arbeiten Regnaults und des Verf.) und besonders eingehend dann die Abweichung des Wasserdampfes vom Gasgesetze, wobei die Untersuchungsmethoden von Regnault, Lucchi, Clément und Desormes u. a. zur Besprechung kommen. Rtt.

H. Helmholtz. Abhandlungen zur Thermodynamik chemischer Vorgänge. Herausgegeben von Planck. Leipzig: W. Engelmann. 83 S. 8° (Ostwalds Klassiker Nr. 124).

Das Bändchen enthält die vier in den Jahren 1877 und 1882 in den Berliner Akademieberichten erschienenen Abhandlungen: 1. Über galvanische Ströme, verursacht durch Konzentrationsunterschiede. 2. Die Thermodynamik chemischer Vorgänge. 3. und 4. Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge (zweiter und dritter Beitrag). Die Anmerkungen des Herausgebers haben die Tendenz, neben der Berichtigung der offenbaren Unrichtigkeiten im einzelnen die dem Leser bei der Lektüre von selbst aufstoßenden Fragen vorwegzunehmen und ihn hinsichtlich der Absichten und der in jedem Augenblick stillschweigend gemachten Voraussetzungen des Verf. aufzuklären. Br.

M. Wilderman. On chemical dynamics and statics under the influence of light. Lond. Phil. Trans. (A) 199, 337-397.

Die Arbeit wird hier nur wegen eines kurzen Anhanges angeführt, der die Anfänge einer thermodynamischen Theorie der photochemischen Erscheinungen geben soll. Es handelt sich allerdings nur um Ansätze, mit denen, da alle in Betracht kommenden funktionellen Abhängigkeiten unbekannt sind, nichts anzufangen ist. Immerhin wird der Satz abgeleitet, daß für die Reaktionsgeschwindigkeit bei Belichtung nicht die Menge des auffallenden Lichtes allein, sondern zunächst die Menge von reaktionsfähigen Stoffen maßgebend ist. Br.

M. Wilderman. On the velocity of reaction before complete equilibrium and the point of transition are reached. II, III. Phil. Mag. (6) 4, 270-277, 468-489.

Der Teil II enthält Ausführungen, wonach eine schon im Teil I

(Phil. Mag. (6) **2**, 50ff.) abgeleitete Differentialgleichung über die Reaktionsgeschwindigkeit des Eisschmelzens für alle Änderungen von Aggregatzuständen und verwandte physikalische Vorgänge gültig sei (F. d. M. **32**, 897, 1901). Die Änderung strebt dem Endzustand nur asymptotisch zu, so daß alle Änderungen des umgebenden Mediums den Charakter des Vorganges sofort beeinflussen. Dies ist besonders wichtig für die Anwendung auf atmosphärische Vorgänge. Teil III enthält eine Reihe von theoretischen Ansätzen und daraus gezogenen Schlußfolgerungen, die sich wegen ihres verhältnismäßig wenig systematischen Charakters hier nicht näher wiedergeben lassen, über den allgemeinen Fall von gleichzeitigen chemischen und thermodynamischen Reaktionen zwischen mehreren koexistierenden Körpern von beliebigem Aggregatzustand. Auch hier konzentriert sich das Interesse des Verf. nur auf die Reaktionsgeschwindigkeit, mit der das System dem theoretischen Endzustand zustrebt. Einige einfache Spezialfälle werden etwas näher untersucht. Br.

O. Tumlirz. Eine Ergänzung der van der Waalsschen Theorie des Kohäsionsdrucks. Wien. Ber. **111**, 524-552.

Ausgehend von bestimmten allgemeinen Annahmen über die Molekularanziehung, kommt Verf. an Stelle der van der Waalsschen zu der neuen Gleichung:

$$p + K(1 - \sqrt[3]{b^2/4v^2\sqrt{2}})/v^2 = RT/(v-b),$$

wo K eine Funktion von T ist, und weist nach, daß diese Formel die Beobachtungen am dampfförmigen und tropfbar flüssigen Schwefelkohlenstoff genügend genau darstellt. Br.

St. Meyer. Über die durch den Verlauf der Zweiphasenkurve bedingte maximale Arbeit. Wien. Ber. **111**, 305-310.

St. Meyer. Über die durch den Verlauf der Sättigungskurve bedingte maximale Arbeit. Ann. der Phys. (4) **7**, 937-941.

Nach einer früheren Bemerkung von Dieterici (Ann. der Physik (4) **6**, 869, 1901) muß bei isothermer Verdampfung die äußere Arbeit ein Maximum haben; denn sie verschwindet für gewisse Druckwerte. Die zugehörigen Temperaturen wurden dabei aus bekannten Beobachtungen an verschiedenen Substanzen ermittelt und das Maximum für alle betrachteten Körper bei der gleichen Temperatur gefunden, in Einheiten der kritischen ausgedrückt.

Der Verf. folgert zunächst aus der verallgemeinerten Zustandsgleichung, die keine Materialkonstante enthält, daß alle Körper das Maximum bei derselben Temperatur (in Einheiten der kritischen) haben müssen, und sucht diese Temperatur genauer zu bestimmen. Zu dem Ende, und da eine befriedigende Gleichung der Sättigungskurve nicht

vorliegt, hat der Verf. in größerem Maßstabe gezeichnete Druckvolumenkurven benutzt und danach die Arbeitskurve festgelegt. Den fraglichen Temperaturwert für alle Substanzen, die der reduzierten Gleichung vollkommen genügen, hat er auf diesem Wege etwas höher gefunden als Dieterici. Rtt.

W. H. Keesom. Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van van der Waals. VI. De drukvermeerdering bij condensatie van eene stof met een kleine hoeveelheid bijmengsel. Amst. Ak. Versl. **10**, 782-792.

In einer vorhergehenden Arbeit hatte der Verf. gezeigt, wie durch zwei Korrektionswerte der beobachteten Wendepunktserscheinungen eines nicht reinen Stoffes sich entsprechende Schlüsse für den reinen Stoff ergeben. Es ist aus naheliegenden, besonders experimentellen Gründen wünschenswert, unter Benutzung derselben Werte Stoffe mit geringen Beimengungen allgemeiner zu behandeln, die koexistierenden Phasen, die Veränderungen des Druckes bei der Kondensation. In der vorliegenden Arbeit werden nun zuerst mit Hülfe des Gesetzes der übereinstimmenden Zustände die Beziehungen hinsichtlich der koexistierenden Phasen entwickelt. Die Ergebnisse werden geprüft an den Beobachtungen von Hartmann mit Mischungen von Chlormethyl und Kohlensäure. Dann werden Formeln aufgestellt für die Abweichungen des Sättigungsdruckes von dem der reinen Stoffe, und es wird die Druckerhöhung bei Kondensation der Mischung abgeleitet. Damit läßt sich auch umgekehrt bei beobachteten Werten der Druckerhöhung der Gehalt der Mischung ableiten, wie sich auch der Sättigungsdruck der reinen Stoffe aus den beobachteten Anfangs- und Endwerten des Kondensationsdruckes der Mischungen ergibt. In letzterer Hinsicht dienen die Beobachtungen von Kuenen an Äthan zur Prüfung. Die Vergleichswerte werden in mehreren Tabellen mitgeteilt. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung ist befriedigend. Rtt.

J. E. Verschaffelt. Bijdrage tot de kennis van het ψ-vlak van van der Waals. VII. De toestandsvergelijking en het ψ-vlak in de onmiddellijke nabijheid van den kritischen toestand voor binaire mengsels met eene kleine hoeveelheid van een der bestanddeelen. Amst. Ak. Versl. **11**, 255-269, 328-342.

Versuche von Kuenen, dem Verf. und Kamerlingh Onnes hatten des letzteren Auffassung bestätigt, nach der die Isothermen von Gemischen normaler Stoffe vermittelst des Gesetzes der übereinstimmenden Zustände der allgemeinen empirischen Zustandsgleichung entnommen werden können, für die eine Reihe nach Potenzen der reduzierten absoluten Temperatur mitgeteilt wurde. An der Hand dieser Reihenform muß es möglich sein, auch für die kritischen Werte einer Mischung Ausdrücke zu finden. Ein erster Schritt zur Verwirklichung dieser Ideen geschah durch Keesom

in Anlehnung an einen Ausdruck von van der Waals für die Beziehung der kritischen Größen zum Mischungsverhältnis. Der Verf. beabsichtigte nun, die Idee in andrer Weise zu behandeln, mehr im Anschlusse an die Betrachtung der ψ-Fläche, dabei die Koeffizienten der Zustandsgleichung und die Gleichung der ψ-Fläche nach Potenzen des Mischungsverhältnisses zu entwickeln. An Stelle der empirischen Zustandsgleichung von Onnes wird bei der Nähe der kritischen Zustände Gebrauch gemacht von einer einfacheren nach van der Waals.

Im einzelnen wird das Thema in folgenden Hauptabschnitten bearbeitet: Das Druck-, Volumen-, Temperaturdiagramm für einfache Stoffe in der Nähe des kritischen Punktes; dasselbe Diagramm für Stoffe mit geringer Beimengung nahe beim kritischen Punkte der letzteren; das Diagramm für Druck-, Volumen- und Mengenverhältnis; die koexistierenden Phasen, der Wendepunkt; die Projektion der konnodalen Linien auf die Fläche Mengenverhältnis-Volumen; der kritische Berührungspunkt; die Grenzkurven und konnodalen Kurven in besonderen Fällen; die Grenzkurven in dem Druck-, Volumen-, Temperaturdiagramm; die Kondensation. Dazu wird eine große Anzahl von Kurven mitgeteilt. Rtt.

J. D. van der Waals. Ternaire stelsels. I. Het principe der continuiteit bij een ternair stelsels. Amst. Ak. Versl. **10**, 544-560, 665-686, 862-876; **11**, 88-109, 224-243.

Der Verf. hat früher die Form der Fläche $\psi = f(x, y)$ näher untersucht, durch die für binäre Systeme die Gleichgewichtsbedingungen bei bestimmter Temperatur geometrisch versinnlicht werden. Bei zunehmender Komponentenzahl ist eine ähnliche Darstellung nicht mehr möglich; aber es ist wünschenswert, von der graphischen Behandlung, die sich bei binären Systemen vorteilhaft erwies, tunlichst weiter Gebrauch zu machen. Bei ternären Systemen bieten die Eigenschaften der ζ-Funktion nach der Gleichgewichtsregel von Gibbs das Mittel dazu. Für gegebene Temperatur und Druck ist der Wert von ζ noch einfach abhängig von x und y, womit wieder eine geometrische Darstellung zulässig wird.

Die Behandlung stützt sich nun auf eine vom Verf. 1897 gegebene Gleichung für ζ bei einem ternären Systeme von x, y und $1 - x - y$ Molekülen, in der das Volumen vermittelst der Zustandsgleichung eliminiert zu denken ist. Wie der Verf. ebenfalls schon früher gezeigt hat, besteht dann die ζ-Fläche im allgemeinen aus den drei Blättern Flüssigkeit, Dampf und labile Zustände. Nach einleitender Bemerkung, wie weit die Kenntnis des Verlaufes dieser Blätter erforderlich ist, werden zunächst für einen einfachen Stoff die Werte von ζ als Funktion des Druckes bei konstanter Temperatur betrachtet, und aus der Differentialgleichung für ζ Volumen und Druck werden mit Hülfe des Prinzipes der Kontinuität gefunden: die Fortsetzung der Dampflinie bis nahe zum Maximumdrucke der Isotherme, die Linie des labilen Zustandes, der Beginn der

Flüssigkeitslinie. Für eine homogene Mischung ergibt sich dieselbe Form der ζ-Werte, denn die Form der Zustandsgleichung bleibt dieselbe.

Auf dieser Grundlage werden nun ausführlich analytisch und graphisch die Verhältnisse ternärer Systeme behandelt. In längeren Abschnitten gelangen zur Besprechung: Zusammenhang der Blätter der ζ-Fläche bei bestimmter Temperatur und Druck, unter Anwendung des Prinzips der Kontinuität, mit Einschluß des Falles zweier koexistierenden Phasen; Beziehung zwischen Volumen, Zusammensetzung und Temperatur für koexistierende Phasen; Beziehung zwischen Druck, Zusammensetzung und Temperatur bei koexistierenden Phasen, die Linien gleichen Druckes dabei, die Verschiebung dieser Linien bei verschiedenen Druckwerten, die Neigungslinien, die Zufügung einer dritten Komponente zu einem gegebenen binären Systeme. Rtt.

J. D. van der Waals. Systèmes ternaires. Arch. Néerl. (2) 7, 343-442.

„In dieser Abhandlung habe ich auf eine mehr oder weniger vollständige Art nur einige der Eigenschaften der ternären Systeme behandelt. Obgleich ich vorhabe, noch andere dieser Eigenschaften zu prüfen, so glaube ich doch gewissermaßen das Vorliegende als eine abgeschlossene Untersuchung betrachten zu können.“ (Vgl. das vorstehende Referat.) Lp.

J. D. van der Waals. Over de voorwaarden voor het bestaan eener minimum kritische temperatur bij een ternair stelsels. Amst. Ak. Versl. **11**, 285-294.

In seiner Molekulartheorie hatte der Verf. (Cont. **2**, 20) die Bedingungen gegeben für ein Minimum der kritischen Temperatur binärer Systeme, ausgehend von der Zustandsgleichung $RT_{cr} = \frac{8}{27}\frac{a_x}{b_x}$ (T_{cr} = Temperatur der ein zusammenfallendes Maximum und Minimum darstellenden Isotherme). Dabei ergeben sich zwar die kritischen Erscheinungen binärer Systeme verschieden von denen einfacher Stoffe; aber die Abweichungen sind so gering, daß die Berechnung der beobachteten kritischen Erscheinungen genau nach vorstehender Formel erfolgen kann. Ähnliches kann gelten für ternäre Systeme, wenn bei diesen auch an sich größere Abweichungen zu erwarten sind als bei binären. Während nun bei diesen die Untersuchung geführt wurde durch Bestimmen eines Minimums von $\frac{a_x}{b_x}$ als Funktion von x, und analog auch für ternäre Systeme vorgegangen werden könnte, hat der Verf. für diese einen etwas anderen Weg eingeschlagen, der bequemer und übersichtlicher ist. Er geht aus von der Gleichung:

$$(a_1 - \lambda b_1)(1-x)^2 + 2(a_{12} - \lambda b_{12})\,x(1-x) + (a_2 - \lambda b_2)\,x^2 = 0,$$

wobei für binäre Systeme zu setzen ist:

$$\frac{a_1(1-x^2)+2a_{12}x(1-x)+a_2x^2}{b_1(1-x^2)+2b_{12}x(1-x)+b_2x^2}=\lambda.$$

Die ausgedehnten Rechnungen führen nun zu Ausdrücken, die graphisch versinnlicht werden, wobei wesentlich die Lage von zwei parabolischen Kurven gegeneinander eine Rolle spielt. Es zeigt sich, daß die bei der Anwendung der Theorie auf ternäre Systeme erforderlichen Werte von a_{12}, a_{13} und a_{23} als durch die Kenntnis der binären Systeme gegeben zu erachten und neue Unterlagen für ternäre Systeme nicht erforderlich sind.

Rtt.

J. D. VAN DER WAALS. Eenige opmerkingen over den gang der molekulaire transformatie. Amst. Ak. Versl. **11**, 391-395.

Bei Essigsäure wie auch bei Untersalpetersäure, die aus Einzel- und Doppelmolekülen bestehend anzusehen sind, nimmt der Gehalt des gesättigten Dampfes an Doppelmolekülen mit steigender Temperatur ab. Aus diesen bekannten Vorbildern braucht aber nicht geschlossen zu werden, daß der bei ihnen stattfindende Gang der molekularen Transformation der einzig mögliche sei; vielmehr macht eine kurz vorhergehende Mitteilung von Roozeboom für manche Körper, beispielsweise Paraldehyd, auch den umgekehrten Gang wahrscheinlich. Aus der früher vom Verf. gegebenen Gleichung der molekularen Transformation wird nun abgeleitet, daß der gesättigte Dampf bei steigender Temperatur weniger dissoziiert wird, wenn, wie bei Essigsäure, die bei der Verbindung zu n-fachen Molekülen entwickelte Wärme einen gewissen Wert übersteigt, der durch n, die Temperatur und einen Zahlenfaktor gegeben ist, der selbst mit der Temperatur mehr oder weniger veränderlich ist. Und umgekehrt. Der Unterschied im Gange der Transformation verschwindet aber mit Annäherung an die kritische Dichte und Temperatur. Bemerkt wird auch u. a. über das Verhalten des Wasserdampfes, dessen Dichte bei gewöhnlicher Temperatur nicht merkbar von den Gasgesetzen abweicht, bei 100 Grad aber um etwa $2^1/_2$ Prozent größer ist, als daraus folgen würde, daß diese Abweichung, über die man sich bisher keine Rechenschaft geben konnte, höchst wahrscheinlich der Anwesenheit mehr komplexer Moleküle zuzuschreiben ist.

Rtt.

J. D. VAN DER WAALS. Kritische verschijnselen bij gedeeltelijk mengbare vloeistoffen. Amst. Ak. Versl. **11**, 396-400.

In einer 1899 gegebenen Mitteilung zu obigem Thema war der Verf. von dem Gedanken ausgegangen, daß die Reihe von Wendepunkten, die bei verschiedenen Temperaturen vorkommen können, eine oder mehrere (im mathematischen Sinne) zusammenhängende Kurven geben müsse. Vor kurzem hatten aber Versuche von Kuenen mit Äthan und Äthylalkohol nicht zusammenhängende Wendepunktskurven geliefert (veröffentlicht in derselben Zeitschrift), und der Verf. hatte sie durch eine theore-

tische Linie vereinigt. Diese Vereinigung kann entweder so geschehen, daß die Kurve kontinuierlich, auch in der Richtung, verläuft, oder durch solche Verbindung der Enden der experimentell gefundenen Kurven, daß der Kurvenverlauf bei den Anschlußpunkten plötzliche Veränderungen anzeigt. Nach kurzer Besprechung der Folgen beider Vereinigungen wird die Frage nach der richtigen Wahl unter ihnen aufgenommen. Die Behandlung nimmt Bezug auf den besonderen Verlauf der von Kuenen gegebenen (hier nicht wieder mitgeteilten) Kurven, wie auf frühere von Korteweg, und zieht auch das Verhalten andrer Kohlenwasserstoffe mit heran. Ohne eine abschließende Antwort zu geben, hofft der Verf. von der Erweiterung der Kuenenschen Beobachtungen einen wesentlichen Fortschritt in der Kenntnis der kritischen Erscheinungen. Rtt.

F. H. A. Schreinemakers. Tensions de vapeur de mélanges ternaires. Arch. Néerl. (2) 7, 99-265.

Die allgemeinen Gedanken, welche in dieser großen Abhandlung verfolgt werden, sind in dem Aufsatze ausgesprochen, über welchen in F. d. M. **32**, 895, 1901 berichtet ist. Der Umfang der vorliegenden Arbeit verbietet ein näheres Eingehen auf den Gang der Entwicklungen. Wir müssen uns mit der Wiedergabe der Titel für die einzelnen Abschnitte begnügen.

I. Die Oberfläche ζ. II. Die homogenen Gemenge. A. Die Verdampfungs- und die Verdichtungskurven. B. Einfluß einer dritten Komponente auf den Aggregatzustand eines binären Gemenges. C. Einfluß des Druckes auf die Lage der Verdampfungs- und Verdichtungskurven. D. Einfluß der Temperatur auf die Lage der Verdampfungs- und Verdichtungskurven. E. Bemerkungen bezüglich der Berührung zweier Mäntel. F. Die Destillation. G. Gleichgewichtszustände, bei denen die Konzentration einer oder zweier der Komponenten sehr klein wird. III. Die heterogenen Gemenge. A. Die Verdampfungs- und die Verdichtungskurven. B. Einfluß des Druckes auf die Lage der Verdampfungs- und der Verdichtungskurven. C. Einfluß der Temperatur auf die Lage der Verdampfungs- und der Verdichtungskurven. D. Das System der drei Phasen $L_1 + L_2 + V$. E. Die Destillation. F. Gemenge mit drei Schichten. IV. Einfluß fremder Substanzen auf die Dampfspannung und den Siedepunkt binärer Gemenge. A. Homogene Gemenge. B. Heterogene Gemenge. Lp.

H. W. Bakhuis-Roozeboom. Eene ruimte-voorstelling van de gebieden der phasen en hunner komplexen in stelsels van twee komponenten, waarin deze beide uitsluitend als vaste phasen optveden. Amst. Ak. Versl. 11, 276-279.

Nachdem seit 1896 der allgemeine Charakter des Gleichgewichts zwischen Flüssigkeit und Dampf in binären Systemen vollständig erkannt

ist, kann auch eine graphische, bezw. körperliche Darstellung der andern Gleichgewichtszustände entworfen werden, wobei auch feste Phasen auftreten. Es werden nun in photographischer Wiedergabe zwei körperliche Modelle vorgeführt, je einer Komponente entsprechend, wobei Länge, Breite und Höhe, bezw. Temperatur, Gehalt der im Dampf- oder Flüssigkeitszustande möglichen Mischungen und Druck bedeuten. Die weitere Erläuterung kann nur an der Hand der nicht einfachen Modelle, bezw. Figuren selbst erfolgen. Rtt.

H. Kamerlingh Onnes en H. H. Francis Hyndman. Isothermen van twee-atomige gassen en hun binaire mengsels. II. De bepaling van dichtheden met de piëzometers met veranderlijk volume voor lage temperaturen. Amst. Ak. Versl. **10**, 809-815.

Nach Besprechung der Dichtebestimmungen mit Hülfe des Piëzometers wird zur Berechnung der Versuchsergebnisse eine Formel aufgestellt, die Rechnung darauf für höhere Drucke ergänzt unter Berücksichtigung der elastischen Deformation der Gasbehälter nach den Formeln von Clebsch und Lamé. Im Schlußabschnitte folgen Bemerkungen über die bei den Berechnungen nötigen Konstanten. Rtt.

J. J. van Laar. Over het verloop der smeltlijn van vaste legeeringen of amalgamen. Amst. Ak. Versl. **11**, 478-485.

In früheren Untersuchungen von van Heteren über Zinnamalgame kommt eine Schmelzkurve vor (für zunehmenden Gehalt des Amalgams an Quecksilber), die in ihrem ganzen Verlaufe bisher noch nicht studiert ist. Die Schwierigkeit der Behandlung folgt aus der großen Verschiedenheit der Schmelztemperaturen von Zinn und Quecksilber. Die Frage ist, ob die von van Heteren gefundenen Werte sich theoretisch begründen lassen, was der Verf. bejaht.

Zunächst wird unter möglichst einfachen Annahmen hinsichtlich der molekularen Potentiale für das feste Zinn und das flüssige Amalgam eine kurze Formel gewonnen, welche die Schmelztemperatur als logarithmische Funktion der Mengenverhältnisse gibt, und nach der bereits das mögliche Auftreten eines Wendepunktes in der Schmelzkurve beurteilt werden kann. Eine strengere Formel wird aufgestellt unter Annahme einer Zustandsgleichung von der Form derjenigen von van der Waals. Es zeigt sich, daß diese Formel den von van Heteren gefundenen Werten auch quantitativ genügt; in einer längeren Tabelle werden zum Vergleiche berechnete und beobachtete Werte mitgeteilt. Den Schluß bilden einige Bemerkungen über die Schmelzwärme von Zinn und Quecksilber, die zur Aufstellung der strengeren Formel benutzt wurden. Rtt.

J. J. VAN LAAR. Over het potential-verschil, hetwelk onstaat aan het scheidingsvlak van twee verschillende niet-mengbare oplosmiddelen, waarin zich een zelfde opgeloste electrolyt verdeeld heeft. Amst. Ak. Versl. **11**, 485-492.

Von Nernst war schon 1892 ausgesprochen, daß an der Trennungsfläche von zwei übereinander geschichteten Flüssigkeiten (z. B. von Wasser und Phenol) infolge der ungleichen Verteilung der neutralen Moleküle und der Ionen derselben gelösten Elektrolyte ein Potentialunterschied entstehen müsse. Der von Nernst zunächst nur für einen besonderen Fall gegebene Ausdruck für die elektromotorische Kraft, die sich vorläufig noch der direkten Messung entzieht, erweist sich auch als allgemeiner gültig.

Betrachtet werden die Lösungen von KCl in zwei Mitteln, und für den Potentialsprung an der Trennungsfläche wird rechnerisch gefolgert, daß jener in verdünnten Lösungen unabhängig ist von der Konzentration. Aus der Formel, die unmittelbar auch zu der früher von Nernst gegebenen führt, sind die Ionenkonzentrationen eliminiert; sie enthält nur noch die Verteilungskoeffizienten für Kalium und Chlor. Es zeigt sich weiter, daß bei zwei nicht mengbaren Lösungsmitteln immer ein Potentialunterschied auftritt, wenn ein Elektrolyt sich über beide verteilt. Die Frage, welcher Einfluß noch den Ionenkonzentrationen zuzuschreiben ist, wird endlich mit Hülfe einer Zustandsgleichung behandelt, die der van der Waalsschen entspricht, unter Annahme ihrer Gültigkeit auch für Flüssigkeiten.

Rtt.

JOUGUET. Sur la rupture et le déplacement de l'équilibre. C. R. **134**, 1418-1420; **135**, 778-781.

Für ein mechanisches System, definiert durch seine Temperatur und vier Variabeln, wird nach Gibbs die Gleichung der lebendigen Kräfte aufgestellt, und unter Anlehnung an Duhem werden die Gleichgewichtsbedingungen entwickelt. Die gewonnenen Formeln werden auf die im Titel angedeuteten Theoreme angewendet, die als Sonderfälle eines Gesetzes von Le Chatelier bezeichnet werden und in Beziehung stehen zu Theoremen, die Duhem im ersten Buche seiner Mécanique chimique behandelt hat. Die Entwicklungen erfolgen nach der Methode von Duhem.

In der zweiten Arbeit werden die Ergebnisse der vorstehenden Behandlung der Sonderfälle auf die Stabilität eines chemischen Systemes in wärmedichter Hülle angewendet, in Anlehnung wieder an Entwicklungen und Hypothesen von Duhem und unter Bezugnahme auf verwandte Untersuchungen von Tammann in Ann. der Phys. (4) **1**, 275 (F. d. M. **31**, 855, 1900).

Rtt.

A. PONSOT. Chaleur de réaction entre les corps à l'état solide et à l'état gazeux. C. R. **134**, 651-653.

Die Entwicklung bezieht sich auf zwei feste Körper in äquivalenten Mengen, die durch chemische Wirkung zwei andre Körper bilden können.

Der Übergang von dem einen zum anderen Körpersysteme kann durch eine Reihe reeller oder virtueller Modifikationen erfolgen, wobei die Gegenwart der Dämpfe der festen Körper vorausgesetzt wird. Es wird nun zunächst ein umkehrbarer Kreisprozeß der vier Körper im chemischen Gleichgewichte betrachtet, darauf eine Reihe umkehrbarer Verwandlungen von Dampfmischungen der ersten und der zweiten Körper. Aus den Gleichungen der Energie und Entropie wird gefolgert, daß die beiden Wärmemengen der chemischen Umwandlung fester Körper in Gegenwart ihrer Dämpfe und derselben Körper in gasförmigem Zustande unter konstantem Volumen bei dem absoluten Nullpunkte der Temperatur denselben Wert haben würden. Rtt.

A. Ponsot. Chaleur spécifique des corps au zéro absolu. C. R. 131, 703-705.

Betrachtet wird eine im chemischen Gleichgewichte befindliche gasförmige Mischung von zwei Körpersystemen aus je zwei Gasen in äquivalenten Mengen. Bei Störung des Gleichgewichtes läßt sich durch Betrachtung isothermischer Änderungen eine von der Temperatur abhängige bestimmte Zusammensetzung des einen homogenen Körpersystems angeben, für die der Differentialquotient der Entropie verschwindet. Mit sinkender Temperatur hören aber die betrachteten Systeme auf, homogen zu sein, wenn nicht das Volumen einen genügend großen Wert erhält, so daß bei hinreichend tiefer Temperatur und passendem Volumen die Körper teils fest, teils dampfförmig werden. Aus diesem Verhalten läßt sich durch Betrachtung der Entropiegrößen zunächst schließen, daß beim absoluten Nullpunkte zwei Systeme fester Körper aus denselben Elementen dieselbe spezifische Wärme haben. Im weiteren wird abgeleitet, daß die spezifische Wärme einer festen Mischung gleich der Summe der spezifischen Wärmen der Elemente in demselben Zustande ist, daß ferner die spezifische Wärme eines festen Körpers und die ihres gesättigten Dampfes beim absoluten Nullpunkte gleich groß sein würden. Mit den aus Versuchen von Behn folgenden Schlüssen stimmt auch der Satz überein, wonach die spezifische Wärme eines festen Körpers und die seines gesättigten Dampfes gegen den absoluten Nullpunkt hin verschwinden. Rtt.

J. Benetti. Il calcolo dei camini per i generatori di vapore. Bologna Mem. (5) 9, 435-455.

Zunächst bespricht der Verf. die Formel von v. Reiche zur Berechnung der Höhe eines Schornsteines; dann erwähnt er die im Jahre 1899 in Berlin angestellten Versuche über die bauliche Sicherheit und die daraus gezogenen Schlüsse. Auf Grund der dort aufgestellten Bedingungen entwickelt er eine graphische Methode zur Bestimmung der Stabilität der Schornsteine für Dampfkessel, und gibt in zwei Tafeln ein Beispiel dieser Methode. Dina (Rtt.)

J. Nadal. Théorie de la machine à vapeur. Assoc. Franç. Ajaccio (1901) **30**, 73-91.

Die Arbeiten von Hirn und seinen Schülern haben die aus den Kondensationen herrührenden Verluste festgestellt, welche in den Zylindern der Dampfmaschinen entstehen, jedoch ohne sie zu erklären oder sie theoretisch auszuwerten. Die vom Verf. gegebene Theorie bezweckt die Aufstellung einer Formel, welche den Betrag dieser Kondensationen liefert. Zugrunde liegt die mathematische Theorie der Wärmeausbreitung in einer Wand, die von einer Wärmequelle mit veränderlicher Temperatur, wie Dampf, umspült ist. Diese Theorie hat nutzbar herangezogen werden können zufolge der Versuche von Bryan Donkin; aus ihnen folgt nämlich, daß bei der Mehrzahl der festen Dampfmaschinen die mittlere Temperatur der Metallwandung höher ist als die mittlere Temperatur des Dampfes. Diese Tatsache führt zu dem Schlusse, daß das Metall die Wärme leichter aufnimmt als hergibt, d. h. daß sein Absorptionsvermögen größer ist als sein Emissionsvermögen. Der Durchgängigkeits-Koeffizient der Metallfläche ist um so höher, je beträchtlicher die an dieser Oberfläche abgelagerte Feuchtigkeit ist. Die Untersuchung der mittleren Temperaturänderung der Wand als Funktion des Grades der Zulassung ermöglicht die Bestimmung des Absorptions- und des Emissionsvermögens und die Aufstellung der Formel, welche die bei jedem Hube des Kolbens verlorene Dampfmenge gibt. Diese Menge ist um so geringer, je höher die mittlere Temperatur der Wand ist; sie ist etwa dem Unterschied der Temperaturen des Dampfes während des Rückganges proportional und ändert sich wenig mit der Dauer der Zulassung. Diese Regeln gelten nicht mehr für gewisse Maschinen wie die Lokomotiven, bei denen die Koeffizienten der Absorption und der Emission gleich werden; dies veranlaßt eine beträchtlichere Kondensation des Dampfes. In allen Fällen variieren die Verluste in direktem Verhältnisse zur Anzahl der Umdrehungen. Die theoretisch aufgestellten Koeffizienten der Formel für die Kondensationen können experimentell durch die Prüfung der an den Maschinen mit vielfacher Expansion aufgenommenen Druckdiagramme bestätigt werden.

Lp.

E. Ascione. Sulla formola del lavoro di una motrice a vapore monocilindrica. Atti della R. Accademia Peloritana **16**, 143-155.

Ein elementarer Beweis der im Titel gegebenen Formel. Vi.

M. Panetti. Ciclo teorico e ciclo pratico delle locomotive compound. Torino Atti **37**, 677-702.

Obgleich bis jetzt viel Mühe aufgewendet wurde, die Wirkungsweise der Nebenmechanismen in den Lokomotiven mit mehrfacher Expansion zu verbessern, geschah doch weniger hinsichtlich des thermischen Problemes. In dieser Richtung wurden allerdings verschiedene Versuche an-

gestellt, unter denen die von der Firma Borsig eingeführte Überhitzung des Dampfes bemerkenswert ist. Diese Überhitzung kann aber nicht genügen: der Hauptfehler dieser Lokomotiven besteht in dem erheblichen Druckverlust beim Übergange des Dampfes vom kleinen in den großen Zylinder; dieser Verlust kann einen Druckverlust bis etwa 20 Prozent hervorrufen. Der Verf. schlägt einige Mittel vor, um diesen Verlust zu verkleinern. Obschon nur Versuche eine sichere Antwort auf die Frage geben können, wird hier zunächst eine Analysis der Zyklen gegeben, die zu verbessern sind. Dina. (Rtt.)

L. Lecornu. Sur les moteurs à combustion. C. R. **134**, 1347-1349.

L. Lecornu. Sur les moteurs à injection. C. R. **134**, 1566-1568.

Der Verf. leitet für die Ausbeute bei Gas- oder Petroleum-Motoren Formeln ab, welche die spezifischen Wärmen der in Betracht kommenden Gase und Gemenge sowie die absoluten Temperaturen vor und nach der Entzündung enthalten, und zieht daraus einzelne Schlüsse. Lp.

E. Vallier. Sur la loi des pressions dans les bouches à feu. C. R. **135**, 314-316, 842-845.

E. Vallier. Tracé des courbes de pressions. C. R. **135**, 942-943.

Forsetzung der Untersuchungen des Verf. über die Formeln, welche zur Darstellung des Druckes in den Geschützrohren dienen und wesentlich empirischer Natur sind. Zwischen dem mittleren „Verbrennungsexponenten“ γ und dem „Ermüdungskoeffizienten“ α besteht die angenäherte Gleichung $\alpha + 2\gamma = 3$ mit der Nebenbedingung $\frac{4}{3} < \alpha < \frac{7}{4}$. Diese Beziehung ist das Resultat der Elimination des Langsamkeitskoeffizienten β aus den beiden Gleichungen $(\alpha - 1)\beta = 2$, $\beta = \beta\gamma + 1$. Lp.

Rud. Wotruba. Die Grundlehren der mechanischen Wärmetheorie und ihre elementare Anwendung in den hauptsächlichsten Gebieten der Technik. Berlin: H. Costenoble. VI u. 282 S. gr. 8°.

Ponsot. Méthode pour évaluer les températures dans l'échelle thermodynamique centigrade. C. R. **135**, 954-956.

B. Gastheorie.

G. Jäger. Das Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten der Gasmolekeln. Wien. Ber. **111**, 255-263.

Für eine ideale Flüssigkeit (Verdampfungswärme, Volumen konstant) wird unter weiteren zweckdienlichen Annahmen (Zulässigkeit des Boyle-

Charlesschen Gesetzes für den Dampf etc.) aus der Clapeyron-Clausiusschen Gleichung ein Ausdruck für die Spannung des gesättigten Dampfes abgeleitet und mit Hülfe der Grundgleichung der kinetischen Gastheorie umgeformt. Für dieselbe Größe wird eine Formel lediglich nach der kinetischen Gastheorie abgeleitet, ausgehend von der Vorstellung, daß die Spannung des gesättigten Dampfes erreicht ist, wenn in der Zeiteinheit ebenso viel Molekeln aus dem Dampfe in die Flüssigkeit fliegen, als umgekehrt von dieser in den Dampf übergehen. Vorausgesetzt wird das Bestehen eines bestimmten Verteilungsgesetzes der Geschwindigkeiten, das der Form nach für die Molekeln beider Zustände nach den Grundannahmen der kinetischen Gastheorie dasselbe sein muß; doch ist nicht von vornherein zu entscheiden, ob die Geschwindigkeiten beider Zustände gleich sind. Die Behandlung der Geschwindigkeitskomponenten eines räumlichen, rechtwinkligen Koordinatensystems nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wobei ein Ausdruck für die Molekelzahl von Dampf in Flüssigkeit aus der Vorstellung der Arbeit der Kapillarkräfte für den Zustand des gesättigten Dampfes gewonnen wird, führt dann zu dem Ergebnisse, daß die mittlere kinetische Energie der fortschreitenden Bewegung einer Molekel bei derselben Temperatur für beide Zustände gleich ist. Wird in den dafür geltenden Ausdruck die wahrscheinlichste Geschwindigkeit eingeführt, so ergibt sich ein Verteilungsgesetz für die Geschwindigkeiten der Gasmolekeln gleich dem zuerst von Maxwell aufgestellten. Rtt.

J. H. Jeans. On the conditions necessary for equipartition of energy. Phil. Mag. (6) 4, 585-596.

Die Bestimmungsstücke für den Zustand eines vollkommenen Gases werden als Koordinaten eines Raumes von $2n$ Dimensionen aufgefaßt und die den jeweiligen Bewegungszustand bestimmenden Differentialgleichungen nach Analogie der Hydrodynamik aufgestellt. Es ergibt sich, daß diejenige Lösung, die auf das Boltzmannsche Gesetz der Energieverteilung führt, nur eine partikulare ist. Die Anwendung der entwickelten allgemeinen Formeln auf die konkreteren Bedingungen der Gastheorie wird dann im einzelnen durchgeführt. Br.

C. Puschl. Über den Wärmezustand der Gase. Wien. Ber. 111, 187-214.

Nimmt man für den Druck einer Flüssigkeit ähnliche kinetische Ursachen an, wie bei Gasen, so läßt sich die kinetische Energie ohne Zuhülfenahme einer besonderen Hypothese leicht berechnen; denn die Energie in einer bestimmten Schicht einer Flüssigkeitssäule ist gleich der Energie der um die zugehörige Höhe frei fallenden Masse der Schicht. Bei überall gleichem Drucke p auf ein Flüssigkeitsvolumen v ergibt sich die das Gleichgewicht haltende Energie als pv. Das gilt auch für ein Gas, sobald man sich die Flüssigkeitsäule ersetzt denkt durch einen be-

lasteten Kolben. Für pv ergibt sich nach den Gesetzen von Gay-Lussac und Joule eine sehr einfache Beziehung zu der innewohnenden Wärmemenge, und wenn diese bei Gasen einfach das Äquivalent von pv wäre, so würde das Verhältnis der spezifischen Wärme „2" sein, während es in Wirklichkeit viel kleiner ist und mit 1,666 (bei Helium etc. seinen größten Wert erreicht. Der Grund für die Differenz kann in dem bei der kinetischen Theorie nicht berücksichtigten Äther vermutet werden. Diese Vermutung sucht der Verf. zu stützen durch Betrachtung der Rolle des Äthers bei der Mechanik der Strahlung der Gase; er setzt die Gesamtwärme gleich der Summe der obigen Volumenenergie und der von ihm sogenannten „Temperaturwärme", ein diesem Ausdruck genügendes Gas als ein ideales bezeichnend. In der Fortführung dieser Betrachtungen, wobei auf die neuesten Messungen von Lord Rayleigh betreffend das Mariottesche Gesetz bezug genommen wird, gelangt der Verf. zu der Annahme, daß Gase äußerster Verdünnung einen negativen (Wärme-)Ausdehnungskoeffizienten haben, für welche Ansicht auch bekannte Erscheinungen an Kometen sprechen. Bei den angedeuteten Anschauungen wird die ausdehnende Kraft beim Zusammendrücken eines Gases notwendig ein Maximum; in weiterer Folgerung daraus müßten dann äußerst stark komprimierte Gase bei plötzlicher Druckverminderung sich erhitzen. Dieser Folgerung scheinen Versuche Amagats über sehr starke Kompressionen günstig zu sein. Den Schluß der Arbeit bilden Anwendungen der gewonnenen Grundlagen auf das Gesetz von Dulong und Petit, das eine für alle Aggregatformen gültige Erweiterung erfährt.

Rtt.

F. M. Exner. Über den Gleichgewichtszustand eines schweren Gases.
Ann. der Phys. (4) 7, 683-686.

Die Arbeit bezweckt, aus dem zweiten Hauptsatze eine Bestätigung des von Boltzmann auf Grund der Gastheorie bewiesenen Satzes zu erbringen, nach dem ein schweres Gas von konstantem Energiegehalt nur bei überall gleicher Temperatur im Gleichgewichte ist. Die Richtigkeit war von A. Schmidt bestritten (Beiträge zur Geophysik 4, 1. Heft 1899).

Die Behandlung bezieht sich auf ein ideales, der Schwere unterworfenes Gas in einem oben offenen, wärmedichten Zylinder. Die Gleichung für die Entropie der Gassäule wird aufgestellt, und unter Anwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode und Einführung der Bedingungsgleichung für die Abnahme des Druckes mit der Höhe wird auf die Konstanz der Temperatur geschlossen.

Rtt.

A. Schmidt. Über den Gleichgewichtszustand eines schweren Gases.
Ann. der Phys. (4) 8, 924-926.

Gegen die Beweisführung von Exner (vgl. das vorstehende Referat)

wendet A. Schmidt ein: Die beiden spezifischen Wärmen seien verwechselt, der Ausdruck für den Gesamtenergieinhalt der Luftsäule habe infolgedessen eine andere Form. Wenn trotzdem das Ergebnis mit dem zweiten Hauptsatze stimme, so habe das seinen Grund in dem Satze von A. Ritter über die Höhe des Schwerpunktes der Luftsäule, die vom Temperaturgradienten unabhängig ist. Die konstante Gesamtenergie besteht dann aus zwei konstanten Teilen; der Temperaturgradient für das von der Temperaturverteilung abhängige Entropiemaximum ist die Temperaturgleichheit. Im übrigen setze Exners Beweis das zu Beweisende voraus, nämlich die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes bei Zustandsänderungen schwerer Gase. Für die Schmidtsche Ansicht, nach der die Schwere in den Gasen eine Temperaturdifferenz von oben nach unten bewirke, hoffe er demnächst praktische Beweise zu erbringen.

Gegen diese Kritik bringt der Verf. der angegriffenen Arbeit in Ann. der Phys. (4), **9**, 967 eine kurze Erwiderung, in der vornehmlich die Verwechslung der spezifischen Wärmen als nicht vorliegend erörtert wird.

Rtt.

M. Thiesen. Zur Theorie der Diffusion. Verh. Deutsche Phys. Ges. **4**, 348-360.

„Die üblichen Diffusionstheorien beruhen für tropfbare Flüssigkeiten auf der Annahme eines konstanten ‚Diffusionskoeffizienten', für Gase auf den Voraussetzungen der speziellen Theorien von Clausius und Maxwell. Ich will hier versuchen, die Grundlage für eine allgemeinere einheitliche Theorie zu geben. Diese führt zu dem Ergebnisse, daß die Diffusion zweier einfachen Gase von vier Konstanten abhängt; doch lassen sich höchst wahrscheinlich diese Konstanten auch aus Bestimmungen von Reibungskoeffizienten ableiten. Für tropfbare Flüssigkeiten oder nicht vollkommene Gase sind die Verhältnisse komplizierter; wahrscheinlich ist auch die Theorie auf die Reibung dieser Flüssigkeiten nicht anwendbar."

Lp.

J. H. Jeans. The theoretical evaluation of the ratio of the specific heats of gas. Phil. Mag. (6) **2**, 638-651.

Die Differenz zwischen den beobachteten und den errechneten Quotienten der beiden spezifischen Wärmen sucht Verf. dadurch zu erklären, daß er neben der Translationsenergie und der inneren Energie der Moleküle noch eine Vibrationsenergie annimmt, die auf den Äther einwirkt und von ihm beeinflußt wird. Der Quotient gewinnt dann eine allgemeinere Form, die von der Temperatur abhängt und für verschwindende Vibrationsenergie in die übliche Form übergeht. Die Formel gilt zugleich für den Fall, daß man noch weitere Energieformen des Moleküls annimmt.

Br.

W. Mellor. On a law of molecular attraction. Phil. Mag. (6) 2, 423-424.

Verf. leitet aus der van der Waalsschen Korrektion für das Gasgesetz durch Aufstellung des Ausdrucks für die innere Arbeit eines ausgedehnten Gases das Sutherlandsche Gesetz der Molekularanziehung umgekehrt der vierten Potenz der Entfernung ab. Br.

A. Battelli. Recherches sur la loi de Boyle appliquée à de très basses pressions. Ann. de chim. et phys. (7) 25, 308-365.

Die Arbeit ist im ersten Teile kritisch, danach meistens experimentell. Theoretisch sind die Erörterungen über die Zustandsgleichung. Lp.

H. Mache. Über die Schutzwirkung von Gittern gegen Gasexplosionen. Wien. Ber. 111, 1223-1228.

„Es ströme von rechts her ein homogenes Knallgas mit der Geschwindigkeit u durch ein Drahtnetz. Links vom Netze werde es entzündet. Dann wird zunächst die Explosion im Knallgas mit der ihm charakteristischen Explosionsgeschwindigkeit c fortschreiten und sich hierbei dem Drahtnetze nähern oder sich von demselben entfernen, je nachdem $u \gtrless c$ ist. Wir betrachten nur den ersten Fall, in dem sich dann die Brennfläche zunächst mit der Geschwindigkeit $c - u$ dem Drahtgitter nähert, erfahrungsgemäß aber noch vor demselben zum Stillstande kommt, obwohl auch hier die Strömungsgeschwindigkeit des Gases unter der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Explosion bleibt. Die Flamme schlägt nicht durch. Wir wollen versuchen, uns von diesem Vorgange Rechenschaft zu geben." Wbg.

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

J. W. Peck. The steady temperatures of a thin rod. Phil. Mag. (6) 4, 226-240.

Die Fouriersche Lösung für die stationäre Wärmeströmung in einem langen Stabe, dessen eine Endfläche auf hoher konstanter Temperatur erhalten wird, und der mit seiner ganzen Oberfläche Wärme an eine auf konstanter Temperatur erhaltene Umgebung abgibt, führt auf Querschnittsisothermen und gerade Strömungslinien, was beides der Wärmeabgabe durch die ganze Oberfläche widerspricht. Verf. weist nach, daß die Fouriersche Lösung nur die erste Näherung für die allgemeine, in Besselschen Funktionen ausdrückbare Lösung abgibt, und daß die zweite Näherung als Niveauflächen koaxiale Paraboloide und als Strömungslinien Kurven von logarithmischem Charakter ergibt. Versuche, die dieser zweiten Annäherung entsprechen, werden diskutiert. Br.

H. S. CARSLAW. A problem in conduction of heat. Phil. Mag. (6) 4, 162-165.

Ein neuer Weg zur Lösung des Problems der Wärmeströmung in einem Körper, der von einer Ebene begrenzt ist und sich einerseits ins Unendliche erstreckt, andrerseits in den übrigen Raum Wärme ausstrahlt, bei gegebener Anfangsverteilung der Temperatur. Die Lösung führt auf ein komplexes Integral, das über eine geschlossene Randkurve ohne innere Singularität zu integrieren ist, so daß der Wert 0 ist. Hieraus ergibt sich dann das an sich bekannte Resultat. Br.

E. CESÀRO. Intorno ad una limitazione di costanti, nella teoria analitica del calore. Napoli Rend. (3) 8, 31-38.

Damit Funktionen bestehen, die in allen Punkten eines Raumes S der Differentialgleichung $\Delta^2 u + ku = 0$ genügen und in allen Punkten der Oberfläche s, welche S begrenzt, der Bedingung $\partial u/\partial n + hu = 0$, wo $h \geqq 0$, ist es nötig, wie aus Poincarés Untersuchungen hervorgeht, daß k einer gewissen Folge $k_1, k_2, k_3, \ldots$ positiver Zahlen angehört, die mit h wachsen. Ist $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$, so ist $k_1 < hs/S$. Poincaré ist zu der Bestimmung der unteren Grenze durch Betrachtung eines Integralausdrucks für k_1 gelangt. Cesàro gibt in dem vorliegenden Aufsatze einen etwas einfacheren Weg an. Eine entsprechende Methode führt auch für die Zahlen $k_2, k_3, \ldots$ zum Ziele. Lp.

E. CESÀRO. Sur un problème de propagation de la chaleur. Belg. Bull. Sciences 1902, 387-404.

Vereinfachung der Beltramischen Lösung für die Integration der Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial t}\right),$$

wenn $V(1,t) = F(t)$, $V(r,0) = G(r)$. Mn. (Lp.)

W. SCHAUFELBERGER. Wärmeleitungsfähigkeit des Kupfers, aus dem stationären und variabeln Temperaturzustand bestimmt, und Wärmefluß in einer durch Kühlwasser bespülten Endfläche eines Wärmeleiters. Ann. der Phys. (4) 7, 589-630.

Die Bestimmungen des inneren Wärmeleitungsvermögens der Metalle (u. a. zusammengestellt von Holborn und Wien) haben nicht unbeträchtliche Wertunterschiede ergeben, die wenigstens teilweise auf die Meßmethoden zurückzuführen sind. Diese unterscheiden sich vornehmlich durch die Benutzung des stationären oder des variablen Temperaturzustandes. Der Verf. will zeigen, daß beide Methoden einwandfreie

Werte ergeben, wenn die Vorgänge an den Grenzflächen der Leiter richtig beachtet werden.

Entgegen nämlich der häufigen Annahme gleicher Temperatur der Grenzflächen des Körpers und der bespülenden Flüssigkeit zeigen thermoelektrische Messungen erhebliche Temperaturdifferenzen (in einem bestimmten Falle bei der Zusammenstellung Wasserdampf-Kupferstab-Kühlwasser: 4 bis 7°). Das läßt sich zwanglos erklären mit einer dünnen, fest an der Grenzfläche haftenden Wasserschicht, deren großer spezifischer Leitungswiderstand eben scheinbar einen Temperatursprung auftreten läßt. Unter gewissen vereinfachenden Annahmen läßt sich die Dicke der festen Schicht schätzen und in Vergleich mit den Kapillarwerten von Poiseuille bringen.

Auf dieser Grundlage werden Prinzip und Theorie der Meßmethoden entwickelt, die zur Bestimmung des Leitungsvermögens von Kupfer benutzt werden sollen, und zwar für den stationären Zustand und für den variablen. Bei beiden Bestimmungen ist unter den gewählten Versuchsformen die äußere Wärmeleitung von geringer Bedeutung; die Wärmeleitungskoeffizienten, die Dichte und die spezifische Wärme werden mit Rücksicht auf die kleinen Temperaturintervalle als konstant angenommen, der spezifische elektrische Widerstand (die Erwärmung der Metallstäbe erfolgte durch den elektrischen Strom) wird als lineare Temperaturfunktion eingeführt, der Thomsoneffekt nicht berücksichtigt. Es wird die allgemeine Differentialgleichung für die Wärmeverteilung im Stabe aufgestellt, für die besonderen Bedingungen der beiden Zustände behandelt und schließlich die Korrektur des Magnetsystems im Galvanometer untersucht, die infolge der Versuchsbedingungen (schnelle Änderung der Temperatur) erforderlich ist.

Nach eingehender Beschreibung der Versuchsanordnungen zeigt der Verf. an den Ergebnissen die Bestätigung seiner zugrunde gelegten Annahmen. Rtt.

J. Boussinesq. Mise en équation des phénomènes de convection calorifique et aperçu sur le pouvoir refroidissant des fluides. Journ. de Phys. (4) 1, 65-71.

J. Boussinesq. Sur le pouvoir refroidissant d'un courant liquide ou gazeux. Journ. de Phys. (4) 1, 71-75.

Die erste Note beschäftigt sich mit dem gewöhnlichsten Phänomen der Konvektion der Wärme unter solchen Umständen, bei denen man als einzige Ursache der Strömungen den Überschuß der Temperatur des erhitzten Körpers über diejenige der ihn umgebenden unbegrenzten Flüssigkeitsmasse hat. Die zweite dagegen behandelt den Fall, bei welchem die Körperwärme, welche unaufhörlich erneuert wird, permanent durch einen nach allen Richtungen unbegrenzten Flüssigkeitsstrom weggeführt wird; dieser Strom wird geradlinig und gleichmäßig (von bekannter Geschwindigkeit v) angenommen, bei hinreichend großen Abständen vom Körper, so daß die durch seine Gegenwart veranlaßten Störungen sich

darin nicht ausbreiten. In beiden Fällen werden die Differentialgleichungen der Probleme aufgestellt und aus ihnen einige allgemeine Sätze gefolgert.

Lp.

L. Natanson. Sur la conductibilité calorifique d'un gaz en mouvement. Krakau. Anz. 1902, 137-146.

Die Arbeit bildet die Fortsetzung einer früheren des Verf. über die Gesetze der Diffusion (F. d. M. **32**, 758, 1901) und bezweckt die Aufstellung der Differentialgleichung für die Wärmeverbreitung durch Leitung in einem bewegten Gase. Das Gas wird als vollkommen und einatomig vorausgesetzt, um nach der Grundhypothese der kinetischen Theorie ein einfaches System bewegter materieller Punkte zu erhalten. Nach Aufstellung der Grundgleichung werden nach einander besondere Bedingungen eingeführt, die Ergebnisse in Vergleich gestellt mit von Fourier, Kirchhoff und Maxwell auf anderm Wege gewonnenen ähnlichen Gleichungen. Schließlich wird der Sonderfall behandelt, wo die Bewegung des Gases in der gleichmäßigen Ausdehnung oder Verdichtung besteht. Dabei wird zur Vereinfachung Gebrauch gemacht von der auf diesen Fall bezüglichen Hypothese von Stokes.

Rtt.

W. A. Michelson. Übersicht über die neuesten Untersuchungen über die Thermodynamik der strahlenden Energie. J. russ. phys. chem. Ges. **34**, 155-208 (Russisch).

Es werden die Untersuchungen von Kirchhoff, Clausius, Bartoli, Stefan, Boltzmann, W. Wien und Planck dargelegt; dabei sind einige kritische Bemerkungen beigefügt betreffs der Ableitung der Formel von W. Wien. Die letzten $6^1/_2$ Seiten enthalten die ausführliche Literatur des Gegenstandes.

Ghr.

E. Kohl. Über die Herleitbarkeit der Strahlungsgesetze aus einem W. Wienschen Satze. Ann. der Phys. (4) **8**, 575-587.

Unter kurzer Wiedergabe der Entwicklungen von W. Wien in etwas abweichender Form bezüglich des nach ihm benannten Verschiebungsgesetzes soll nachgewiesen werden, daß sich das Stefansche Strahlungsgesetz und das Bartoli-Boltzmannsche Gesetz für den Strahlungsdruck aus den Wienschen Entwicklungen ergeben. Unter Annahme eines Zylinders, dessen Mantel und eine Grundfläche vollkommmen spiegeln, während die andre Grundfläche aus einem beliebigen Körper bestimmter Temperatur besteht, und unter Benutzung des Dopplerschen Prinzipes sowie des Satzes von der Übertragung der Schwingungsenergie bei der Verschiebung wird gezeigt, daß der Strahlungsdruck nach Bartoli-Boltzmann aus der Wienschen Anwendung des Dopplerschen Prinzips folgt. Nach Einführung des Temperaturbegriffes aus dem zweiten Hauptsatze nach Larmor wird weiter das Stefansche Gesetz der Energie schwarzer

Strahlung abgeleitet. Die weitere kritische Betrachtung der Voraussetzungen (Gleichgewicht der Strahlung des Hohlraumes während des Verschiebungsvorganges, Boltzmanns Annahme des Strahlungsverlaufes nach drei senkrechten Achsen) leiten zu dem Schlusse über, daß der eingeschlagene Weg nur für die Strahlung im geschlossenen Raume zu dem Stefanschen Gesetze führt, nicht aber für die freie Strahlung. Rtt.

O. Lummer. Die Gesetze der schwarzen Strahlung und ihre Verwendung. (Fortsetzung.) Arch. der Math. u. Phys. (3) 3, 261-281.

In dieser Fortsetzung werden zunächst die Mittel zur Verwirklichung der schwarzen Strahlung von — 180° bis 2000° besprochen. Alle früheren Schwierigkeiten konnten durch den elektrisch geglühten Hohlraum überwunden werden, mit dessen Hülfe der Verf. noch wesentlich höhere Temperaturen zu erreichen hofft. Es wird darauf der schöne Demonstrationsversuch des Verf. erläutert, bei dem durch Einführen und Herausziehen eines kälteren Rohres nach Belieben die Bedingung des gleichtemperierten Hohlraumes aufgehoben und wieder hergestellt werden kann.

Die Verwirklichung der schwarzen Strahlung lieferte die Bestätigung des Stefanschen Gesetzes, während die Körper an sich selektiv strahlen. Da Boltzmann aus theoretischen Gründen vorausgesagt hatte, daß nur der schwarze Körper das Gesetz der vierten Potenz befolgen könne, so stützt die praktische Bestätigung die von Boltzmann aufgestellte Hypothese vom Ätherdruck. Mit Zugrundelegung des Satzes, wonach der Strahlungsdruck auf die Flächeneinheit gleich ist der in der Volumeneinheit infolge dieser Strahlung enthaltenen Energie, wird nun eine vergleichende Berechnung der Wirkung der Gravitation und des entgegengesetzten Strahlungsdruckes angestellt, aus der sich beispielsweise ergibt, daß sich für schwebende Wassertröpfchen vom Radius $1\,\mu$ beide Kräfte aufheben, während bei noch kleineren Tröpfchen der Strahlungsdruck umgekehrt proportional seinem Radius überwiegt. Nach Erwähnung der theoretischen Untersuchungen von Schwarzschild (Druck des Sonnenlichtes gleich der Schwerkraft für einen Kugelradius von $1{,}25\,\lambda$ oder $0{,}75\,\mu$), wird die Ätherdrucktheorie auf die Gestalt der Kometen angewendet (von der Sonne abgewendeter Schweif), bei denen die alleinige Berücksichtigung der Gravitation, wie sich jetzt zeigt, zu ganz falschen Folgerungen in bezug auf die Masse führen muß. Der Verf. gelangt, mit Berücksichtigung auch der Arbeit von Bredichin, zu dem Schlusse, daß die auf den Strahlungsdruck der Sonne gegründete Kometentheorie von Lebedew und Arrhenius ernste Beachtung verdient. Rtt.

Zwölfter Abschnitt.

Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Kapitel 1.

Geodäsie.

K. Bohlin. Sur l'extension d'une formule d'Euler et sur son rapport à la méthode des moindres carrés. Stockh. Öfv. 58, 779-783.

Es sei gegeben ein System linearer Gleichungen:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots + g_1 w = n_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_s x + b_s y + c_s z + \cdots + g_s w = n_s,$$

wo die Zahl der Gleichungen größer ist als diejenige der Unbekannten. Verf. stellt sich die Aufgabe, die Gleichungen für $y, z, \ldots, w$ zu untersuchen, die man nach der Methode der kleinsten Quadrate erhält, nachdem man die Unbekannte x eliminiert hat. Mit Anwendung der Erweiterung einer Formel von Euler leitet er dabei eine Form der genannten Gleichungen ab, die für den Fall, wo die n_s alle eine konstante Korrektion enthalten, besonders geeignet sind. Diese Korrektion verschwindet dann nämlich in den Gleichungen, und man kann die Unbekannten $y, z, \ldots, w$ von dieser Korrektion unabhängig bestimmen. Es liegt z. B. ein solcher Fall bei der Bestimmung von Fixsternparallaxen aus photographischen Aufnahmen vor. Nn.

A. Galle. Die Entfernungsreduktion bei der konformen Abbildung der Kugel auf die Ebene in rechtwinkligen Koordinaten für Dreiecksseiten zweiter und dritter Ordnung. Zs. f. Vermessw. 31, 108-110.

Bei der ersten Einführung in die Theorie der konformen Koordinaten hat W. Jordan (Handbuch der Vermessungskunde. 3. Band. Stuttgart 1896. S. 282) für diese Entfernungsreduktion die beiden Glieder zweiter Ordnung abgeleitet, indem er die Abweichung der Abbildungskurve

von einer die Endpunkte verbindenden Geraden vernachlässigte. Nach O. Schreiber (Die konforme Doppelprojektion der Trigonometrischen Abteilung der Königl. Preußischen Landesaufnahme. Berlin 1897. S. 45 übersteigt aber der Maximalwert des Hauptgliedes vierter Ordnung bei Werten der Mittelordinate von 700 km und bei Seitenlängen von 79 km den des zweiten Gliedes zweiter Ordnung fast um das Doppelte. Der Verf. entwickelt deshalb in Ergänzung der Jordanschen einführenden Betrachtungen unter derselben Annahme wie dieser auch noch die ersten beiden Glieder vierter Ordnung, die auf diese Weise noch richtig erhalten werden, während sich bei den beiden übrigen Gliedern dieser Ordnung, die außerdem im allgemeinen viel kleiner sind, die Abweichung des Bildes von einer Geraden schon bemerkbar macht. Übrigens erreicht aber auch das zweite der entwickelten Glieder vierter Ordnung in den angegebenen Grenzen, zusammen mit allen andern vernachlässigten Gliedern, niemals 0,5 Einheiten der siebenten Stelle des Logarithmus. Bö.

L. Krüger. Zur Ausgleichung von Polygonen und von Dreiecksketten und über die internationale Näherungsformel für den mittleren Winkelfehler. Zs. f. Math. u. Phys. 47, 157-196.

Wir berichten über den Inhalt dieses Aufsatzes mit den Worten des Verf. „Einem Antrage von A. Ferrero folgend, der durch ein von F. R. Helmert und W. Foerster erstattetes Gutachten unterstützt wurde, hat die Vereinigung der internationalen Erdmessung zu Nizza 1887 den Beschluß gefaßt, daß den Berichten über den Stand der Triangulationen der Erdmessung für jedes Dreiecksnetz der nach der Näherungsformel $\sqrt{\frac{\Sigma w^2}{3n}}$ berechnete mittlere Fehler eines Winkels, bezw. $\sqrt{\frac{\Sigma w^2}{6n}}$ für die Richtung, zugefügt wird. w bedeutet den Widerspruch zwischen Rechnung und Beobachtung für die Winkelsumme eines Dreiecks, und n ist die Anzahl aller Dreiecke. Indem man, ohne auf die Bedingungsgleichungen, die von den Seitenverhältnissen herrühren, Rücksicht zu nehmen, aus sämtlichen Winkelgleichungen für den Dreieckswiderspruch einen mittleren Wert herstellt, schließt man also auf den mittleren Wert der Abweichung eines Winkels, bezw. einer Richtung. Streng richtig ist bekanntlich die Ferrerosche Formel nur für eine Kette einfach aneinander hängender Dreiecke, in denen jeder Winkel mit gleichem Gewichte gemessen ist.

Ich werde nun im folgenden zunächst die Ausgleichung eines Zentralsystems geben, bei dem die Dreieckswinkel durch Winkelbeobachtungen von gleicher Genauigkeit erhalten sind; im Anschluß daran wird für eine, aus an einander gereihten Zentralsystemen bestehende Doppelkette für den mittleren Winkelfehler eine Näherungsformel entwickelt, die ohne vielen Rechnungsaufwand eine etwas größere Annäherung als die Ferreroschen Formel gibt. Nachdem darauf die Formeln zur Ausgleichung einer einfach zusammenhängenden Dreieckskette, in der nach Richtungen

beobachtet ist, zusammengestellt sind, wird unter der Annahme gleicher Richtungsgewichte die Bedingung hergeleitet, wann die internationale Näherungsformel den mittleren Richtungsfehler der Ausgleichung genau darstellt. Unter Voraussetzung gleichwertiger Richtungsbeobachtungen wird sodann wieder die Ausgleichung eines Zentralsystems ausgeführt. Während hierbei außer den Winkelgleichungen auch die Seitengleichung in Betracht gezogen wird, ist bei der nun folgenden Ausgleichung zweier in zwei Dreiecken zusammenhängenden Zentralsysteme und ferner bei der Ausgleichung eines Polygons, in dem alle Richtungen zwischen je zwei Punkten beobachtet sind, auf die Seitengleichungen keine Rücksicht genommen. In letzterem Falle, wenn also in einem Polygon außer den Seiten auch sämtliche Diagonalen mit gleichen Gewichten beobachtet sind, gibt die Ferrerosche Formel genau denselben Wert für den mittleren Richtungsfehler, wie die Ausgleichung der Winkelgleichungen. Zum Schluß wird noch für eine aus Richtungsbeobachtungen hervorgegangene Doppelkette, die aus aneinandergefügten Vierecken besteht, aus den Winkelgleichungen allein der mittlere Fehler einer Richtung entwickelt." Lp.

Ig. Bischoff. Das Einschneiden nach Trigonometer Wild 1833. Zs. f. Vermessw. **31**, 573-584.

Dem Verf. ist es nachträglich gelungen, das vom Trigonometer Sylvan Wild in seinem „Handbuch für Trigonometer und Obergeometer bei der allgemeinen Landesvermessung" in Bayern (vgl. F. d. M. **32**, 916, 1901) vorgeschlagene Verfahren für die Punktbestimmung durch Rückwärtseinschneiden nach mehr als drei Punkten zu rekonstruieren. Es geht daraus hervor, daß Wild die Fehlergleichungen schon richtig aufgestellt und sachgemäß, wenn auch nicht nach der Methode der kleinsten Quadrate, verwertet hat. Die Abhandlung von C. F. Gauß aus dem Jahre 1823: Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf eine Aufgabe der praktischen Geometrie (Astr. Nachr. **1**) scheint Wild nicht bekannt gewesen zu sein. Bö.

Puller. Über die Aufgaben der trigonometrischen Punktbestimmung und eine Erweiterung des Rückwärtseinschneidens. Zs. f. Vermessw. **31**, 453-461.

Die Erweiterung des Rückwärtseinschneidens besteht darin, daß ein Polygonzug mit Hülfe mehrerer Sichten nach gegebenen trigonometrischen Punkten festgelegt werden soll, wozu wenigstens drei Visuren erforderlich sind, die sowohl von verschiedenen Eckpunkten des Polygons ausgehen, als auch nach verschiedenen unter den trigonometrischen Punkten gerichtet sein können. Jede weitere Visur gibt eine schätzenswerte Kontrolle für den Polygonzug. Bö.

Böckle. Verbindung zweier konzentrischer Kreise durch einen aus zwei Kreisbogen bestehenden Korbbogen. Zs. f. Vermessw. **31**, 509-517, 541-549.

Diese Aufgabe findet z. B. Anwendung bei der Berechnung der Gleislage auf zweispurigen Bahnen, wenn beim Übergang von der freien Strecke auf einen Bahnhof der Abstand der durchgehenden Hauptgleise größer werden soll. Bö.

H. G. Fourcade. A stereoscopic method of photographic surveying. Nature **66**, 139-141.

Eine Darlegung der Theorie und der Praxis bei der photographischen Aufnahme eines Geländes. Lp.

H. Ehrhardt. Über die Verwendung einer Tafel von Achtelquadraten zur Flächenberechnung und -Teilung. Zs. f. Vermessw. **31**, 317-326, 338-343.

Der Verf. berichtet ausführlich über den Inhalt seines Werkchens: „Neues System der Flächenberechnung und Flächenteilung usw. Stuttgart 1900“, das bereits in den F. d. M. **31**, 880-881, 1900, besprochen worden ist. Bö.

V. Baggi. Sul modo di eliminare l'errore dovuto alla disuguaglianza dei diametri dei collari nei livelli a cannocchiale mobile. Torino Atti **37**, 545-552.

Es wird untersucht, wie man bei einem Nivellier-Instrument mit um die Horizontalachse drehbarem Fernrohr den Einfluß der Ungleichheit der Ringdurchmesser eliminieren kann, und zwar sowohl für Fernrohre mit einer festen und einer auf die Ringe aufsetzbaren Libelle, als auch für solche mit zwei festsitzenden Libellen. Bö.

C. Aimonetti. Un esaminatore di livelle del costruttore Bamberg. Torino Atti **37**, 181-188.

Es werden für einen Libellenprüfer von der bekannten Bambergschen Konstruktion die fortschreitenden und die periodischen Fehler sowie der Parswert der Mikrometerschraube bestimmt. Bö.

L. Cerebotani. Rilievi e tracciamenti col teletopometro senza alcuna fatica di calcolo o misurazione qualsiasi empirica. Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. **19**, 231-268.

Dieses sogenannte Teletopometer besteht aus dem vom Verf. erfundenen Distanzmesser in Verbindung mit primitiven Einrichtungen für Terrainaufnahmen. Der Distanzmesser ist schon alt und auch in Deutsch-

land bereits mehrfach eingehend untersucht worden, u. a. vom Referenten im Jahre 1885 (vgl. Zs. f. Instrumentenkunde **6**, 1886); in den F. d. M. **25**, 1843-1844, 1893 u. 1894, ist er ebenfalls schon kurz gewürdigt worden. Der Erfinder ist auch jetzt noch fest davon überzeugt, daß sein Apparat für alle Entfernungen relativ gleich genaue Resultate ergibt, daß also der mittlere Fehler der Entfernungsbestimmung nicht mit dem Quadrate der Distanz wächst, wie es sonst für alle auf Parallaxenbestimmung von den Endpunkten einer kleinen Basis aus beruhenden Entfernungsmessungen sein muß. Ein näheres Eingehen auf den Inhalt der Abhandlung ist deshalb unnötig. Jedenfalls wird aber das Instrument nicht imstande sein, die bisher üblichen Aufnahmemethoden zu ersetzen oder gar zu verdrängen. Bö.

GEMEINER. Der Tangential-Distanzmesser und der Feld-Tachygraph für Gebietsvermessungen und Terrainaufnahmen von Ingenieur Josef Steinbach und Mechaniker E. Schneider. Mitt. üb. Art. u. Genie **33**, 312-315.

Bericht über eine Schrift von J. Schlesinger mit gleichlautendem Titel, die von den genannten Instrumenten handelt. Lp.

J. KOZÁK. Zur Theorie der Küstendistanzmesser mit vertikaler Basis. Mitt. üb. Art. u. Genie **33**, 237-259.

Unter Hinweis auf den allgemeineren Aufsatz von Niesiolowski-Gavin v. Niesiolowice (F. d. M. **29**, 796, 1900) beschäftigt sich der vorliegende Artikel ausschließlich mit der engeren Lehre der Küstendistanzmesser mit vertikaler Basis und enthält insbesondere Anhaltspunkte für die Anlage von Distanztabellen, Darstellung von Skalenbändern und Umrechnung von vorliegenden Distanztabellen für andere als die ursprünglich gegebenen Seehöhen. Lp.

PERCIN. Un télémètre rustique. Revue d'Art. **60**, 65-89.

Für rohe Messungen geeignet ist ein Verfahren, bei welchem als Hülfsmittel ein Stab und eine Schnur benutzt werden. Theorie und Praxis dieses höchst einfachen Verfahrens werden erläutert, die Ergebnisse mit genaueren Messungen verglichen. Als mittlerer Fehler haben sich 5 bis 10 Prozent ergeben. Lp.

Weitere Literatur.

M. KREIBICH. Elemente der praktischen Geometrie. Zum Gebrauche an land- und forstwirtschaftlichen, sowie verwandten Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Wien: W. Frick. VI u. 128 S. gr. 8°.

P. C. NUGENT. Plane surveying. A text and reference book for the use of students in engineering and for engineers generally. New York: John Wiley and Sons. London: Chapman and Hall. XVI u. 577 S. [Nature **66**, 243.]

C. REINHERTZ. Geodäsie. Neudruck. Leipzig: G. J. Göschen. 181 S. 12° (Sammlung Göschen No. 102).

A. SCHINDLER. Leitfaden für den Unterricht in der praktischen Geometrie an der k. u. k. technischen Militär-Akademie. 1. Teil: Einleitung. — Instrumentallehre. Wien: L. W. Seidel & Sohn. XI u. 162 S., 8 Taf.

S. STAMPFER. Theoretische und praktische Anleitung zum Nivellieren. 10. Auflage, umgearbeitet von Ed. Doležal. Wien: C. Gerolds Sohn. XIV u. 308 S. gr. 8°.

ED. DOLEŽAL. Trigonometrische Punktbestimmung durch Einschneiden und Hansens Problem. Leoben: L. Nüssler. 75 S. gr. 8°.

F. R. HELMERT. Über die Reduktion von Lotabweichungen auf ein höher gelegenes Niveau. Zs. f. Vermessw. **31**, 69-73.

Abdruck aus den Arch. Néerl. (2) **6**, 442-447, und bereits in den F. d. M. **32**, 918, 1901 besprochen. Bö.

A. WENDLER. Bemerkung zum Gebrauch des Ohmannschen Feldwinkelmessers. Unterrichtsbl. f. Math. 8, 138-139.

Kapitel 2.

Astronomie.

Astronomischer Kalender für 1902. Herausgegeben von der k. k. Sternwarte zu Wien. Der ganzen Reihe 64. Jahrgang, der neuen Folge 21. Jahrgang. Wien: Carl Gerolds Sohn.

Außer den regelmäßig wiederkehrenden Teilen, die für das betreffende Jahr bearbeitet und erweitert sind, enthält der vorliegende Jahrgang des vortrefflichen Kalenders drei wissenschaftliche Aufsätze: 1. „Über die Nova Persei vom Februar 1901“ von J. Holetschek. 2. „Über eine Eigentümlichkeit der beiden diesjährigen Mondesfinsternisse“ von C. Hillebrand. 3. „Neue Planeten und Kometen“ von E. Weiß. Lp.

F. FOLIE. Trente-cinq années de travaux mathématiques et astronomiques. Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. **19**, 113-230.

Enthält in drei Kapiteln eine geschichtliche Übersicht der wissenschaftlichen Arbeiten des Verf. Das erste „Miscellanées“ berichtet von Untersuchungen aus der analytischen Mechanik: „Théorie nouvelle du mouvement d'un corps solide“; aus der Geometrie „Théorie des faisceaux“

und „Mémoire sur les surfaces du 3e ordre“; aus der Algebra und Meteorologie. Das zweite betrifft astronomische Arbeiten, Aufstellung von Tafeln, Gründung einer Sternwarte bei Lüttich, den „Catéchisme correct d'astronomie sphérique“, die von der Eigenbewegung der Sonne herrührende Aberration und ihre Verbindung mit der jährlichen Aberration, eine genaue Definition der „Stunde“ und ein säkulares Glied in der Mondbewegung, die „Reaktion der Präzession“, das möglicherweise die Abweichung zwischen der Theorie und der Erfahrung bei der säkularen Beschleunigung des Mondumlaufs erklären könnte.

Das dritte und weitaus längste Kapitel handelt von der Entdeckung der täglichen Nutation, von der Nachweisung ihrer Existenz, ihrer Größe von etwa 0,07″ und des zugehörigen „ersten Meridians“ und von ihrer theoretischen Begründung. Diese sucht der Verf. in der Annahme einer festen Erdkruste mit zwei ungleichen Hauptträgheitsmomenten im Äquator, welche sich zuerst unabhängig von dem flüssigen oder doch an der Oberfläche flüssigen Kern den Kräften von Mond und Sonne gemäß bewegt, was eben in der täglichen Nutation ihren Ausdruck findet, während bei der Präzession und allgemeinen langperiodischen Nutation die Bewegungen von Kern und Schale durch die innere Reibung Zeit gefunden haben, sich auszugleichen, so daß man hier die ganze Erde als starr voraussetzen könne, wie bisher die Astronomen getan haben.

Die Aufsätze des Verf. über die tägliche Nutation sind äußerst zahlreich und weit zerstreut, so daß es nicht angeht, sie hier anzuführen. Es sei hier nur sein in Brüssel erschienenes Hauptwerk „Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du monde“ genannt.

Er beklagt es sehr, daß sehr viele Fachgenossen seiner Entdeckung gleichgültig oder gar feindlich gegenüberstehen, trotzdem er ihre Richtigkeit überzeugend nach allen Seiten dargetan und gezeigt habe, wie durch sie oft genug, wenn auch an der Grenze der Genauigkeit liegende, so doch sicher vorhandene Abweichungen zwischen verschiedenen Messungsreihen von Sternörtern zum Verschwinden gebracht werden können.

Dz.

F. Folie. Über die wirkliche Bewegung der Erde um ihre Rotationsachse und des wirklichen Rotationspoles um den geographischen Pol. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. 37, 252-262.

Der in zahlreichen Veröffentlichungen dargelegte isolierte Standpunkt des Verf. in diesen Fragen ist bekannt. Gegenwärtig beabsichtigt er, die beiden folgenden Punkte zu beweisen: 1. Die Bestimmung der Zeit ist unrichtig, sogar in der Annahme, daß die auf die Erde wirkenden Störungskräfte Null sind. 2. Nimmt man Rücksicht auf diese Kräfte, so ist die Formel der Breitenvariationen auch unrichtig. Hieran schließt sich lose an ein zweiter Aufsatz (S. 256-262): „Ableitung der täglichen Nutation aus der Auwersschen Vergleichung der Fundamentalkataloge von Berlin und Washington.“

Lp.

A. Marcuse. Die neuere Entwicklung der geographischen Ortsbestimmung zu Lande und auf See. Deutsche Math.-Ver. **11**, 234-236.

Bericht über einen Vortrag, betreffend die Entwicklung der Instrumente und Methoden zur geographisch und nautisch astronomischen Ortsbestimmung in den letzten Jahrzehnten. Dz.

M. Loewy. Étude des conditions à réaliser dans l'exécution des clichés pour obtenir l'homogénéité et le maximum d'exactitude dans la détermination des coordonnées des images stellaires. Formules pour évaluer l'influence de l'ensemble des causes d'erreur qui altèrent les résultats. C. R. **134**, 381-387.

Die Bestimmung der Sonnenweite durch photographische Aufnahmen des Planeten Eros, der Ende 1900 sehr nahe der Erde war, gibt dem Verf. besondere Veranlassung, die erreichbare Genauigkeit zu untersuchen, mit dem Ergebnis, daß man die Aufnahmen und die Messungen in mehreren Hinsichten abändern müsse, um das bestmögliche Ergebnis zu erhalten. In 13 Leitsätzen und einem System von Formeln werden die Schlüsse zusammengefaßt. Dz.

Ch. Trépied. Influence des erreurs instrumentales sur les coordonnées rectilignes des astres photographiés. C. R. **134**, 1097-1100.

Diese Fehler rühren her von einer Abweichung des Poles des Instrumentes vom wahren Pol und von einer Biegung des Fernrohres in seiner Achse. Sind x und y die Koordinaten eines Punktes der Platte, Δx und Δy ihre Fehler, so ergibt sich

$$\Delta x = Bx + Cy, \quad \Delta y = B'y + C'x,$$

wo B, C, B' C' von den Instrumentalfehlern und den Beobachtungsdaten abhängen. Ihre Ausdrücke werden gegeben und gedeutet. Auch wird gezeigt, wie man dem Refraktionsunterschiede für verschiedene Punkte der Platte und anderen Einflüssen Rechnung tragen soll. Dz.

B. Baillaud. Application de la méthode de P. et P. H. Henry à la réduction des clichés photographiques du catalogue international à l'observatoire de Toulouse. Toulouse Mém. (10) **2**, 414-432.

Die Beziehung der Lage der photographischen Bilder der Sterne auf der Platte zur Lage der Sterne selbst auf der Himmelskugel folgt am einfachsten aus der Gaußschen Theorie der Hauptpunkte eines Linsensystems. Nach Bestimmung der ersteren durch mikrometrische Messungen folgt das eigentliche Problem der Koordinatenachsen und des Überganges von den rechtwinkligen Koordinaten der Bilder zur Rektaszension und

Deklination der Sterne. Die hierzu nötigen Bestimmungselemente der Platte geben die Bilder von Fundamentalsternen. Dz.

E. v. Oppolzer. Über die Sternzahl auf einer photographischen Platte. Wien. Anz. 1902, 279-281.

Die Anzahl der Sterne, welche auf eine gegebene Stelle der Platte kommen, hängt von der Lichtstärke für diese Stelle, also von ihrem Abstand vom Mittelpunkt der Platte und vom Abstand dieses Mittelpunktes und des Brennpunktes der Linse ab. Durch ein Integrationsverfahren wird gezeigt, wann die Platte im ganzen möglichst viele Sterne aufnehmen würde. Dz.

H. Kimura. The formula and tables for finding the time with a portable transit instrument in the vertical circle of Polaris (or α ursae minoris). Tokio Math. Ges. 9, 7-19.

Enthält Formeln, welche in allen Fällen der Zeitbestimmung mittels eines tragbaren Durchgangsinstrumentes oder eines Theodoliten anwendbar sind. Die Rechnung kann durch einfache, überall zwischen 20° und 60° Breite brauchbare Tafeln vereinfacht werden. Dz.

R. v. Kövesligethy. Über die physikalische Deutung der Sterngröße. Ung. Ber. 18, 145-154.

Diese Deutung bezieht sich hauptsächlich auf die absolute Temperatur des Sternes und würde besonders bei neuen und veränderlichen Sternen in Betracht kommen. Sie wird unter Zugrundelegung des Fechnerschen Gesetzes der Psychologie, daß die Schätzung des Unterschiedes zweier Intensitäten dem Unterschied ihrer Logarithmen proportional ist, durch Anwendung der Integralformel für die Intensität von Mischlicht und der Theorie des absolut schwarzen Körpers mittels einer einfachen Formel dargestellt. Dz.

F. Ristenpart. Die Berücksichtigung der Reduktion auf den scheinbaren Ort (und der Lichtzeit) bei Anschlußbeobachtungen. Vierteljahrsschr. Astr. Ges 37, 193-200.

Zur Beseitigung einer Arbeitsvergeudung, die auf der Astronomenversammlung zu Heidelberg besprochen wurde, begründet der Verf. den Vorschlag, daß die Beobachter von Kometen und Planeten durchgehends mit mittleren Sternörtern ihre Beobachtung reduzieren, die Differenz Komet-Stern aber als scheinbare, wie bisher, publizieren. Der Berechner soll von der Epoche die Lichtzeit bei der Berechnung der heliozentrischen Koordinaten abziehen und damit die Sonnenkoordinaten für die runde Mitternacht verbinden. Die definitive Ephemeride ist mit Säkularaberration

zu behaften, aber nicht mit Präzession und Nutation. Der Vorteil ist dreifach: dem Beobachter wird die jetzt stellenweise an vielen Orten gleichzeitig geschehende Berechnung der Beobachtung auf den scheinbaren Ort erspart und dem Rechner die Bestimmung der Präzession und Nutation bei der Ephemeride, sowie die Anbringung der Lichtzeit an jede einzelne Beobachtung. Lp.

L. Courvoisier. Über eine graphische Methode zur Bestimmung der „Reduktion auf den scheinbaren Ort“. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. 37, 207-210.

Das beschriebene Verfahren gestattet, die „Reduktion auf den scheinbaren Ort“ für beliebige Sterne, mit Ausnahme der polnahen, auf graphischem Wege mit aller nötigen Genauigkeit zu ermitteln. Hierdurch lassen sich in allen den Fällen, in denen nicht schon speziell sehr bequeme und ausführliche Tafeln vorliegen, diese bei großem Material sehr zeitraubenden und eintönigen Rechnungen bedeutend abkürzen. Lp.

V. Alberti. Su la determinazione grafica dell'orbita reale nella teoria delle stelle doppie. Napoli Rend. (3) 8, 108-115.

In dieser auf die Bestimmung der Bahnen der Doppelsterne bezüglichen Note wird aus wenigen elementaren geometrischen Konstruktionen eine recht einfache graphische Bestimmung der wirklichen Bahn abgeleitet, vorausgesetzt, daß die beiden konjugierten Halbmesser der scheinbaren Bahn bekannt sind, von denen der eine durch den Hauptstern des Systems geht. Lp.

J. Mestschersky. Über die Integration der Bewegungsgleichungen im Probleme zweier Körper von veränderlicher Masse. Astr. Nachr. 159, No. 3801, 229-242.

Verf. zeigt in § 1, daß im Falle $\mu = 1/(a + \alpha t)$ die Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = 0$$

durch die Transformationen:

$$\xi = \frac{x}{a + \alpha t}, \quad \eta = \frac{y}{a + \alpha t}, \quad \tau = -\frac{1}{\alpha(a + \alpha t)}$$

in die Formen:

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \frac{\xi}{\varrho^3} = 0, \quad \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + \frac{\eta}{\varrho^3} = 0$$

übergehen. In § 2 wird diese Lösung auf den Fall

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta t + \gamma t^2}}$$

erweitert. Die Formeln $\xi = \mu x$, $\eta = \mu y$, $d\tau = \mu^2 \cdot dt$ geben:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{\xi}{\varrho^3} + n\xi; \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{\eta}{\varrho^3} + n\eta.$$

§ 3 behandelt die allgemeinere Transformation:

$$\xi = \varphi(x, y, t), \quad \eta = \psi(x, y, t), \quad d\tau = \omega(x, y, t)\, dt,$$

um in § 4 nachweisen zu können, daß die in § 1 und § 2 gegebenen Werte von μ die einzigen sind, welche eine entsprechende Behandlung gestatten. In § 5 Ausdehnung auf beliebig viele Punkte. Dz.

O. Lovett. Note on Gyldén's equations of the problem of two bodies with masses varying with the time. Astr. Nachr. **158**, No. 3790, 337-344.

Verf. stellt sich die Aufgabe, alle Transformationen zu finden:

$$\xi = \varphi(x, y, t); \quad \eta = \psi(x, y, t), \quad \tau = \omega(t),$$

durch welche die Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\xi}{\varrho^3} = 0, \quad \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{\eta}{\varrho^3} = 0; \quad \varrho^2 = \xi^2 + \eta^2$$

in Differentialgleichungen von der Form übergehen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = 0, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

wo μ von der Zeit t abhängen kann.

Leider hat sich schon zu Anfang der Rechnung in Formel (4) ein Versehen eingeschlichen, da die ganze rechte Seite noch durch $\omega_t = \frac{d\tau}{dt}$ zu dividieren ist. Die Lösung des Verf. stimmt daher nicht. Die richtige Lösung ist vielmehr:

$$\xi = c \cdot \frac{ax + by}{\gamma + \delta t}, \quad \eta = c \cdot \frac{a_1 x + b_1 y}{\gamma + \delta t}, \quad \tau = \frac{\alpha + \beta t}{\gamma + \delta t}, \quad \mu = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{c^3(\gamma + \delta t)}$$

mit der Bedingung, daß die vier Konstanten a, b, a_1, b_1 Koeffizienten einer rechtwinkligen Transformation sind, während $c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige Werte haben können.

Die Formeln von J. Mestschersky, welche mit den eben genannten wesentlich übereinstimmen, sind daher richtig und nicht falsch, wie der Verf. meint. Dz.

O. Lovett. On the periodic solutions of the problem of three bodies. Astr. Nach. **159**, No. 3810, 281-286.

Der Lagrangesche Fall des Dreikörperproblems hat außer der reellen auch noch imaginäre Lösungen. Diese werden vom Verf. behandelt nach den Methoden von Poincaré, Darwin und Charlier.

Dz.

W. Ebert. Über das Dreikörperproblem in mehrdimensionalen Räumen. Astr. Nachr. **157**, No. 3758-59, 229-256.

Mit der Zahl der Dimensionen steigt die Zahl der Flächenintegrale. Ist erstere $= n$, so wird letztere $= \frac{1}{2} n \cdot (n - 1)$. Hierzu tritt das Integral der lebendigen Kraft, so daß bei x Körpern für Relativbewegungen das Problem $2n(x - 1)$ Variabeln (Koordinaten und Geschwindigkeiten), aber $\frac{1}{2} n(n - 1) + 1$ Integrale hat. Letztere Zahl wächst mit n rascher als erstere, so daß die Frage entsteht, ob man von diesem Umstand bei Behandlung des Drei- und Vielkörperproblems Nutzen ziehen könne.

Verf. behandelt vornehmlich die Fälle $x = 3$, $n = 4$ und $x = 3$, $n = 5$. Es werden die Differentialgleichungen der Relativbewegung nach dem von Tisserand in seiner Mécanique céleste angegebenen Verfahren in die kanonische Form:

$$\frac{dx'}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{dx}{dt} = + \frac{\partial F}{\partial x'}$$

gebracht, in welcher die Flächensätze sehr einfache Gestalt annehmen. Mit Hülfe gewisser Determinantenausdrücke, die aus Flächenintegralen zusammengesetzt sind, wird eine bilineare Gleichung zwischen den Koordinaten beim Dreikörperproblem im vierdimensionalen Raume abgeleitet, welche beim Übergang zum dreidimensionalen Raum identisch verschwindet und also anzeigt, daß es unmöglich ist, ersteres Problem allgemein auf letzteres zu reduzieren. Sie tritt erst auf, wenn $n > 3$.

Sodann wird erörtert, um wieviel Einheiten sich das Dreikörperproblem für $n = 4$ unter Benutzung der bekannten Integrale erniedrigen läßt. Hierzu werden die Poissonschen Klammern $[a, b]$ eingehend untersucht mit dem Ergebnis, daß es trotz der vorhin nachgewiesenen wesentlichen Verschiedenheit des Problems für $n = 3$ und $n = 4$ doch möglich ist, dasselbe auch im letzteren Falle auf vier Freiheitsgrade zu bringen.

Das Dreikörperproblem bietet für $n = 5, 6, \ldots$ nichts wesentlich Neues, da es ganz allgemein auf $n = 4$ reduziert werden kann, genau so wie das Zweikörperproblem für $n = 3, 4, \ldots$ auf $n = 2$. Entsprechendes gilt für vier, fünf, ... Körper.

Dz.

W. Ebert. Über die Eigenschaften gewisser Probleme, auf welche das Dreikörperproblem zurückgeführt werden kann. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **37**, 238-242.

Die Methoden Jacobis erlauben, die Integration des Dreikörperproblems in direkte Verbindung zu setzen mit derjenigen ganz anderer Probleme, bei denen die Vorbedingungen zur Integration unter Umständen günstiger sind. Die Durchführung dieses Gedankens wird an dem Dreikörperproblem im eindimensionalen Raume, d. h. auf einer im Raume festliegenden Geraden, gezeigt. Lp.

E. Strömgren. Über eine einfache Lösung eines Spezialfalles des Dreikörperproblems. Astr. Nachr. **160**, Nr. 3827, 191-194.

Wenn man die Zeitdauer kurz genug annimmt, daß die relativen Koordinaten x, y, z des gestörten zum störenden Körper lineare Funktionen der Zeit sind, so wird das Quadrat ihres Abstandes ϱ eine quadratische Funktion der Zeit. Alsdann kann man die Störungsgleichungen:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = k^2 m \cdot \frac{x}{\varrho^3}$$

usw. auf sehr einfache Weise integrieren, da die erste Quadratur nur auf algebraische Funktionen führt und bei der zweiten nur noch ein Logarithmus hinzutritt. Dz.

O. Callandreau. Sur le calcul numérique des coefficients dans le développement de la fonction perturbatrice. J. de l'Éc. Pol. (2) **7**, 29-99.

Wenn die Exzentrizitäten und Neigungen klein sind, besteht die einfachste Methode in der trigonometrischen Entwicklung nach den Vielfachen der beiden mittleren Anomalien nach Le Verrier und Newcomb. Sonst muß man Interpolationsmethoden anwenden.

Verf. behandelt alle in den Anwendungen benutzten hierher gehörenden Entwicklungen. § I erörtert die Koeffizienten b_s^i und ihre Differentialquotienten, die Umformung von Gyldén mit den Koeffizienten s_n^{2s} und die Kombinationen $\triangle b_s^i$ von Radau. § II erläutert den Gebrauch der mechanischen Quadraturen bei der Berechnung dieser Größen unter Bezugnahme auf eine frühere Arbeit des Verf. § III zeigt die Anwendung semikonvergenter Reihen, die sich bei Benutzung der Gaußschen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ergeben. § IV gibt Transformationsformeln für die Reihen, § V den Gebrauch der Landenschen Transformation für $b_{\frac{1}{2}}^0$ und $b_{\frac{1}{2}}^1$. § VI enthält Formeln für die ersten fünf Koeffizienten von $\triangle^{-\frac{3}{2}}$ nach Anwendung der Gaußschen Transformation. § VII enthält Tafeln für zwei in VI benutzte Funktionen. § VIII bespricht die säkularen Störungen

nach Gauß und Hill. § IX bezieht sich auf die Laplaceschen Koeffizienten. Dz.

O. Callandreau. Propriétés d'une certaine anomalie pouvant remplacer les anomalies déjà connues dans le calcul des perturbations des petites planètes. C. R. **134**, 1478-1482; **135**, 8-11.

Diese Anomalie, für welche der Verf. den Namen tangentiale Anomalie vorschlägt, ist der Winkel, den die Tangente, bezw. die Normale mit einer festen Anfangsrichtung bildet. Ihr Sinus und Kosinus sind wie bei der wahren Anomalie gebrochene lineare Funktionen des Sinus und Kosinus der exzentrischen Anomalie. Sie weicht von der mittleren Anomalie nur durch Glieder von höherer als erster Ordnung in bezug auf die Exzentrizität ab.

Nach ihrer Einführung als Urvariable werden die Differentialgleichungen der gestörten Bewegung entsprechend verändert. Ihre Integration kann nachher durch sonst gebräuchliche Methoden erfolgen. In der zweiten Note wird die Anwendung auf die Planeten vom Hekubatypus unter Benutzung Laplacescher Methoden erläutert. Dz.

K. Bohlin. Sur le développement des perturbations planétaires. Application aux petites planètes. Stockh. Astr. Jaktt. 7, 262 S. 4°.

Diese Arbeit bildet eine Fortsetzung und Vervollständigung einer früheren Arbeit vom Verf.: „Formeln und Tafeln zur gruppenweisen Berechnung der allgemeinen Störungen der Planeten" (Upsala Nova Acta Ser. III, **17**). Durch die in dieser früheren Arbeit gegebenen Formeln und Tafeln ist es schon möglich, die Störungen eines kleinen Planeten innerhalb zehn Stunden mit einer im allgemeinen für die Praxis hinreichenden Genauigkeit zu berechnen. Indessen hat Callandreau darauf hingewiesen, daß für höhere Werte der Exzentrizitäten und Neigungen die Genauigkeit beträchtlich vermindert werden könnte. Deswegen ist es dem Verf. notwendig erschienen, die Theorie durch Hinzunahme von Gliedern höherer Ordnung zu vervollständigen. Das geschieht in der vorliegenden Arbeit. Diese Vervollständigung der Theorie ermöglicht es auch, über die Konvergenz der Reihen für die praktische Anwendung Rechnung zu legen: es zeigt sich nämlich, daß die bisherigen Abweichungen durch die Hinzunahme eines gewissen Systems von Gliedern höherer Ordnung verschwinden. Verf. hat weiter, wie auch in der früheren Abhandlung, die Störungen von (9) Metis und (32) Pomona berechnet und sie mit den von Lesser berechneten verglichen, wobei es sich herausgestellt hat, daß die Übereinstimmung gegen die in den „Formeln und Tafeln" erhaltene bedeutend verbessert worden ist und jetzt wenig zu wünschen übrig läßt. Am Schluß befindet sich eine umfangreiche Sammlung von Tafeln, von denen die vier letzten die zur Erreichung größerer Genauigkeit dienenden Glieder höherer Ordnung enhalten. Nn.

C. B. S. Cavallin. Contributions to the theory of the secular perturbations of the planets. Stockh. Öfv. 58, 685-707; Lunds Medd. No. 19.

In der Theorie der säkularen Störungen hat man bekanntlich für die Exzentrizität (e) und die Perihellänge (π) die Gleichungen:

$$e \cos \pi = \sum_{i=1}^{n} A_i \cos (g_i t + \beta_i),$$

$$e \sin \pi = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin (g_i t + \beta_i),$$

wo A, g, β gewisse reelle Konstanten sind, von denen A immer positiv ist. Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist: zu untersuchen, ob π immer unter der Form $\pi = Gt +$ einer endlichen Funktion (wobei G die mittlere Bewegung des Perihels genannt wird) dargestellt werden kann. In dem Falle $A_r > A_1 + A_2 + \cdots + A_{r-1} + A_{r+1} + \cdots + A_n$ ist es schon längst bewiesen worden, daß G einfach $= g_r$ ist. Die obige Ungleichung ist für alle Planeten außer Venus und Erde und etwa einem Dutzend von den kleinen Planeten erfüllt. Verf. zeigt nun indessen, daß die Perihellänge sich immer in der Form $Gt +$ einer endlichen Funktion ausdrücken läßt, wobei G zwischen dem größten und dem kleinsten der g_i liegt. Damit ist der lange angestrebte Beweis dafür geführt, daß das Perihel eines Planeten immer eine mittlere Bewegung besitzt. Nn.

J. Mascart. Perturbations du grand axe des petites planètes. C. R. 134, 402-405.

Verf. wendet die Gyldénsche, von Harzer, Callandreau etc. weiter entwickelte Methode an, um durch aufeinanderfolgende Annäherungen die Koordinaten selbst zu bestimmen. Hierzu wird statt des Radiusvektors eine Hülfsgröße ϱ eingeführt durch die Gleichung:

$$r = \frac{a}{1+\varrho} = a(1 - \varrho + \varrho^2 - \varrho^3 + \ldots);$$

ϱ ist dann von der Ordnung der Exzentrizität des Planeten. Zu seiner Bestimmung müssen zwei Quadraturen ausgeführt werden. Es ergeben sich 1. Glieder, welche von der Exzentrizität unabhängig und periodisch sind, 2. säkulare Glieder, 3. Glieder, welche vom ersten Grade in bezug auf die Exzentrizität und periodisch sind. Durch Aufsuchung der analytischen Form dieser Glieder, welche zum Teil vollendet, zum anderen Teil vorbereitet ist, hofft der Verf., allgemeine Aufschlüsse über die Störungen der kleinen Planeten zu erhalten. Dz.

J. Mascart. Perturbations indépendantes de l'excentricité. C. R. 135, 1097-1099.

Nach der vorstehend besprochenen Methode hat der Verf. in 53 Fällen diejenigen Störungen des Radiusvektors berechnet, welche von der Elongation

des Planeten in bezug auf Jupiter abhängen und von der Exzentrizität unabhängig sind. Die Ergebnisse werden diskutiert. Dz.

W. Krassnow. Über singuläre Auflösungen der Differentialgleichung der geozentrischen Mondbahn. Astr. Nachr. **158**, No. 3773, 65-74.

Enthält einige Resultate der russischen Schrift „Über die Apsidenlinie etc.“, Warschau 1900, nebst Nachträgen. Es wird der bekannte Fall vorausgesetzt, in welchem das Jacobische Integral gilt, um mittels Annahmen, welche der Verf. als solche „a priori“ hinstellt, Sätze über Grenzkurven, Bahnlinien, den geometrischen Ort der Apsiden, der Syzigien und Quadraturen abzuleiten.

Der hier gegebene Auszug der genannten Schrift genügt nicht, um die Bündigkeit der Schlüsse zu beurteilen. Wendungen wie „a priori“ für durchaus nicht a priori Ersichtliches und „es unterliegt kaum einem Zweifel“ für recht anfechtbare Voraussetzungen können aber ein Zutrauen in dieser Hinsicht nicht erwecken. Dz.

E. W. Brown. On the small divisors in the lunar theory. American M. S. Trans. **3**, 159-185.

Wenn die Koeffizienten der Entwicklung nach steigenden Potenzen von m, dem Verhältnis der mittleren Bewegungen von Sonne und Mond, geordnet werden, so zeigt sich bei allen Gliedern mit kleinen Divisoren, daß in den Störungen selbst niemals negative Potenzen von m durch Integrieren hineinkommen können.

Es wird unter Bezugnahme auf frühere Arbeiten des Verf. nach Einführung der komplexen Verbindungen $x + iy$ und $x - iy$ in die Differentialgleichungen der Grad der Genauigkeit hinsichtlich der Potenzen von m sowie der Exzentrizitäten und der Neigung untersucht und das Ergebnis in Theoremen dargestellt. Dz.

H. Andoyer. Sur l'accélération séculaire de la longitude moyenne de la Lune. C. R. **135**, 432.

Angabe des quadratischen Gliedes der säkularen Beschleunigung der Mondbewegung durch eine nach Potenzen von m, dem Verhältnis der mittleren Bewegungen von Sonne und Mond, geordnete Reihe bis zum zehnten Grad einschließlich. Die beiden letzten Glieder weichen von denen Delaunays in seiner Théorie de la Lune ab. Dz.

F. Hayn. Selenographische Koordinaten. I. Abhandlung. Leipzig. Abh. **27**, 863-921.

Der Inhalt dieser ersten Abhandlung ist eine Revision der Theorie der Monddrehung, um eine solche Genauigkeit zu erhalten, daß der seleno-

zentrische Ort eines Mondgebildes, einmal festgelegt, jederzeit bis auf etwa 2″ berechnet werden könne, was, von der Erde gesehen, einem Fehler von 0,01″ entsprechen würde.

Die Differentialgleichungen werden in der Eulerschen Form

$$A \cdot \frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = M_x, \quad p = -\sin\varphi \sin\delta \frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi \frac{d\vartheta}{dt}$$

usw. angesetzt, wobei die drei Cassinischen Gesetze unter der Annahme, daß die augenblickliche Drehungsachse und der der Erde zugekehrte „erste“ Mondradius nur wenig von den Hauptträgheitsachsen abweichen, erste Annäherungen von φ, ψ, δ ergeben, so daß die Differenzen zwischen ihnen und den wahren Werten stets kleine Größen τ, σ, ϱ bleiben, die hinterher durch diese Differentialgleichungen zu ermitteln sind.

Dies geschieht in den ersten vier Kapiteln unter ausschließlicher Berücksichtigung der Drehungsmomente der Erdanziehung auf den Mond. Das fünfte Kapitel weist nach, daß die Sonne, obgleich sie den Mond mehr als doppelt so stark wie die Erde anzieht, doch weder einen direkten, noch indirekten merklichen Einfluß auf seine physische Libration hat. Dz.

O. Callandreau. Sur quelques particularités de la théorie des étoiles filantes. Existence de points radiants stationnaires par 45° de latitude. C. R. **135**, 557-559.

Verf. hat aus dem Kleiberschen Katalog von 918 durch Denning gefundenen Radiationspunkten gefunden, daß zwischen 40° und 50° Breite eine Verdichtung dieser Punkte in Gruppen stattfindet, zu ausgesprochen, um zufällig zu sein. Unter Benutzung der Laplaceschen Formeln:

$$0 = f + \frac{k^2 x}{r} - \gamma \frac{dy}{dt} + \beta \frac{dz}{dt},$$

$$0 = f + \frac{k^2 y}{r} + \gamma \frac{dx}{dt} - \alpha \frac{dz}{dt}$$

wird eine entsprechende Hypothese aufgestellt. Dz.

L. Picart. Sur une hypothèse concernant l'origine des satellites. C. R. **134**, 1409-1412.

Verf. zeigt unter gewissen Vernachlässigungen, daß die Satelliten der bekannten Planeten sich von Anfang an in der Nähe derselben befunden haben müssen, also nicht selbständige Planeten, bezw. Kometen gewesen sein können, und daß für einen Stern, der etwa Satellit mit direkter Bewegung werden sollte, die Entfernung von einem Planeten nicht gleich derjenigen der bekannten Satelliten bleiben könnte. Wbg.

J. HALM, J. COX. On Prof. Arrhenius' theory of cometary tails and aurorae. Nature **65**, 415-416; **66**, 54-56.

Halm bestreitet die Anwendbarkeit der Theorie des Lichtdrucks zur Erklärung der Erscheinungen bei den Kometen, während Cox diese Theorie verteidigt. Halm kommt in der Entgegnung auf den Brief des Verteidigers der Arrheniusschen Theorie zu dem folgenden Schlusse. Durch Verzicht auf die Voraussetzung des Lichtdrucks und durch die Annahme der Ausbreitung freier negativer Elektronen von der Sonne in den Raum einfach als Folge ihrer großen, ihnen anhaftenden Geschwindigkeit wird die Theorie wunderbar geeignet, die Ansichten von Olbers, Zöllner und Bredichin zu stützen bezüglich der Natur und des Ursprungs der auf die Kometenmasse wirkenden abstoßenden Kraft. Aber die Einführung des Maxwellschen Lichtdrucks erzeugt zahlreiche Schwierigkeiten, die, wie Arrhenius mehr als ausreichend zeigt, nur durch willkürliche und nicht gewährleistete Annahmen überwältigt werden können. Lp.

H. S. MAXIM. Matter and motion in space. Nature **66**, 223.

Fragt an, wo der angebliche Ausspruch Lord Kelvins steht: „Wenn alle Materie der Welt auf ihre letzten Atome reduziert und gleichmäßig durch den ganzen Raum verteilt wäre, so würde die durch den Flügelschlag eines einzigen Moskitos verursachte Störung alles zustande bringen, was wir jetzt in dem materiellen Weltall vorfinden.“ Lp.

P. LEBEDEW. Die physikalischen Ursachen der Abweichungen vom Newtonschen Gravitationsgesetze. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **37**, 220-226.

Der neuerdings beobachtete Lichtdruck wird als wahrscheinliche Ursache hingestellt. Lp.

M[me] CLÉM. ROYER. Une lettre à M. Laisant. Ens. math. **4**, 9-16.

Die Dame verteidigt ihre neue Theorie der Eigenwärme von Sternmassen gegen einen Einwand von Naquet: man ersetze leider meist den Begriff der Kraft durch den der Bewegung; unveränderlich sei in der Welt nicht die Bewegungsgröße, sondern die Kräftesumme, die Kräfte, genommen unter ihren beiden Formen des statischen Drucks und der kinetischen Energie. In Kürze wird die neue Auffassung von der Lagerung und Wirkung der Atome dargelegt; die Welt erscheint darnach als eine Maschine unter konstantem Druck. Rechnungsbeispiele erläutern die Sache. Tn.

A. Naquet. Réponse à Mme Clémence Royer. Ens. math. 4, 205-207.

Wendet sich gegen Frau Royers Lehre (s. vorstehend), weil diese nicht stimme, wenn man eine begrenzte Masse, eine Sonne oder einen Stern, in Betracht ziehe, weil so auch das Auftauchen und Verschwinden von Sternleuchten sowie die Abwesenheit von Sauerstoff auf der Sonne keine Erklärung finde. Die Grahamsche Annahme von „Ultimaten" als Teilen der Atome findet hier Billigung und Nutzanwendung, ebenso die Janssensche Erklärung des plötzlichen Aufleuchtens von Sternen. Tn.

G. H. Bryan, E. Rogovsky. The kinetic theory of planetary atmospheres. Nature 66, 54, 222.

Bryan bestreitet die Richtigkeit einer Behauptung von Rogovsky (Astrophysical Journ. 1901), daß „ein Gas von der Oberfläche eines Planeten entweicht, wenn die wahrscheinlichste Geschwindigkeit seiner Molekeln nicht höher als der 10,22ste Teil derjenigen Geschwindigkeit ist, mit der ein Körper geworfen werden muß, um die Anziehung des Planeten zu überwinden. Rogowsky erkennt die Richtigkeit der auf Grund der kinetischen Gastheorie gemachten Einwände an und schlägt vor, die Zahl 10,22 durch 7,42 zu ersetzen. Lp.

G. H. Darwin. The stability of the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. 37, 202-207

Ein Selbstreferat des Verf. über seine bezüglichen Veröffentlichungen. Vergl. F. d. M. **32**, 711, 1901; **33**, 741, 1902. Lp.

P. A. Müller. Presentazione di una pubblicazione. Rom. Acc. P. d. N. L. Atti 55, 58-61.

Die Note enthält die Begleitworte bei der Überreichung der Schrift: „Die Harmonie der Sphären. Stimmen aus Maria Laach", 1901, Heft 10. Herder: Freiburg i. B. Die Vorstellung einer Sphärenmusik wird von Pythagoras bis in die Neuzeit verfolgt, wo sie insbesondere zum Spüren nach Gesetzen von Zahlen im Planetensystem geführt hat. So wird die Entdeckung der Keplerschen Gesetze auf diese Veranlassung zurückgeführt, wie der Titel des Werkes „Harmonices mundi" bezeugt. Lp.

P. A. Müller. Intorno alla distribuzione armonica dei pianeti nel nostro sistema solare. Rom. Acc. P. d. N. L. Atti 55, 69-77.

Zur Ergänzung der Betrachtungen, über welche vorstehend berichtet ist, speziell nach der Richtung einer harmonischen Verteilung der Himmels-

körper, wird in dieser Note über die verschiedenen Versuche zur Auffindung von Zahlengesetzen berichtet, nach denen die verschiedenen Planeten sich in ihrer Stellung um die Sonne folgen. Lp.

N. LOCKYER. The farmers' years. Nature **65**, 248-250; **66**, 104-107.

Diese Abhandlung bildet die Fortsetzung früherer Arbeiten des Verf. über die Orientierung der alten Tempel nach dem Aufgangspunkte von Gestirnen (vergl. F. d. M. **24**, 57, 1892 u. **25**, 91, 1893). Gegenwärtig geht er von dem Gedanken aus, daß die Richtung der Achse eines Tempels nach derjenigen Stelle des Horizontes orientiert war, wo die Sonne in der Mitte der Zeit zwischen Nachtgleiche und Sonnenwende auf- oder unterging. Diese Zeitpunkte (nach dem griechischen Kalender (6. Mai, 11. August, 10. November, 7. Februar) zeigten dem Landmann die Termine, an denen gewisse Pflanzen blühten, Früchte reiften, daher bestimmte landwirtschaftliche Arbeiten zu verrichten waren. Deshalb wurde das Einfallen der Strahlen der aufgehenden Sonne in den sonst dunklen Tempel als ein Zeichen der Gottheit für den Landmann gehalten; das damit bestimmte Jahr nennt der Verf. daher das „Bauernjahr". Die Belege dieser Ansichten entnimmt er den verschiedensten Ländern in Asien und Europa und weit auseinanderliegenden Zeiten der vorchristlichen Ära von Abraham bis in die keltische Periode zur Zeit Caesars. Lp.

C. V. L. CHARLIER. Über die Orientierung altchristlicher Kirchen. Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **37**, 229-233.

In Anlehnung an die Gedanken von Sir Norman Lockyer über die Orientierung der altägyptischen Tempel hatte Nissen gezeigt, daß bei der Grundlegung christlicher Tempel ursprünglich die Richtung so gewählt wurde, daß die Sonne bei ihrem Aufgang (oder Untergang) am Gedächtnistage des Schutzheiligen der Kirche ihre Strahlen längs der Achse der Kirche geworfen hat. Dies ist vom Verf. für die dem Laurentius geweihte Domkirche in Lund bestätigt worden. Außerdem sind noch mehrere andere Beispiele angeführt. Lp.

H. SCHUBERT. Eine Milliarde Minuten. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **33**, 184.

Am 29. April 1902 waren 10^9 Minuten seit dem Beginne der christlichen Zeitrechnung verflossen; hieran knüpft der Verf. einige historische Bemerkungen. Lp.

E. FINK. Die scheinbare Vergrößerung der Sonne und des Mondes am Horizont. Zs. f. math. u. naturw. Unterr. **33**, 537-548.

Zunächst werden die Versuche zur Erklärung der Erscheinung zusammengestellt. Dann wird nach einer Programmabhandlung von Rei-

mann in Hirschberg über die von diesem angestellten Versuche berichtet. Hiernach erscheint jedem Menschen das Himmelsgewölbe derartig im Zenit abgeflacht, daß der vertikale Radius zum horizontalen sich wie 1:3,5 verhält. Lp.

Weitere Literatur.

S. NEWCOMB. The stars: a study of the universe. London: John Murray. XI u. 332 S. (1901). [Nature **65**, Suppl. VIII-X; Vierteljahrsschr. Astr. Ges. **37**, 328-348.]

A. SCHUSTER. Astronomy and cosmical physics. Opening address. Nature **66**, 614-618.

Vergl. den Bericht auf S. 234 dieses Bandes.

H. BUCHHOLZ. Untersuchung der Bewegung vom Typus 2/3 im Problem der drei Körper und der „Hilda-Lücke" im System der kleinen Planeten auf Grund der Gyldénschen Störungstheorie. 1. Teil. Wien. Denkschr. 1902, 162 S. 4⁰.

E. CODDINGTON. Die Bestimmung der Bahn eines kleinen Planeten aus vier Beobachtungen. Diss. Berlin: Mayer & Müller. 65 S. gr. 4⁰.

H. v. ZEIPEL. Angenäherte Jupiterstörungen für die Hekuba-Gruppe. Mém. Ac. Pétersb. (3) **2**, 144 S. gr. 4⁰ (1902).

R. EMDEN. Beiträge zur Sonnentheorie. Ann. der Phys. (4) **7**, 176-197.

Aus Münch. Ber. **31**; vgl. F. d. M. **32**, 934, 1901.

H. SCHUBERT. Neuer ewiger Kalender zur Bestimmung des Wochentags für jedes beliebige Datum nach und vor Christi Geburt mit Berücksichtigung der Ausnahmejahre 42 vor bis 4 nach Christi Geburt und zur Bestimmung der Daten der christlichen Feste. Leipzig: G. J. Göschen. 5 S. gr. 8⁰.

Kapitel 3.

Mathematische Geographie und Meteorologie.

S. GÜNTHER. Astronomische Geographie. Leipzig: G. J. Göschen. 170 S. 8⁰ (Sammlung Göschen).

Der Stoff wird in 14 Abschnitten behandelt. 1. Wesen und Entwicklungsgang der astronomischen Geographie. 2. Beobachtungen, die bei unveränderter Stellung des Beobachters anzustellen sind. 3. Die Bewegungen der Sonne, des Mondes und der Planeten. 4. Ortsbestimmungen auf der Himmelskugel. 5. Zeit und Zeitbestimmung. 6. Die Beobachtungsinstrumente. 7. Beobachtungstatsachen, die sich bei Ortsveränderungen des Beobachters ergeben. 8. Die Kugelgestalt der Erde. 9. Ortsbestimmungen auf der kugelförmigen Erdoberfläche. 10. Erdmessung und schärfere Bestimmung der Erdgestallt. 11. Die Entfernung der Himmels-

körper von der Erde. 12. Die Weltsysteme. 13. Die Gesetze der Planetenbewegung. 14. Das Gravitationsgesetz in seiner Anwendung auf Himmel und Erde.

Den Schluß bildet ein Register. In dem durch die Überschriften gegebenen Rahmen wird eine außerordentlich große Fülle von Material gebracht, manchmal vielleicht zu viel für ein so kleines Buch, dessen Wert durch viele geschichtliche Angaben sehr erhöht wird. Dz.

H. C. E. Martus. Astronomische Erdkunde. Ein Lehrbuch angewandter Mathematik. Kleine Ausgabe. 2. Aufl. Dresden: C. A. Koch. XII u. 127 S. gr. 8°.

F. R. Helmert. Über die Reduktion der auf der physischen Erdfläche beobachteten Schwerebeschleunigungen auf ein gemeinsames Niveau. Erste Mitteilung. Berl. Ber. 1902, 843-855.

„Die ungenaueste Methode ist in ihrer ursprünglichen Auffassung die meist nach Bouguer benannte; sie führt aber bei gehöriger Modifikation der Auffassung zu zwei, verschiedenen Zwecken dienenden, sehr genauen Methoden. Ursprünglich nämlich wird bei ihr die äußere Masse der Erdrinde oberhalb des Meeres abgeschält gedacht, modifiziert aber nur auf das Meeresniveau kondensiert. — In dieser ersten Mitteilung wird diese Methode erörtert. Ihr folgt dann noch eine Betrachtung über die neuerdings versuchte Fortsetzung des äußeren Potentials der Schwere innerhalb der Erdkruste. Hierbei ist nötig, Berg und Tal durch eine gleichmäßig, nahezu horizontal verlaufende Fläche auszugleichen, sowie anstatt der unregelmäßig verlaufenden Dichtigkeit der Schicht oberhalb des Meeresniveaus eine ausgleichende, möglichst horizontale Schichtung zu setzen."

Es ist also festgestellt, daß das Bouguersche, eigentlich erst von Young eingeführte Verfahren bei gehöriger Änderung der Auffassung ein sehr genaues Verfahren vorstellt und nebenbei auch Werte liefert, welche die Grundlage für mathematische Betrachtungen über die Erdfigur bilden können. Der Versuch, das Meeresniveau als äußeres Potentialniveau innerhalb des Festlandes fortzusetzen, zeigt, daß dies nur in ziemlich roher Annäherung möglich ist. Lp.

G. Neumayer. Bestimmung der Länge des einfachen Sekundenpendels auf absolutem Wege, ausgeführt in Melbourne vom Juli bis Oktober 1863. Münch. Abh. 21, 479-559.

Über diese bedeutende Arbeit hat der Verf. zu verschiedenen Malen in jüngster Zeit Mitteilungen gemacht, in den Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie unter dem Titel: „Zur Geschichte der Pendelbeobachtungen" (25, 1897), „Nachtrag zur Geschichte der Pendel-

beobachtungen" (1900); Auszug in Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte 1897 in Braunschweig **2** [1], 225-228, 1898; endlich in Arch. Néerl. (2) **6**, 333-348: „Schwerkraftsbestimmungen auf dem australischen Festlande". Als Endresultate der Diskussion ergeben sich die Werte $\lambda = 0{,}9929120$ m für die Länge des Sekundenpendels und $g = 9{,}79965$ m im Meeresniveau für den Beobachtungsraum in Melbourne unter $37^0\ 50'\ 4''$ südlicher Breite und $9^h\ 39^m\ 55{,}4^s$ östlicher Länge von Greenwich. Mit Rücksicht auf den meist experimentellen Inhalt verzichtet Ref. auf ein genaueres Eingehen in die interessanten Einzelheiten der unter 28 Nummern eingeordneten Abschnitte (S. 485 bis 524). Der Anhang (S. 525 bis 553) bringt die sämtlichen Originalbeobachtungen zum Abdruck. Die Tafeln der Abhandlung stellen dar: 1. Innere Ansicht des Pendelzimmers in Montpellier-Parade-Melbourne. 2. Grundplan des Pendelzimmers. 3. Das Reversionspendel mit allen Einzelheiten nach Neumayer-Lohmeier (Bessels Vorschlag). 4. Der Vertikalkomparator von H. Schreiber in Melbourne nach Neumayers Angabe. 5. Die geologische Karte der Station in Melbourne mit den Stationen der magnetischen Aufnahme. — Schließlich wollen wir auch noch auf die Äußerung Helmerts über diese absolute Messung von g in ihrem Verhältnis zu den sonstigen Bestimmungen hinweisen (S. 524).

Lp.

J. Collet. La pesanteur le long du parallèle moyen. C. R. **185**, 774-776.

Diskussion und Ausgleichung der Pendelbeobachtung an 13 unter 45^0 Breite gelegenen Orten. Dz.

Seismological investigations. Brit. Ass. Rep. 1902, 59-75.

Inhalt: I. Über Erdbebenstationen außerhalb und innerhalb Großbritanniens. II. Die in Shide gebrauchten Instrumente. III. Die Ursprungsstätten der 1899, 1900 und 1901 aufgezeichneten Erdstöße. IV. Dauer der ersten einleitenden Zitterbewegungen. V. Zeitkurven für die während der vier mit 31. Dezbr. 1900 endenden Jahre bemerkten Erdstöße. VI. Die Vergleichung der von drei Horizontalpendeln zu Shide erhaltenen Aufzeichnungen. VII. Klinometrische Versuche. VIII. Seismographische Versuche mit vertikalen Sprungfedern. IX. Über die Natur der Erdbebenbewegung. X. Beziehung zwischen Felsspaltungen, seismischen und vulkanischen Tätigkeiten. XI. Über die Vergleichung der Erdbebenregister aus Shide, Kew, Bidston, und Edinburgh. XII. Experimente in der Gratfurche. Gbs. (Lp.)

M. Contarini. Sul problema generale della sismografia. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{11}_1$, 380-386, 433-439, 472-479, 519-527; $\mathbf{11}_2$, 132-139.

Diese Noten bilden die Fortsetzung der Untersuchung, über die in F. d. M. **32**, 940, 1901 berichtet ist. Jetzt wird das sphärische Pendel

als besonderer Fall eines recht allgemeinen mechanischen Systems betrachtet, nämlich einer „Kette starrer Körper“, d. h. von *n* Körpern, deren jeder in einem Punkte mit dem vorangehenden zusammenhängt. In der ersten Note wird die symbolische Gleichung der virtuellen Arbeiten für diese Kette aufgestellt. Die zweite beschäftigt sich mit dem besonderen Falle zweier so verbundenen Körper, um daraus Folgerungen für die seismischen Apparate zu ziehen. Diese Anwendungen der allgemeinen Untersuchung auf die Erscheinungen an den seismischen Apparaten werden dann in den übrigen Noten gemacht. In der dritten werden die Differentialgleichungen für die Bewegung der verschiedenen seismischen Instrumente aufgestellt unter gewissen die Rechnung erleichternden Annahmen und unter Hinzunahme zweier Postulate. Die vierte Note geht auf die Integrale dieser Gleichungen ein und ermittelt einige allgemeine Sätze. In der fünften Note gesteht der Verf. ein, bei der Aufstellung der Differentialgleichungen in der ersten Note einen Fehler begangen zu haben; diesen verbessert er, und er geht dann zu praktischen Ergebnissen seiner Rechnungen über. Das wichtigte besteht darin, daß zur genauen Bestimmung sechs passend aufgestellte Instrumente notwendig sind. Lp.

L. de Marchi. Note di meteorologia matematica. Lomb. Ist. Rend. (2) **35**, 254-273, 354-366.

„In den vorliegenden Untersuchungen beabsichtige ich, einige der geistvollen kinematischen Betrachtungen, die Beltrami in seinen klassischen Abhandlungen über „Idrodinamica razionale“ (Mem. Acc. di Bologna (3) **2**) entwickelt hat, auf das Studium der atmosphärischen Erscheinungen anzuwenden. Bekanntlich besteht das Hauptergebnis dieser Abhandlungen in der Zerlegung der Geschwindigkeitskomponenten in eine Summe von Ableitungen von Massen- und Oberflächenpotentialen; dieselben entsprechen ideellen Verteilungen der Materie, deren Dichtigkeiten bezw. der Dilatation und den Komponenten der Rotation für die Massenpotentiale entsprechen, den Komponenten der Geschwindigkeit und der Rotation auf den Grenzflächen für die Oberflächenpotentiale. Statt von rein geometrischen Formeln auszugehen, wie es Beltrami tut, kann man mit den dynamischen Gleichungen beginnen und kommt zu Formeln, die sich zu mancher interessanten praktischen Deutung eignen.“ Die Anwendungen betreffen Bewegungen, die in der Atmosphäre stattfinden, wenn bei einem Gleichgewichtszustande derselben Temperaturänderungen erfolgen. Lp.

W. Láska. Über die charakteristischen Zahlen der meteorologischen Elemente. Meteorol. Zs. **19**, 465-467.

Die Überlegungen dieses Aufsatzes hängen mit der Natur der Häufigkeitskurve zusammen, deren Asymmetrie bei vielen Erscheinungen in der neueren Zeit zu mannigfachen Untersuchungen Anlaß gegeben hat. Das

arithmetische Mittel gegebener Elemente ist nicht immer der charakteristische Wert eines meteorologischen Elementes; dies trifft nur bei symmetrischer Häufigkeitskurve zu. Die hierher gehörigen Untersuchungen von Pearson scheinen dem Verf. nicht bekannt geworden zu sein.

Lp.

W. Trabert. Die Korrektion der Registrierapparate wegen Trägheit. Meteorol. Zs. 19, 136-139.

Erörterung der von Valentin vorgeschlagenen Methode; die betreffende Formel ist nicht auf andere Apparate anwendbar. „Bei Publikation der Ergebnisse der Registrierungen der „ballons sondes“ sollten unbedingt neben den wegen Trägheit korrigierten Werten auch die unmittelbar der Kurve entnommenen Werte oder nur die letzteren mitgeteilt werden.“ Lp.

S. Günther. Über gewisse hydrologisch-topographische Grundbegriffe. Münch. Ber. 1902, 17-38.

Es handelt sich um mathematische Begründung der Begriffe: Wasserscheide, Abflußlinie, Talweg, Hauptfluß, Nebenfluß. Wird von der Krümmung der Erde abgesehen, so sei die Höhe z als Funktion der horizontalen Koordinaten vorausgesetzt und

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\ \frac{\partial z}{\partial y}=q,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=s,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t$$

eingeführt. Dann sind $z=c$ die Gleichungen der Niveaulinien, also $p\,dx+q\,dy=0$ ihre Differentialgleichungen. Die Abflußlinien haben in horizontaler Projektion die Gleichungen $q\,dy-p\,dx=0$. Die Wasserscheiden und Talwege werden durch die Bedingungen bestimmt:

$$p^2 r+q^2 t=zqs,$$

und zwar entsteht eine Wasserscheide bei konvexer, ein Talweg bei konkaver Krümmung des Geländes. Dies wird an dem einfachen Beispiel eines schief stehenden Kreiszylinders erläutert und zur möglichst scharfen Unterscheidung zwischen Hauptfluß und Nebenfluß benutzt. Dz.

G. H. Darwin. Ebbe und Flut sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem. Autorisierte deutsche Ausgabe nach der zweiten englischen Auflage von A. Pockels. Mit einem Einführungswort von G. von Neumayer. Leipzig: B. G. Teubner. XII u. 344 S. 8°.

Das Buch stellt eine Bearbeitung der Vorträge dar, die der auf diesem Gebiete als erste Autorität geltende Verf. 1897 am Lowell-Institute zu Boston gehalten hat. Obschon er auf die mathematische Form in diesen populären Vorträgen verzichtet hat, müssen wir das Werk hier

doch besprechen, weil der Inhalt durchaus auf mathematischen Grundlagen beruht. Das Vorwort selbst sagt hierüber folgendes: „Eine mathematische Beweisführung ist, bei Licht betrachtet, nur organisierter gewöhnlicher Menschenverstand, und es ist gut, wenn die Männer der Wissenschaft ihr Werk nicht immer durch den Schleier der Fachsprache verhüllt nur wenigen zeigen, sondern von Zeit zu Zeit einem größeren Publikum den Gedankengang enthüllen, der hinter ihren mathematischen Formeln verborgen liegt." Bezüglich des Gegenstandes hören wir aus den einführenden Worten des hochverdienten früheren Direktors der Seewarte zu Hamburg folgende Sätze: „Der Gegenstand ist zwar von nautischem und maritimem Interesse; allein der Umfang ist so sehr über die gewöhnlich für Werke dieser Art innegehaltene Grenze ausgedehnt worden, daß er in Wirklichkeit zu einer Kosmogonie anwuchs. ... Was hier geboten wird, ist nicht nur für den gebildeten Fachmann von Wert. Das Studium dieses Werkes ist geeignet, neue und hochinteressante Ausblicke in das Universum zu eröffnen, und vielen wird die Wiedergabe des Werkes des geistvollen englischen Gelehrten in deutscher Sprache hochwillkommen sein."

Inhalt: I. Gezeiten und Beobachtungsmethoden. II. Seeschwankungen. III. Ebbe und Flut in Flüssen. Flutmühlen. IV. Historische Übersicht. V. Die fluterzeugende Kraft. VI. Abweichung der Lotlinie. VII. Elastische Deformation der Erdoberfläche durch wechselnde Belastung. VIII. Gleichgewichtstheorie der Gezeiten. IX. Dynamische Theorie der Flutwelle. X. Gezeiten in Seen. Isorhachienkarte. XI. Harmonische Analyse der Gezeiten. XII. Reduktion der Flutbeobachtungen. XIII. Gezeitentafeln. XIV. Genauigkeitsgrad der Vorherbestimmung der Gezeiten. XV. Chandlers Nutation. Die Starrheit der Erde. XVI und XVII. Gezeitenreibung. XVIII. Gleichgewichtsfiguren einer rotierenden Flüssigkeitsmasse. XIX. Die Entwicklung der Weltsysteme. XX. Die Saturnringe.

Wenn wir noch berichten, daß jedem Kapitel ein Verzeichnis der wichtigsten zugehörigen Literatur angehängt und daß ein reichhaltiges alphabetisches Register am Schlusse beigegeben ist, so geht aus dem Gesagten hervor, daß das von der Verlagsbuchhandlung in jeder Beziehung schön ausgestattete Werk zu den wertvollsten Erzeugnissen volkstümlicher Bestrebungen zu rechnen ist. Lp.

N. Ekholm. Über Emission und Absorption der Wärme und deren Bedeutung für die Temperatur der Erdoberfläche. Meteorol. Zs. **19**, 1-26, 489-505.

In der Abhandlung „On the variations of the climate of the geological and historical past and their causes" (Quart. J. Roy. Met. Soc. 27, 1901) hat der Verf. im Anschluß an die von Arrhenius entworfene Theorie die großen Klimaschwankungen der geologischen Zeiten aus einer Variation der thermischen Eigenschaften der Atmosphäre in bezug auf Emission und Absorption der Wärme zu erklären gesucht. Nach dieser Theorie liegt die Hauptursache der fraglichen großen Klimaschwankungen

in einer verhältnismäßig geringen Variation des Kohlensäuregehalts der Atmosphäre. Gegen diese Auffassung ist Angström aufgetreten, indem er sich auf seine experimentellen Untersuchungen der Absorption von Wärme durch kohlensäurehaltige Luft unter verschiedenem Drucke und bei erhöhten Temperaturen stützte.

„Die endgültige Lösung dieser Streitfrage kann nicht ohne neue experimentelle Daten gegeben werden. Ich werde aber im folgenden versuchen, eine übersichtliche Darstellung der bis jetzt bestätigten Tatsachen und Schlußfolgerungen zu geben, woraus schon hervorgehen dürfte, daß die von Arrhenius aufgestellte Theorie wesentlich richtig ist. Dadurch hoffe ich auch zeigen zu können, daß meine oben zitierte Abhandlung über die Variationen der Klimate der geologischen und historischen Zeiten und ihrer Ursachen mit den physikalischen und meteorologischen Tatsachen übereinstimmt.“ Lp.

M. Kossatsch. Über eine Lücke in den Theorien der Wärme und den Temperaturänderungen im Boden. Meteorol. Zs. **19**, 372-373.

Die große latente Schmelzwärme des Eises wirkt als ein Hindernis für Fortpflanzung der Temperaturänderungen im feuchten Boden. Eine rein konduktive Theorie der Temperaturschwankungen im Boden kann daher nur für vollkommen trockenen oder vollkommen nassen Boden aufgestellt werden, im letzteren Fall aber nur bis $t = 0^0$ hin. Lp.

N. Ekholm. Die Extinktion des Lichtes im Weltall. Meteorol. Zs. **19**, 242-244.

Gegen eine Behauptung Traberts (vgl. F. d. M. **32**, 942, 1901) gerichtet, daß der Verf. bei der Behandlung dieser Frage die mittlere Größe des fein verteilten meteorischen Staubes übersehen habe. Lp.

V. E. Boccara. Sulle variazioni diurne della rifrazione atmosferica (secondo contributo). Nuovo Cimento (5) **4**, 192-203.

Aus Beobachtungen wird eine empirische Formel für die Erscheinung abgeleitet. Lp.

J. Liznar. Über die Beziehung zwischen dem Temperatur- und Induktionskoeffizienten eines Magnetstabes und seinem magnetischen Momente. Meteorol. Zs. **19**, 220-224.

Der Versuch zur Aufstellung einer Formel, welche die Abhängigkeit des Temperaturkoeffizienten vom Momente ausdrückt, ist vom Verf. in der Abhandlung gemacht worden: „Einige Bemerkungen zur Messung der Horizontalintensität des Erdmagnetismus mittels des magnetischen Theodoliten“ (Terrestrial Magnetism **5**, 63-72, 1900). Die bezüglichen

Formeln werden jetzt von neuem hergeleitet und an Versuchsergebnissen von Prodinger (Wien. Ber. **119**, 383-399, 1900) geprüft; die Übereinstimmung ist eine recht gute. Lp.

H. Wild. Über eine neue Methode zur Bestimmung der Variationen der Inklination. Meteorol. Zs. **19**, 83-87.

Beschreibung und Theorie einer Methode, welche unter Anwendung der vom Erdmagnetismus in einem bewegten Leiter induzierten Ströme gestattet, die Variation, sei es direkt der Inklination, sei es der Vertikalintensität, aus den Bewegungen eines wie beim Unifilar- und Bifilarmagnetometer an Faden aufgehängten und um diese als vertikale Achse sich drehenden Magneten abzuleiten (Nach Petersb. Bull. **13**, 1900).

Lp.

G. Guglielmo. Sulla misura delle variazioni e del valore assoluto della pressione atmosferica mediante il ludione. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{11}_1$, 70-77.

Verf. verwendet einen Taucher mit Quecksilber, den er in Benzin senkt, zur Bestimmung des Luftdrucks. Hae.

F. M. Exner. Versuch einer Berechnung der Luftdruckänderungen von einem Tage zum nächsten. Wien. Ber. **111**, 707-725.

Verf. unterscheidet geographische, von der Beschaffenheit des Geländes abhängende Einflüsse und allgemeine, viel wichtigere im Sinne der Aerodynamik sich abspielende Vorgänge, die der Hauptsache nach im Ausgleich von Luftdruckdifferenzen unter dem Einflusse der Erddrehung bestehen. Für letztere geht er von der Kontinuitätsgleichung aus:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}=0,$$

aus der er unter Annahmen über die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w und der ferneren Annahme, daß gewisse vier Größen a, b, c, d an demselben Ort näherungsweise Konstanten seien, die weitere Differentialgleichung ableitet:

$$\frac{\partial p}{\partial t}=a\nabla^2 p+b\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\right\}+c\frac{\partial p}{\partial x}+d\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Sind a, b, c, d bekannt, so ergibt sich aus der augenblicklichen Druckverteilung, indem statt der Differentiale Druckdifferenzen genommen werden, eine Bestimmung des zu erwartenden $\frac{\partial p}{\partial t}$, die, wie sich der Verf. überzeugt hat, unter Berücksichtigung der vorgenannten geographi-

schen Einflüsse wenigstens das Vorzeichen von $\frac{\partial p}{\partial t}$ in durchschnittlich 70 % Fällen zutreffend bestimmt.

Allerdings ist die Bestimmung von a, b, c, d sehr mühsam, da sie aus einer großen Zahl von Wetterkarten nach der Methode der kleinsten Quadrate vorgenommen werden muß. Dz.

L. Steiner. Zum „Flächensatz". Meteorol. Zs. **19**, 562-564.

„Nachdem durch die Arbeiten von Siemens, Möller, Sprung, Hermann etc. (1890-1896) die Frage über die Anwendbarkeit des Flächensatzes in der Meteorologie zu einem Abschluß gekommen zu sein scheint, soll hier auf Grund dieser Arbeiten eine kleine Rechnung mitgeteilt werden, welche eine Antwort auf die allgemeine Frage gibt: Wie weit (bis zu welcher geographischen Breite) kann sich ein Luftteilchen vom Äquator in der Weise entfernen, daß dem Flächensatz genügt und zur Bewegung nicht mehr Arbeit angewendet werde, als über welche wir bei den obwaltenden meteorologischen Verhältnissen verfügen?" Lp.

V. Bjerknes. Zirkulation relativ zu der Erde. Meteorol. Zs. **19**, 97-108.

„In einigen früheren Arbeiten (vgl. F. d. M. **31**, 897, 1900) habe ich auf die Vorteile hingewiesen, die man gewinnt, wenn man bei der Diskussion von Luft- und Meeresbewegungen den Lord Kelvinschen Begriff der Zirkulation geschlossener Kurven zugrunde legt. Dabei habe ich mich zur Vereinfachung nur mit der absoluten Bewegung beschäftigt und zugleich die Reibung vernachlässigt. Dadurch gewinnt man den Vorteil, die primären Bewegungsursachen in vollkommener Reinheit studieren zu können. Wenn es sich aber nicht mehr um die Diskussion rein theoretischer Fragen, sondern um konkrete praktische Anwendungen handelt, so ist die Berücksichtigung der Rotation der Erde und der Reibung unentbehrlich. Die erste Lücke ist nun sehr leicht auszufüllen, und dieses wird im folgenden geschehen. Anders verhält es sich dagegen mit der Reibung." Die Resultate der mathematischen Arbeit werden in vier Sätzen ausgesprochen. Lp.

J. W. Sandström. Über die Beziehung zwischen Temperatur und Luftbewegung in der Atmosphäre unter stationären Verhältnissen. Meteorol. Zs. **19**, 161-170.

V. Bjerknes. Bemerkung zur vorstehenden Abhandlung. Meteorol. Zs. **19**, 170-171.

Die Abhandlung von Sandström geht von Formeln aus, die der vorstehend besprochenen Abhandlung von V. Bjerknes entnommen sind, und zeigt in ihrem theoretischen Teile, wie man mit Hülfe der Zirkula-

tionstheorie die Mechanik der Zyklone mit kaltem und der Antizyklone mit warmem Zentrum erklären kann. Die nachfolgende Bemerkung von Bjerknes kleidet die Erklärung in elementare Form. Lp.

N. Ekholm. Über die Höhe der homogenen Atmosphäre und die Masse der Atmosphäre. Meteorol. Zs. **19**, 249-260.

Neue Durchrechnung dieser Aufgabe, die früher von Mascart unternommen ist (vgl. F. d. M. **24**, 1158, 1892). Ist K, wie bei Mascart, die Höhe, welche die Atmosphäre annehmen würde, wenn sie überall dieselbe Dichte besäße, und zwar gleich der mittleren Dichte an der Meeresoberfläche, dagegen reduzierte Höhe der Atmosphäre H diejenige, welche man dadurch berechnet, daß man die Höhe des Quecksilberbarometers an der Meeresoberfläche mit dem Verhältnis der Quecksilberdichte zur Dichte der Luft an der Meeresoberfläche multipliziert, so erhält man bekanntlich für 760 mm Druck und 0° bei normaler Schwere $H_0 = 7991$ m. Die gegenwärtigen Rechnungen ergeben: $K = 1{,}00479\,H$ und die Masse der Atmosphäre 520.10^{13} Tonnen. Lp.

G. Schwalbe. Über die Darstellung des jährlichen Ganges der Verdunstung. Meteorol. Zs. **19**, 49-59.

Von mathematischem Interesse ist die im Eingange der Abhandlung befindliche Zusammenstellung und vergleichende Besprechung der Formeln für die innerhalb einer bestimmten Zeit verdampfte Wassermenge; bezüglich der Literatur wird auf Hanns jüngst erschienenes „Lehrbuch der Meteorologie“ (Leipzig: Chr. Herm. Tauchnitz, 1901) verwiesen. Lp.

Konr. Keller. Die Schwankungen der atmosphärischen Gleichgewichtszone als Ursache der nassen und trockenen Witterungsperioden. Ein Ausbau meiner Theorie „Der atmosphärische Fixpunkt“. Leipzig: E. H. Mayer in Komm. 48 S. gr. 8°.

Anhang.

J. G. HAGEN. Synopsis der höheren Mathematik. Dritter Band. Differential- und Integralrechnung. Lieferung 3 u. 4. Berlin: Felix L. Dames. S. 129-256.

Die beiden neuen Lieferungen des langsam fortschreitenden Werkes haben den folgenden Inhalt:

Vom Abschnitt IV (Transformationsgruppen) beginnt die dritte Lieferung mit dem 8. Hauptstück. Die Berührungstransformationen. A) Vorläufige Begriffe. B) Erweiterte Punkttransformationen. C) Begriff der Berührungstransformation. D) Invariante Funktionen und Funktionengruppen. E) Endliche stetige Gruppen von Berührungstransformationen.

V. Abschnitt. Differentialgleichungen im allgemeinen. 1. Hauptstück. Definitionen und Einteilung. 2. Hauptstück. Derivierte und primitive Gleichungen und deren Existenz. 3. Hauptstück. Integration und Integrale. A) Definitionen. B) Gattungen von Integralen. 4. Hauptstück. Integrationsmethoden. A) Integrationsfaktoren. B) Umformungen. C) Reihenentwicklung. D) Variation der Konstanten. E) Integration nach Art der Quadratur. F) Stufenweise Integration. G) Mechanische Hülfsmittel.

VI. Abschnitt. Differentialgleichungen zwischen zwei Veränderlichen. 1. Hauptstück. Differentialgleichungen erster Ordnung. A) Integrationsfaktoren. B) Trennung der Veränderlichen. C) Besondere Fälle integrierbarer Differentialgleichungen. D) Singuläre Integrale. E) Punkttransformationen. F) Differentialgleichungen als Definitionen von Kurven oder Funktionen. 2. Hauptstück. Differentialgleichungen zweiter Ordnung. A) Allgemeine Gesichtspunkte. B) Die Normalformen und ihre Verwandlungen. C) Punkttransformationen. Ein-, zwei-, dreigliedrige Gruppen. D) Integrationsfaktoren. E) Lineare homogene Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten. 3. Hauptstück. Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. A) Allgemeine Eigenschaften. B) Die einfachsten Typen. C) Die singulären Lösungen. 4. Hauptstück. Lineare Differentialgleichungen. A) Definitionen, Fundamentalsysteme, Zerlegbarkeit. B) Reihenentwicklung der Integrale. C) Besondere Fälle von linearen Differentialgleichungen.

VII. Abschnitt. Totale Differentialgleichungen. 1. Hauptstück. Allgemeine Begriffe. 2. Hauptstück. Bestimmte Differentialgleichungs-

systeme. A) Die Normalform des Systems. B) Integrale und ihre Existenz.

Im Interesse der Benutzung ist eine beschleunigte Ausgabe der noch ausstehenden Hefte des dritten Bandes der Synopsis sehr wünschenswert.

Lp.

E. PASCAL. Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theoreme, Literatur). Autorisierte deutsche Ausgabe nach einer neuen Bearbeitung des Originals. Analysis und Geometrie. II. Teil: Die Geometrie. Leipzig: B. G. Teubner. IX u. 712 S. 8°.

Nachdem das Original in F. d. M. **29**, 827, 1898 und **30**, 855, 1899, der erste Teil der deutschen Übersetzung in F. d. M. **31**, 902, 1900, angezeigt worden ist, können wir darauf verzichten, über den zweiten Teil der Übersetzung allgemeine Angaben zu machen. Nach der Vorbemerkung des Übersetzers haben sich in derselben Art wie bei dem ersten Band durch Zusätze und Verbesserungen an der Durchsicht der Druckbogen beteiligt: F. Engel, A. Loewy und der Verf. E. Pascal. Die Vergleichung mit dem italienischen Original zeigt denn auch eine ganze Reihe von Abweichungen.

Lp.

P. GÜSSFELDT. Grundzüge der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung auf Forschungsreisen und die Entwicklung der hierfür maßgebenden mathematisch-geometrischen Begriffe. Braunschweig: Friedr. Vieweg u. Sohn. XIX u. 377 S. gr. 8°.

„Aus den Vorlesungen, welche ich während der letzten zehn Jahre am Seminar für orientalische Sprachen zu Berlin gehalten habe, ist dieses Buch entstanden; es ist weder für junge Mathematiker, noch für junge Astronomen bestimmt, sondern für Forschungsreisende, wie ich selbst einer war. Deshalb sind nur diejenigen Methoden aufgenommen, welche den Verhältnissen auf Reisen am besten entsprechen. Auch ist, in Rücksicht auf die Leistungsfähigkeit leicht transportabler Universalinstrumente und deren Gebrauch, von den Reflexionsinstrumenten (Sextant, Prismenkreis) ganz abgesehen worden; mit anderen Worten: es ist diejenige Auswahl getroffen worden, auf welche man durch Beobachtungserfahrung auf Reisen von selbst geführt wird.“

Inhaltsverzeichnis. I. Die Elemente der reinen Mathematik oder Analysis. II. Räumliche Vorstellungen. III. Die tatsächlichen Grundlagen der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung. IV. Zeit und Zeitmessung. V. Die sphärischen Dreiecke und ihre Einteilung. Sphärische Trigonometrie. Allgemeingültigkeit der Grundformeln für die Gesamtheit der sphärischen Dreiecke. Anwendung auf das astronomische Dreieck. VI. Das Universalinstrument und seine Fehlertheorie. VII. Messungsmethoden für Zeit, Polhöhe und Azimut. VIII. Von den Bedingungen, unter welchen ein Fehler in den Stücken φ, δ, z, a, t des astronomischen

Dreiecks den geringsten Einfluß übt auf das zu berechnende Stück der Zeit, der Polhöhe, des Azimuts. IX. Das nautische Jahrbuch und der Gebrauch fünfstelliger Logarithmentafeln. X. Beispiele für das Berechnen angestellter Beobachtungen. XI. Meridianellipse und Gestirnparallaxe. XII. Die Methoden der Längenbestimmung. — Anhang. Berichtigungen und Zusätze. Tafel I für $\log \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \tau}{\sin 1''}$. Tafel II für $\log \frac{2 \sin^4 \frac{1}{2} \tau}{\sin 1''}$.

Lp.

SOULS. Sur l'emploi de la méthode expérimentale dans l'étude des sciences mathématiques. Revue de Math. spéc. **13**, 2-3.

Auch in der Mathematik, dieser anscheinend durch rein abstraktes Denken aufgebauten Wissenschaft, spielt das Experiment eine gewisse Rolle. Als Beispiel kann zunächst aus der Algebra die Trennung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch Substitutionen genannt werden. Wichtige Sätze, wie die Zeichenregel von Descartes oder der Fermatsche Satz, sind von ihren Entdeckern zuerst experimentell gefunden und oft erst viel später exakt bewiesen worden. In der analytischen Geometrie untersucht man die Gestalt einer durch ihre Gleichung gegebenen Fläche, indem man wie ein Anatom eine Reihe von Schnitten durch die Fläche legt. Auch bei der graphischen Auflösung der Gleichungen findet man die Wurzeln rein experimentell durch Abmessen gewisser Ordinaten. Die Konvergenz von Reihen beweist man oft, indem man versucht, sie mit anderen Reihen zu vergleichen, deren Konvergenz bekannt ist.

Zch.

G. SANNIA. Sopra una erronea dimostrazione di un teorema di algebra. Suppl. al Period. **5**, 65-67.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das in x ganze Polynom $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ für jeden Wert von x Null ist, erfordert, daß alle Koeffizienten Null sind. Gegen den üblichen Beweis, der sich unter anderem auch in Baltzers Elementen der Mathematik findet, wird Kritik geübt, und es wird gezeigt, welche genauere Schlußweise an die Stelle jenes Beweises zu setzen ist.

Lp.

M. KRAUSE. Zur Theorie der ultra-bernoullischen Zahlen und Funktionen. Leipz. Ber. **54**, 139-205.

Für die Theorie der sogenannten ultra-bernoullischen Zahlen und Funktionen hat man drei analoge Ausgangspunkte, wie für die Theorie der gewöhnlichen Bernoullischen Zahlen und Funktionen. Entweder kann man Ausdrücke von der Form

$$\varepsilon \cdot 1^\mu + \varepsilon^2 \cdot 2^\mu + \cdots + \varepsilon^{x-1} (x-1)^\mu$$

betrachten, oder gewisse trigonometrische Reihen untersuchen, oder endlich transzendente Ausdrücke von der Form

$$\frac{1}{\varepsilon e^z - 1}$$

nach Potenzen von z entwickeln. ($\varepsilon = 1$ liefert die gewöhnlichen Bernoullischen Zahlen und Funktionen.)

Alle drei Ausgangspunkte werden in der vorliegenden Arbeit benutzt und mit einander in Verbindung gesetzt, um die Theorie der ultra-bernoullischen Funktionen und der mit ihnen zusammenhängenden Funktionen in systematischer Weise zu entwickeln. Besonderes Gewicht ist auf die Beziehung zu den trigonometrischen Reihen gelegt, welche auch als erster Ausgangspunkt dienen.

Mit Hülfe einer Funktion $f(x)$, welche in eine Sinus- oder Kosinusreihe entwickelt werden kann:

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \sin \nu\alpha \quad \text{oder} \quad f(x) = \frac{1}{2}\beta_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \cos \nu\alpha,$$

lassen sich gewisse unendliche Reihen $s^{(u_r)}$, $\sigma^{(u_r)}$, $S^{(u_r)}$, $\Sigma^{(u_r)}$ der Koeffizienten α_ν und β_ν leicht summieren, wie z. B.

$$\begin{aligned} s^{(u_r)} &= \alpha_r + \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda (\alpha_{\lambda n+r} - \alpha_{\lambda n-r}) \\ &= 2\sum_{\lambda=1}^{m} f\left(\frac{(2\lambda-1)\pi}{n}\right) \sin(2\lambda-1)u_r \end{aligned}$$

$$\left[u_r = \frac{r\pi}{n};\ r = 1, 2, \ldots, m;\ m = \frac{n-1}{2}, \text{ bez. } \frac{n}{2}\right].$$

Wählt man $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu^{2\mu+1}}$ oder $\beta_\nu = \frac{1}{\nu^{2\mu}}$, so sind die zugehörigen Funktionen $f(x)$ die bekannten Bernoullischen Funktionen. Die sich hierfür ergebenden speziellen s, σ, S, Σ werden als ultra-bernoullische Zahlen eingeführt und als die Entwicklungskoeffizienten von

$$\frac{\pi}{2n}\left\{\begin{matrix}\text{cosec}\\ \cot\end{matrix}\left(\frac{\pi(k+r)}{n}\right) - \begin{matrix}\text{cosec}\\ \cot\end{matrix}\left(\frac{\pi(k-r)}{n}\right)\right\},$$

bez. die negativen Entwicklungskoeffizienten von

$$\frac{\pi}{2n}\left\{\begin{matrix}\text{cosec}\\ \cot\end{matrix}\left(\frac{\pi(k+r)}{n}\right) - \begin{matrix}\text{cosec}\\ \cot\end{matrix}\left(\frac{\pi(k-r)}{n}\right)\right\}$$

nach Potenzen von k erkannt.

Hierdurch ist es nahe gelegt, die ultra-bernoullischen Zahlen allgemein als Koeffizienten der Entwicklung von $\cot(x \pm u)$ und $\text{cosec}(x \pm u)$ nach Potenzen von x, wo u beliebig bleibt, zu definieren; für $u = \frac{r\pi}{n}$

erhält man aus ihnen die früher gefundenen speziellen Werte. Mit Hülfe dieser allgemeinen Zahlen lassen sich dann Summen von der Form

$$\varepsilon \cdot 1^\mu + \varepsilon^2 . 2^\mu + \cdots + \varepsilon^{x-1} (x - 1)^\mu,$$
$$\varepsilon \cdot 1^\mu + \varepsilon^3 \cdot 3^\mu + \cdots + \varepsilon^{2x-1} (2x - 1)^\mu,$$

welche als ultra-bernoullische Funktionen bezeichnet werden, darstellen.

Hieran knüpft eine independente Darstellung der ultra-bernoullischen Zahlen und Funktionen durch Determinanten, ausgehend von ihren linearen Rekursionsformeln, und eine zweite independente Darstellung der Zahlen allein mit Hülfe einer Methode, welche der von Kronecker für die gewöhnlichen Bernoullischen Zahlen aus der Lagrangeschen Interpolationsformel abgeleiteten analog ist.

Die Betrachtung von Reihen, welche von zwei Veränderlichen abhängen, führt zur Summierung gewisser trigonometrischer Reihen mit Hülfe der gewöhnlichen Bernoullischen Funktionen; indem dieses Problem auf doppeltem Wege gelöst ist, erhält man durch Vergleichung beider Darstellungsarten eine Reihe von Beziehungen für jene Funktionen. Zugleich ergeben sich für die ultra-bernoullischen Funktionen Darstellungen durch Fouriersche Reihen.

Ein Ausblick auf die Summierung noch allgemeinerer trigonometrischer Reihen zeigt die Fruchtbarkeit der vom Verf. gegebenen Methode.

Hau.

H. Petrini. Euklides sjätte bok utan Proportionslära. Nyt. Tidss. for Math. **13** B, 64.

Der Satz (Thales Satz) von den Rechtecken aus den Teilen, in die eine Gerade, parallel mit der Grundlinie eines Dreiecks, die beiden anderen teilt, wird ohne Hülfe von Proportionen bewiesen. V.

E. Lemoine. Note on Mr. George Peirce's approximate construction for π. American M. S. Bull. (2) 8, 137-148.

Für die Peircesche Konstruktion (F. d. M. **32**, 504, 1901) sowie für drei andere Näherungskonstruktionen leitet der Verf. nach seiner Geometrographie die charakteristischen Zahlen ab. Hieran wird die analoge Behandlung einer angenäherten Trisektion geknüpft. Lp.

Stowasser. Neuartige Zeichendreiecke und Vierecke. Mitt. über Art. u. Genie **33**, 318-321.

Beschreibung und Theorie von Dreiecken und Vierecken, die neuerdings zum Aufzeichnen häufig wiederkehrender spitzer Winkel in Vorschlag gebracht sind. Lp.

W. Peyerle. Die Fußpunktkurve der Ellipse und Hyperbel; verwandte und ähnliche Kurven. Mitt. üb. Art. u. Genie 33, 483-505.

Eine Zusammenstellung bekannter Eigenschaften unter mehrfachem Hinweise auf andere Autoren, die sich mit den behandelten Kurven beschäftigt haben. Lp.

C. Rohrbach. Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln nebst einigen physikalischen und astronomischen Tafeln, für den Gebrauch an höheren Schulen zusammengestellt. 3. Aufl. Gotha: E. F. Thienemann. 36 S. gr. 8.

Die neue Auflage ist ein unveränderter Neudruck der zweiten, über die F. d. M. 30, 858 (1899) berichtet worden ist. M.

E. Sánchez Ramos. Tablas de logaritmos, trigonometricas y de cálculos de intereses. Madrid (1901).

Das Buch enthält die Tafeln der Logarithmen der Zahlen, trigonometrische Tafeln und Zinstafeln. Dazu werden Anweisungen über die Benutzung gegeben und über die Fehlergrenzen, innerhalb deren die berechneten Zahlen gelten. Endlich folgen Formelsammlungen aus der ebenen und sphärischen Trigonometrie, aus der mathematischen Geographie und dergl. mehr. Tx. (Lp.)

J. Riem. Rechentabellen für Multiplikation. Hülfsbuch für Handel und Gewerbe, mit einem Vorworte von Prof. Dr. H. Kinkelin in Basel. 2. Stereotypaufl. München: E. Reinhardt. XI + 197 S. (1901).

Die bekannten Crelleschen Multiplikationstafeln geben die Produkte ein- bis dreistelliger Zahlen mit dreistelligen Multiplikanden ohne Umwendung des Blattes; bei mehr als dreistelligen ist jedoch ein Umwenden der Blätter und ein Aufschreiben der Teilprodukte erforderlich. Riems Tafeln geben die Produkte ein- und zweistelliger Zahlen mit fünfstelligen Multiplikanden auf einer Seite und die Produkte drei- und vierstelliger Zahlen mit fünfstelligen Multiplikanden bei einmaligem Umwenden. Die Riemschen Tafeln sind handlicher und nicht so umfangreich. Der Druck ist klar und deutlich. Diese Tabellen werden allen praktischen Rechnern sehr willkommen sein. M.

E. Hammer. Sechsstellige Tafel der Werte $\log^{10}\frac{1+x}{1-x}$ für jeden Wert des Arguments $\log x$ von 3,0—10 bis 9,99000—10. (Vom Argument 9,99000—10 an bis 9,999700—10 sind die $\log\frac{1+x}{1-x}$ nur noch fünfstellig angegeben, von dort an vierstellig). Leipzig: B. G. Teubner. IV + 73 S. gr. 8°.

In den fünfstelligen Logarithmentafeln von F. W. Rex findet sich

eine für manche Zwecke sehr bequeme fünfstellige Tafel der $\log\frac{1+x}{1-x}$ für gegebene $\log x$ (s. F. d. M. **16**, 1116, 1884). Mit Hilfe des von Rex berechneten Materials hat Hammer eine entsprechende sechsstellige Tafel zur Ergänzung sechsstelliger Logarithmentafeln hergestellt. Auf die 60 Seiten umfassenden Tafeln folgen „Andeutungen über die Berechnung und die Einrichtung der Tafel und Bemerkungen über den Gebrauch“. Unter den Anwendungen ist von besonderer praktischer Wichtigkeit die Aufgabe des einfachen Rückwärtseinschneidens, der Snelliusschen Vierecksaufgabe, die immer noch vielfach Pothenots Problem genannt wird. M.

E. Hammer. Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch. Eine elementare Anleitung zur Verwendung des Instrumentes für Studierende und Praktiker. Mit 6 Figuren im Text. 2., durchgesehene Auflage. Stuttgart: J. B. Metzler VII + 69 S. kl. 8°.

Da diese Anleitung zum Gebrauche des logarithmischen Rechenschiebers in der ersten Auflage (1897) nur dem Titel nach in den F. d. M. 1898 erwähnt worden ist, so geben wir hier den Inhalt des Büchleins an. Die Einleitung enthält historische Notizen über die Gunter-Skale (1620) und eine Beschreibung ihrer Einrichtung. Der heutige Rechenschieber mit zwei Gunter-Skalen stammt von Wingate 1627; derselbe erfuhr, wie im folgenden berichtet wird, bis heut mehrfache Verbesserungen. Die hier gegebene genaue Beschreibung bezieht sich auf den neueren geradlinigen Rechenschieber von 250 mm ganzer Teilungslänge aus der Fabrik von Albert Nestler in Lahr i. B. Der genauen Beschreibung folgt eine Anweisung zum Gebrauche bei der Multiplikation, Division, Proportions- und Wurzelberechnung mit zahlreichen gut gewählten Beispielen und Übungsaufgaben. Ein Anhang beschreibt die am Rechenschieber angebrachten Teilungen zur Rechnung mit sin und tang, und der letzte Paragraph belehrt den Leser, wie er sich über die Genauigkeit des Rechenschiebers bei den verschiedenen Stadien seiner Übung instruieren kann. M.

R. Mehmke. Wer hat den Läufer des Rechenschiebers zuerst erfunden? Zs. f. Math. u. Phys. 48, 134-135.

Feststellung der Tatsache, daß der Läufer des Rechenschiebers schon 1837 benutzt wurde. Rr.

Fürle. Rechenblätter. No. 3. Rechenblatt für photographische Zwecke. Berlin: Mayer & Müller. 8 S. u. 1 Taf.

Die Tafel gibt die graphische Darstellung der Gleichung $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{f}$, und die zugehörige Gebrauchserklärung erläutert die Benutzung an einer

Reihe von Beispielen, unter denen insbesondere die Ermittlung der Bild- und der Gegenstandsweite, sowie der Vergrößerung gelehrt wird. Lp.

Weitere Literatur.

J. Brunn. Vierstellige Logarithmen, für den Schulgebrauch zusammengestellt. Münster: Aschendorff. 18 S. gr. 8°.

S. Gundelfinger. Sechsstellige Gaussische und siebenstellige gemeine Logarithmen. 2., durch eine Ergänzungstabelle vermehrte Auflage. Leipzig: Veit & Co. IV. u. 31 S. 4°.

L. Jelínek. Mathematische Tafeln für technische Anstalten, besonders für höhere Gewerbeschulen. 3. Aufl. Nach der neuen Rechtschreibung berichtigt, sonst im wesentlichen unveränderter Abdruck der 2. Auflage. Wien: A. Pichlers Wwe & Sohn. 223 S. gr. 8°

E. Lüling. Mathematische Tafeln für Markscheider und Bergingenieure, sowie zum Gebrauche für Bergschulen. 5. Auflage. Berlin: J. Springer. XLI u. 64 S. gr. 8°.

E. Schultz. Vierstellige Logarithmen der gewöhnlichen Zahlen und der Winkelfunktionen und andere mathematische Tafeln nebst den erforderlichen physikalischen Hülfstafeln zum Gebrauche an den höheren Schulen. Essen: G. D. Baedeker. VI u. 112 S. gr. 8°.

E. Schultz. Mathematische und technische Tabellen für den Gebrauch in der Praxis und an deutschen und österreichischen technischen Lehranstalten. (Bureau-Ausgabe.) Unter Mitwirkung von E. Dieckmann. 4. Aufl. Essen: G. D. Baedeker. 44 S. gr. 16°.

D. Hilbert. Mathematical problems. Lecture delivered before the international congress of mathematicians at Paris in 1900. Translated by Mary Winston Newson. American M. S. Bull. (2) 8, 437-479.

Vergl. F. d. M. **31**, 68, 1900.

Namenregister.

Seite

Deutsche Südpolar-Expedition.

Zum Kontinent des eisigen Südens.

Von

Erich von Drygalski.

Fahrten und Forschungen des „Gauß“ 1901—1903.

Ein stattlicher Band von 685 Seiten in Groß-Lexikonoktav mit 400 Abbildungen sowie 21 Tafeln und Karten.

Preis brosch. M. 18.—, elegant in Ganzleinen gebd. M. 20.—



„Allgem. Zeitung, München“: ... So ist eine Reisebeschreibung entstanden, die sich in ihrer besonderen Art der Darstellung durchaus nicht an bestimmte Vorbilder anschließt .... eine Reisebeschreibung, die so recht ein Volksbuch im schönsten und reinsten Sinne dieses Wortes zu werden verspricht.

„Nationalzeitung, Berlin“: Deutscher Gewissenhaftigkeit und deutschem Forschungseifer stellt das Buch ein lebendiges Zeugnis aus.

„Frankfurter Intelligenzblatt“: Eine Welt voll ungeahnter Majestät erschließt uns der Verfasser in seinem Buche.

„Tägl. Rundschau, Berlin“: ... Alles in allem ein prächtiges Buch. Wenn je ein Reisewerk das Zeug dazu gehabt hat, ein Lieblingsbuch des deutschen Volkes zu werden, so ist es dieses! — ...

Verlag von Georg Reimer in Berlin W. 35.

GEORG REIMER  BERLIN W. 35.

VERLAGSBUCHHANDLUNG LÜTZOWSTRASSE 107-8.

SOEBEN ERSCHIEN:

ASTROMETRIE

ODER

DIE LEHRE VON DER ORTSBESTIMMUNG IM HIMMELSRAUME

ZUGLEICH ALS GRUNDLAGE ALLER ZEIT- UND RAUMMESSUNG

VON

Dr. WILHELM FOERSTER

PROFESSOR DER ASTRONOMIE AN DER UNIVERSITÄT ZU BERLIN.

ERSTES HEFT

DIE SPHÄRIK UND DIE KOORDINATENSYSTEME, SOWIE DIE BEZEICHNUNGEN UND DIE SPHÄRISCHEN KOORDINATENMESSUNGEN.

PREIS BROSCHIERT M. 4.—.

BEZIEHUNGEN

DES

DU BOIS-REYMONDSCHEN MITTELWERTSATZES

ZUR

OVALTHEORIE

EINE MATHEMATISCHE STUDIE

VON

HERMANN BRUNN

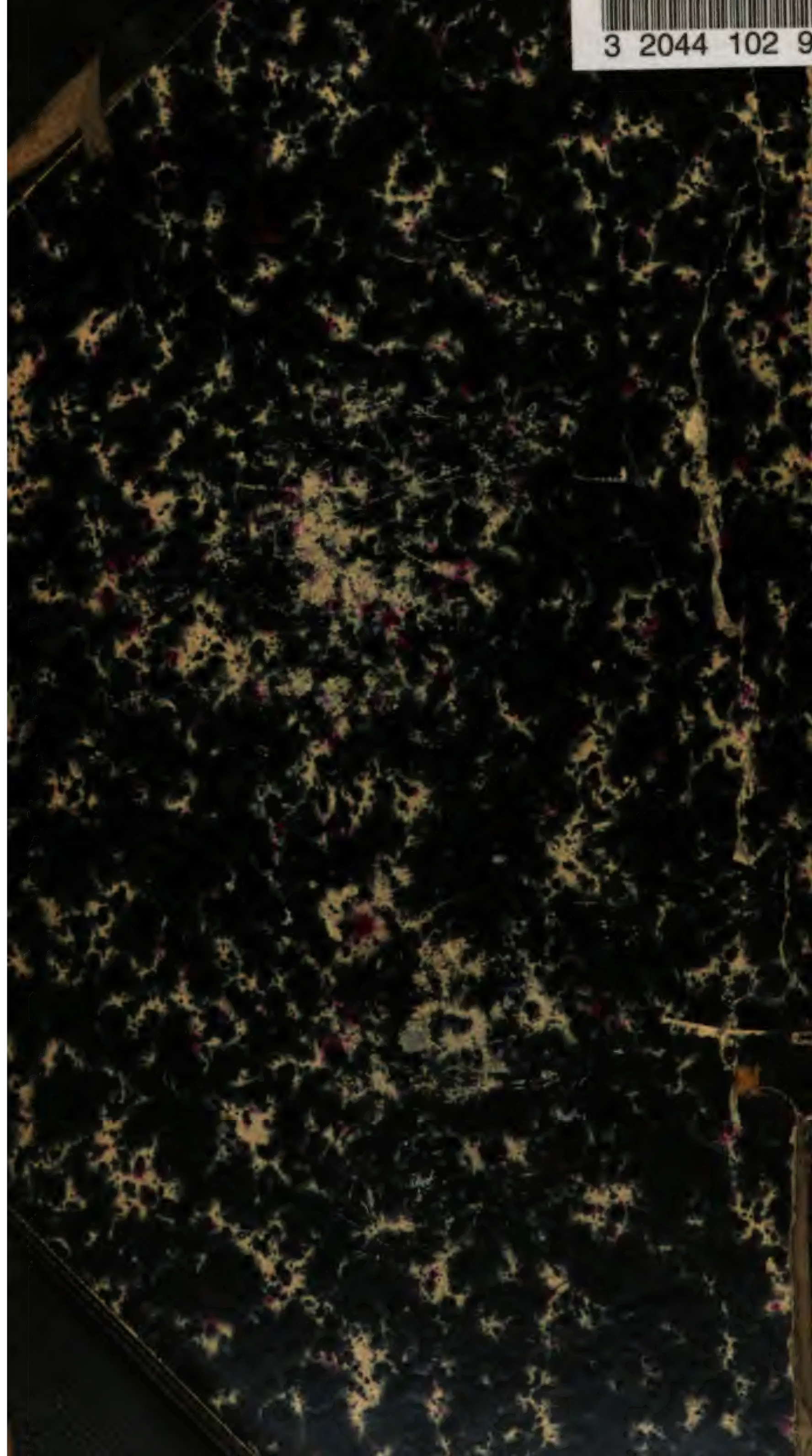
PRIVATDOZENT AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN.

PREIS BROSCHIERT M. 7.—.

═ ZU BEZIEHEN DURCH ALLE BUCHHANDLUNGEN. ═



JAN 11 1912


3 2044 102 9